

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Численные методы оптимизации

Направление подготовки (специальности)
10.03.01 Информационная безопасность

Направленность (профиль)
«Безопасность компьютерных систем (в сфере информационных технологий)»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 21.04.2025, протокол № 10

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 05.05.2025

1. Цели освоения дисциплины

Целью изучения дисциплины «Численные методы оптимизации» является подготовка к освоению дисциплины «Основы машинного обучения». Для специальности «Информационная безопасность» актуальность данной дисциплины обусловлена тем, что задачи информационной безопасности по выявлению уязвимостей или нестандартного поведения программного обеспечения в большом объеме данных являются предметом рассмотрения машинного обучения, методы которого в свою очередь проистекают из численных методов оптимизации.

Дисциплина обеспечивает приобретение знаний и умений в области использования численных методов оптимизации, способствует освоению принципов их применения на практике.

Задачами освоения дисциплины «Численные методы оптимизации» являются:

- приобретение навыков постановки и решения оптимизационных задач;
- освоение современных оптимизационных алгоритмов, приобретение навыков их программной реализации;
- приобретение навыков практического применения оптимизационных алгоритмов;
- освоение методологии выбора численных алгоритмов и критериев их качества для решения задач оптимизации.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

Для освоения данной дисциплины обучающиеся должны владеть аппаратом математического анализа, линейной алгебры, программирования на языках высокого уровня.

Для успешного освоения дисциплины «Численные методы оптимизации» ей должны предшествовать следующие дисциплины:

- «Математический анализ»;
- «Линейная алгебра»;
- «Информатика»;
- «Языки программирования».

Дисциплина предшествует дисциплине «Основы машинного обучения».

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Общепрофессиональные компетенции		
ОПК-3 Способен использовать необходимые математические методы для решения задач профессиональной деятельности	И-ОПК-3.3 Применяет математический аппарат для решения прикладных и теоретических задач	Знать: - методы одномерной и многомерной безусловной оптимизации; - методы условной оптимизации. Владеть: - навыками эффективного линейного программирования.

	И-ОПК-3.6 Умеет применять совокупность необходимых математических методов для решения задач обеспечения защиты информации	Уметь: - ставить задачи оптимизации; - применять на практике численные методы оптимизации.
--	---	---

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы, 108 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Математическая постановка задач оптимизации	7	4	4				2	Задания для самостоятельной работы
2	Одномерная оптимизация	7	4	4		1		4	Задания для самостоятельной работы
3	Минимум функций многих переменных	7	2	2		1		2	Задания для самостоятельной работы
4	Методы использования производных	7	2	2		1		4	Задания для самостоятельной работы
5	Условная оптимизация	7	4	4				2	Задания для самостоятельной работы
6	Случайный поиск	7	4	4		1		4	Задания для самостоятельной работы
7	Линейное программирование	7	4	4				3	
8	Симплекс метод	7	4	4		1		4	
9	Методы решения транспортной задачи	7	4	4		1		2	
							0,3	10,7	Зачет
	ИТОГО		32	32		6	0,3	37,7	

Содержание разделов дисциплины

Тема 1. Математическая постановка задач оптимизации.

Виды ограничений. Критерии оптимальности. Классификация задач.

Тема 2. Одномерная оптимизация.

Методы сужения интервала неопределенности. Общий поиск. Унимодальные функции. Метод деления интервала пополам. Метод золотого сечения. Установление первоначального интервала неопределенности. Ньютоновские методы.

Тема 3. Минимум функций многих переменных.

Рельеф функции. Метод покоординатного спуска (Метод Гаусса). Метод оврагов.

Тема 4. Методы использования производных.

Градиентные методы. Метод Ньютона. Метод Марквардта.

Тема 5. Условная оптимизация.

Задачи с ограничениями в виде равенств. Множители Лагранжа. Задачи с ограничениями в виде неравенств. Методы штрафных функций. Метод факторов.

Тема 6. Случайный поиск.

Простой случайный поиск. Ненаправленный случайный поиск. Направленный случайный поиск. Алгоритм парной пробы. Алгоритм наилучшей пробы. Метод статистического градиента. Алгоритм наилучшей пробы с направляющим гиперквадратом. Алгоритмы глобального поиска.

Тема 7. Линейное программирование.

Примеры задач линейного программирования. Основная задача линейного программирования. Основная задача линейного программирования с ограничениями-неравенствами. Геометрическое толкование задач линейного программирования.

Тема 8. Симплекс метод.

Алгоритм симплекс метода. Вырожденность в задачах линейного программирования. Двойственность задачи линейного программирования. Метод последовательного уточнения оценок.

Тема 9. Методы решения транспортной задачи.

Метод северо-западного угла. Метод минимального элемента. Метод потенциалов.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Академическая лекция (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

Проблемная лекция – изложение материала, предполагающее постановку проблемных и дискуссионных вопросов, освещение различных научных подходов, авторские комментарии, связанные с различными моделями интерпретации изучаемого материала. Проблемная лекция начинается с вопросов, с постановки проблемы, которую в ходе изложения материала необходимо решить. В лекции сочетаются проблемные и информационные начала. При этом процесс познания студентов в сотрудничестве и диалоге с преподавателем приближается к поисковой, исследовательской деятельности. Содержание проблемы раскрывается путем организации поиска ее решения или суммирования и анализа традиционных и современных точек зрения.

Обобщающая лекция – проводится в завершение изучения раздела или темы для закрепления знаний. На лекции вновь выделяются основные вопросы, используются обобщающие таблицы, схемы, алгоритмы, позволяющие включить усвоенные знания в новые связи и зависимости, переводя их на более высокие уровни усвоения.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний по предложенному алгоритму.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса используются:
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader;

при проведении практических занятий используется программное обеспечение:

- Python.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»

http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>

- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>

- Электронная библиотечная система «Консультант студента»

<https://www.studentlibrary.ru>

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. А. Ф. Измаилов, М. В. Солодов Численные методы оптимизации. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 300с. <https://www.studentlibrary.ru/ru/book/ISBN5922100459.html>

2. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков Численные методы: учеб. пособие для вузов - М.: Бином. Лаборатория знаний, 2020. – 636с. <https://www.studentlibrary.ru/ru/book/ISBN9785001018360.html>

б) дополнительная литература

1. Волков Е. А. Численные методы: учеб. пособие для вузов - СПб.: Лань, 2022. - 252с. <https://reader.lanbook.com/book/254663>

в) ресурсы сети «Интернет» (при необходимости)

- <http://github.com/>
- <http://habr.com/>

- Python, Свободное ПО, <https://www.python.org/>

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий, оснащенные средствами вычислительной техники, с установленным программным обеспечением;
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор(ы):

Доцент кафедры КБиММОИ, канд. физ.-мат. наук

Д. М. Мурин

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины
«Численные методы оптимизации»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**1.1 Контрольные задания и иные материалы,
используемые в процессе текущей аттестации**

Задания для самостоятельной работы

1. Найти множество точек минимума функции $f(x)$ на множестве X :
а) $f(x) = \sin^2 \pi x$, $X = R$; б) $f(x) = |x - x^2|$, $X = [-1, 2]$; в) $f(x) = \cos \pi/2$, $X = [0, 1]$;
г) $f(x) = x$ при $|x| > 1$; 1 при $|x| \leq 1$, $X = R$.
2. Покажите, что множество точек минимума функции $f(x)$ на множестве X пусто и найти $m_0 = \inf_{x \in X} f(x)$?
а) $f(x) = 1 / (1 + x^2)$, $X = R$; б) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$, $X = (-\infty, 5)$;
в) $f(x) = x \sin x$, $X = R$; г) $f(x) = \arctg x$, $X = (-\infty, -1]$;
д) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $X = [-2, 2]$; е) $f(x) = 1 / \ln x$, $X = (0, 1)$; ж) $f(x) = 1 / \ln x$, $X = (1, +\infty)$.
3. Показать, что если $\min_{x \in X} f(x)$ существует, то $\inf_{x \in X} f(x) = \min_{x \in X} f(x)$.
4. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – две полунепрерывные снизу функции на множестве $X \subseteq R^n$. Будут ли полунепрерывными снизу на множестве X следующие функции:
а) $\lambda f(x) + \mu g(x)$, $\lambda, \mu - \text{const}$; б) $f^*(x) = \min\{f(x), g(x)\}$;
в) $f^*(x) = \max\{f(x), g(x)\}$; г) $|f(x)|$?
5. При каких значениях параметра c функция $f(x)$ на множестве $X = R$ имеет вид $f(x) = (5 - 5e^{-|x|})^{-1}$, $x \neq 0$; $c, x = 0$.
6. Найти интервалы монотонности и точки экстремума следующих функций:
а) $f(x) = (x^3 - 15x^2 + 7x + 1) / 10$; б) $f(x) = (x^2 - 3x + 2) / (x^2 + 2x + 1)$;
в) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$; г) $f(x) = x^2 / 2 + 8 / x^2$;
д) $f(x) = x^3 / 3 - 5x^2 / 2 + 6x - 2$; е) $f(x) = x^2 / (1 + x^2)$;
ж) $f(x) = (1 + x)^2 e^{2x}$; з) $f(x) = (2x^2 + 2x + 3) e^{-2x}$.
7. Доказать, что выпуклая на $[a, b]$ функция $f(x)$, отличная от постоянной, не может достигать своей верхней границы внутри отрезка $[a, b]$.
8. Пусть выпуклая функция $f(x): R \rightarrow R$ дифференцируема в точках a и b , $a < b$. Доказать, что точка минимума принадлежит множеству (a, b) тогда и только тогда, когда $f'(a) < 0, f'(b) > 0$.
9. Пусть выпуклая на $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет обратную функцию. Является ли обратная функция также выпуклой? Привести иллюстрирующие примеры.
10. Показать, что следующие функции $f(x)$ унимодальны на отрезке $[a, b]$:
а) $f(x) = x^2 - 3x + x \ln x$, $[a, b] = [1, 2]$; б) $f(x) = \ln(1 + x^2) - \sin x$, $[a, b] = [0, \pi/4]$;
в) $f(x) = x^4 / 4 + x^2 - 8x + 12$, $[a, b] = [0, 2]$; г) $f(x) = x^2 / 2 - \sin x$, $[a, b] = [0, 1]$.
11. Показать, что любая из точек локального минимума функции $f(x)$, унимодальной на отрезке $[a, b]$, является и точкой ее глобального минимума.
12. Показать, что если функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a, b]$ и $a \leq c < d \leq b$, то $f(x)$ унимодальна на отрезке $[c, d]$.

13. Найти максимальное значение b , при котором функция $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ унимодальна на отрезке $[-5, b]$.
14. На какие три части следует разбить отрезок $[-1, 2]$, чтобы на каждой из них функция $f(x) = ||x(x-1)| - 1|$ была унимодальной?
15. Пусть $f(x)$ – унимодальная дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция, причем $|f'(x)| \leq M$ при $x \in [a, b]$. Оценить погрешность ε_n нахождения минимума f^* при разбиении отрезка $[a, b]$ на n частей.
16. Может ли применение методов сокращения отрезков поиска привести к неверному определению точки минимума x^* , если функция $f(x)$ не является унимодальной? Ответ пояснить иллюстрацией.
17. Найти условные экстремумы функций:
 - а) $f(x) = f(x_1, x_2) = 1/x_1 + 1/x_2$ при условии $x_1 + x_2 = 2$;
 - б) $f(x) = f(x_1, x_2) = 1/x_1 - 3/x_2$ при условии $3x_1 - x_2 = 6$;
 - в) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1(x_2)^2$ при условии $x_1 + 2x_2 = 1$;
 - г) $f(x) = f(x_1, x_2) = 25x_1(x_2)^2$ при условии $x_1 - 10x_2 = 1$;
 - д) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1x_2$ при условии $x_1 + x_2 = 1$;
 - е) $f(x) = f(x_1, x_2) = 4x_1x_2$ при условии $x_1 + x_2 = -1$.
18. Показать, что при обновлении метода сопряженных градиентов на каждом шаге (если $\beta^{(k)} = 0, k = 1, 2, \dots$) он переходит в метод наискорейшего спуска.
19. Показать, что точка минимума квадратичной функции может быть найдена с помощью одной итерации метода Ньютона из произвольного начального приближения $x^{(0)} \in R^n$.
20. Используя результат 19, показать, что для нахождения точки минимума квадратичной функции достаточно одной итерации метода Ньютона-Рафсона при произвольном начальном приближении $x^{(0)} \in R^n$.
21. Минимизировать функцию $f(x) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4$ методом Ньютона, используя произвольное начальное приближение $x^{(0)} \in R^4$.
22. Свиноферма имеет возможность закупать от одного до трех различных видов зерна и готовит из него различные виды комбикормов. Зерновые культуры содержат различное количество ингредиентов. При этом в расчет принимаются ингредиенты A, B, C, D . Затраты на единицу веса зерна равны 41, 35 и 96 рублям для зерна первого, второго и третьего видов соответственно. В единице веса каждого из видов зерна содержится: ингредиента A – 2, 3 и 7 единиц; ингредиента B – 1, 1 и 0 единиц; ингредиента C – 5, 3 и 0 единиц; ингредиента D – 0,6, 0,25 и 1 единица. На плановый период для прокорма имеющегося поголовья свиней требуется, чтобы общее количество корма было не меньше 2800 единиц веса и в нем содержалось по весу не менее 1250, 250, 900 и 265 единиц веса ингредиентов A, B, C, D соответственно. Определить состав комбикорма, при котором его стоимость будет минимальна.
23. В цехе два токарных станка и один автомат. Требуется организовать производство деталей в комплектах. Один комплект состоит из одной детали первого типа, трех деталей второго типа и двух деталей третьего типа. Дневная производительность токарного станка: 50 деталей первого типа, или 40 деталей второго типа, или 80 деталей третьего типа. Для автомата эти производительности равны соответственно 120, 90 и 60. Составить программу работы оборудования в цехе, при которой будет производиться максимальное количество комплектов.
24. Завод выпускает радиоприемники трех различных моделей A, B и C . Каждое изделие приносит доход в размере 8, 15 и 25 условных единиц соответственно. Необходимо, чтобы завод выпускал за неделю не менее 100 приемников модели A , 150 приемников модели B и 75 приемников модели C . Каждая модель характеризуется определенным временем, необходимым для изготовления соответствующих деталей, сборки изделия и его упаковки. В расчете на 10 приемников модели A требуется 3 часа на изготовление соответствующих деталей, 4 часа на сборку и 1 час на упаковку.

- Соответствующие показатели в расчете на 10 приемников модели B равны 3.5, 5 и 1.5 часам; а на 10 приемников модели C равны 5, 8 и 3 часам. В течение недели завод может потратить на производство радиодеталей 150 часов, на сборку 200 часов и на упаковку 60 часов. Решить задачу оптимального производственного планирования.
25. Имеется 69 труб для отопительной сети по 1070 см каждая. Их необходимо разрезать на трубы по 130, 150 и 310 см. Найти такой вариант раскроя поступивших труб, при котором отходы были бы минимальны

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Список вопросов к зачету:

1. Виды ограничений. Критерии оптимальности. Классификация задач.
2. Методы сужения интервала неопределенности. Общий поиск.
3. Унимодальные функции. Метод деления интервала пополам.
4. Метод золотого сечения. Установление первоначального интервала неопределенности.
5. Ньютоновские методы.
6. Рельеф функции. Метод покоординатного спуска (Метод Гаусса). Метод оврагов.
7. Градиентные методы. Метод Ньютона. Метод Марквардта.
8. Задачи с ограничениями в виде равенств. Множители Лагранжа.
9. Задачи с ограничениями в виде неравенств. Методы штрафных функций. Метод факторов.
10. Простой случайный поиск. Ненаправленный случайный поиск.
11. Направленный случайный поиск. Алгоритм парной пробы.
12. Алгоритм наилучшей пробы. Метод статистического градиента.
13. Алгоритм наилучшей пробы с направляющим гиперквадратом. Алгоритмы глобального поиска.
14. Примеры задач линейного программирования. Основная задача линейного программирования.
15. Основная задача линейного программирования с ограничениями-неравенствами. Геометрическое толкование задач линейного программирования.
16. Алгоритм симплекс метода. Вырожденность в задачах линейного программирования.
17. Двойственность задачи линейного программирования. Метод последовательного уточнения оценок.
18. Метод северо-западного угла решения транспортной задачи.
19. Метод минимального элемента решения транспортной задачи.
20. Метод потенциалов решения транспортной задачи.

3. Правила выставления оценки на зачете.

В процессе зачета требуется ответить на один из приведенных выше вопросов. На подготовку к ответу дается не менее 1 академического часа.

По итогам зачета выставляется одна из оценок: «зачтено», «не зачтено».

Оценка «Зачтено» выставляется студенту, который демонстрирует владение содержанием материала и понятийным аппаратом численных методов оптимизации; умеет связывать теорию с практикой. В ответе могут допускаться отдельные неточности (несущественные ошибки), которые исправляются самим студентом после дополнительных и

(или) уточняющих вопросов экзаменатора. На часть дополнительных вопросов студент может не дать ответ или дать неверный ответ.

Оценка «Не зачтено» выставляется студенту, который демонстрирует разрозненные, бессистемные знания; беспорядочно и неуверенно излагает материал; не умеет выделять главное и второстепенное, не умеет соединять теоретические положения с практикой; допускает грубые ошибки при определении понятий, вследствие непонимания их существенных и несущественных признаков и связей; дает неполные ответы, логика и последовательность изложения которых имеют существенные и принципиальные нарушения, в ответах отсутствуют выводы. Дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора не приводят к коррекции ответов студента. На основную часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

Оценка «Не зачтено» выставляется также студенту, который взял экзаменационный билет, но отказался дать на него ответ.

Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Численные методы оптимизации»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Учебным планом на изучение дисциплины «Численные методы оптимизации» отводится один семестр. В качестве итогового контроля предусмотрен зачет. В процессе изучения дисциплины проводятся практические занятия, выполняются домашние задания.

Дисциплина «Численные методы оптимизации» является предшествующей для дисциплины «Основы машинного обучения» и призвана обеспечить готовность обучающихся к освоению последней.

Для успешного освоения дисциплины важно, чтобы обучающийся уделит особенное внимание выполнению практическим занятиям. Теоретические основы, необходимые для их выполнения, подробно разбираются на лекциях. Основная цель практических занятий – дать обучающимся представление о возможном применении численных методов оптимизации на практике, в том числе в сфере информационной безопасности. В процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного материала, чему способствуют регулярные задания для самостоятельной работы. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

В качестве заданий для самостоятельной работы дома обучающимся предлагаются математические или практические упражнения, которые должны позволить обучающемуся лучше изучить понятия и методы, применяемые им для решения типовых задач из соответствующих разделов дисциплины. Решения задач должны быть подготовлены, оформлены и представлены в установленные сроки.

По окончании семестра изучения дисциплины обучающиеся сдают зачет. Зачет принимается по билетам, каждый из которых включает в себя два теоретических вопроса. На самостоятельную подготовку к зачету выделяется 2 дня.

Опыт преподавания дисциплины «Численные методы оптимизации» говорит о сложности ее самостоятельного изучения для обучающегося, несмотря на наличие достаточно качественных учебных пособий. Это связано с насыщенностью изучаемого материала и большим числом практических занятий, необходимых для приобретения навыков применения изучаемого материала на практике. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является настоятельно рекомендуемым.