

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Асимптотическое интегрирование динамических систем**

Направление подготовки (специальности)  
02.04.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Компьютерная математика»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 22.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины «Асимптотическое интегрирование динамических систем» – дать представление студентам о методах качественного и количественного анализа динамических систем. Задачами курса являются:

- познакомить студентов с основными понятиями теории бифуркации;
- научить студентов использовать локальные методы анализа динамических систем;
- познакомить студентов с бифуркацией Андронова-Хопфа и другими бифуркациями, связанными с рождением и исчезновением предельных циклов;
- познакомить студентов с классом почти периодических функций;
- дать представление о методах усреднения;
- научить студентов исследовать вопросы существования и устойчивости почти периодических решений у систем в стандартной форме.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Асимптотическое интегрирование динамических систем» относится к факультативным дисциплинам. Для ее успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин: «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ».

Методы качественной теории динамических систем необходимы для аналитического исследования нелинейных моделей и могут использоваться студентами в курсовых и дипломных работах, а также в их научно-исследовательской деятельности.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
<b>ОПК-2</b> Способен создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках, совершенствовать и разрабатывать концепции, теории и методы	<b>И-ОПК-2.1</b> Владеет навыками создания и исследования новых математических моделей в естественных науках	<b>Знать:</b> - основные методы качественного и количественного анализа динамических систем; <b>Уметь:</b> - использовать метод центральных многообразий; - строить нормальные формы для изучения динамики решений в критических и близких к критическим случаям; - исследовать вопросы существования и устойчивости почти периодических решений у систем в стандартной форме.
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-2</b> Способен использовать	<b>И-ПК-2.1</b> Владеет современными	<b>Владеть навыками:</b> - использования методов локального

современные методы разработки и реализации конкретных алгоритмов математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ моделирования	методами разработки и реализации алгоритмов математических моделей на базе языков и пакетов прикладных программ моделирования	анализа для решения практических задач.
---	---	---

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **1** зачетные единицы, **36** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1.	Методы упрощения динамических систем.	1		6		1		5	
2.	Определение и основные свойства почти периодических функций.	1		4				5	
3.	Метод усреднения в нелинейных системах на бесконечном промежутке.	1		6		1		5	
							0,3	2,7	Зачет
	Всего			16		2	0,3	17,7	

#### Содержание разделов дисциплины:

##### Тема 1. Методы упрощения динамических систем.

Теорема о существовании центрального многообразия. Теоремы о редукции и приближении центрального многообразия. Теорема о нормальной форме. Вывод гомологического уравнения. Резонансные соотношения. Нормальные формы векторных полей с параметрами. Бифуркация Андронова-Хопфа.

##### Тема 2. Определение и основные свойства почти периодических функций.

Определение почти периодической функции по Бору. Элементарные свойства почти периодических функций (п.п.ф.). Ограниченность и равномерная непрерывность почти периодической функции. Почти периодические функции по Бохнеру. Арифметические действия с почти периодическими функциями. Равномерно сходящиеся последовательности почти периодических функций. Почти периодическая функция как

равномерный предел последовательности тригонометрических полиномов. Дифференцирование и интегрирование почти периодических функций. Среднее значение почти периодической функции.

### **Тема 3. Метод усреднения в нелинейных системах на бесконечном промежутке.**

Метод усреднения в линейных системах с почти периодическими коэффициентами. Нелинейные системы в стандартной форме Боголюбова. Первое приближение. Теоремы о существовании и устойчивости почти периодических режимов. Некоторые примеры (уравнение Ван дер Поля, уравнение Дуффинга и др.). Маятниковые системы с колеблющимся подвесом. Высшие приближения метода усреднения. Бифуркация Андронова-Хопфа.

## **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- MikTeX (свободно распространяемое ПО);
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»  
<https://www.studentlibrary.ru>

**8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

**а) основная литература**

1. В. Д. Горяченко. Элементы теории колебаний. – М.: Высшая школа, 2001.

**б) дополнительная литература**

1. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский - 4-е изд., испр. и доп. - М.: Наука, 1974. - 503 с.
2. Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
3. Бурд В.Ш. Метод усреднения на бесконечном промежутке и некоторые задачи теории колебаний. – Ярославль: ЯрГУ, 2013.  
<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20130230.pdf>

**9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

**Автор:**

декан математического факультета, д.ф.-м.н.

Нестеров П. Н.

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Асимптотическое интегрирование динамических систем»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности,  
характеризующих этапы формирования компетенций**

**1.1 Контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

**1.2 Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

**Список вопросов для подготовки к зачету**

1. Теорема о существовании центрального многообразия. Редукция системы на центральное многообразие.
2. Нормальные формы. Вывод гомологического уравнения.
3. Бифуркация Андронова–Хопфа.
4. Определение почти периодической функции по Бору. Элементарные свойства почти периодических функций. Ограниченность и равномерная непрерывность п.п.ф.
5. Арифметические действия с почти периодическими функциями.
6. Равномерно сходящиеся последовательности почти периодических функций. Почти периодическая функция как равномерный предел последовательности тригонометрических полиномов.
7. Дифференцирование и интегрирование почти периодических функций.
8. Понятие о среднем значении почти периодической функции. Теорема о существовании среднего значения для любой почти периодической функции. Простейшие свойства среднего значения.
9. Системы в стандартной форме с почти периодическими коэффициентами. Вторая теорема Боголюбова.
10. Маятник с колеблющейся точкой подвеса.

**Билеты, предлагаемые на зачете по курсу  
«Асимптотическое интегрирование динамических систем»**

### Билет №1

1. Исследовать устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, изучив поведение решений на центральном многообразии:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{2}x + y + x^2y, \\ \dot{y} &= x + 2y + y^2.\end{aligned}$$

2. Исследовать поведение решений системы дифференциальных уравнений в окрестности начала координат при достаточно малых значениях параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \varepsilon x - xy^2, \\ \dot{y} &= x.\end{aligned}$$

### Билет №2

1. Исследовать устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, изучив поведение решений на центральном многообразии:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + y + x^2y, \\ \dot{y} &= x - y + y^2.\end{aligned}$$

2. Исследовать поведение решений системы дифференциальных уравнений в окрестности начала координат при достаточно малых значениях параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^2 + \varepsilon x, \\ \dot{y} &= -y - x^2.\end{aligned}$$

### Билет №3

1. Исследовать устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, изучив поведение решений на центральном многообразии:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + 2y, \\ \dot{y} &= x + y + x^4.\end{aligned}$$

2. Выяснить, существуют ли у системы дифференциальных уравнений при достаточно малых значениях параметра  $\varepsilon$  предельные циклы:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + \varepsilon x, \\ \dot{y} &= -x + \varepsilon(1 - x^2)y.\end{aligned}$$

**Билет №4**

1. Исследовать устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, изучив поведение решений на центральном многообразии:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2x + 3y + y^3, \\ \dot{y} &= 2x - 3y + x^3.\end{aligned}$$

2. Исследовать вопрос о существовании и устойчивости почти периодических решений системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2\varepsilon \sin^2 t \ln(-x + y^2) + \varepsilon(x^3 - 3y^4) \sin^3 t \cos^2 t, \\ \dot{y} &= \varepsilon(x - y) - \varepsilon(1 + x^3 \cos^3 t)\end{aligned}$$

при достаточно малых  $\varepsilon > 0$ .

**Билет №5**

1. Исследовать устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, изучив поведение решений на центральном многообразии:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + xy, \\ \dot{y} &= -y - x^2.\end{aligned}$$

2. Исследовать поведение решений системы дифференциальных уравнений в окрестности начала координат при достаточно малых значениях параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon - 2x + 2y - x^4, \\ \dot{y} &= 2x - 2y.\end{aligned}$$

**Билет №6**

1. Исследовать устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, изучив поведение решений на центральном многообразии:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2, \\ \dot{y} &= -y - x^2.\end{aligned}$$

2. Исследовать поведение решений системы дифференциальных уравнений в окрестности начала координат при достаточно малых значениях параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y - xy + \varepsilon x, \\ \dot{y} &= 2x + y + xy.\end{aligned}$$

**Билет №7**

1. Исследовать устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, изучив поведение решений на центральном многообразии:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 + xy, \\ \dot{y} &= -y - x^2.\end{aligned}$$



2. Выяснить, существуют ли у системы дифференциальных уравнений при достаточно малых значениях параметра  $\varepsilon$  предельные циклы:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y + \varepsilon xy, \\ \dot{y} &= 2x + y + \varepsilon(1 - x^2)y.\end{aligned}$$

**Билет №8**

1. Исследовать устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, изучив поведение решений на центральном многообразии:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy, \\ \dot{y} &= -y - x^2.\end{aligned}$$

2. Исследовать поведение решений системы дифференциальных уравнений в окрестности начала координат при достаточно малых значениях параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + 2y + \varepsilon y, \\ \dot{y} &= x + y + x^4.\end{aligned}$$

**Билет №9**

1. Исследовать устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, изучив поведение решений на центральном многообразии:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + y, \\ \dot{y} &= -e^x + e^{-x} + 2x.\end{aligned}$$

2. Исследовать поведение решений системы дифференциальных уравнений в окрестности начала координат при достаточно малых значениях параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon + \varepsilon x + x^2, \\ \dot{y} &= -y + x^2.\end{aligned}$$

**Билет №10**

1. Исследовать устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, изучив поведение решений на центральном многообразии:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 + y^2, \\ \dot{y} &= -y + x^3.\end{aligned}$$

2. Исследовать поведение решений системы дифференциальных уравнений в окрестности начала координат при достаточно малых значениях параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon + x^2 - y^3, \\ \dot{y} &= \varepsilon - y + x^2.\end{aligned}$$

**Билет №11**

1. Исследовать устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, изучив поведение решений на центральном многообразии:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y + y^3, \\ \dot{y} &= 2x + 2y.\end{aligned}$$

2. Исследовать поведение решений системы дифференциальных уравнений в окрестности начала координат при достаточно малых значениях параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon + x^4 + y^2, \\ \dot{y} &= -y + x^3.\end{aligned}$$

**Билет №12**

1. Исследовать устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений, изучив поведение решений на центральном многообразии:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y - xy, \\ \dot{y} &= -2x - 2y + x^2.\end{aligned}$$

2. Исследовать поведение решений системы дифференциальных уравнений в окрестности начала координат при достаточно малых значениях параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + y, \\ \dot{y} &= -e^x + e^{-x} + 2x + \varepsilon y.\end{aligned}$$

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Асимптотическое интегрирование динамических систем»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Качественные методы исследования динамических систем на плоскости» являются лекции. Это связано с тем, что в основе курса лежит серьезный математический аппарат, требующий детального разбора. По всем темам предусмотрены практические занятия, на которых студенты отрабатывают навыки решения практических задач.

Экзамен принимается по экзаменационным билетам, каждый из которых включает в себя два вопроса. На итоговую оценку также влияют результаты ответа студента на дополнительный вопрос. На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется 3 дня, во время подготовки к экзамену предусмотрена групповая консультация.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины самостоятельно студенту затруднительно. Это связано со сложностью изучаемого материала и большим объемом курса. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий в течение семестра экзамен по итогам изучения дисциплины студенту практически невозможно.