

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

_____ Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Топология

Направление подготовки (специальности)
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 21.04.2025, протокол № 10

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 05.05.2025

1. Цели освоения дисциплины.

Целями освоения дисциплины «Топология» является изложение разделов топологии, тесно связанных с фундаментальными общематематическими курсами и приложениями.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Топология» относится к обязательной части образовательной программы и входит в модуль «Математика I», подмодуль «Геометрия и топология».

Для освоения данной дисциплины студенты должны быть знакомы с одномерным дифференциальным и интегральным исчислениями, элементами линейной алгебры и аналитической геометрии.

Полученные в курсе «Топология» знания необходимы для изучения последующих дисциплин модуля «Математика и компьютерные науки», а также для продолжения обучения в магистратуре по направлению «Прикладная математика»

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС, ВО, ОП ВО и приобретение следующих знаний, умений, навыков (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Универсальные компетенции		
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	И-УК-1.1 Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации	Знает: - принципы сбора, отбора и обобщения информации
Общепрофессиональные компетенции		
ОПК-1 Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и	И-ОПК-1.3 Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Знать: - о предпосылках создания топологии; иметь представление о топологическом пространстве, связность, компактность, база, сепарабельность, топологические многообразия. Уметь: - решать задачи на основные понятия топологии Владеть навыками: - применения аппарата топологии для решения различных математических задач.

случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности		
--	--	--

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единиц, 72 акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Общая топология	5	4	3		1		6	
2	Гладкая топология	5	6	3		1		15	Задания для самостоятельной работы
3	Теория узлов	5	6	10		2		10	Контрольная работа
							0,3	4,7	Зачет
	Всего		16	16		4	0,3	35,7	

Содержание разделов дисциплины

1. Общая топология

- 1.1. Топологическое пространство. Сравнение топологий.
- 1.2. Метрическое пространство. Примеры.
- 1.3. Подпространства топологического пространства.
- 1.4. Внутренность и замыкание, их свойства.
- 1.5. Граничная, предельная, внутренняя, внешняя, изолированная точки, точка прикосновения.
- 1.6. Всюду плотное и нигде неплотное множества.
- 1.7. База и база в точке. Аксиомы счетности.
- 1.8. Покрытия
- 1.9. Аксиомы отделимости
- 1.10. Непрерывное отображение. Гомеоморфизмы
- 1.11. Компактность
- 1.12. Связность и линейная связность
- 1.13. Сумма и произведение топологических пространств.
- 1.14. Фильтр. Предел фильтра. Предел отображения по фильтру
- 1.15. Фундаментальная группа.

2. Гладкая топология

- 2.1. Топологические многообразия
- 2.2. Ориентируемые и неориентируемые многообразия. Примеры.
- 2.3. Гладкие многообразия. Примеры.
- 2.4. Край многообразия. Ориентация края.
- 2.5. Топологическая классификация двумерных многообразий
- 2.6. Триангуляция и клеточные разбиения многообразий
- 2.7. Эйлерова характеристика многообразия. Примеры.

3. Теория узлов

- 3.1. Узлы и зацепления. Эквивалентность узлов. Строгая эквивалентность узлов. Связная сумма узлов.
- 3.2. Нормальная проекция узла. Кратные точки.
- 3.3. Натягивание ориентированной связной поверхности на узел. Теорема Франкля-Понтрягина.
- 3.4. Диаграмма узла, индексы диаграммы. Система уравнений узла.
- 3.5. Полином Александера. Примеры.
- 3.6. Операции Рейдемейстера. Теорема Рейдемейстера.
- 3.7. Полином Конвея узла. Примеры.
- 3.8. Определение косы. Группа кос.
- 3.9. Замыкание косы. Примеры.
- 3.10. Раскручивание косы. Теорема и «трюк» Александера. Примеры.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционно-образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Академическая лекция с элементами лекции - беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;

- Adobe Acrobat Reader;
- Network 15 Mathematica 11 Increment Standard Bundled List Price with Service;
- Network 15 Mathematica 11 Upgrade L3549-7407.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»
http://www.lib.uni-yar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php
- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://www.biblio-online.ru/>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU <http://elibrary.ru/>
- База научных статей Mathnet
- База Scopus
- База Web of Sciences

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) Основная литература

1. Ефремович В.А., Чернавский А.В. Элементы топологии. Ярославль, ЯрГУ, 1981.
2. Игнаточкина Л. А. Топология для бакалавров математики. - Москва: Прометей, 2016. <https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN9785990745315-SCN0000/000.html>
3. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. - М.: Лань, 2022 <https://reader.lanbook.com/book/210431>

б) дополнительная литература

1. Постников М.М. Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987.
2. Масси У., Столингс Д. Дифференциальная топология. М.: Мир, 1978. <http://alexandr4784.narod.ru/mudt.html?ysclid=lj1due0qqt664105868>
3. Кроуэлл Р., Фокс Р. Введение в теорию узлов. М.: Мир, 1967.
4. Балабаев В.Е. Элементы топологии и анализа. Ярославль.: ЯрГУ, 1990.
5. Мантуров В.О. Лекции по теории узлов и их инвариантов . М. УРСС, 2001.
6. Борисович Ю.Г. и др. Введение в топологию. М.: Б.и.; Ленанд, 2015.
7. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. М.: Наука, 1977.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;

- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор(ы) :

Профессор кафедры математического анализа, д.ф.-м.н.

Балабаев В.Е.

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины
«Топология»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе
текущего контроля успеваемости**

Задания для самостоятельной работы

Задания по теме «Гладкая топология»

Рассмотрим множество V , полученное из счетного дизъюнктного объединения отрезков $[0, 1]$ отождествлением всех их начальных точек. Иначе говоря, V есть фактормножество множества $\mathbb{N} \times [0, 1]$ по следующему отношению эквивалентности: $(k, x) \sim (l, y)$, если и только если $(k, x) = (l, y)$ или $x = y = 0$. На множестве V рассмотрим следующие топологии:

- T^1 — фактортопология, на каждом экземпляре отрезка топология стандартная;
- T^2 — индуцированная топология при следующем вложении в бесконечное произведение $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \times \dots$:

$$(k, x) \mapsto \underbrace{0 \times 0 \times \dots \times 0}_{k-1} \times x \times 0 \times 0 \times \dots;$$

- T^3 — индуцированная топология при следующем вложении в \mathbb{R}^2 :

$$(k, x) \mapsto \left(x \cos \frac{2\pi}{k}, x \sin \frac{2\pi}{k} \right);$$

- T^4 — индуцированная топология при следующем вложении в \mathbb{R}^2 :

$$(k, x) \mapsto \left(x \cos \frac{\pi}{k}, x \sin \frac{\pi}{k} \right);$$

- T^5 — индуцированная топология при следующем вложении в \mathbb{R}^2 :

$$(k, x) \mapsto \left(\frac{x}{k} \cos \frac{2\pi}{k}, \frac{x}{k} \sin \frac{2\pi}{k} \right);$$

- T^6 — индуцированная топология при следующем вложении в \mathbb{R}^2 :

$$(k, x) \mapsto \left(\frac{x}{k} \cos \frac{\pi}{k}, \frac{x}{k} \sin \frac{\pi}{k} \right);$$

- T^7 — метрическая топология для метрики

$$\rho((k, x), (l, y)) = \begin{cases} |x - y|, & \text{если } k = l, \\ x + y, & \text{если } k \neq l; \end{cases}$$

Для каждой пары топологий из этого списка выяснить, какой из случаев имеет место: (а) топологии совпадают; (б) одна из топологий сильнее (какая?); (в) топологии несравнимы.

Контрольная работа «Топология»

- 1 Найти число связных компонент линейных групп: $GL(n, \mathbb{R})$, $O(n)$, $GL(n, \mathbb{C})$, $U(n)$, $O(p, q)$, $U(p, q)$, $Sp(n)$.
- 2 Доказать, что бесконечное счетное произведение $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots$ гомеоморфно канторову множеству.
- 3 Доказать, что одноточечная компактификация плоскости \mathbb{R}^2 гомеоморфна двумерной сфере S^2 .
- 4 Открытым листом Мёбиуса называется факторпространство произведения $[0, 1] \times (0, 1)$ по отождествлению $(0, x) \sim (1, 1 - x)$. Доказать, что одноточечная компактификация листа Мёбиуса гомеоморфна проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, топология на которой задается следующими определяющими условиями:
(а) в аффинной части \mathbb{R}^2 индуцированная топология стандартна;
(б) проективные преобразования являются гомеоморфизмами.

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Список вопросов к зачёту

1. Топологическое пространство. Сравнение топологий.
2. Метрическое пространство. Примеры.
3. Подпространство топологического пространства.
4. Внутренность и замыкание, их свойства.
5. Граничная, предельная, внутренняя, внешняя, изолированная точки, точки прикосновения.
6. Всюду плотное и нигде не плотное множество.
7. База и база в точке. Аксиомы счетности.
8. Покрытия
9. Аксиомы отделимости
10. Непрерывные отображения. Гомеоморфизм.
11. Компактность
12. Сумма и произведения топологических пространств.
13. Фильтр. Предел фильтра. Предел отображения по фильтру.
14. Фундаментальная группа.
15. Топологические многообразия.
16. Ориентируемые и не ориентируемые многообразия. Примеры.
17. Гладкие многообразия. Примеры.
18. Край многообразия. Ориентация края.
19. Топологическая классификация двумерных многообразий.
20. Триангуляция и клеточное разбиение многообразий.
21. Эйлерова характеристика многообразия. Примеры.
22. Узлы и зацепления. Эквивалентность и строгая эквивалентность узлов.
23. Нормальная проекция узла. Кратные точки.
24. Диаграмма узла, индексы диаграммы. Система уравнений узла.
25. Полином Александера. Примеры.
26. Операции Рейдемейстера. Теорема Рейдемейстера.
27. Полином Конвея узла. Примеры.
28. Определение косы. Группа кос. Циклические косы.
29. Замыкание косы. Примеры.
30. Раскручивание косы. Теорема и «трюк» Александера. Примеры.

3. Правила выставления оценки на экзамене (в устной форме)

В экзаменационный билет включается два теоретических вопроса и задача. На подготовку к ответу дается 1 астрономический час. По итогам экзамена выставляется одна из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется студенту, который демонстрирует глубокое и полное владение содержанием материала и понятийным аппаратом дисциплины, дает развернутые, полные и четкие ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, правильно решает задачу.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, ответ которого на экзамене в целом соответствует указанным выше критериям, но отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой. В ответе имеют место отдельные неточности (несущественные ошибки), которые исправляются самим студентом после дополнительных и (или) уточняющих вопросов экзаменатора. Необходимым условием является хотя бы частичное решение задачи.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, который дает недостаточно полные ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, но при этом все же демонстрирует некоторые базовые знания по предмету. При аргументации ответа студент не обосновывает свои суждения. На часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не демонстрирует знания базовых понятий и результатов, не в состоянии решить задачу, плохо отвечает на дополнительные вопросы, не владеет понятийным материалом дисциплины. Дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора не приводят к коррекции ответов студента. На основную часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы. Кроме того, оценка «Неудовлетворительно» может быть выставлена при незнании каких-то базовых понятий и результатов. Оценка «Неудовлетворительно» выставляется также студенту, который взял экзаменационный билет, но отвечать отказался.

Правила выставления оценки на экзамене (в письменной форме)

Студенту предлагается индивидуальный вариант заданий, содержащий 4-6 задач. На выполнение и представление заданий дается не менее 3-х часов. При оценивании выполненных заданий может использоваться следующая система оценок за одно задание:

- + (4 балла) – задание выполнено полностью, без ошибок;
- + (3 балла) – задание выполнено с незначительной ошибкой или почти полностью;
- + (2 балла) – задание выполнено с существенной ошибкой или примерно наполовину;
- + (1 балл) – лишь какие-то элементы представленного ответа могут быть оценены положительно.

При таком подходе задания считаются примерно равноценными по трудоемкости.

При проверке работы в каждом задании отмечаются недостатки (в форме, доступной студенту), и тем самым объясняются поставленные баллы за задания. Пусть k – число задач в предложенном варианте (например, $k=5$). Определяется общее число M баллов, набранных студентом. Оценка зависит от величины отношения $r = M/N$, где $N=4k$ – максимальное возможное число баллов за работу. Возможная градация оценок следующая:

- $0.75 \leq r \leq 1$ - оценка «отлично»;
- $0.60 \leq r < 0.75$ - оценка «хорошо»;
- $0.26 \leq r \leq 0.59$ - оценка «удовлетворительно»;
- $0 \leq r \leq 0.25$ - оценка «неудовлетворительно».

Если задания имеют существенно различную трудоемкость (сложность), то их максимальная оценка может быть различной. В этом случае в указанную схему вносятся соответствующие изменения.

За преподавателем имеется право учитывать на экзамене в положительную сторону работу студента в семестре.

Требования для получения зачета

Каждый студент получает индивидуальное задание. Зачет выставляется по результатам собеседования в ходе которого студент сдает задание и отвечает на вопросы.

Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Топология»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основу освоения курса «Топологии» составляет сочетание лекций и практических занятий при определённом преобладании второго вида занятий. Если на лекциях излагаются основные теоремы и небольшое число примеров иллюстративного материала, то на практических занятиях решается значительное число задач.

Для успешного освоения дисциплины принципиально важно решение достаточно большого количества упражнений, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы математического анализа. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного материала. Конспекты лекции необходимо прорабатывать еще раз дома и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются объединением нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных навыков работы с аппаратом экстремальных задач, в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде контрольных работ и коллоквиума. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий, которые вызвали затруднения.

В конце 5-го семестра студенты сдают зачёт. Зачёт выставляется по результатам контрольной работы и краткого собеседования.

Освоить самостоятельно дисциплину «Топология» большинству студентов крайне сложно. В первую очередь это связано с тем, что используются многие понятия и методы смежных математических дисциплин: алгебра и аналитическая геометрия. Игрет роль и большой объем материала. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий сдать экзамен по итогам изучения дисциплины практически невозможно.