

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра компьютерной безопасности и математических методов обработки информации

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Дискретные функции**

Направление подготовки (специальности)  
10.05.01 Компьютерная безопасность

Направленность (профиль)  
«Математические методы защиты информации»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 24.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина "Дискретные функции" обеспечивает приобретение фундаментальных знаний, умений и навыков в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по специальности "10.05.01-Компьютерная безопасность" (уровень специалитета), содействует фундаментализации образования, развитию логического мышления и формированию математического и общенаучного мировоззрения. Целью изучения дисциплины является овладение базовыми понятиями и методами теории дискретных функций, формирование математической культуры студента, фундаментальная подготовка по основным разделам, овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений. Она играет исключительно важную роль для общематематической и общепрофессиональной подготовки специалиста. При ее изучении существенно используются знания, полученные при изучении математических дисциплин "Алгебра", "Теория чисел", "Дискретная математика" и "Математическая логика и теория алгоритмов". Знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплины "Дискретные функции", используются обучаемыми при изучении общепрофессиональных, профессиональных и профессионально-специализированных дисциплин.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-1</b> Способен применять математические методы для разработки требований к алгоритмам, реализующим современные методы обеспечения информационной безопасности, математически доказывать их корректность, проводить оценку	<b>И-ПК-1.3</b> Знание основных понятий, теорем и методов теории автоматных функций	<b>Знать:</b> - основные понятия, теоремы и методы теории дискретных функций - детерминированные и недетерминированные автоматы без выхода, автоматные языки, детерминированные автоматы с выходом, автоматные функции, - основные понятия, теоремы и методы теории примитивно рекурсивных, рекурсивных и частично рекурсивных функций, вычислимых и правильно вычислимых по Тьюрингу функции, - основные понятия, теоремы и методы теории дискретных функций

сложности задания и выполнения таких алгоритмов.		- булевы функции и функции k-значной логики, полные системы булевых функций, критерии полноты Э.Поста и А.Кузнецова, NP-полные задачи из теории булевых функций
	<b>И-ПК-1.4</b> Умение доказывать теоремы из теории автоматных функций	<b>Уметь:</b> - устанавливать неавтоматность некоторых языков, исследовать системы автоматных функций, - устанавливать примитивную рекурсивность, рекурсивность и частичную рекурсивность арифметических функций, доказывать вычислимость и правильную вычислимость функций - устанавливать полноту системы булевых функций, используя критерий полноты Э.Поста, устанавливать NP-полноту задач из теории булевых функций
	<b>И-ПК-1.5</b> Владение навыками построения, исследования и применения автоматных функций	<b>Владеть навыками:</b> - установления неавтоматности некоторых языков, - установления примитивной рекурсивности, рекурсивности и частичной рекурсивности арифметических функций, доказывать вычислимость и правильную вычислимость функций - установления полноты систем булевых функций, используя критерий полноты Э.Поста, установления NP-полноты задач из теории булевых функций
<b>ПК-3</b> Способен анализировать математические модели систем обеспечения информационной безопасности, а также проводить тестирование средств защиты информации на соответствие этим моделям	<b>И-ПК-3.1</b> Знает способы анализа математических моделей систем обеспечения информационной безопасности	<b>Знать:</b> - способы анализа математических моделей систем обеспечения информационной безопасности

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **2** зачетные единицы, **72** акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)		Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа		

			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Вводная лекция	9	1						
2	Булевы функции и функции k-значной логики	9	2	1				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
3	NP-полнота	9	2	1		1		1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
4	Схемы из функциональных элементов	9	2	1				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
5	Детерминированные автоматы без выхода	9	1	0,5				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
6	Детерминированные автоматы с выходом	9	1	0,5		1		1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
7	Машины Тьюринга	9	2	1				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
8	Частично рекурсивные, рекурсивные и примитивно рекурсивные функции	9	2	1				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
9	Примитивно рекурсивные и рекурсивные предикаты, отношения и множества, операции над ними	9	2	1				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
10	Задание функций и предикатов	9	2	1		1		1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
11	Нумерация	9	2	1				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
12	Вычислимость функций	9	2	1				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
13	Арифметизация теории машин Тьюринга	9	2	1		1		1	Задания для самостоятельной (домашней) работы

									Устный опрос
14	Нормальная форма Клини	9	1	1				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
15	Нумерация Клини частично рекурсивных функций	9	2	1		1		1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
16	Теорема Райса для частично рекурсивных функций	9	2	1				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
17	Конечные поля и многочлены над ними	9	2	1		1		1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
18	Дискретные функции над конечными полями	9	2	1				1	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
							0,3	0,7	зачет
	Всего		32	16		6	0,3	17,7	

### Содержание разделов дисциплины:

#### Тема 1. Вводная лекция.

Предмет курса. Принципы построения и изучения курса. Краткое содержание. Роль и место курса в формировании специалистов. Рекомендации по изучению курса, самостоятельной работе и литературе. О формах контроля и отчетности при изучении курса.

#### Тема 2. Булевы функции и функции $k$ -значной логики.

Булевы функции и функции многозначной ( $k$ -значной) логики. Их представление термами и формулами над заданной системой функций. Представление булевых функций формулами алгебры высказываний и многочленами Жегалкина. Замкнутые классы функций. Критерии полноты для булевых функций и функций многозначной логики - теоремы Э. Поста и А.В.Кузнецова. Представление функций многозначной логики рядами Фурье. Методы вычисления коэффициентов Фурье. Псевдобулевы функции и их задание. Минимизация булевых функций.

#### Тема 3. NP-полнота.

NP-полнота задач для булевых функций: "Выполнимость", "Проблема полноты конечной системы булевых функций", "Проблема шиферовости булевой функции", "Проблема вхождения в класс S", "Проблема вхождения в класс M", "Проблема вхождения в класс L".

#### Тема 4. Схемы из функциональных элементов.

Двоичный одноразрядный полусумматор и сумматор.  $n$ -разрядный сумматор. Шифраторы и дешифраторы, мультиплексоры и демультимплексоры.

#### Тема 5. Детерминированные автоматы без выхода.

Алфавиты и языки. Детерминированные автоматы без выхода: входной (внешний) и внутренний алфавиты, функция переходов, заключительные (допускающие, принимающие) состояния. Способы задания автоматов: табличный и диаграммой переходов. Конфигурации. Описание работы автомата в терминах преобразования конфигураций. Язык, принимаемый (допускаемый, распознаваемый) детерминированным автоматом. Регулярные выражения и регулярные языки. Операции с автоматами. Теорема С.Клини.

## **Тема 6. Детерминированные автоматы с выходом.**

Детерминированные автоматы с выходом: входной, выходной и внутренний алфавиты, функция переходов и функция выходов. Способы задания автоматов: табличный и диаграммой переходов. Автоматные (ограниченно-детерминированные) функции. Автоматные базисы и проблема полноты. Ее алгоритмическая неразрешимость. Эквивалентность состояний автомата с выходом. Теорема Хаффмана - Мили.

## **Тема 7. Машины Тьюринга.**

Интуитивное понятие "алгоритма" и его характерные черты. Задачи, приводящие к необходимости уточнения понятия "алгоритм". Арифметизация теории алгоритмов. Представляющая функция алгоритма. Вычислимые в интуитивном смысле функции. Два подхода к уточнению понятия "алгоритм". Машины Тьюринга-Поста: внешний и внутренний алфавиты, программы и команды. Конфигурации. Композиция и ветвление машин Тьюринга. Вычислимость и правильная вычислимость функций по Тьюрингу. Принцип Тьюринга- Поста-Черча. Правильная вычислимость исходных функций и сложения.

## **Тема 8. Частично рекурсивные, рекурсивные и примитивно рекурсивные функции.**

Тезис Черча. Примитивная рекурсивность теоретико-числовых функций. Операции суммирования и мультиплицирования.

## **Тема 9. Примитивно рекурсивные и рекурсивные предикаты, отношения и множества, операции над ними.**

Соотношения между классами примитивно рекурсивных, общерекурсивных и частично рекурсивных функций.

## **Тема 10. Задание функций и предикатов.**

Задание функций кусочными схемами. Ограниченный оператор минимизации. Примитивная рекурсивность функций, связанных с каноническим представлением натуральных чисел и с делением с остатком.

## **Тема 11. Нумерация.**

Канторовские нумерационные функции, их примитивная рекурсивность.

Примитивная рекурсивность функции Геделя.

## **Тема 12. Вычислимость функций.**

Правильная вычислимость по Тьюрингу любой частично рекурсивной функции.

## **Тема 13. Арифметизация теории машин Тьюринга.**

Частичная рекурсивность любой вычислимой по Тьюрингу функции.

## **Тема 14. Нормальная форма Клини.**

Универсальные частично рекурсивные функции.

## **Тема 15. Нумерация Клини частично рекурсивных функций.**

Универсальные функции Клини.

Теорема о неподвижной точке для частично рекурсивных функций.

## **Тема 16. Теорема Райса для частично рекурсивных функций.**

Ее значение для компьютерной практики.

## **Тема 17. Конечные поля и многочлены над ними.**

Основные свойства конечных полей. Теоремы существования и единственности. Описание подполей конечного поля. Теорема о примитивном элементе. Существование и число неприводимых многочленов заданной степени над конечным полем. Способ построения конечного поля. Описание минимального поля разложения и корней многочлена над конечным полем.

## **Тема 18. Дискретные функции над конечными полями.**

Представление дискретных функций многочленами над полем. Спектральные представления дискретных функций.

## **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»

**8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

**а) основная литература**

1. Шевелев, Ю. П. Дискретная математика : учебное пособие для вузов / Ю. П. Шевелев. — 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 592 с. — ISBN 978-5-507-49681-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/399194>
2. М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учебное пособие — Санкт-Петербург: Лань, 2008. <https://reader.lanbook.com/book/112>
3. Дурнев В.Г., Башкин М.А., Якимова О.П. Элементы дискретной математики. — Ярославль: ЯрГУ, 2007. — Часть 1. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20070295.pdf>
4. Дурнев В. Г., Башкин М. А., Якимова О.П. Элементы дискретной математики. — Ярославль: ЯрГУ, 2007. — Часть 2. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20070280.pdf>
5. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике: учебное пособие. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. <https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN9785922104777-SCN0000/000.html>
6. И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов: учебник — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. <https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN5922100262-SCN0000/000.html>

**б) дополнительная литература**

1. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра. - Санкт-Петербург: Лань, 2022. <https://reader.lanbook.com/book/187793>
2. Редькин Н. П. Дискретная математика. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. <https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN9785922110938-SCN0000/000.html>
3. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. Т.1,2. - М.: Мир. 1988.
4. Брауэр В. Введение в теорию конечных автоматов. - М.: Мир. 1987.
5. Минский М. Вычисления и автоматы. - М.: Мир. 1971.
6. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.

**9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.



Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

**Автор(ы):**

Профессор, доктор физ.-матем. наук

Дурнев В.Г.

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Дискретные функции»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

Домашние задания по теме № 2 **"Булевы функции и функции k-значной логики."**

Задания для самостоятельного решения № 1 - 36 из параграфа 2 части II сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Задания для самостоятельного решения № 8.1 - 8.45 из параграфа 8 главы 2 сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

Домашние задания по теме № 3 **"NP-полнота. "**

Задания для самостоятельного решения № 16.19 - 16.26 из параграфа 16 главы 2 сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

Домашние задания по теме № 4 **"Схемы из функциональных элементов."**

Задания для самостоятельного решения № 13.1 - 13.17 из параграфа 13 главы 2 сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

Домашние задания по теме № 5 **"Детерминированные автоматы без выхода."**

Задания для самостоятельного решения № 1.1 - 1.27 из параграфа 1 главы VI, № 2.1 - 2.24 из параграфа 2 главы VI сборника задач Гаврилов Г.П. Сборник задач по дискретной математике: учеб. пособие для вузов / Г.П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. М.: Наука, 1977. 368 с.

Домашние задания по теме № 6 **"Недетерминированные автоматы без выхода. "**

Задания для самостоятельного решения № 1.1 - 1.27 из параграфа 1 главы VI, № 2.1 - 2.24 из параграфа 2 главы VI сборника задач Гаврилов Г.П. Сборник задач по дискретной математике: учеб. пособие для вузов / Г.П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. М.: Наука, 1977. 368 с.

Домашние задания по теме № 7 **"Детерминированные автоматы с выходом."**

Задания для самостоятельного решения № 3.1 - 3.22 из параграфа 3 главы VI сборника задач Гаврилов Г.П. Сборник задач по дискретной математике: учеб. пособие для вузов / Г.П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. М.: Наука, 1977. 368 с.

Домашние задания по теме № 8 **"Машины Тьюринга."**

Задания для самостоятельного решения № 1 - 12 из параграфа 2 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Домашние задания по теме № 9 **"Частично рекурсивные, рекурсивные и примитивно рекурсивные функции."**

Задания для самостоятельного решения № 1 - 15 из параграфа 1 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Домашние задания по теме № 10 **"Примитивно рекурсивные и рекурсивные предикаты, отношения и множества, операции над ними."**

Задания для самостоятельного решения № 16 - 30 из параграфа 1 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Домашние задания по теме № 11 **"Задание функций и предикатов."**

Задания для самостоятельного решения № 31 - 44 из параграфа 1 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Домашние задания по теме № 12 **"Нумерация."**

Задания для самостоятельного решения № 31 - 44 из параграфа 1 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Домашние задания по теме № 7 **"Множества, отношения и предикаты."**

Задания для самостоятельного решения № 16 - 30 из параграфа 1 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Домашние задания по теме № 13 **"Машины Тьюринга."**

Задания для самостоятельного решения № 13 - 25 из параграфа 2 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Домашние задания по теме № 14 **"Алгоритмическая неразрешимость"**

Задания для самостоятельного решения № 1 - 48 из параграфа 3 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Домашние задания по теме № 15 **"Нумерация Клини частично рекурсивных функций"** и по теме № 16 **"Нумерация Поста рекурсивно перечислимых множеств."**

Задания для самостоятельного решения № 1 - 43 из параграфа 4 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Домашние задания по теме № 18 **"Конечные поля и многочлены над ними."**

Задания для самостоятельного решения № 1 - 17 из параграфа 5 глава XXII учебника Глухов М.М. Алгебра. Учебник. В 2-х т. Т. II. / М.М. Глухов, В.П. Елизаров, А.А. Нечаев. М.: Гелиос АРВ. 2003. 416 с.

Домашние задания по теме № 19 **"Дискретные функции над конечными полями."**

Задания для самостоятельного решения № 1 - 76 из параграфа 13 глава XXV учебника Глухов М.М. Алгебра. Учебник. В 2-х т. Т. II. / М.М. Глухов, В.П. Елизаров, А.А. Нечаев. М.: Гелиос АРВ. 2003. 416 с.

Задания для самостоятельного решения № 10.1 - 10.21 из параграфа 10 главы 2 сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

### Рекомендуемый перечень тем контрольных работ

Булевы функции и функции  $k$ -значной логики. **NP-полнота.**

Детерминированные и недетерминированные автоматы без выхода.

Детерминированные автоматы с выходом.

Конечные поля и многочлены над ними.

Линейные рекуррентные последовательности.

### Примеры (образцы) заданий для контрольных работ

#### Контрольная работа № 1

1. Методом неопределенных коэффициентов найти полином Жегалкина функции  $f(\tilde{x}^3) = (10001110)$ .
2. Найти все полные подсистемы системы  $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$  булевых функций, где

$$f_1 = xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{y}x\bar{z} \vee \bar{x}z\bar{y}, \quad f_2 = x(y \vee zv) \vee \bar{x}y(z \vee v),$$

$$f_3 = (x \rightarrow y)(y \rightarrow z)(z \rightarrow x) + 1, \quad f_4 = \bar{x}(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee \bar{y}x\bar{z}, \quad f_5 = 1.$$

3. Найти число функций  $f(x, y, z)$  из множества  $(T_0 \cup S) \setminus L$ , существенно зависящих от всех переменных.
4. При каких натуральных  $k$  и  $m$  система

$$\{\min(x, y), x + m(\bmod k)\}$$

полна в  $P_k$ ?

#### Темы рефератов

1. Задачи, приводящие к построению и исследованию булевых функций.
2. Полные системы булевых функций. Теорема Э.Поста о функциональной полноте.
3. NP-полнота и co-NP-полнота некоторых проблем для булевых функций.
4. Псевдобулевы функции, коэффициенты Фурье. Разложения по ортогональным системам.
5. Схемы из функциональных элементов. Двоичный сумматор.
6. Функции  $k$ -значной логики. Теорема А.В. Кузнецова о функциональной полноте.
7. Детерминированные и недетерминированные автоматы без выхода и принимаемые (распознаваемые) ими языки.

8. Эквивалентность недетерминированных и детерминированных автоматов.
9. Регулярные выражения и регулярные языки. Теорема С. Клини.
10. Автоматы с выходом и автоматные функции.  $n$ -местные автоматные функции. Суперпозиция автоматных функций.
11. Проблема полноты для автоматных функций.
12. Теоретико-автоматные модели шифраторов.

## 2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

### Вопросы к зачету по дисциплине "Дискретные функции":

**Булевы функции и функции  $k$ -значной логики.** Булевы функции и функции многозначной ( $k$ -значной) логики. Их представление термами и формулами над заданной системой функций. Представление булевых функций формулами алгебры высказываний и многочленами Жегалкина. Замкнутые классы функций. Критерии полноты для булевых функций и функций многозначной логики - теоремы Э. Поста и А.В.Кузнецова. Представление функций многозначной логики рядами Фурье. Методы вычисления коэффициентов Фурье. Псевдобулевы функции и их задание. Минимизация булевых функций.

**NP-полнота.** NP-полнота задач для булевых функций: "Выполнимость", "Проблема полноты конечной системы булевых функций", "Проблема шифруемости булевой функции", "Проблема вхождения в класс  $S$ ", "Проблема вхождения в класс  $M$ ", "Проблема вхождения в класс  $L$ ".

**Схемы из функциональных элементов.** Двоичный одноразрядный полусумматор и сумматор.  $n$ -разрядный сумматор. Шифраторы и дешифраторы, мультиплексоры и демультиплексоры.

**Детерминированные автоматы без выхода.** Алфавиты и языки. Детерминированные автоматы без выхода: входной (внешний) и внутренний алфавиты, функция переходов, заключительные (допускающие, принимающие) состояния. Способы задания автоматов: табличный и диаграммой переходов. Конфигурации. Описание работы автомата в терминах преобразования конфигураций. Язык, принимаемый (допускаемый, распознаваемый) детерминированным автоматом. Регулярные выражения и регулярные языки. Операции с автоматами. Теорема С.Клини.

**Детерминированные автоматы с выходом.** Детерминированные автоматы с выходом: входной, выходной и внутренний алфавиты, функция переходов и функция выходов. Способы задания автоматов: табличный и диаграммой переходов. Автоматные (ограниченно-детерминированные) функции. Автоматные базисы и проблема полноты. Ее алгоритмическая неразрешимость. Эквивалентность состояний автомата с выходом. Теорема Хаффмана - Мили.

**Машины Тьюринга.** Интуитивное понятие "алгоритма" и его характерные черты. Задачи, приводящие к необходимости уточнения понятия "алгоритм". Арифметизация теории алгоритмов. Представляющая функция алгоритма. Вычислимые в интуитивном смысле функции. Два подхода к уточнению понятия "алгоритм". Машины Тьюринга-Поста: внешний и внутренний алфавиты, программы и команды. Конфигурации. Композиция и ветвление машин Тьюринга. Вычислимость и правильная вычислимость функций по Тьюрингу. Принцип Тьюринга- Поста-Черча. Правильная вычислимость исходных функций и сложения.

**Частично рекурсивные, рекурсивные и примитивно рекурсивные функции.**

Тезис Черча. Примитивная рекурсивность теоретико-числовых функций. Операции суммирования и мультиплицирования.

**Примитивно рекурсивные и рекурсивные предикаты, отношения и множества, операции над ними.**

Соотношения между классами примитивно рекурсивных, общерекурсивных и частично рекурсивных функций.

**Задание функций и предикатов.** Задание функций кусочными схемами. Ограниченный оператор минимизации. Примитивная рекурсивность функций, связанных с каноническим представлением натуральных чисел и с делением с остатком.

**Нумерация.** Канторовские нумерационные функции, их примитивная рекурсивность. Примитивная рекурсивность функции Геделя.

**Вычислимость функций.** Правильная вычислимость по Тьюрингу любой частично рекурсивной функции.

**Арифметизация теории машин Тьюринга.** Частичная рекурсивность любой вычислимой по Тьюрингу функции.

**Нормальная форма Клини.** Универсальные частично рекурсивные функции.

**Нумерация Клини частично рекурсивных функций.** Универсальные функции Клини.

Теорема о неподвижной точке для частично рекурсивных функций.

**Теорема Райса для частично рекурсивных функций.** Ее значение для компьютерной практики.

**Конечные поля и многочлены над ними.** Основные свойства конечных полей. Теоремы существования и единственности. Описание подполей конечного поля. Теорема о примитивном элементе. Существование и число неприводимых многочленов заданной степени над конечным полем. Способ построения конечного поля. Описание минимального поля разложения и корней многочлена над конечным полем.

**Дискретные функции над конечными полями.** Представление дискретных функций многочленами над полем. Спектральные представления дискретных функций.

### **3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

#### **3.1 Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций**

**Пороговый уровень** (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;

- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

#### **Продвинутый уровень (общие характеристики):**

- достаточно полные и систематизированные знания в объёме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

#### **Высокий уровень (общие характеристики):**

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

### **3.2 Описание процедуры выставления оценки**

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.



## Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Дискретные функции»

### Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине "Дискретная математика" являются лекции, что связано, прежде всего, с очень высоким уровнем абстрактности изучаемых в математической логике понятий, ее глубокими и прочными связями с основаниями математики и с ее философскими вопросами. По большому числу тем предусмотрены практические занятия, целью которых является закрепление лекционного материала путем решения специальным образом подобранных задач и упражнений.

Для успешного освоения дисциплины важно самостоятельное решение достаточно большого набора хорошо подобранных задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы дискретной математики. Для решения задач необходимо не только знать, но и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярная работа с конспектами лекций и рекомендованной литературой.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач. Причем особое внимание уделяется активизации самостоятельной работы студентов над задачами: выдача обучаемым для самостоятельной работы текущих домашних заданий, частичный разбор их решений на практических занятиях и постоянный контроль их выполнения.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков работы с основными понятиями дискретной математики в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде устного опроса на практических занятиях и контрольных работ в 4-м и 5-ом семестре. Также проводятся консультации (при необходимости) по лекционному материалу и разбору некоторых заданий для самостоятельной работы.

В конце каждого семестра изучения дисциплины студенты сдают экзамен. Экзамен принимается по экзаменационным билетам, каждый из которых включает в себя два теоретических вопроса. Билеты формируются на основании списка вопросов к экзамену, который охватывает полностью всю программу дисциплины. На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется 3 дня, во время подготовки к экзамену предусмотрена групповая консультация.