

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра общей математики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Сплайны в вычислительной математике**

Направление подготовки (специальности)  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 24.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Целью преподавания дисциплины является ознакомление слушателей с основными понятиями, результатами и методами теории сплайнов и демонстрация того, как методы теории сплайнов могут быть использованы для приближения функций, для решения интегральных и дифференциальных уравнений, при сжатии и восстановлении численной информации.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной. Для освоения данной дисциплины студентам нужны знания из курсов математический анализ, линейная алгебра, аналитическая геометрия. Знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплины «Сплайны в вычислительной математике», используются студентами в процессе изучения специальных дисциплин, а также в ходе выполнения курсовых и выпускных квалификационных работ.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

| Формируемая компетенция<br>(код и формулировка)   | Индикатор достижения компетенции<br>(код и формулировка)   | Перечень планируемых результатов обучения  |
|---|--|--|
| <b>Профессиональные компетенции</b>   |  |  |
| <b>ПК-3</b><br>Способен создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках, промышленности и бизнесе, с учетом возможностей современных информационных технологий и программирования и компьютерной техники. | <b>И-ПК-3.1</b><br>Знает основные методы проектирования и производства программного продукта, принципы построения, структуры и приемы работы с инструментальными средствами, поддерживающими создание программных продуктов и программных комплексов, их сопровождения, администрирования и развития (эволюции). | <b>Знать:</b><br>- основные понятия теории сплайнов;<br>- методы решения важнейших задач.<br><br><b>Уметь:</b><br>- строго доказывать утверждение;<br>- четко сформулировать результат;<br>- увидеть следствия полученного результата. |
|   | <b>И-ПК-3.2</b><br>Умеет использовать методы проектирования и производства программного продукта, принципы построения,   | <b>Уметь:</b><br>- реализовывать основные способы и алгоритмы решения задач;<br>- применять понятия, результаты и методы теории сплайнов в других разделах математики.   |

|  |  |   |
|--|--|---|
|  | структуры и приемы работы с инструментальными средствами, поддерживающими создание программного продукта | <b>Владеть навыками:</b><br>– математическим аппаратом теории сплайнов;<br>- нахождения интерполяционных параболических и кубических сплайнов;<br>- нахождения сплайнов со свободными узлами. |
|--|--|---|

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **2** зачетных единиц, **72** акад. часа.

| №<br>п/п | Темы (разделы)<br>дисциплины,<br>их содержание               | Семестр | Виды учебных занятий,<br>включая самостоятельную<br>работу студентов,<br>и их трудоемкость<br>(в академических часах) |              |              |              |                             |      | Формы текущего<br>контроля успеваемости<br><br>Форма промежуточной<br>аттестации<br>(по семестрам) |
|----------|--|---------|---|--------------|--------------|--------------|-----------------------------|------|--|
|          |  |         | Контактная работа   |              |              |              |                             |      |  |
|          |  |         | лекции  | практические | лабораторные | консультации | аттестационные<br>испытания |      |  |
| 1        | Многочленная интерполяция                                    | 7       | 1   | 1            |              |              |                             | 3    |  |
| 2        | Кусочно-линейная аппроксимация                               | 7       | 2   | 2            |              |              |                             | 4    | контрольная работа №1  |
| 3        | Параболические и кубические сплайны                          | 7       | 3   | 3            |              | 1            |                             | 5    | контрольная работа №2  |
| 4        | В-сплайны и их применение                                    | 7       | 3   | 3            |              | 1            |                             | 4    | Контрольная работа №3  |
| 5        | Алгоритм склейки   | 7       | 1   | 1            |              |              |                             | 4    | контрольная работа №4  |
| 6        | Симплекс метод для построения сплайна наилучшего приближения | 7       | 1   | 1            |              | 1            |                             | 4    |  |
| 7        | Алгоритмы адаптивной аппроксимации                           | 7       | 3   | 3            |              |              |                             | 4    | контрольная работа №5  |
| 8        | Сплайны нескольких переменных                                | 7       | 1   | 1            |              | 1            |                             | 2    |  |
| 9        | Примеры применения сплайнов                                  | 7       | 1   | 1            |              |              |                             | 2    |  |
|          |  |         |   |              |              |              | 0,3                         | 3,7  | зачет  |
|          | Всего  |         | 16  | 16           |              | 4            | 0,3                         | 35,7 |  |

## **Содержание разделов дисциплины:**

### **Тема 1. Многочленная интерполяция.**

Форма Лагранжа. Кратная интерполяция. Вычисление формы Ньютона. Другие формы многочленов и число обусловленности. Ограничения многочленной аппроксимации.

### **Тема 2. Кусочно-линейная аппроксимация.**

Интерполяция ломаной линей. Аппроксимация ломаной по методу наименьших квадратов. Выбор узлов ломаной.

### **Тема 3. Параболические и кубические сплайны.**

Интерполяция кубическими сплайнами Эрмита. Интерполяция кубическими сплайнами Бесселя. Интерполяция методом Акимы. Интерполяция сплайнами дефекта один. Выбор граничных условий. Недостатки интерполяции параболическими сплайнами.

### **Тема 4. В-сплайны.**

Пространство сплайнов. Рекуррентная формула для вычисления В-сплайнов. Применение В-сплайнов в численном интегрировании и дифференцировании.

### **Тема 5. Алгоритмы склейки.**

Кусочно-полиномиальная аппроксимация. Замена приближения кусочно-полиномиальными функциями гладкими сплайнами с сохранением скорости приближения. Квазиинтерполяционный оператор К. де Бора.

### **Тема 6. Симплекс метод для построения сплайна наилучшего приближения.**

Сведение задачи наилучшего приближения к задаче линейного программирования. Трудоемкость метода.

### **Тема 7. Алгоритмы адаптивной аппроксимации.**

Адаптивная аппроксимация как способ приближения, учитывающий особенности приближаемой функции. Преимущества адаптивной аппроксимации перед аппроксимацией с заранее выбранными узлами. Аппроксимация квазиинтерполянт. Алгоритм, использующий разложение по В-сплайнам.

### **Тема 8. Сплайны нескольких переменных.**

Сплайны на прямоугольных сетках. Сплайны нескольких переменных на треугольных сетках. Сглаживание экспериментальных данных.

### **Тема 9. Примеры применения сплайнов.**

Аппроксимация и задача навигации по геофизическим полям. Аппроксимация координат точки падения центра масс. Простейшие способы аппроксимации плоских кривых, заданных набором точек. Восстановление информации по географическим данным. Сжатие и восстановление изображения.

## **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

#### **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В образовательном процессе по дисциплине используются:  
для формирования материалов для контроля успеваемости и проведения аттестации:

- программы Microsoft Office и свободные аналоги;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

#### **7. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

- В процессе осуществления образовательного процесса используются:
- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
  - Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
  - Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
  - Электронная библиотечная система «Консультант студента»  
<https://www.studentlibrary.ru>

#### **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

##### **а) основная литература**

1. Брудный Ю.А. Теория приближения. Ярославль, 1981.
2. Брудный Ю.А., Шалашов В.К. Теория сплайнов. Ярославль, 1983. 90 с.
3. Иродова И.П. Алгоритмы теории приближения. Учебно-методическое пособие. - Ярославль, ЯрГУ, 2019. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20190202.pdf>

##### **б) дополнительная литература**

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. - М.: «Наука», 1965.
2. Брудный Ю.А., Иродова И.П. Прикладная теория приближения. Ярославль, 1986.
3. Невский М. В., Иродова И. П. Некоторые вопросы теории приближения функций. Ярославль, 1999. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/19990230.pdf>
4. Бор К. де Практическое руководство по сплайнам. / К. де Бор; пер. с англ. В. К. Галицкого, С. А. Шестакова; под ред. В. И. Скурихина - М.: Радио и связь, 1985. - 303 с.
5. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. - М., 1980.

6. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: «Наука», 1983.
7. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: «Наука», 1977.
8. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Сплайн-аппроксимация функций. М.: Высш. шк., 1983.
9. Малоземов В.Н., Певный А.Б. Полиномиальные сплайны. Л.: изд. Ленингр. ун-та, 1986.
10. Квасов Б. И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2006. <https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/5-9221-0733-X-SCN0000/000.html>

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

### **Автор:**

Профессор кафедры общей математики, доктор физ.-мат. наук

И.П. Иродова

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Сплайны в вычислительной математике»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

**Контрольные работы.**

**Темы контрольных работ:**

- 1) приближение ломаной по методу наименьших квадратов.
- 2) приближение интерполяционными параболическими и кубическими сплайнами.
- 3) приближение функций с помощью алгоритма склейки.
- 4) Алгоритмы адаптивной аппроксимации.
- 5) приближение функций с помощью В-сплайнов

**Контрольная работа № 1**

Используя метод наименьших квадратов, приблизить функцию  $f(x)$  ломаной, подчиненной разбиению  $\Delta$

1.  $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$ ,  $\Delta: 0 < \frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1$ ,  $k = 3$ ;
2.  $f(x) = \sin^2 x$ ,  $\Delta: 0 < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ ,  $k = 2$ ;
3.  $f(x) = \ln x$ ,  $\Delta: 1 < 2 < 3 < 4$ ,  $k = 1$ .

**Контрольная работа № 2**

Приблизить функцию  $f(x)$  параболическим и кубическим интерполяционным сплайном, подчиненным разбиению  $\Delta$ . Сравнить погрешности приближений.

- а)  $f(x) = |x| + x^2 + x$ ,  $x \in [-1, 3]$ ,  $\Delta = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ .
- б)  $f(x) = |x - 1| + 2x + 1$ ,  $x \in [0, 4]$ ,  $\Delta = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

**Контрольная работа № 3**

На примере функции  $f(x)$  объяснить алгоритм склейки.

- а)  $f(x) = |x| + x + 3$ .
- б)  $f(x) = x^2 + |x - 3|$ .

**Контрольная работа № 4**

Используя алгоритм К. де Бора, построить для функции  $f(x)$ , заданной на отрезке  $[a, b]$ , сплайн первой степени

- а)  $f(x) = \sqrt{x + 1}$ ,  $[a, b] = [-1, 3]$ .
- б)  $f(x) = x + \sqrt{x}$ ,  $[a, b] = [0, 4]$ .

**Контрольная работа № 5**

Применить алгоритм, использующий разложение функции по В-сплайнам, для приближения функции  $f(x)$ , заданной на отрезке  $[a, b]$ .

а)  $f(x) = \sqrt{x+1}$ ,  $[a, b] = [-1, 3]$ .

б)  $f(x) = x + \sqrt{x}$ ,  $[a, b] = [0, 4]$ .

### **Индивидуальные занятия:**

Написать программы по следующим темам:

1. Выбор узлов интерполяции.
2. Адаптивная аппроксимация ломаной
3. Адаптивная аппроксимация кубическим сплайном.
4. Приближение сплайнами дефекта 2.
5. Решение дифференциальных и интегральных уравнений с помощью сплайнов
6. Приближение сплайнами в гильбертовом пространстве.
7. Приближение сплайнами функций двух переменных
8. Использование сплайнов для сжатия изображений

## **2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

### **Вопросы к зачету по дисциплине "Сплаины в вычислительной математике".**

- 1) Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона. Трудоемкость их вычисления.
- 2) Кусочно-линейная аппроксимация.
- 3) Приближение параболическими сплайнами.
- 4) Приближение кубическими сплайнами дефекта один и два.
- 5) Алгоритм склейки.
- 6) Квазиинтерполяционный оператор К. де Бора.
- 7) Пространства  $P_{k\xi}$ ,  $P_{k\xi\nu}$ .
- 9)  $B$ -сплайны и их свойства
- 10) Интерполяционные кубические сплайны.
- 11) Дифференцирование  $B$ -сплайнов.
- 12) Построение сплайна наилучшего приближения по методу наименьших квадратов.
- 13) Схема локальной сплайн-аппроксимации.
- 14) Адаптивный алгоритм К. де Бора.
- 15) Симплекс метод для решения задачи наилучшего приближения



16) Алгоритм типа алгоритма Ремеза для построения сплайна наилучшего приближения.

17) Параметрическое задание сплайна.

18) Сплайны двух переменных на прямоугольной сетке.

19) Сплайны двух переменных на треугольной сетке.

20) Примеры применения сплайнов.

### **3. Правила выставления оценки на зачете.**

По окончании освоения дисциплины в конце 7-го семестра студенту выставляется оценка «зачет» или «незачтено».

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого компетенция сформирована не ниже, чем на пороговом уровне, включающего:

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Слайны в вычислительной математике»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Слайны в вычислительной математике» являются лекции. По большинству тем предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. В процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Учитывая то, что практических занятий очень мало, большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях. Предполагается, что студенты напишут не менее двух программ с использованием алгоритмов, которые были изучены.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков, в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде контрольных работы. Почти на каждом занятии проводятся небольшие самостоятельные работы. Также проводятся консультации по разбору заданий для самостоятельной работы, которые вызвали затруднения.

В конце седьмого семестра студенты сдают зачет. Зачет выставляется по итогам работы в семестре и ответам на вопросы по темам, которые были изучены. Если студенты плохо работали в течение семестра, то им нужно будет написать итоговую контрольную работу. Контрольную работу можно не писать, если будут предъявлены программы, в которых используются алгоритмы, изученные в курсе "Слайны в вычислительной математике".