

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

18 мая 2021 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Дифференциальные уравнения**

Направление подготовки (специальности)  
10.05.01 Компьютерная безопасность

Направленность (профиль)  
«Математические методы защиты информации»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 13.04.2021, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 5 от 18.05.2021

## 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «дифференциальные уравнения» обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с ФГОС ВПО, содействует формированию мировоззрения и развитию математического мышления. Кроме того, дисциплина способствует развитию логического, эвристического и алгоритмического мышления и дает представление о месте и роли математики в современном мире, мировой культуре и истории. Цель дисциплины – изучение основ дифференциальных уравнений, включающих теорию и практические методы решения, качественного исследования ДУ, теорию устойчивости.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к базовой части образовательной программы.

Дисциплина основывается на знаниях и навыках, полученных слушателями при изучении таких дисциплин, как «Математический анализ», «Алгебра». Основу курса составляют методы качественного исследования, теоретические и практические методы решения дифференциальных уравнений.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>	
<b>ОПК-2</b> Обладает способностью корректно применять при решении профессиональных задач аппарат математического анализа, геометрии, алгебры, дискретной математики, математической логики, теории алгоритмов, теории вероятностей, математической статистики, теории информации, теоретико-числовых методов	<b>Знать:</b> аппарат теории ДУ, формулировки утверждений, методы их доказательства. <b>Уметь:</b> - решать задачи; - применять понятия, результаты и методы теории ДУ. <b>Владеть:</b> - математическим аппаратом теории ДУ, - методами решения задач и доказательства утверждений.

## 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)		Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации
			Контактная работа		

			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	(по семестрам)
1	Вводная лекция. Основные понятия курса дифференциальных уравнений	4	2	1				1	
2	Уравнения первого порядка	4	2	1		1		1	
3	Системы дифференциальных уравнений	4	4	2				1	
4	Линейные системы дифференциальных уравнений	4	4	2		1		2	
5	Линейные системы с постоянными коэффициентами	4	4	2				1	К.р. №1
6	Дифференциальные уравнения высших порядков	4	4	2		1		1	
7	Краевые задачи	4	4	2				1	
8	Теоремы существования	4	2	1		1		2	
9	Теория устойчивости	4	4	2				2	
10	Линейные разностные уравнения	4	2	1		1		1	К.р. №2
							0,3	5,7	Зачет
	<b>Всего</b>		<b>32</b>	<b>16</b>		<b>5</b>	<b>0,3</b>	<b>18,7</b>	

### Содержание разделов дисциплины:

#### Раздел 1. Вводная лекция. Основные понятия

Определения дифференциального уравнения, порядка ДУ, решения ДУ, интегральной кривой, поля направлений, изоклин. Постановка задачи Коши, особые решения.

#### Раздел 2. Элементарные методы интегрирования уравнений первого порядка

Уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные уравнения, формула Лагранжа, уравнения Бернулли, уравнения Риккати, уравнения в полных дифференциалах. Свойства решений автономных уравнений.

#### Раздел 3. Системы дифференциальных уравнений

Определения системы ДУ первого порядка, решения системы ДУ. Векторная запись системы ДУ. Постановка задачи Коши для системы ДУ, формулировка теоремы об однозначной разрешимости задачи Коши.

#### Раздел 4. Линейные системы дифференциальных уравнений

Свойства решений линейных однородных систем, фундаментальная система решений, фундаментальная матрица, матрица Коши. Формула Остроградского-Лиувилля. Матричные ДУ, эквивалентность множества фундаментальных матриц и множества решений матричного ДУ с невырожденной начальной матрицей. Формула Лагранжа решения линейной неоднородной системы.

#### Раздел 5. Линейные системы с постоянными коэффициентами

Решение линейных однородных систем, решение линейных неоднородных систем с неоднородностью специального вида, определение матричной экспоненты, оценка матричной экспоненты, матричная экспонента как сумма ряда.

#### Раздел 6. Дифференциальные уравнения высших порядков

ДУ  $n$ -го порядка и эквивалентные им системы. Постановка задачи Коши, формулировка теоремы об однозначной разрешимости задачи Коши. Свойства решений линейного

однородного уравнения. Формула Остроградского-Лиувилля. Исследование линейной зависимости функций с помощью определителя Вронского. Методы решения линейных неоднородных уравнений: метод вариации постоянных, функция Коши. Линейные однородные и неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами. Уравнения Эйлера.

#### **Раздел 7. Краевые задачи**

Постановка краевых задач, условие разрешимости. Функция Грина. Задачи типа Штурма-Лиувилля, нахождение собственных значений и собственных функций краевых задач.

#### **Раздел 8. Теоремы существования**

Доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Непродолжаемые решения: определение, доказательство существования, свойства. Непрерывная зависимость решений от параметров и начальных данных. Дифференцируемость решений по параметрам и начальным данным. Уравнения в вариациях по параметрам и начальным данным.

#### **Раздел 9. Теория устойчивости**

Основные определения теории устойчивости. Устойчивость решений линейных систем. Устойчивость нулевого решения линейных систем с постоянной матрицей. Теорема об устойчивости по первому приближению. Метод функций Ляпунова: первая, вторая и третья теоремы Ляпунова, теорема Четаева. Устойчивость нулевого решения возмущенных систем. Фазовый портрет линейных однородных систем второго порядка с постоянными коэффициентами, классификация особых точек.

#### **Раздел 10. Линейные разностные уравнения**

Понятие о линейных разностных уравнениях и их решениях. Фильтрующие свойства разностных уравнений.

### **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В образовательном процессе по дисциплине используются:  
для формирования материалов для контроля успеваемости и проведения аттестации:

- программы Microsoft Office и свободные аналоги;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»  
<https://www.studentlibrary.ru>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература:**

1. Глызин С. Д., Нестеров П. Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2016.  
<https://www.elibrary.ru/item.asp?edn=wpozbr&ysclid=ljshgci4b3555840301>
2. Глызин С. Д., Толбей А. О. Практикум по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. – Ярославль: ЯрГУ, 2017.  
<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20110408.pdf>
3. Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения : Учеб. для вузов / Тихонов А. Н. , Васильева А. Б. , Свешников А. Г. - 4-е изд. , - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 256 с. (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6) - ISBN 978-5-9221-0277-3. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102773.html>

### **б) дополнительная литература:**

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Учебник - М.: Наука, 1982.
2. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Учебное пособие для вузов. - М.: Наука, 1985.
3. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учебник - М.: Едиториал УРСС, 2002.
4. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Учебное пособие. - М.: Наука, 1984.

5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. - М-Ижевск.: РХД, 2005.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи: учебное пособие для вузов. - Киев.: Высшая школа, 1989.
7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1984.

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

### **Автор(ы) :**

доцент кафедры математического моделирования  
кандидат физ.-мат. наук

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Дифференциальные уравнения»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

**Примеры задач для контрольных работ.**

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям  
 $\dot{x} = 2(x-2)(x+1)^2, \quad x(0) = 1.$
2. Найти общее решение  $(2x+2y-1)dx + (x+y-2)dy = 0.$
3. Найти общее решение  $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x.$
4. Найти общее решение  $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}, y_* = \frac{1}{x}.$
5. Найти общее решение  $(x+y-1)dx + (x-y^2+3)dy = 0.$
6. Найти общее решение  $y'' + 2y' + y = e^{-x} + 1;$
7. Найти общее решение  $y''' + 2y'' + y' = x + e^{-x};$
8. Найти общее решение  $\ddot{x} + x = \frac{4t^2 - 1}{2t\sqrt{t}};$
9. Найти общее решение системы  $x' = Ax$ , если  $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix};$
10. Найти общее решение системы  $x' = Ax$ , если  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$
11. Найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость  
$$\begin{cases} x' = -\sin y, \\ y' = 2x + \sqrt{1-3x-\sin y}. \end{cases}$$
12. При каких значениях  $a$  и  $b$  устойчив многочлен  $\lambda^4 + a\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + b.$
13. Найти общее решение системы:  $x' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}.$
14. Найти методом малого параметра два-три члена разложения  
 $xy' - \varepsilon x^2 - \ln(1+y) = 0, \quad y(1) = 0.$

**2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

1. Понятие дифференциального уравнения. Простейшие виды дифференциальных уравнений первого порядка (с разделяющимися переменными, однородные, в полных дифференциалах, Бернулли и Рикатти) и методы их решения.
2. Линейные уравнения 1 порядка. Метод комплексных амплитуд.

3. Линейные уравнения 1 порядка. Метод неопределенных коэффициентов.
4. Интегрирование линейных однородных уравнений порядка  $n$  (случай простых корней).
5. Интегрирование линейных однородных уравнений порядка  $n$  (случай кратных корней).
6. Интегрирование линейных неоднородных уравнений порядка  $n$ . Метод неопределенных коэффициентов и комплексных амплитуд.
7. Интегрирование линейных неоднородных уравнений порядка  $n$ . Метод вариации произвольных постоянных.
8. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
9. Интегрирование линейных неоднородных систем с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов и комплексных амплитуд.
10. Теорема существования и единственности для начальной задачи Коши в случае уравнения первого порядка. Метод Пикара.
11. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для линейных систем.
12. Принцип сжимающих отображений.
13. Теорема существования и единственности для задачи Коши в случае нормальной системы.
14. Продолжаемость решений дифференциальных уравнений.
15. Зависимость решений дифференциальных уравнений от параметров и начальных условий.
16. Асимптотика решений дифференциальных уравнений по малому параметру (регулярный случай).
17. Общие свойства систем линейных дифференциальных уравнений.
18. Фундаментальная матрица линейной системы, ее свойства.
19. Решение неоднородных систем линейных дифференциальных уравнений методом вариации произвольной постоянной.
20. Определитель Вронского и его свойства. Линейная зависимость и независимость функций.
21. Формула Остроградского-Лиувилля.
22. Функции от матриц, матричная экспонента. Способы построения матричной экспоненты.
23. Теорема об оценке матричной экспоненты.
24. Устойчивость. Определения, геометрический смысл понятия устойчивости.
25. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.
26. Функции Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости.
27. Теорема Четаева о неустойчивости.
28. Траектории в окрестности точки покоя. Типы точек покоя. Фазовый портрет линейной системы на плоскости.
29. Устойчивость решений систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Критерий Рауса - Гурвица, частотный критерий Михайлова.
30. Краевые задачи. Постановка и физическое содержание.
31. Неоднородные краевые задачи. Функция Грина.
32. Колебательная потеря устойчивости состоянием равновесия. Возникновение периодических решений.
33. Линейные разностные уравнения. Методы решения.



### **3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

#### **3.1 Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций**

**Пороговый уровень** (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

**Продвинутый уровень** (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объеме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

**Высокий уровень** (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;

- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

### **3.2 Описание процедуры выставления оценки**

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Дифференциальные уравнения»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Форма изложения материала – лекции и практические занятия. Для лучшего понимания теории необходимо решение задач, в том числе самостоятельное для закрепления полученных навыков.

Рекомендуется проведение в течение семестра контрольных работ для понимания степени усвоения дисциплины студентами. По их итогам проводится разбор наиболее типичных ошибок и при необходимости повторение наиболее трудного материала.