

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Геометрическое моделирование**

Направление подготовки (специальности)  
02.04.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Компьютерная математика»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 21.04.2025, протокол № 10

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Геометрическое моделирование» являются изучение методов вычислительной геометрии и экстремальных задач, связанных с геометрическими фигурами. Основное внимание уделяется выпуклым фигурам, часто встречающимся в приложениях и обладающими многими специфическими свойствами.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Геометрическое моделирование» относится к обязательной части образовательной программы и является элективной дисциплиной. Данная дисциплина входит в раздел «Дополнительные главы фундаментальных дисциплин направления».

Для освоения этой дисциплины студенты должны владеть аппаратом математического анализа, элементами аналитической геометрии и линейной алгебры, иметь представление о выпуклых множествах и выпуклых функциях многих переменных, знать основные положения теории экстремальных задач.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
<b>ОПК-2</b> Способен создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках, совершенствовать и разрабатывать концепции, теории и методы	<b>И-ОПК-2.1</b> Владеет навыками создания и исследования новых математических моделей в естественных науках	<b>Знать:</b> - основные теоремы теории экстремальных задач; - методы решения геометрических задач. <b>Уметь:</b> - формулировать практические задачи в терминах теории экстремальных задач; - оптимально выбирать метод решения задачи; - представлять решение задачи в форме, удобной для программирования и интегрирования в программный продукт.

## 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)	Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
-------	------------------------------------------	---------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------

			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1.	Шарнирные многоугольники. Определение. Теорема Крамера. Свойства шарнирных многоугольников	2	4	4		1		8	
2.	Вычисление и оптимизация числовых характеристик плоских и пространственных фигур	2	4	4		1		7	
3.	Равномерное приближение функций полиномами. Теоремы Чебышёва. Приближённое решение с помощью методов линейного программирования. Метод наименьших квадратов	2	4	4		1		7	
4.	Геодезические линии на сфере. Сферическое расстояние между точками	2	4	4		1		8	
							0.3	5.7	Зачет
	<b>ИТОГО</b>		<b>16</b>	<b>16</b>		<b>4</b>	<b>0.3</b>	<b>35.7</b>	

### Содержание разделов дисциплины

#### Тема 1. Шарнирные многоугольники.

1.1. Плоский  $n$ - угольник ( $n > 3$ ) называется шарнирным, если фиксированы длины всех его сторон. Среди подобных  $n$ -угольников существует максимальный по площади. Этот многоугольник можно вписать в окружность некоторого радиуса  $R$ . (Теорема Крамера).

1.2. Задача отыскания соответствующего числа  $R$  не столь проста. Она сводится к решению некоторого трансцендентного уравнения. Представляет интерес исследование зависимости  $R$  от длин сторон многоугольника. При  $n = 4$  возможно построение оптимальной окружности с помощью циркуля и линейки. Если же  $n > 4$ , то соответствующее утверждение, вообще говоря, неверно.

1.3. Можно рассматривать многоугольники, у которых фиксированы длины не всех сторон. В качестве нетривиального примера можно рассмотреть 4-угольники, у которых фиксированы длины лишь трёх сторон. Недостающую 4 сторону следует выбрать такой, что площадь получающегося четырёхугольника была максимальной.

#### Тема 2. Вычисление и оптимизация характеристик выпуклых фигур.

2.1. Несмотря на древность постановки задачи здесь в последнее время произошли интересные события. Заслуживают обсуждения результаты И.Х. Сабитова, А.Ю. Утешева, Вахрамеева и других математиков.

2.2. Типичная оптимальная задача: среди замкнутых линий фиксированной длины найти ограничивающую наибольшую площадь. Хотя ответ знали древние греки, аккуратное решение изопериметрической задачи нашли сравнительно недавно – в 19 веке.

2.3. Имеется большое число вариаций изопериметрической задачи. В спецкурсе предлагается несколько версий этой задачи – некоторые задачи в качестве самостоятельных упражнений.

### **Тема 3. Равномерное приближение функций полиномами**

3.1. Результаты Чебышева. Российский математик П.Л. Чебышев впервые рассмотрел следующую задачу. Пусть на отрезке  $[a,b]$  задана непрерывная функция  $f(x)$ . Требуется среди полиномов фиксированной степени  $n$  найти наименее уклоняющийся от функции  $f$ . Чебышев установил несколько ярких результатов, связанных с задачей оптимального приближения: теорему об очистке и теорему об альтернансе.

3.2. Теорема об очистке составила основу весьма эффективного алгоритма Я. Ремеза. Алгоритм имеет итерационный характер – строится последовательность полиномов, сходящаяся к оптимальному со скоростью геометрической прогрессии.

3.3. Дискретные аналоги задачи Чебышева сводятся к задачам линейного программирования. Благодаря успехам вычислительной техники соответствующий подход может составить конкуренцию алгоритму Ремеза.

### **Тема 4. Геодезическое расстояние на сфере.**

Решается простая задача. Известны географические координаты двух точек на поверхности земли. Требуется найти геодезическое расстояние между точками. Эта наиболее простая из рассмотренных выше задач. Вместе с тем приходится выходить из евклидовой планиметрии в сферическую. Делается первый шаг в сторону неевклидовых геометрий!

## **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются: для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Wolfram Mathematica;
- GNU Octave;

- Maxima;
- <https://www.wolframcloud.com/>;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»  
<https://www.studentlibrary.ru>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод, Н. М. Слукин Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование: учебное пособие — Санкт-Петербург: Лань, 2021. <https://reader.lanbook.com/book/167811>
2. Климов В. С., Бычкова Т. Г., Ухалов А. Ю. Конечномерная оптимизация. - Ярославль: ЯрГУ, 2008. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20080299.pdf>

### **б) дополнительная литература**

1. Заславский Ю. Л. Сборник задач по линейному программированию. - М. Наука, 1969
2. Климов В. С. Дополнительные главы математического анализа. - Ярославль: ЯрГУ, 2013. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20130205.pdf>
3. Климов В. С., Ухалов А. Ю. Решение задач математического анализа с использованием компьютерной математики. - Ярославль: ЯрГУ, 2014. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20140206.pdf>
4. Зуховицкий С. И. Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование - М. Наука, 1967.

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;

- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

**Автор:**

Профессор кафедры математического анализа, д.ф.-м.н.

В. С. Климов

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Геометрическое моделирование»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**Задачи для самостоятельного решения (И-ОПК-2.1)**

1. Найти высоту правильной треугольной призмы наибольшего объёма, вписанной в шар радиуса  $R$ .
2. Найти наибольший объём цилиндра, периметр осевого сечения которого равен  $a$ .
3. Консервная банка имеет цилиндрическую форму. Найти наиболее выходные размеры банки, т.е. определить отношение диаметра основания к высоте, имеющего при заданной полной поверхности наибольший объём.
4. Каким должен быть котёл, состоящий из цилиндра, завершённого полусферами, со стенками заданной толщины, чтобы при заданной вместимости  $v$  на него пошло наименьшее количество материала?
5. Определить отношение радиуса основания к высоте цилиндра, имеющего при данном объёме наименьшую полную поверхность.
6. Найти наибольшую полную поверхность цилиндра, вписанного в шар радиуса  $R$ .
7. Найти высоту конуса наибольшего объёма, вписанного в шар радиуса  $R$ .
8. Найти высоту конуса наименьшего объёма, описанного около шара радиуса  $R$ .
9. В конус, радиус основания которого равен  $R$ , а высота равна  $H$ , вписан цилиндр наибольшего объёма. Найти радиус основания и высоту этого цилиндра.
10. Найти выпуклый пятиугольник с наибольшей площадью, длины сторон которого равны столбцам таблицы

2	1	2	3	1	3	2
1	3	4	2	4	1	3
4	5	6	7	9	6	9
5	7	8	8	10	8	10
6	9	10	10	12	9	11

11. Вписать в окружность радиуса 5 семиугольник наибольшей площади.
12. Описать около окружности радиуса 5 девятиугольник наименьшей площади.
13. Функция  $y = f(x)$  выпукла на отрезке  $[a, b]$ . Найти линейную функцию  $y = kx + l$ , наименее уклоняющуюся от функции  $f$ .
14. Проверить, что при любом натуральном числе  $n$  функция  
$$P(x) = \cos(n \arccos x)$$
является полиномом степени  $n$ . Найти соответствующий полином при  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ .
15. Вычислить сферическое расстояние между Ярославлем и Владивостоком. Географические координаты городов можно найти в Интернете. (Любители могут заменить Ярославль и Владивосток другими населёнными пунктами. Например, можно найти сферическое расстояние между Рыбинском и Парижем!)

**Требования для получения зачета**

Каждый студент получает индивидуальное задание. Зачет выставляется по результатам собеседования в ходе которого студент сдает задание и отвечает на вопросы.

## **Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Геометрическое моделирование»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Учебный план по дисциплине «Геометрическое моделирование» достаточно разнообразен. Для успешного усвоения дисциплины представляется важным сочетание теоретических познаний и решения достаточно большого количества задач. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях. Теоретический материал с достаточной полнотой изложен в двух учебно-методических пособиях автора, одно из которых написано совместно с доцентами кафедры математического анализа Бычковой Т.Г. и Ухаловым А.Ю.

Каждый студент получает индивидуальное задание. Возникающие при выполнении задания вопросы обсуждаются либо в аудитории, либо на консультациях. В конце семестра студенты сдают зачет. По данной дисциплине есть три учебно-методических пособия преподавателей ЯрГУ с соответствующими рекомендациями по изучению разделов дисциплины. Поэтому данное приложение достаточно кратко.