

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра общей математики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_ Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Теория массового обслуживания и статистическое моделирование**

Направление подготовки (специальности)  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 24.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Цель 1 – способность выявлять и исследовать математические модели, относящиеся к теории массового обслуживания, в конкретных практических ситуациях с учётом возможностей современных информационных технологий, программирования и компьютерной техники.

Цель 2 – способность создавать и анализировать новые аналитические и имитационные модели в теории массового обслуживания.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений. Для её успешного освоения необходимы знания и умения, приобретённые в результате изучения математического анализа, дифференциальных уравнений, теории вероятностей, технологии программирования. Курс «Теория массового обслуживания и статистическое моделирование» должен служить формированию у обучающегося общего взгляда на математику как на единую науку, различные части которой взаимосвязаны логически и интегрировано применяются при решении практических задач. Полученные в курсе «Теория массового обслуживания и статистическое моделирование» знания необходимы для продолжения обучения в магистратуре по направлению Математика и компьютерные науки.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретение следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-3</b> Способен создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках, промышленности и бизнесе, с учетом возможностей современных информационных технологий и программирования и компьютерной техники	<b>И-ПК-3.1</b> Знает основные методы проектирования и производства программного продукта, принципы построения, структуры и приемы работы с инструментальными средствами, поддерживающими создание программных продуктов и программных комплексов, их сопровождения, администрирования и развития (эволюции).	<b>Знать:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- общую характеристику задач теории массового обслуживания;</li><li>- системы опирающиеся на процессы гибели и размножения;</li><li>- свойства и характеристики входных потоков;</li><li>- распределение Эрланга;</li><li>- системы, описываемые процессами гибели и размножения в стационарном режиме;</li><li>- примеры простейших систем массового обслуживания;</li><li>- основные приёмы статистического и имитационного моделирования.</li></ul>
	<b>И-ПК-3.2</b>	<b>Уметь:</b>

	Умеет использовать методы проектирования и производства программного продукта, принципы построения, структуры и приемы работы с инструментальными средствами, поддерживающими создание программного продукта	- использовать приёмы аналитического и имитационного моделирования, описывая работу основных типов систем массового обслуживания; - использовать приёмы анализа работы систем аналитическими и статистическими средствами.
	<b>И-ПК-3.3</b> Имеет практический опыт применения указанных выше методов и технологий	<b>Владеть:</b> приемами построения имитационных моделей систем массового обслуживания на компьютере с использованием современных объектно-ориентированных языков, навыками тестирования программ, навыками анализа работы СМО при разных входных условиях.

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **3** зачетные единицы, **108** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Вводная лекция. Общая характеристика задач теории массового обслуживания	8	1					1	Задания для самостоятельной работы
2	Временная диаграмма СМО. Формула Литтла	8	1	1				1	Задания для самостоятельной работы
3	Процессы гибели и размножения	8	1	1				2	Задания для самостоятельной работы. Самостоятельная работа №1.
4	Процесс чистого размножения	8	1					1	Задания для самостоятельной работы
5	Применение процесса гибели и размножения к различным СМО	8	1	1		1		4	Практическая работа №1
6	Входящий поток заявок и	8	1					2	Задания для

	его свойства								самостоятельной работы
7	Основные характеристики пуассоновского потока	8	1	1				2	Задания для самостоятельной работы
8	Распределение Эрланга	8	1					1	Задания для самостоятельной работы
9	СМО в стационарном режиме	8	1	2		1		4	Практическая работа №2
10	Классическая СМО: М/М/1. Имитационное моделирование системы.	8	1	2				2	Задания для самостоятельной работы
11	Система М/М/∞	8	1	1				1	Задания для самостоятельной работы
12	Система М/М/п	8	1	1		1		5	Задания для самостоятельной работы Практическая работа №3.
13	Система М/М/1/V	8	1	1				1	Задания для самостоятельной работы
14	Система М/М/п с n обслуживающими приборами и с потерями	8	1	1				1	Задания для самостоятельной работы
15	Системы М/М/1/∞/m, М/М/∞/∞/m, М/М/n/V/m	8	1	1				1	Задания для самостоятельной работы
16	Имитационное и статистическое моделирование СМО	8	1	3		1		7	Практическая работа №4.
						2	0,5	33,5	Экзамен
	<b>ИТОГО</b>		<b>16</b>	<b>16</b>		<b>6</b>	<b>0,5</b>	<b>69,5</b>	

#### Содержание разделов дисциплины:

##### **Раздел 1. Вводная лекция. Общая характеристика задач теории массового обслуживания.**

История возникновения ТМО, основные понятия, примеры, типы СМО, дисциплины очереди, основные характеристики СМО, задачи ТМО.

##### **Раздел 2. Временная диаграмма СМО. Формула Литтла.**

##### **Раздел 3. Процессы гибели и размножения.**

Вывод системы дифференциальных уравнений, описывающих работу СМО. Диаграмма интенсивностей переходов.

##### **Раздел 4. Процесс чистого размножения.**

Процесс чистого размножения в частном и общем случаях.

##### **Раздел 5. Применение процесса гибели и размножения к различным СМО.**

Виды системы уравнений для процесса гибели и размножения применительно к различным системам массового обслуживания (с потерями, с ожиданием, замкнутая система).

##### **Раздел 6. Входящий поток заявок и его свойства.**

Свойства: стационарность, ординарность, отсутствие последствия.

##### **Раздел 7. Основные характеристики пуассоновского потока.**

Основные характеристики пуассоновского потока: математическое ожидание, дисперсия. Показательное распределение промежутков времени между поступлениями соседних заявок.

##### **Раздел 8. Распределение Эрланга**

##### **Раздел 9. Системы, описываемые процессами гибели и размножения, в стационарном режиме.**

Вывод формул для вероятностей состояний СМО.

##### **Раздел 10. Классическая СМО: М/М/1.**

Описание системы, вывод формул для: вероятностей состояний, средних характеристик, построение графиков, исследование зависимостей величин. Имитационное моделирование системы  $M/M/1$ , вычисление средних характеристик.

#### **Раздел 11. Система $M/M/\infty$ .**

Описание системы, вывод формул.

#### **Раздел 12. Система $M/M/n$ .**

Описание системы, вывод формул, анализ работы СМО.

#### **Раздел 13. Система $M/M/1/V$ .**

Описание системы, вывод формул.

#### **Раздел 14. Система $M/M/n$ с $n$ обслуживающими приборами и с потерями.**

Описание системы, вывод формул.

#### **Раздел 15. Системы $M/M/1/\infty/m$ , $M/M/\infty/\infty/m$ , $M/M/n/V/m$ .**

Описание систем, вывод формул.

#### **Раздел 16. Имитационное и статистическое моделирование систем массового обслуживания.**

Проблемы моделирования, схема моделирующего алгоритма работы СМО, генерирование значений случайной величины с заданным законом распределения. Нюансы имитационного моделирования и тестирования программ, приёмы статистического моделирования. Приёмы анализа работы системы массового обслуживания.

### **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

### **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:  
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

#### **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»  
<https://www.studentlibrary.ru>

#### **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

##### **а) основная литература**

1. Кузнецова В. А., Никулина Е.В. Введение в теорию массового обслуживания. Текст лекций, Ярославль, 2005. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20050290.pdf>
2. Никулина Е. В. Теория массового обслуживания: практикум - Ярославль: ЯрГУ, 2017.

##### **б) дополнительная литература**

1. В. В. Рыков, Д. В. Козырев Основы теории массового обслуживания: основной курс: марковские модели, методы марковизации: учеб. пособие для вузов - М., ИНФРА-М, 2017
2. Карташевский В. Г. Основы теории массового обслуживания: учебник для вузов - Москва: Горячая линия - Телеком, 2013.  
<https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN9785991203463-SCN0000/000.html>

#### **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

**Автор(ы):**

Доцент кафедры общей математики

Никулина Е.В.

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Теория массового обслуживания и статистическое моделирование»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**Задания для самостоятельной работы**

*(данные задания выполняются студентом самостоятельно  
и проверяются преподавателем в обязательном порядке в начале практического занятия,  
но не оцениваются)*

**Задания по теме № 1 «Общая характеристика задач теории массового обслуживания»:**

Упражнения 1-3, стр.7-8. Кузнецова В.А., Никулина Е.В. Введение в теорию массового обслуживания/ Текст лекций, Ярославль, 2005, 59 стр. (+<http://www.lib.uniyar.ac.ru>)

**Задания по теме № 2 «Временная диаграмма СМО. Формула Литтла»:**

Упражнения 1-5, стр.11. Кузнецова В.А., Никулина Е.В. Введение в теорию массового обслуживания/ Текст лекций, Ярославль, 2005, 59 стр. (+<http://www.lib.uniyar.ac.ru>)

**Задания по теме № 3 «Процессы гибели и размножения»**

Упражнения 1-3, стр.13. Кузнецова В.А., Никулина Е.В. Введение в теорию массового обслуживания/ Текст лекций, Ярославль, 2005, 59 стр. (+<http://www.lib.uniyar.ac.ru>).

**Задания по теме № 4 «Процесс чистого размножения»**

Упражнения 1-2, стр.16. Кузнецова В.А., Никулина Е.В. Введение в теорию массового обслуживания/ Текст лекций, Ярославль, 2005, 59 стр. (+<http://www.lib.uniyar.ac.ru>)

**Задания по теме № 6 «Входящий поток заявок и его свойства»**

Упражнения 1-5, стр.24. Кузнецова В.А., Никулина Е.В. Введение в теорию массового обслуживания/ Текст лекций, Ярославль, 2005, 59 стр. (+<http://www.lib.uniyar.ac.ru>)

**Задания по теме № 7 «Основные характеристики пуассоновского потока»**

Упражнения 1-3, стр.27-28. Кузнецова В.А., Никулина Е.В. Введение в теорию массового обслуживания/ Текст лекций, Ярославль, 2005, 59 стр. (+<http://www.lib.uniyar.ac.ru>)

**Задания по теме № 8 «Распределение Эрланга»**

Упражнения 1-3, стр.31. Кузнецова В.А., Никулина Е.В. Введение в теорию массового обслуживания/ Текст лекций, Ярославль, 2005, 59 стр. (+<http://www.lib.uniyar.ac.ru>)

**Задания по теме № 10 «Классическая СМО: М/М/1»**

Упражнения 1-3, стр.40. Кузнецова В.А., Никулина Е.В. Введение в теорию массового обслуживания/ Текст лекций, Ярославль, 2005, 59 стр. (+<http://www.lib.uniyar.ac.ru>)

**Задания по теме № 11 «Система М/М/∞»**

Упражнения 1-2, стр.42. Кузнецова В.А., Никулина Е.В. Введение в теорию массового обслуживания/ Текст лекций, Ярославль, 2005, 59 стр. (+<http://www.lib.uniyar.ac.ru>)

**Задания по теме № 12 «Система М/М/n»**

Упражнения 1-3, стр.46. Кузнецова В.А., Никулина Е.В. Введение в теорию массового обслуживания/ Текст лекций, Ярославль, 2005, 59 стр. (+<http://www.lib.uniyar.ac.ru>)

**Задания по теме № 13 «Система М/М/1/V»**

Упражнение 1, стр.49. Кузнецова В.А., Никулина Е.В. Введение в теорию массового обслуживания/ Текст лекций, Ярославль, 2005, 59 стр. (+<http://www.lib.uniyar.ac.ru>)

**Задания по теме № 14 «Система М/М/n с n обслуживающими приборами и с потерями»**



Упражнения 1, стр.51. Кузнецова В.А., Никулина Е.В. Введение в теорию массового обслуживания/ Текст лекций, Ярославль, 2005, 59 стр. (+<http://www.lib.uniyar.ac.ru>)

**Задания по теме № 15** «Системы М/М/1/∞/m, М/М/∞/∞/m, М/М/n/V/m»

Упражнения 1, стр.54. Кузнецова В.А., Никулина Е.В. Введение в теорию массового обслуживания/ Текст лекций, Ярославль, 2005, 59 стр. (+<http://www.lib.uniyar.ac.ru>)

**Задания по теме № 16** «Статистическое моделирование СМО»: написать блок-схему имитатора системы массового обслуживания с пуассоновским входным потоком, показательным обслуживанием, неограниченной очередью, входными параметрами:  $n$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  и выходными – средняя длина очереди, среднее число занятых приборов, среднее время ожидания.

### **Самостоятельная работа №1**

*(проверка сформированности ПК-3, индикатор ИД-ПК-3.1, 3.2)*

#### **1 вариант**

Имеются две СМО. У каждой из них по два прибора с одинаковой средней производительностью - три заявки в час. Входные потоки – со средней интенсивностью три заявки в час. Одна из систем может иметь очередь, состоящую не более, чем из двух заявок, а вторая – с неограниченной очередью. Составить диаграмму интенсивностей переходов и систему дифференциальных уравнений, описывающих работу СМО.

#### **2 вариант**

Имеются две СМО. У каждой из них по четыре прибора с одинаковой средней производительностью - три заявки в час. Входные потоки – со средней интенсивностью четыре заявки в час. Одна из систем – с отказами без очередей, а вторая – с неограниченной очередью. Составить диаграмму интенсивностей переходов и систему дифференциальных уравнений, описывающих работу СМО.

### **Правила выставления оценки по результатам самостоятельной работы:**

Максимальный балл за полностью выполненное задание – 5.

4 балла студент получает, если диаграммы переходов выполнены верно, а системы дифференциальных уравнений составлены с одной ошибкой.

3 балла - диаграммы переходов выполнены верно, а в системах дифференциальных уравнений допущены две-три ошибки.

2 балла – или диаграммы переходов составлены неверно, или в системах дифференциальных уравнений допущены более трёх ошибок.

### **Практическая работа №1**

*(проверка сформированности ПК-3, индикатор ИД-ПК- 3.2)*

Практическая работа рассчитана на 4 академических часа.

Описать с помощью систем дифференциальных уравнений работу систем с потерями, удовлетворяющих условиям:

СМО 1:  $n=2$ ,  $\lambda=2$ ,  $\mu=1$ ;

СМО 2:  $n=2$ ,  $\lambda=3$ ,  $\mu=1$ ;

СМО 2:  $n=2$ ,  $\lambda=2$ ,  $\mu=2$ .

Найти вероятности всех состояний СМО, решив полученные системы. Привести примеры вопросов, касающихся работы систем, на которые можно ответить, имея выражения для вероятностей состояний.

### **Правила выставления оценки по результатам практической работы:**

Максимальный балл за полностью выполненное задание – 5.

4 – Правильно составлены системы дифференциальных уравнений, но присутствует вычислительная ошибки. Верно решены системы уравнений, но отсутствуют требуемые примеры.

3 – Правильно составлены системы дифференциальных уравнений, но присутствуют две вычислительные ошибки. Системы уравнений решены с одной вычислительной ошибкой и отсутствуют требуемые примеры.

2 – Неверно составлены системы. В решении более двух вычислительных ошибок.

## **Практическая работа №2**

*(проверка сформированности ПК-3, индикатор ИД-ПК- 3.2)*

Используя найденные в лабораторной работе №1 вероятности состояний трех систем, построить их графики на трех координатных плоскостях (своей для каждой СМО), определить приблизительно моменты времени, в которые устанавливается практически стационарный режим работы систем. Найти стационарные значения вероятностей СМО, коэффициент использования, среднее число занятых приборов, среднее число свободных приборов, вероятность потери заявки. Провести сравнительный анализ работы СМО.

### **Правила выставления оценки по результатам практической работы:**

Максимальный бал за полностью выполненное задание – 5.

4 – Отсутствие вычислительных ошибок, но не проведён сравнительный анализ. Наличие одной вычислительной ошибки в работе.

3 – Две вычислительные ошибки в работе.

2 – Более двух вычислительных ошибок.

## **Практическая работа №3**

*(проверка сформированности ПК-3, индикатор ИД-ПК-3.1, 3.2)*

В мастерской по ремонту часов есть  $n$  мастеров, работающих с одинаковой производительностью. В течение семичасового рабочего дня от населения в среднем поступает на ремонт 30 часов, причем каждый мастер за один рабочий день ремонтирует в среднем 10 часов. Рассматриваемый поток требований будем считать пуассоновским с параметром  $\lambda=30$ . Время ремонта подавляющей части часов невелико. В капитальном ремонте часы нуждаются сравнительно редко, т.е. предполагается, что обслуживание подчиняется показательному закону с параметром  $\mu=10$  штук в рабочий день. Проанализировать работу мастерской с точки зрения теории массового обслуживания.

### **Правила выставления оценки по результатам практической работы:**

Максимальный бал за полностью выполненное задание – 5.

4 – Решение задачи при  $n=4$  и  $n=5$ , отсутствует анализ. Решение задачи при  $n=4$  и  $n=5$  с одной вычислительной ошибкой, присутствует анализ.

3 – Решение задачи только при  $n=4$  или решение задачи при  $n=4$  и  $n=5$  с двумя-тремя вычислительными ошибками, присутствует сравнение.

2 – Задача решена с более чем тремя вычислительными ошибками.

## **Практическая работа №4**

*(проверка сформированности ПК-3, индикатор ИД-ПК-3.3)*

Написание программы на любом выбранном студентом объектно-ориентированном языке программирования, имитирующей работу системы М/М/1.

Входные параметры:  $\lambda$ ,  $\mu$ .

Выходные: среднее число заявок в СМО; среднее число заявок в очереди; среднее число занятых, свободных приборов; среднее время, проведенное заявкой в системе, в очереди.

Найти значения выходных параметров в двух случаях:  $\lambda=1$ ,  $\mu=3$  и  $\lambda=2$ ,  $\mu=3$ . Сравнить полученные значения с соответствующими стационарными и друг с другом, сделать вывод.

### **Правила выставления оценки по результатам практической работы:**

Максимальный бал за полностью выполненное задание – 5.

4 – Программа работает верно, допущены ошибки в анализе или он является неполным. Анализ является полным, но тестирование работы программы проведено неполностью или с ошибкой.

3 – Программа работает верно, но есть ошибки при вычислении стационарных значений характеристик. Программа работает верно, стационарные значения найдены верно, но отсутствуют навыки тестирования и анализа.

2 – Программа работает неверно.

## **2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

### **Билеты к экзамену:**

#### **Билет 1**

1. Система с двумя приборами одинаковой средней производительности, равной 2 заявкам в час, с входным пуассоновским потоком со средней интенсивностью, равной 1 заявке в час. Количество заявок в очереди не может быть больше двух. Найти следующие характеристики:

- а) среднее время ожидания;
- б) вероятность того, что заявке не придётся ждать начала обслуживания (т.е. она сразу поступает на прибор).

Режим стационарный.

- 2. Формула Литтла.
- 3. Имитационное моделирование.

#### **Билет 2**

1. Имеются 4 установки, которые при поломке могут ремонтироваться любой из двух бригад, имеющих одинаковую среднюю производительность, равную двум установкам за неделю. В среднем за 6 недель выходит из строя одна установка. Какова вероятность того, что:

- а) все четыре установки работают;
- б) вышли из строя ровно три установки.

Режим стационарный.

- 3. Процессы гибели и размножения
- 4. Имитационное моделирование.

#### **Билет 3**

1. Имеются две системы, работающие в стационарном режиме. Каждая имеет пуассоновский входной поток со средней интенсивностью, равной 2 заявкам в минуту. В каждой системе имеются по два прибора с одинаковой средней производительностью, равной 2 заявкам в минуту. В первой системе очередь не может превышать 2 заявок, а во второй объём накопителя равен нулю (очереди быть не должно). Для каждой системы найти вероятность того, что в системе будет не менее двух заявок. Сравнить эти результаты и попытаться их объяснить.

- 2. Процесс чистого размножения
- 3. Имитационное моделирование.

#### **Билет 4**

1. Система с двумя приборами одинаковой средней производительности, равной 2 заявкам в минуту, с входным пуассоновским потоком со средней интенсивностью, равной 1 заявке в минуту. Количество заявок в очереди не может быть больше двух. Найти следующие характеристики:

- а) вероятность того, что заявке придётся ждать начала обслуживания;
- б) математическое ожидание числа заявок в системе;
- в) среднюю длину очереди.

Режим стационарный.

- 2. Входящий поток заявок и его свойства. Основные характеристики пуассоновского потока.
- 3. Имитационное моделирование.

#### **Билет 5**

1. Имеются две системы. У каждой по два прибора с одинаковой средней производительностью, равной трём заявкам в час. Входные потоки пуассоновские со средней интенсивностью четыре заявки в час. Режим стационарный. Одна из систем - с отказами без очереди, а вторая может иметь в очереди не более двух заявок. Требуется найти среднее время пребывания заявки в каждой системе. Результаты сравнить и попытаться объяснить.

- 2. Распределение Эрланга
- 3. Имитационное моделирование.

### Билет 6

1. Система с тремя приборами одинаковой средней производительности, равной 2 заявкам в час, с входным пуассоновским потоком со средней интенсивностью, равной 1 заявке в час. Количество заявок в очереди не может быть больше одной. Найти следующие характеристики:

- а) среднее время ожидания;
- б) вероятность того, что заявке придётся ждать начала обслуживания.

Режим стационарный.

- 2. СМО в стационарном режиме
- 3. Имитационное моделирование.

### Билет 7

1. Имеются 5 установок, которые при поломке могут ремонтироваться любой из трех бригад, имеющих одинаковую среднюю производительность, равную одной установке за неделю. В среднем за 4 недели выходит из строя одна установка. Какова вероятность того, что:

- а) все установки работают;
- б) ни одна установка не работает.

Режим стационарный.

- 3. Классическая СМО:  $M/M/1$
- 4. Имитационное моделирование.

### Билет 8

1. Имеются две системы, работающие в стационарном режиме. Каждая имеет пуассоновский входной поток со средней интенсивностью, равной 3 заявкам в минуту. В каждой системе имеются по два прибора с одинаковой средней производительностью, равной 2 заявкам в минуту. В первой системе очередь не может превышать 2 заявок, а во второй объём накопителя равен нулю. Для каждой системы найти вероятность того, что заявке будет отказано в обслуживании. Сравнить эти результаты и попытаться их объяснить.

2. Системы  $M/M/1/\infty/m$ ,  $M/M/\infty/\infty/m$ ,  $M/M/n/V/m$

- 3. Имитационное моделирование.

### Билет 9

1. Система с двумя приборами одинаковой средней производительности, равной 3 заявкам в минуту, с входным пуассоновским потоком со средней интенсивностью, равной 1 заявке в минуту. Количество заявок в очереди не может быть больше двух. Найти следующие характеристики:

- а) вероятность того, что заявке не придётся ждать начала обслуживания;
- б) математическое ожидание числа занятых приборов;
- в) среднюю длину очереди.

Режим стационарный.

- 2. Система  $M/M/n$  с  $n$  обслуживающими приборами и с потерями
- 3. Имитационное моделирование.

### Билет 10

1. Имеются две системы. У каждой по два прибора с одинаковой средней производительностью, равной трём заявкам в час. Входные потоки пуассоновские со средней интенсивностью четыре заявки в час. Режим стационарный. Одна из систем - с отказами без очереди, а вторая может иметь в очереди не более одной заявки. Требуется найти вероятность того, что заявке не будет отказано в обслуживании. Результаты сравнить и попытаться объяснить.

2. Системы  $M/M/\infty$  и  $M/M/1/V$

- 3. Имитационное моделирование.

### 3. Правила выставления оценки по результатам экзамена:

В экзаменационный билет включаются два теоретических вопроса и одна задача. На подготовку к ответу дается не менее 1 часа.

По итогам экзамена выставляется одна из оценок: «отлично» (5 – в баллах), «хорошо» (4 – в баллах), «удовлетворительно» (3 – в баллах) или «неудовлетворительно» (2 – в баллах). Наличие вычислительной ошибки при решении задачи понижает отметку на 1 балл.

**Оценка «Отлично»** выставляется студенту, который верно решил задачу и демонстрирует глубокое и полное владение содержанием материала и понятийным аппаратом теории массового обслуживания; осуществляет межпредметные связи; приводит практические примеры, умеет связывать теорию с практикой. Студент дает развернутые, полные и четкие ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, соблюдает логическую последовательность при изложении материала. Грамотно использует терминологию теории массового обслуживания.

**Оценка «Хорошо»** выставляется студенту, который решил задачу и ответ которого на экзамене в целом соответствуют указанным выше критериям, но отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой. В ответе или в решении задачи имеют место отдельные неточности (или одна вычислительная ошибка в задаче), которые исправляются самим студентом после дополнительных и (или) уточняющих вопросов экзаменатора.

**Оценка «Удовлетворительно»** выставляется студенту, который дает недостаточно полные и последовательные ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, но при этом демонстрирует умение выделить существенные и несущественные признаки и установить причинно-следственные связи. Ответы излагаются в терминах теории массового обслуживания, но при этом допускаются ошибки в определении и раскрытии некоторых основных понятий, формулировке положений, которые студент затрудняется исправить самостоятельно. При аргументации ответа студент не обосновывает свои суждения. На часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы, задача решена с погрешностями.

**Оценка «Неудовлетворительно»** выставляется студенту, который не решил задачу или при устном ответе демонстрирует разрозненные, бессистемные знания; беспорядочно и неуверенно излагает материал; не умеет выделять главное и второстепенное, не умеет соединять теоретические положения с практикой, не устанавливает межпредметные связи; допускает грубые ошибки при определении сущности раскрываемых понятий, явлений, вследствие непонимания их существенных и несущественных признаков и связей; дает неполные ответы, логика и последовательность изложения которых имеют существенные и принципиальные нарушения, в ответах отсутствуют выводы. Дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора не приводят к коррекции ответов студента. На основную часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется также студенту, который взял экзаменационный билет, но отвечать отказался.

## **Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Теория массового обслуживания и статистическое моделирование»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Курс «Теория массового обслуживания и статистическое моделирование» читается в 8-м семестре, после того как студенты закончили изучение следующих дисциплин: теория вероятностей, дифференциальные уравнения, математический анализ, программирование, поэтому предлагаемый к изучению материал должен являться доступным и понятным. При изучении обсуждаемого курса можно проследить взаимосвязь теории вероятностей с дифференциальными уравнениями, математическим анализом, информатикой, ознакомиться с областями применения методов математического моделирования для изучения различных процессов действительности.

Теорию массового обслуживания отчасти можно считать практическим приложением теории вероятностей случайных величин, поскольку основными понятиями, которыми она оперирует, являются:

- Дискретная случайная величина (в частности, число заявок в системе). Здесь акцент делается на изучение случайной величины, подчиненной пуассоновскому закону распределения, а именно рассматривается так называемый пуассоновский входной поток, обладающий свойствами: стационарности, без последствия, ординарности.

- Непрерывные случайные величины: промежуток времени между соседними заявками и длительность обслуживания одной заявки. Как один из основных, рассматривается показательный закон распределения случайных величин, поскольку если входной поток пуассоновский, то случайная величина - промежуток времени между соседними заявками имеет показательное распределение. Что касается времени обслуживания заявки, то оказывается, что пропускная способность системы сравнительно мало зависит от закона распределения времени обслуживания, а зависит, главным образом, от так называемого коэффициента использования системы, т.е. отношения среднего числа заявок, поступающих в систему в единицу времени, к среднему числу обслуживаемых ею в единицу времени. В ТМО часто пользуются допущением, что время обслуживания распределено по показательному закону, поскольку это позволит упростить математический аппарат.

- Математическое ожидание и дисперсия случайной величины. К показателям эффективности работы СМО относятся, например, математическое ожидание и дисперсия числа заявок в системе, числа занятых приборов, числа заявок в очереди, времени пребывания в системе и т.п. Для каждого изучаемого конкретного вида СМО в общем виде выводятся соответствующие формулы. Зачастую они очень громоздки, но в процессе их вывода изучаются методы, которые будут использоваться при решении конкретных задач.

- Функция распределения и плотность распределения случайной величины. Эти понятия рассматриваются для различных непрерывных случайных величин.

При решении частных задач теории массового обслуживания и выводе общих положений требуется умение решать дифференциальные уравнения и их системы. Это объясняется тем, что огромный класс систем массового обслуживания можно изучить с помощью так называемого процесса гибели и размножения, который в случае работы СМО не в стационарном режиме, описывается системой дифференциальных уравнений: используется умение решать однородные и неоднородные системы относительно вероятностей состояний СМО.

Теория массового обслуживания использует понятия и методы математического анализа. А именно:

- исследование функций и построение их графиков, необходимых для изучения зависимостей между различными характеристиками СМО;
- вычисление интегралов, в частности несобственных, при нахождении математического ожидания и дисперсии случайных величин;
- исследование числовых рядов на сходимость и поиск их суммы при нахождении показателей эффективности СМО с неограниченной очередью.

Для успешного освоения дисциплины необходимо решать как можно больше задач, выполняя домашние задания и практические работы. Тексты задач, решаемых на практических занятиях, содержатся в практикуме автора по теории массового обслуживания, а задач, предлагаемых для самостоятельной работы, в тексте лекций автора. Практические работы достаточно трудоемки и могут вызвать особые трудности у студентов, пропускавших лекции. Выполнению практических работ уделяется особое внимание, так как именно они помогают осознать практическую значимость решаемых в курсе задач.

Курс заканчивается экзаменом, который принимается по билетам, включающим два теоретических вопроса и одну задачу.