

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

21 мая 2024 г.

Рабочая программа дисциплины
Теория функций комплексной переменной

Направление подготовки (специальности)
10.05.01 Компьютерная безопасность

Направленность (профиль)
«Математические методы защиты информации»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 24 апреля 2024 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 3 мая 2024 г.

1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Теория функций комплексной переменной» обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом и содействует формированию профессиональных качеств и мировоззрения специалиста в области информационной безопасности в части его математической подготовки.

Целью преподавания дисциплины является ознакомление обучающихся с основами теории функций комплексной переменной, а также подготовка студентов к изучению других дисциплин.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Общепрофессиональные компетенции		
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	И-УК-1.1 Осуществляет системный анализ задачи, выделяя ее базовые составляющие	Знать: основные понятия и результаты математики и прикладной математики Уметь: выделять главные моменты в решении задач математики и её приложений, компьютерной Владеть навыками: теоретического анализа и эффективного решения сложных задач
Общепрофессиональные компетенции		
ОПК-3 Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности	И-ОПК-3.1 Способен использовать в профессиональной деятельности аппарат и методы теории функций комплексной переменной	Знать: основные понятия, теоремы и задачи теории функций комплексного переменного Уметь: решать задачи, связанные с аналитическими функциями комплексной переменной Владеть навыками: самостоятельной работы в области теории функций комплексной переменной

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единицы, 72 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1.	Вводная лекция	4	1					1	устный опрос
2.	Комплексные числа и действия с ними	4	2	1				1	задания для самостоятельной работы, устный опрос
3.	Множества на расширенной комплексной плоскости	4	1	1				1	задания для самостоятельной работы, устный опрос
4.	Последовательности и ряды комплексных чисел	4	1	1				1	задания для самостоятельной работы, устный опрос
5.	Однозначные и многозначные функции.	4	2	1				1	задания для самостоятельной работы, устный опрос
6.	Функциональные ряды	4	1	1				1	задания для самостоятельной работы, устный опрос
7.	Степенные ряды	4	2	1				1	задания для самостоятельной работы
8.	Дифференцируемость функции комплексной переменной	4	4	2		1		1	задания для самостоятельной работы, устный опрос
9	Некоторые важные функции комплексной	4	4	2		1		1	задания для самостоятельной работы, устный опрос
10.	Интегрирование функций комплексной переменной	4	2	1		1		1	задания для самостоятельной работы
11.	Ряды Тейлора и Лорана	4	4	2				1	задания для самостоятельной работы
12.	Изолированные особые точки аналитической функции	4	4	2		1		1	задания для самостоятельной работы, устный опрос
13.	Вычеты и их приложения	4	4	1		1		3	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
							0,3	3,7	зачет
	Всего		32	16		5	0,3	18,7	

Содержание разделов дисциплины

1. Вводная лекция.

Предмет и исторические этапы теории функций комплексного переменного. Подходы Коши, Вейерштрасса и Римана к характеристике аналитической функции

2. Комплексные числа и действия с ними.

Алгебраическая и тригонометрическая формы. Модуль и аргумент. Алгебраические свойства поля \mathbb{C} . Интерпретация Римана комплексных чисел.

3. Множества на расширенной комплексной плоскости.

Открытые и замкнутые множества. Граница. Связность. Односвязные и многосвязные множества

4. Последовательности и ряды комплексных чисел.

Предел последовательности. Сумма ряда. Основные теоремы о пределах.

5. Однозначные и многозначные функции.

Предел по Коши и по Гейне. Непрерывность и равномерная непрерывность.

6. Функциональные ряды.

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда.

7. Степенные ряды.

Теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Формула Коши – Адамара. Определение функций $f(z) = ez$, $\sin z$, $\cos z$ с помощью степенных рядов, их свойства.

8. Дифференцируемость функции комплексной переменной.

Производная. Условия Коши – Римана. Аналитические функции. Аналитичность суммы степенного ряда.

Понятие о конформном отображении.

9. Некоторые важные функции комплексной переменной.

Области однолиственности функций $f(z) = z^n$, e^z . Понятие о римановой поверхности. Функции $f(z) = \sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$, $\ln z$. Дробно-линейная функция и её свойства.

10. Интегрирование функций комплексной переменной.

Определение и свойства интеграла. Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей. Интегральная формула Коши. Формула среднего значения. Принцип максимума модуля. Гармонические функции. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции. Теорема Лиувилля.

11. Ряды Тейлора и Лорана.

Теорема Тейлора. Неравенства Коши. Теорема о единственности аналитической функции. Нули аналитической функции. Правильные и особые точки. Кольцо сходимости ряда Лорана. Теорема Лорана. Единственность ряда Лорана.

12. Изолированные особые точки аналитической функции.

Определение и классификация изолированных особых точек. Поведение в окрестности изолированной особой точки. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса.

13. Вычеты и их приложения.

Теоремы о вычетах. Вычисление определённых интегралов с помощью вычетов. Логарифмический вычет. Число нулей аналитической функции. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры (многочленов).

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой

сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader
- система Wolfram Mathematica. (<https://www.wolframcloud.com/>)

программное обеспечение для создания и демонстрации презентаций, иллюстраций и других учебных материалов:

- Microsoft Windows (в составе Microsoft Imagine Premium Electronic Software Delivery).
- Microsoft OfficeSTD 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232 Microsoft Open License №0005279522.
- Network 15 Mathematica 11 Increment Standard Bundled List Price with Service.
- Network 15 Mathematica 11 Upgrade L3549-7407.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»

http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента» <https://www.studentlibrary.ru>
- База научных статей Mathnet

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Невский, М. В., Элементы теории функций комплексного переменного: учеб. пособие - Ярославль, ЯрГУ, 2014 <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20140203.pdf>
2. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного - М.: Физматлит, 2002.
<https://www.studentlibrary.ru/ru/book/ISBN5922102648.html>
3. Невский М. В., Упражнения по дисциплине Теория функций комплексного переменного: метод. указания - Ярославль, ЯрГУ, 2008
<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20080296.pdf>

б) дополнительная литература

1. Свешников А. Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной: учебник для вузов. - М.: Физматлит, 2010.
<https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN9785922101332-SCN0000/000.html>
2. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного : учебник для вузов / И. И. Привалов. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 402 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01450-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/512097>
3. Климов В.С. Основы комплексного анализа: учебное пособие. - Ярославль: ЯрГУ, 2010. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20100230.pdf>

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор:

Зав. кафедрой математического анализа,
доктор физ.-мат. наук, доцент

М.В. Невский

Приложение №1 к рабочей программе дисциплины «Теория функций комплексной переменной»

Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации студентов по дисциплине

1. Типовые контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущего контроля успеваемости

Задания для самостоятельной работы даются по задачнику [2], учебному пособию [1], методическим указаниям [3]. Могут применяться и другие сборники задач. Эти задания не оцениваются, но их выполнение контролируется на практических занятиях.

Индивидуальное задание

В начале семестра каждому студенту выдаётся индивидуальное задание по 11 основным темам дисциплины. Эти задания даются по учебному пособию [1]. По каждой теме даётся несколько типовых задач. Каждый студент получает свой вариант задания, соответствующий его индивидуальному номеру в списке. Задания выполняются либо в бумажной форме, либо выкладываются в соответствующие разделы ЭУК в Moodle ЯрГУ. Каждый цикл упражнений по отдельной теме оценивается максимально в 100 баллов, поэтому максимальная сумма за все задачи составляет 1100 баллов. При своевременном представлении решений студенты могут существенно повысить свою оценку по конкретному разделу, представляя дополнения и (или) исправления.

Примерный список всех задач прилагается в конце Приложения 1

В конце семестра студентам может быть предложена контрольная работа по теме «Изолированные особые точки. Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов».

Задания для контрольной работы

1. Для данной функции определить изолированные особые точки и указать их характер. Ответ аргументировать.
2. Вычислить вычет данной функции в каждой из её изолированных особых точек.
3. Вычислить комплексный интеграл с помощью вычетов.
4. Вычислить действительный интеграл с помощью вычетов.

Метод оценивания контрольной работы состоит в следующем.

Каждая из четырёх задач оценивается следующими баллами:

0 (задача не сделана), 1 (сделано кое-что), 2 (сделана приблизительно наполовину), 3 (сделана с некоторыми недочётами), 4 (сделана полностью). Общее число баллов за все 4 задания составляет 16. Оценка за работу студента ставится в зависимости от набранного им числа баллов:

0 – 4 балла – «неудовлетворительно»,
5 – 8 баллов – «удовлетворительно»,
9 – 12 баллов – «хорошо»
13 – 16 баллов – «отлично»

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Зачет по дисциплине «Теория функций комплексной переменной» принимается в устной форме и существенно использует результаты работы студента в семестре. Ниже даются примерные вопросы к зачёту.

1. Комплексные числа и действия с ними. Расширенная комплексная плоскость. Интерпретация Римана комплексных чисел.
2. Открытые и замкнутые множества на расширенной комплексной плоскости. Граница. Связность. Односвязные и многосвязные множества.
3. Последовательности и ряды комплексных чисел.
4. Однозначные функции. Предел по Коши и по Гейне. Непрерывность и равномерная непрерывность.
5. Функциональные ряды. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Теорема Вейерштрасса о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда.
6. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Формула Коши – Адамара.
7. Определение функций $f(z) = e^z$, $\sin z$, $\cos z$ с помощью степенных рядов, их свойства.
8. Производная. Условия Коши – Римана и дифференцируемость (моногогенность) функции комплексного переменного.
9. Аналитические (голоморфные) функции. Аналитичность суммы степенного ряда.
10. Функции $f(z) = \sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$, $\ln z$, дробно-линейная и их свойства.
11. Определение и свойства интеграла от функции комплексного переменного.
12. Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей.
13. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции.
14. Теорема Тейлора. Неравенства Коши. Теорема Лиувилля.
15. Теорема о единственности аналитической функции. Нули аналитической функции. Правильные и особые точки аналитической функции.
16. Ряд Лорана. Кольцо сходимости. Теорема Лорана. Единственность ряда Лорана.
17. Изолированные особые точки аналитической функции и их классификация. Поведение в окрестности изолированной особой точки. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса.
18. Вычеты. Теоремы о вычетах.
19. Вычисление определённых интегралов с помощью вычетов.

Для получения оценки «зачтено» студенту необходимо:

- 1) в конце семестра представить выполненное им индивидуальное задание своего варианта и получить за него оценку не менее 400 баллов из 1100 возможных (см. выше);
- 2) написать контрольную работу не менее чем на оценку «удовлетворительно»;
- 3) на зачёте ответить на два-три вопроса по приведённой выше программе с формулировкой определений и основных результатов.

Приведём примерные упражнения, составляющие индивидуальные задания для студентов.

§1. Комплексные числа и действия с ними

У п р а ж н е н и я

1) Вычислить, используя алгебраическую форму комплексного числа.

$$1.1. \quad \left| (2+i)(3-i)^2 + (2+3i)(3+4i) \right|.$$

$$1.2. \quad \left| (2+i)^2(3+7i) - (1+2i)(5+3i) \right|.$$

$$1.3. \quad \left| (4+i)(5+3i) - (3+i)(3-i) \right|^2.$$

$$1.4. \quad \operatorname{Re} \frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}. \quad 1.5. \quad \operatorname{Im} \frac{(2+i)(4+i)}{1+i}.$$

$$1.6. \quad \left| \frac{(5+i)(7-6i)}{3+i} \right|. \quad 1.7. \quad \operatorname{Re} \frac{2+15i}{(1+i)^3}.$$

$$1.8. \quad \operatorname{Im} \frac{(2-5i)(6+7i)}{(4-i)(5+i)}.$$

$$1.9. \quad \operatorname{Re}(1+2i) - \operatorname{Im}(1+2i)^2 + \operatorname{Re}(1+2i)^3.$$

$$1.10. \quad \operatorname{Re} \frac{1-i}{2-i} - \operatorname{Im} \frac{2+i}{1+3i}.$$

2) Решить уравнение относительно неизвестного $z \in \mathbb{C}$.

$$1.11. \quad iz - 3\bar{z} = -5 + 7i. \quad 1.12. \quad (iz - 1)\bar{z} = -3 + 15i.$$

$$1.13. \quad \frac{z+2i}{\bar{z}-i} = 1+2i. \quad 1.14. \quad \operatorname{Re} z - \frac{z}{|z|} = 2.$$

$$1.15. \quad 2z + |z + \bar{z}| \cdot i = 4 + 2i. \quad 1.16. \quad 2\operatorname{Re} z - 3|z - \bar{z}| \cdot i = 2 - 9i.$$

$$1.17. \quad iz^2 - 3\bar{z} = 2i. \quad 1.18. \quad |z - 8i|^2 + 2\bar{z} = 3 - 12i.$$

$$1.19. \quad z^2 - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z. \quad 1.20. \quad z^2 + \bar{z} = 2\operatorname{Re} \frac{1+i}{1-i}.$$

3) Найти все значения квадратного корня, проводя вычисления в алгебраической форме.

$$1.21. \quad \sqrt{2i}. \quad 1.22. \quad \sqrt{-8i}.$$

$$1.23. \quad \sqrt{-15+8i}. \quad 1.24. \quad \sqrt{-11+60i}.$$

$$1.25. \quad \sqrt{-8+6i}. \quad 1.26. \quad \sqrt{-8-6i}.$$

$$\begin{array}{ll} 1.27. \quad \sqrt{8-6i} . & 1.28. \quad \sqrt{8+6i} . \\ 1.29. \quad \sqrt{2-3i} . & 1.30. \quad \sqrt{-3-4i} . \end{array}$$

4) Решить квадратное уравнение с неизвестным $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{ll} 1.31. \quad z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0 . & 1.32. \quad z^2 - (3-2i)z + 5 - 5i = 0 . \\ 1.33. \quad iz^2 + 1 = 0 . & 1.34. \quad z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0 . \\ 1.35. \quad z^2 - 5z + 4 + 10i = 0 . & 1.36. \quad z^2 + (-7+2i)z + 13 - i = 0 . \\ 1.37. \quad z^2 + (-1+4i)z - 4i = 0 . & 1.38. \quad z^2 + (-1+3i)z - 2 - i = 0 . \\ 1.39. \quad z^2 + (-5+i)z - 5i = 0 . & 1.40. \quad z^2 + (-1+6i)z - 6i = 0 . \end{array}$$

5) Представить комплексное число в тригонометрической и показательной формах.

$$\begin{array}{ll} 1.41. \quad 4 + 4i . & 1.42. \quad 2\sqrt{3} + 2i . \\ 1.43. \quad 5 . & 1.44. \quad 4i . \\ 1.45. \quad -2 + 2i . & 1.46. \quad -1 + \sqrt{3}i . \\ 1.47. \quad -2i . & 1.48. \quad 4 + 4i . \\ 1.49. \quad 1 - \sqrt{3}i . & 1.50. \quad \sqrt{3} + i . \end{array}$$

6) Доказать неравенство, используя свойства модуля комплексного числа.

$$\begin{array}{ll} 1.51. \quad |(1+i)z - iz^2| < 3, & \text{если } |z| < 1 . \\ 1.52. \quad |z^2 - \bar{z}^2 + i| < 3, & \text{если } |z| < 1 . \\ 1.53. \quad 1 \leq |z^2 + 5| \leq 9, & \text{если } |z| \leq 2 . \\ 1.54. \quad |(3+2i)z + 2\bar{z}| < 2, & \text{если } |z| < \frac{1}{3} . \\ 1.55. \quad |(5-12i)z^3 - \bar{z}| > 12, & \text{если } |z| > 1 . \\ 1.56. \quad |z^3 - 5i| < 13, & \text{если } |z| < 2 . \\ 1.57. \quad \left| \frac{i}{z-6+8i} \right| \geq \frac{1}{12}, & \text{если } |z| < 2 . \\ 1.58. \quad \left| \frac{z-2i}{z+i} \right| \leq 8, & \text{если } \frac{3}{2} \leq |z| \leq 2 . \\ 1.59. \quad |(3-4i)\bar{z} - z^2| > 6, & \text{если } |z| > 6 . \\ 1.60. \quad \left| \frac{1-3z^2\bar{z}}{2+i} \right| < 12, & \text{если } |z| \leq 2 . \end{array}$$

7) Вычислить, применяя тригонометрическую форму комплексного числа.

$$1.61. \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i} \right)^{30} . \quad 1.62. \left(\frac{2 + 2i}{\sqrt{3} - i} \right)^{10} .$$

$$1.63. \left(\frac{1 - i}{i} \right)^{15} . \quad 1.64. \left(\frac{-2i}{-3 + 3i} \right)^6 .$$

$$1.65. (1 - i)^{30} . \quad 1.66. \left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i} \right)^{60} .$$

$$1.67. \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + i} \right)^{12} . \quad 1.68. (1 + \sqrt{3}i)^{150} .$$

$$1.69. (\sqrt{3} + i)^{30} . \quad 1.70. \left(\frac{1 - i}{\sqrt{3} - i} \right)^{20} .$$

8) Найти все значения корня, применяя тригонометрическую форму комплексного числа.

$$1.71. \sqrt[6]{\frac{(1 + i)^3}{\sqrt{3} + i}} . \quad 1.72. \sqrt[10]{\frac{-i^5}{(-1 + i)^3}} .$$

$$1.73. \sqrt[5]{\frac{i^3}{2 + 2i}} . \quad 1.74. \sqrt[8]{\frac{(1 - i)^{10}}{2i}} .$$

$$1.75. \sqrt[6]{\frac{(1 - i)^2}{2\sqrt{3} - 2i}} . \quad 1.76. \sqrt[4]{\frac{16\sqrt{3} - 16i}{(1 + i)^{10}}} .$$

$$1.77. \sqrt[3]{\frac{(1 - i)^{10}}{8 + 8\sqrt{3}i}} . \quad 1.78. \sqrt[6]{\frac{(\sqrt{3} + i)^5}{1 + \sqrt{3}i}} .$$

$$1.79. \sqrt[5]{\frac{-2i}{(\sqrt{3} - i)^7}} . \quad 1.80. \sqrt[7]{\frac{-2\sqrt{3} - 2i}{1 - i}} .$$

9) Дополнительные задачи.

1.81. Пусть $n \geq 2$, $w^n = 1$. Чему равна сумма $1 + w + \dots + w^{n-1}$?

1.82. Доказать, что если $z + z^{-1} = 2 \cos \alpha$ и $n \in \mathbb{N}$, то $z^n + z^{-n} = 2 \cos n\alpha$.

1.83. Доказать, что совокупность M матриц второго порядка вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

с операциями сложения и умножения матриц образует поле, изоморфное полю \mathbb{C} комплексных чисел.

§2. Изображение комплексных чисел

У п р а ж н е н и я

1) Изобразить на комплексной плоскости множество точек $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих указанной системе соотношений.

$$2.1. \quad 1 \leq |z + 3 - 4i| \leq 2, \quad 0 < \arg z < \frac{3\pi}{4}.$$

$$2.2. \quad 2\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z \geq 0, \quad |z - 1| \leq 2.$$

$$2.3. \quad 1 \leq |z + 4i| \leq 3, \quad \operatorname{Im} z > 4.$$

$$2.4. \quad |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq 1, \quad |z - i| \leq 1.$$

$$2.5. \quad -4 \leq \operatorname{Re} z \leq -3, \quad |z + 5 - 2i| \leq 3.$$

$$2.6. \quad \arg z = \frac{\pi}{2}, \quad |\bar{z} + i| \leq 1.$$

$$2.7. \quad |z - 2 + i| \geq |z + 1 - 5i|.$$

$$2.8. \quad |z| > 2 + \operatorname{Im} z.$$

$$2.9. \quad |z| \leq \operatorname{Re} z.$$

$$2.10. \quad 4 \leq |z - 1| + |z + 1| \leq 8.$$

2) Изобразить линию, задаваемую данным уравнением.

$$2.11. \quad |z + 2| - |z - 2| = 3.$$

$$2.12. \quad |z - i| - |z + i| = 2.$$

$$2.13. \quad |z - 2| = \operatorname{Re} z. \quad 2.14. \quad \operatorname{Im} z^2 = 2.$$

$$2.15. \quad \operatorname{Re} \bar{z}^2 = 1. \quad 2.16. \quad |z - 2| = \operatorname{Re} z.$$

$$2.17. \quad \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2}. \quad 2.18. \quad z^2 + \bar{z}^2 = 1.$$

$$2.19. \quad \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\bar{z}} \right) = 1. \quad 2.20. \quad 2z\bar{z} + (2 + i)z + (2 - i)\bar{z} = 2.$$

3) Задать с помощью соотношений на $z \in \mathbb{C}$ указанное множество.

2.21. Внешность круга с центром $z_0 = -1 + 2i$ и радиусом $r = 5$ с границей.

2.22. Правый полукруг без границы из круга с центром $z_0 = 2 - i$ и радиусом $r = 2$.

2.23. Концентрическое кольцо с центром $z_0 = -i$, внутренним радиусом $r = 1$ и внешним радиусом $r = 4$ без границы.

2.24. Внутренность эллипса с фокусами $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 4 - 3i$ и эксцентриситетом $\varepsilon = 1/2$.

2.25. Внешность эллипса с фокусами $z_1 = 2 + 6i$, $z_2 = 8 - 2i$ и эксцентриситетом $\varepsilon = 1/3$.

4) Дополнительные задачи.

2.26. Изобразить на комплексной плоскости множество точек

$$z = \frac{1 + it}{1 - it}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.27. Применяя геометрический подход, доказать для $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ неравенство

$$|z_1 - z_2| \leq \left| |z_1| - |z_2| \right| + \min\{|z_1|, |z_2|\} \cdot |\arg z_1 - \arg z_2|.$$

2.28. Точка z движется по линии $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 1$ в направлении против часовой стрелки. Определить траекторию и направление движения точки $w = 1/z$.

§3. Экспонента и другие функции

У п р а ж н е н и я

1) Вычислить выражение.

3.1. $\operatorname{Re} e^{2+4i}$.

3.2. $|\sin(3 - 4i)|$.

3.3. $\operatorname{Im} \cos(6 + 2i)$.

3.4. $|\cos(1 + 10i)|$.

3.5. $\operatorname{Re} \operatorname{ch}(1 - i)$.

3.6. $|\sin(4 + 7i)|$.

3.7. $\operatorname{Im} \operatorname{sh}(1 + 2i)$.

3.8. $|\cos(3 + 20i)|$.

3.9. $\operatorname{Re} \operatorname{ch}(2 - i)$.

3.10. $\operatorname{Im} e^{2-5i}$.

2) Найти действительную, мнимую части и модуль функции $f(z)$.

3.11. $f(z) = e^z$. 3.12. $f(z) = \sin z$.

3.13. $f(z) = \cos z$. 3.14. $f(z) = \operatorname{sh} z$.

3.15. $f(z) = \operatorname{ch} z$.

3) Выяснить, в каких точках функция $f(z)$ принимает действительные значения, а в каких — чисто мнимые значения.

3.16. $f(z) = \cos z$. 3.17. $f(z) = \operatorname{sh} z$.

3.18. $f(z) = \operatorname{ch} z$. 3.19. $f(z) = e^z$.

3.20. $f(z) = \sin z$.

4) Вычислить значения логарифмов.

3.21. $\operatorname{Ln}(\sqrt{3} + i)$, $\ln(\sqrt{3} + i)$.

3.22. $\operatorname{Ln}(1 + i)$, $\ln(1 + i)$.

3.23. $\operatorname{Ln}(-1 + \sqrt{3}i)$, $\ln(-1 + \sqrt{3}i)$.

3.24. $\operatorname{Ln}(-3 + 3i)$, $\ln(-3 + 3i)$.

3.25. $\operatorname{Ln}(-i)$, $\ln(-i)$.

3.26. $\operatorname{Ln}(\sqrt{3} - i)$, $\ln(\sqrt{3} - i)$.

3.27. $\operatorname{Ln}(-1 - i)$, $\ln(-1 - i)$.

3.28. $\operatorname{Ln}(4i)$, $\ln(4i)$.

3.29. $\operatorname{Ln}(1 - \sqrt{3}i)$, $\ln(1 - \sqrt{3}i)$.

3.30. $\operatorname{Ln} 10$, $\ln 10$.

5) Найти все значения указанного выражения.

3.31. $(1 + i)^i$. 3.32. $(-2)^{\sqrt{e}}$.

3.33. $(-1 + i)^{-1+i}$. 3.34. 3^i .

3.35. $(\sqrt{3} + i)^{-i}$. 3.36. $(-2 - 2i)^{-3i}$.

3.37. i^{-1-i} . 3.38. $(-3 + 3i)^{\sqrt{7}}$.

3.39. $(2i)^{2i}$. 3.40. $(-4)^{-4}$.

6) Дополнительные задачи.

3.41. С помощью свойства $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ доказать тождество

$$e^{i(z_1+z_2)} \pm e^{-i(z_1+z_2)} = \\ = \frac{1}{2} [(e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} \pm e^{-iz_2}) + (e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} \mp e^{-iz_2})],$$

из которого затем получить равенства

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

3.42. Установить с помощью равенств для $\cos(z_1 + z_2)$ и $\sin(z_1 + z_2)$ аналогичные соотношения для $\operatorname{ch}(z_1 + z_2)$ и $\operatorname{sh}(z_1 + z_2)$. Использовать связь $\sin(iz) = i \operatorname{sh} z$, $\cos(iz) = \operatorname{ch} z$.

3.43. Найти все нули каждой из функций e^z , $\cos z$, $\sin z$.

§4. Дробно-линейная функция

У п р а ж н е н и я

1) Найти дробно-линейное отображение $w = f(z)$, которое переводит точки z_1, z_2, z_3 в точки w_1, w_2, w_3 соответственно.

$$4.1. \quad z_1 = -1, z_2 = i, z_3 = 1 + i; \quad w_1 = 0, w_2 = 2i, w_3 = 1 - i.$$

$$4.2. \quad z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = 1 - i; \quad w_1 = 1 - i, w_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, w_3 = 2 - i.$$

$$4.3. \quad z_1 = 1, z_2 = 1 + i, z_3 = 2 + i; \quad w_1 = -1 + i, w_2 = \infty, w_3 = 2 + 2i.$$

$$4.4. \quad z_1 = 1 - i, z_2 = 0, z_3 = \infty; \quad w_1 = 1 + i, w_2 = \infty, w_3 = 0.$$

$$4.5. \quad z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 3 + i; \quad w_1 = -4, w_2 = -4 + 2i, w_3 = -6 + 6i.$$

$$4.6. \quad z_1 = -1, z_2 = i, z_3 = 1 + i; \quad w_1 = i, w_2 = \infty, w_3 = 1.$$

$$4.7. \quad z_1 = -1, z_2 = \infty, z_3 = i; \quad w_1 = i, w_2 = 1, w_3 = 1 + i.$$

$$4.8. \quad z_1 = -1, z_2 = \infty, z_3 = i; \quad w_1 = \infty, w_2 = i, w_3 = 1.$$

$$4.9. \quad z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = 0; \quad w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1.$$

$$4.10. \quad z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1; \quad w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1.$$

2) Найти дробно-линейную функцию $w = f(z)$, отображающую множество G на множество H .

4.11. G — круг $|z| \leq 1$, H — полуплоскость $\operatorname{Im} w \geq 0$.

4.12. G — круг $|z - i| \leq 1$, H — полуплоскость $\operatorname{Re} w \leq 0$.

4.13. G — круг $|z - 1 + i| \leq 1$, H — полуплоскость $\operatorname{Im} w \geq 1$.

4.14. G — круг $|z| \leq 1$, H — круг $|w - i| \leq 1$.

4.15. G — полуплоскость $\operatorname{Re} z \geq 1$, H — множество $|w| \geq 1$.

4.16. G — полуплоскость $\operatorname{Im} z \geq -1$, H — круг $|w - i| \leq 1$.

4.17. G — полуплоскость $\operatorname{Re} z \geq 0$, H — полуплоскость $\operatorname{Im} w \leq -1$.

4.18. G — полуплоскость $\operatorname{Re} z \leq -1$, H — полуплоскость $\operatorname{Re} w \geq 1$.

4.19. G — множество $|z - 1| \geq 1$, H — круг $|w - i| \leq 1$.

4.20. G — круг $|z - 1| \leq 1$, H — полуплоскость $\operatorname{Im} z \leq 2$.

3) Выяснить, в какое множество переходит множество M при отображении $w = f(z)$.

4.21. M — квадрант $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0$, $w = (z - i)/(z + i)$.

4.22. M — полукруг $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$, $w = (2z - i)/(iz + 2)$.

4.23. M — полоса $0 < \operatorname{Re} z < 1$, $w = (z - 1)/(z - 2)$.

4.24. M — кольцо $1 < |z| < 2$, $w = z/(z - 1)$.

4.25. M — полуплоскость $\operatorname{Re} z \geq 1$, $w = (z - 1)/z$.

4) Дополнительные задачи.

4.26. Доказать, что совокупность невырожденных дробно-линейных функций относительно операции суперпозиции образует группу.

4.27. Доказать, что каждое из отображений $w = az$, $w = z + b$ ($a, b \in \mathbb{C}$), $w = 1/z$ обладает круговым свойством. В случае затруднений см. § 12 главы 2.

4.28. Доказать, что невырожденное дробно-линейное отображение редуцируется к отображениям предыдущей задачи и тем самым обладает круговым свойством.

4.29. Установить круговое свойство невырожденного дробно-линейного отображения иным способом, нежели тот, который был отмечен в двух предыдущих задачах. Использовать для этого следующий факт. Любая окружность или прямая на комплексной плоскости может быть задана уравнением *Аполлония*

$$\left| \frac{z - p}{z - q} \right| = k, \quad k > 0, \quad p, q \in \mathbb{C} \text{ — фиксированы,}$$

и любое такое уравнение задаёт окружность или прямую.

§5. Дифференцирование

У п р а ж н е н и я

1) Проверить выполнение условий Коши – Римана для функции $f(z)$.

5.1. $f(z) = z^2$.

5.2. $f(z) = z^3$.

5.3. $f(z) = z^4$.

5.4. $f(z) = z^n$.

5.5. $f(z) = e^z$.

5.6. $f(z) = \cos z$.

5.7. $f(z) = \sin z$.

5.8. $f(z) = \operatorname{sh} z$.

5.9. $f(z) = \operatorname{ch} z$.

5.10. $f(z) = ze^z$.

2) Определить точки дифференцируемости и область аналитичности функции $f(z)$. Найти производную в точках существования.

5.11. $f(z) = z^2 \bar{z}$.

5.12. $f(z) = z^2 + \bar{z}$.

5.13. $f(z) = |z| \bar{z}$.

5.14. $f(z) = |z|^2 \operatorname{Re} \bar{z}$.

5.15. $f(z) = |z|^2 \operatorname{Im} z$.

5.16. $f(z) = z \operatorname{Im} z$.

5.17. $f(z) = z \operatorname{Re} z$.

5.18. $f(z) = 2|z|^2$.

5.19. $f(z) = iz + z\bar{z}$.

5.20. $f(z) = f(x + iy) = 2xy + iy^2$.

2) Выяснить, существует ли аналитическая функция, имеющая данную действительную часть $u(x, y)$ или данную мнимую часть $v(x, y)$.

5.21. $u(x, y) = x^2 y$.

5.22. $v(x, y) = x^2 - y^2$.

5.23. $v(x, y) = 4e^x \sin 2y$.

5.24. $u(x, y) = x + y$.

5.25. $v(x, y) = 6xy$.

3) Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по её указанным свойствам.

5.26. $u(x, y) = e^{-y} \cos x + 2x + 3, \quad f(0) = 4 - i$.

5.27. $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x, \quad f(i) = -1 + 2i$.

5.28. $v(x, y) = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy), \quad f(0) = 0$.

5.29. $u(x, y) = 2 \sin x \operatorname{ch} y - x, \quad f(0) = 0$.

$$5.30. \quad v(x, y) = 4 \operatorname{sh} x \sin y + 2xy, \quad f(0) = 3.$$

4) Дополнительные задачи.

5.31. Доказать, что если аналитическая функция является действительной, то она постоянна.

5.32. Доказать, что для функции $f(z) = \sqrt{|xy|}$ условия Коши – Римана (5.1) в точке $z = 0$ выполняются, но производная не существует.

5.33. Доказать, используя определение дифференцируемости, что если функция $f(z) = f(r(\cos \varphi + i \sin \varphi)) = U(r, \varphi) + iV(r, \varphi)$ имеет производную в некоторой точке, то в этой точке выполняются следующие условия Коши – Римана в полярных координатах r, φ :

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial V}{\partial r}.$$

5.34. Вывести условия Коши – Римана в полярных координатах (см. предыдущую задачу) из стандартных условий (5.1) и равенств

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad U(r, \varphi) = u(x, y), \quad V(r, \varphi) = v(x, y).$$

§6. Интегрирование

У п р а ж н е н и я

1) Вычислить интеграл

$$\int_{\Gamma} f(z) dz,$$

Γ — отрезок с концами в точках z_1 и z_2 , проходимый от z_1 к z_2 .

$$6.1. \quad f(z) = 2\operatorname{Re} z^2 - \bar{z} + 1 - i, \quad z_1 = 0, z_2 = -3 + i.$$

$$6.2. \quad f(z) = (1 + i)\operatorname{Im} z^2 + \bar{z}, \quad z_1 = i, z_2 = -3i.$$

$$6.3. \quad f(z) = 3z + (1 + i)\bar{z}^2, \quad z_1 = 1, z_2 = 4i.$$

$$6.4. \quad f(z) = 2z^2 - 3\bar{z} + 2, \quad z_1 = 0, z_2 = -1 - i.$$

$$6.5. \quad f(z) = |z|^2 - 3i, \quad z_1 = -1, z_2 = i.$$

$$6.6. \quad f(z) = -\operatorname{Re} z^2 + 5\bar{z}, \quad z_1 = -1 + i, z_2 = 1 - 4i.$$

$$6.7. \quad f(z) = 3z\bar{z} + iz, \quad z_1 = 5i, z_2 = 0.$$

- 6.8. $f(z) = \operatorname{Im} z^2 + \bar{z}^2$, $z_1 = 0, z_2 = 1 + i$.
 6.9. $f(z) = 2\operatorname{Im} \bar{z}^2 + i$, $z_1 = -1, z_2 = -1 - 2i$.
 6.10. $f(z) = z\bar{z} + 4z + 1$, $z_1 = -1 - i, z_2 = 1 + i$.

2) Вычислить интеграл

$$\int_{\Gamma} f(z) dz.$$

6.11. $f(z) = z\operatorname{Im} z$, Γ — дуга окружности $|z| = 1$, проходимая от точки $z_1 = -1$ до точки $z_2 = 1$ против часовой стрелки.

6.12. $f(z) = z\operatorname{Im} z^2$, Γ — дуга окружности $|z| = 1$, проходимая от точки $z_1 = -1$ до точки $z_2 = 1$ по часовой стрелке.

6.13. $f(z) = \bar{z}\operatorname{Re} z^2$, Γ — окружность $|z| = 1$.

6.14. $f(z) = z\operatorname{Re} z$, Γ — окружность $|z| = 2$.

6.15. $f(z) = z(\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z)$, Γ — дуга окружности $|z| = 1$, проходимая от точки $z_1 = -1$ до точки $z_2 = 1$ по часовой стрелке.

3) Вычислить с помощью формулы Ньютона – Лейбница (6.5).

$$6.16. \int_{1-i}^{1+i} e^z dz.$$

$$6.17. \int_i^1 \cos z dz.$$

$$6.18. \int_{2-i}^i (3z^2 + z) dz.$$

$$6.19. \int_{1-i}^{1+i} \sin z dz.$$

$$6.20. \int_0^i \operatorname{ch} z dz.$$

4) Вычислить с помощью интегрирования по частям.

$$6.21. \int_0^i ze^z dz.$$

$$6.22. \int_i^{1+i} z \cos z dz.$$

$$6.23. \int_i^1 z \operatorname{ch} z dz.$$

$$6.24. \int_0^{2+i} z \operatorname{sh} z dz.$$

$$6.25. \int_{1-i}^{1+i} z \sin z dz.$$

5) Вычислить с помощью интегральной формулы Коши (6.7).

$$6.26. \int_{\Gamma} \frac{e^z}{(z-1)(z+1)} dz,$$

a) Γ — окружность $|z-1+i|=10$; б) Γ — окружность $|z-1+i|=3/2$.

$$6.27. \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{ch} z}{z(z-1)} dz,$$

a) Γ — окружность $|z-i|=8$; б) Γ — окружность $|z-1+i|=6/5$.

$$6.28. \int_{\Gamma} \frac{\sin z}{(z-i)(z+i)} dz,$$

a) Γ — окружность $|z-2|=5$; б) Γ — окружность $|z-2|=1$.

$$6.29. \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{sh} z}{(z-i)(z-2i)} dz,$$

a) Γ — окружность $|z-3i|=20$; б) Γ — окружность $|z-3i|=3/2$.

$$6.30. \int_{\Gamma} \frac{\cos z}{(z+1)(z+i)} dz,$$

a) Γ — окружность $|z-1-i|=8$; б) Γ — окружность $|z-1-i|=4$.

6) Вычислить с помощью интегральной формулы Коши (6.7) и формулы (6.8).

$$6.31. \int_{|z|=2} \frac{z^2}{(z-i)(z-1)^2} dz. \quad 6.32. \int_{|z-2i|=10} \frac{e^z}{(z-1+i)^4} dz.$$

$$6.33. \int_{|z+1|=4} \frac{\sin z}{(z-1)(z-i)^2} dz. \quad 6.34. \int_{|z-2+i|=15} \frac{z \cos z}{(z+1-i)^3} dz.$$

$$6.35. \int_{|z|=8} \frac{z \sin z}{(z-10)(z-2i)^3} dz.$$

7) Дополнительные задачи.

6.36. Вывести из определения интеграла равенство

$$\int_{z_1}^{z_2} z dz = z_2^2 - z_1^2.$$

6.37. Для $n \in \mathbb{Z}$, $R > 0$ и $z_0 \in \mathbb{C}$ найти значение интеграла

$$\int_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n dz .$$

§7. Области сходимости рядов

У п р а ж н е н и я

1) Определить радиус сходимости и область сходимости ряда.

$$7.1. \sum_{n=0}^{\infty} e^{in}(z-1+i)^n . \quad 7.2. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-2}{2+i}\right)^n .$$

$$7.3. \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\pi/n}(z-3+2i)^n . \quad 7.4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{in}\right)^n .$$

$$7.5. \sum_{n=0}^{\infty} (n+5-i)(z-2i)^n .$$

2) Определить область сходимости ряда.

$$7.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-2i)^n(z+5i)^n} . \quad 7.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+3i)^n}{(z-1+i)^n} .$$

$$7.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(iz)^n} . \quad 7.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n(z+i)^n} .$$

$$7.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5}{(z-1+i)^n} .$$

3) Определить область сходимости ряда.

$$7.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n(z-3+2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (3+in)(z-3+2i)^n .$$

$$7.12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z-4i}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-4i}{5}\right)^n .$$

$$7.13. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-1-5i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1-5i)^n}{3^{n+1}}.$$

$$7.14. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{(z-2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n!}.$$

$$7.15. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+5i)^n}{(z-4)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-4)^n}{(3+4i)^n}.$$

4) Дополнительные задачи.

7.16. Пусть $c_n > 0$. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n},$$

если оба предела существуют.

7.17. Пусть $a_n \in \mathbb{C}$. Верно ли, что из сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$? Наоборот, верно ли, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? В случае отрицательного ответа на любой из вопросов привести контрпример.

§8. Ряды Тейлора и Лорана

У п р а ж н е н и я

1) Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 . Найти радиус сходимости ряда.

$$8.1. \quad f(z) = \frac{4}{z+2}, \quad z_0 = -1. \quad 8.2. \quad f(z) = \frac{2}{z-6}, \quad z_0 = 2.$$

$$8.3. \quad f(z) = \frac{5}{z-i}, \quad z_0 = 1. \quad 8.4. \quad f(z) = \frac{2}{z+i}, \quad z_0 = 2+i.$$

$$8.5. \quad f(z) = \frac{3z+2}{z+5}, \quad z_0 = 1. \quad 8.6. \quad f(z) = \frac{2z+1}{z+3}, \quad z_0 = 2.$$

$$8.7. \quad f(z) = \frac{z-1}{z+3}, \quad z_0 = i. \quad 8.8. \quad f(z) = \frac{z-2}{z+5}, \quad z_0 = -1.$$

$$8.9. \quad f(z) = \frac{z^2+1}{z+1}, \quad z_0 = -i. \quad 8.10. \quad f(z) = \frac{3z}{z^2-1}, \quad z_0 = 0.$$

2) Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана с центром в точке $z_0 = 0$.

$$8.11. \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^5} . \qquad 8.12. \quad f(z) = \frac{\cos^2 z}{z^2} .$$

$$8.13. \quad f(z) = \frac{e^z}{z^4} . \qquad 8.14. \quad f(z) = z^3 e^{1/z} .$$

$$8.15. \quad f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z} . \qquad 8.16. \quad f(z) = \cos \frac{1}{z^2} .$$

$$8.17. \quad f(z) = z^4 \cos \frac{1}{z} . \qquad 8.18. \quad f(z) = \frac{1}{z} \sin^2 \frac{2}{z} .$$

$$8.19. \quad f(z) = \frac{1 + \cos z}{z^3} . \qquad 8.20. \quad f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z^6} .$$

3) Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

$$8.21. \quad f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 4}, \quad 1 < |z| < 4 .$$

$$8.22. \quad f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 4}, \quad 4 < |z| < \infty .$$

$$8.23. \quad f(z) = \frac{1}{z^2 - 8z + 15}, \quad 3 < |z| < 5 .$$

$$8.24. \quad f(z) = \frac{1}{z^2 - 8z + 15}, \quad 5 < |z| < \infty .$$

$$8.25. \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + z}, \quad 0 < |z| < 1 .$$

$$8.26. \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + z}, \quad 1 < |z| < \infty .$$

$$8.27. \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z - 8}, \quad 1 < |z + 2| < 4 .$$

$$8.28. \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}, \quad 0 < |z - i| < 2 .$$

$$8.29. \quad f(z) = \frac{2z}{z^2 - 4z + 3}, \quad 1 < |z| < 3 .$$

$$8.30. \quad f(z) = \frac{2z}{z^2 - 4z + 3}, \quad 3 < |z| < \infty .$$

4) Дополнительные задачи.

8.31. Найти радиус сходимости ряда Тейлора с центром в точке $z_0 = 0$ функции $f(z) = \operatorname{tg} z$, не выписывая явно этого ряда.

8.32. Доказать, что аналитическая в окрестности точки $z_0 = 0$ функция $f(z)$, удовлетворяющая условию $f(2z) = f(z)$, есть константа.

8.33. Пусть $f(z)$ — аналитическая в кольце $r < |z| < R$ функция,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

— её разложение в ряд Лорана в этом кольце. Доказать, что если $f(-z) = f(z)$ при всех z , то $a_{2n+1} = 0$, а если $f(-z) = -f(z)$ при всех z , то $a_{2n} = 0$.

§9. Изолированные особые точки. Вычеты

У п р а ж н е н и я

1) Найти все конечные изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить характер каждой из них.

$$9.1. \quad f(z) = \frac{\sin z}{(z-1)(z+1-i)^3} . \qquad 9.2. \quad f(z) = \frac{\cos z}{(z+2+2i)^2(z-i)} .$$

$$9.3. \quad f(z) = \frac{e^{1/z}}{(z+1)(z+2)(z-3)^3} . \qquad 9.4. \quad f(z) = \frac{\operatorname{ch} z - 1}{z(z-1+3i)^5} .$$

$$9.5. \quad f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{z(z-1+5i)^3} . \qquad 9.6. \quad f(z) = \frac{1 - \cos z}{z(z+3i)^2} .$$

$$9.7. \quad f(z) = z^2 e^{1/z} . \qquad 9.8. \quad f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z-1+3i)^4} .$$

$$9.9. \quad f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z} . \qquad 9.10. \quad f(z) = z \cos \frac{1}{z^2} .$$

2) Указать характер изолированной особой точки $z_0 = \infty$ функции $f(z)$.

$$9.11. \quad f(z) = \frac{e^z}{z^3 + 1} . \qquad 9.12. \quad f(z) = \frac{z^5}{3z^5 + 4} .$$

$$9.13. \quad f(z) = \frac{z^4 + 1}{e^z} . \qquad 9.14. \quad f(z) = z e^{-z} .$$

$$9.15. \quad f(z) = 2e^{-1/z^2} . \qquad 9.16. \quad f(z) = z^2 e^{1/z} .$$

$$9.17. \quad f(z) = (2z^2 + z)e^z. \quad 9.18. \quad f(z) = e^{z/(1-z)}.$$

$$9.19. \quad f(z) = e^{z-1/z}. \quad 9.20. \quad f(z) = z \cos \frac{1}{2z^3 + z}.$$

3) Найти вычеты функции $f(z)$ в конечных изолированных особых точках.

$$9.21. \quad f(z) = z^3 e^{1/z}. \quad 9.22. \quad f(z) = \frac{\cos z - 1}{z(z-i)^2}.$$

$$9.23. \quad f(z) = \frac{\sin z}{(z+2i)^2(z+1)}. \quad 9.24. \quad f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z+2)^2}.$$

$$9.25. \quad f(z) = \frac{e^{-1/z^2}}{z^2 + 1}. \quad 9.26. \quad f(z) = \frac{1}{z^5 - 1}.$$

$$9.27. \quad f(z) = \sin \frac{1}{z^2} + z^4. \quad 9.28. \quad f(z) = \cos \frac{1}{z} + 2z^5.$$

$$9.29. \quad f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z-i)^2}. \quad 9.30. \quad f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{(z-i)(z-1)^2}.$$

4) Найти вычет функции $f(z)$ в точке $z_0 = \infty$.

$$9.31. \quad f(z) = \frac{z^2}{z+1}. \quad 9.32. \quad f(z) = \frac{e^z}{z^3}.$$

$$9.33. \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^5}. \quad 9.34. \quad f(z) = \frac{\cos z}{z^3}.$$

$$9.35. \quad f(z) = (2z^3 + z^2 + 1)e^z. \quad 9.36. \quad f(z) = \frac{z}{3z+1}.$$

$$9.37. \quad f(z) = \frac{3}{z} + z^{10} + 5. \quad 9.38. \quad f(z) = z \sin \frac{1}{z}.$$

$$9.39. \quad f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}. \quad 9.40. \quad f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z}.$$

5) Дополнительные задачи.

9.41. Привести пример аналитической функции, у которой было бы ровно две конечных особых точки: а) устранимая особая точка и полюс второго порядка; б) простой полюс и существенно особая точка; в) устранимая особая точка и существенно особая точка.

9.42. Привести пример аналитической функции, для которой $z = 1 + i$ является особой точкой, но не изолированной.

9.43. Привести пример аналитической функции, для которой $z = \infty$ является предельной точкой простых полюсов.

§10. Вычисление с помощью вычетов комплексных интегралов

У п р а ж н е н и я

1) Вычислить интеграл с помощью теоремы о вычетах.

$$\begin{array}{ll}
 \text{10.1.} & \int_{|z-4|=-5} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)} dz . \quad \text{10.2.} \quad \int_{|z-1|=-1} \frac{1}{z^4+1} dz . \\
 \text{10.3.} & \int_{|z|=\sqrt{2}} \frac{z+1}{(z-i)(z+1)^2} dz . \quad \text{10.4.} \quad \int_{|z-1|=-3} \frac{z}{(z+2)(z+3)^2} dz . \\
 \text{10.5.} & \int_{|z+1|=-1} \frac{1}{z^3+1} dz . \quad \text{10.6.} \quad \int_{|z+i|=-2} \frac{(z+1)^2}{z-5} dz . \\
 \text{10.7.} & \int_{|z-i|=-10} \frac{z}{(z-2)^2} dz . \quad \text{10.8.} \quad \int_{|z-4|=-1} \frac{z^3}{z(z-5)} dz . \\
 \text{10.9.} & \int_{|z-1+i|=\sqrt{6}} \frac{z}{z^2+1} dz . \quad \text{10.10.} \quad \int_{|z-1+i|=-2} \frac{1}{(z-1+i)(z-2+i)} dz .
 \end{array}$$

2) Вычислить интеграл с помощью теоремы о вычетах.

$$\begin{array}{ll}
 \text{10.11.} & \int_{|z-3i|=-4} \frac{z}{e^z-1} dz . \quad \text{10.12.} \quad \int_{|z|=1} z^2 \sin \frac{1}{z} dz . \\
 \text{10.13.} & \int_{|z|=1} z \operatorname{tg} \pi z dz . \quad \text{10.14.} \quad \int_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin \pi z}{z^2-z} dz . \\
 \text{10.15.} & \int_{|z+1|=-4} \frac{z}{e^z+3} dz . \quad \text{10.16.} \quad \int_{|z|=5} \frac{\cos z}{z^2-4} dz . \\
 \text{10.17.} & \int_{|z-i|=-1} \frac{e^z}{z^4+2z^2+1} dz . \quad \text{10.18.} \quad \int_{|z|=2} \left(\sin \frac{1}{z^2} + e^z \operatorname{ch} z \right) dz . \\
 \text{10.19.} & \int_{|z|=1} (z^2+3)e^{1/z^2} dz . \quad \text{10.20.} \quad \int_{|z-1-i|=-10} \frac{e^z}{z^2(z+i)} dz .
 \end{array}$$

3) Дополнительные задачи.

10.21. Вывести теорему о вычетах из теоремы Коши (по поводу последней см. § 6 настоящей главы и подробнее § 8 главы 2).

10.22. Какие из интегралов 10.1 – 10.20 могут быть вычислены с помощью интегральной формулы Коши (6.7) и её обобщения (6.8)? В двух-трёх случаях проведите необходимые вычисления.

§11. Вычисление с помощью вычетов действительных интегралов

У п р а ж н е н и я

1) Вычислить действительный интеграл, переходя к функции комплексного переменного. Почему применима формула (11.2)?

$$11.1. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 10} dx . \quad 11.2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 10x + 34} dx .$$

$$11.3. \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 2}{x^4 + 5x^2 + 4} dx . \quad 11.4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 8}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx .$$

$$11.5. \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx . \quad 11.6. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^4 + 1} dx .$$

$$11.7. \int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx . \quad 11.8. \int_0^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1} dx .$$

$$11.9. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx . \quad 11.10. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 8x + 25} dx .$$

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Студентам, осваивающим дисциплину ТФКП, предлагается обязательно совмещать изучение теоретических вопросов дисциплины с решением типовых упражнений и (по возможности) более сложных задач. Вместе с посещением лекций и практических занятий изучать учебную литературу по дисциплине, выполнять предложенное преподавателем индивидуальное задание.

Методические рекомендации преподавателю дисциплины

Остановимся на следующих важных аспектах преподавания.

1. Дисциплина «Теория функций комплексной переменной» играет важную роль в формировании мировоззрения, математической идеологии студента, его общематематическом и даже общекультурном развитии. «Теория функций комплексной переменной» - один из курсов, в котором предметно (то есть в связи с некоторыми существенными результатами) должны быть упомянуты многие известные математики прошлого. Историзм (в разумной степени) не только обеспечивает нужный уровень беллетризации лекций, но также служит демонстрацией единства математики, ее интернациональной сути и той глубоко гуманистической миссии, которая проявляется в достижениях ее творцов. Эта гуманитарная составляющая математики должна найти свое проявление в преподавании «Теории функций комплексной переменной».
2. Преподаватель должен поставить изучение дисциплины таким образом, чтобы студент прочитал хотя бы фрагментарно 1 – 2 книги по предмету.
3. В программу курса входит достаточно много важных математических результатов. Весьма затруднительно привести их на лекциях с полными доказательствами. Всё же некоторые из основных доказательств следует воспроизвести аккуратно (например, доказательство теоремы Коши, которое дал Э. Гурса). Следует думать о том, как развить математическую культуру студента, степень математизации его мышления.
4. Чтение лекций следует сопровождать достаточным количеством примеров на понятия, теоремы, а также привести нужные иллюстрации по решению задач.
5. Зачёт целесообразно провести в два этапа: практический (решение задач) и теоретический (ответ по основным понятиям и теоремам курса).