

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

М. Л. Мячин, О. А. Дунаева

# Введение в цифровую обработку сигналов

*Учебное пособие*

*Рекомендовано*

*Научно-методическим советом университета  
для студентов, обучающихся по направлению  
Прикладная математика и информатика*

Ярославль  
ЯрГУ  
2015

УДК 621.391(075)  
ББК 3811.3я73  
М99

*Рекомендовано  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2015 года.*

Рецензенты:

В. Н. Колескин, кандидат технических наук, доцент;  
кафедра высшей математики РГТУ им. П. А. Соловьева

**Мячин, Михаил Леонидович.**

М 99 Введение в цифровую обработку сигналов : учебное пособие  
/ М. Л. Мячин, О. А. Дунаева ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. –  
Ярославль : ЯрГУ, 2015. – 148 с.  
ISBN 978-5-8397-1065-8

В учебном пособии изложены базовые понятия цифровой обработки сигналов; одновременно с теоретическими основами методов обработки сигналов приведено подробное описание того, как использовать эти методы на практике.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 01.03.02 (010400.62) Прикладная математика и информатика (дисциплина «Цифровая обработка сигналов», цикл БЗ), очной формы обучения.

**ISBN 978-5-8397-1065-8**

УДК 621.391(075)  
ББК 3811.3я73

© ЯрГУ, 2015

# Предисловие

*These weights values can be shown to work,  
but why they work is something of a mystery.  
[DSP Guide, 1999]*

Главный вопрос, на который нам хочется ответить в предисловии:

*Зачем нужна еще одна книга по цифровой обработке сигналов,  
если уже издано множество замечательных руководств?*

Ответ простой: мы считаем, что наша книга — лучшее руководство для тех, кто хочет одновременно познакомиться с теоретическими основами цифровой обработки сигналов и научиться использовать ее методы в работе.

Во-первых, эта книга является замкнутым руководством по цифровой обработке сигналов (ЦОС). Изложение доступно специалисту по прикладной математике, незнакомому со спектральной теорией сигналов: мы подробно излагаем весь необходимый для понимания материал.

Тут важно заметить, что значение самой спектральной теории выходит далеко за границы обработки сигналов — часто именно в области спектральных методов находятся наиболее короткие и безопасные мосты между теорией и вычислительным методом. Лежащее в основе спектральных методов преобразование Фурье является, вероятно, самым широко используемым математическим методом — оно поистине вездесуще<sup>1</sup>. Поэтому знакомство со спектральной теорией будет полезно любому специалисту по прикладной математике.

Во-вторых, мы всегда доводим изложение до работающих алгоритмов и предполагаем, что читатель заинтересован в освоении вычислительной стороны ЦОС. Мы верим, что лучший способ понять любой математический метод — реализовать его в виде компьютерной программы. Люди, никогда этим не занимавшиеся, даже не подозревают, какое количество важных деталей они упускают из вида. Именно поэтому мы приводим подробные схемы типовых спектральных алгоритмов и не жалеем времени и места на их обсуждение.

Пособие в первую очередь предназначено для тех, кто хочет научиться использовать методы ЦОС в своей работе, но может быть использовано и студентами, изучающими соответствующий курс. Изложенный материал

---

<sup>1</sup>Мы не можем здесь вдаваться в подробности, поэтому просто перечислим некоторые современные технологии, основанные на преобразовании Фурье: сжатие звука (например, в формате MP3 и при кодировании звука в стандарте GSM), сжатие изображений (например, в формате JPEG), сжатие видеопотока (например, в формате MP4), восстановление расфокусированных изображений, распознавание голоса, распознавание музыкальных произведений (например, в сервисе Shazam), восстановление объемных изображений по проекциям (например, в МРТ — магнитно-резонансной томографии).

частично использовался в спецкурсе, который авторы в течение ряда лет читали студентам 3–4 курсов специальности «Прикладная математика».

## Благодарности

При подготовке материалов, вошедших в эту книгу, мы использовали только свободно распространяемые программы с открытым кодом.

- Для подготовки текста мы использовали замечательную издательскую систему  $\text{\LaTeX}$ , созданную Дональдом Кнутом и Лесли Лампортом.  $\text{\LaTeX}$  — единственная система подготовки текстов, дарящая людям радость!
- Для рисования использовалась программа  $\text{GNUPlot}$ , загадочный синтаксис которой с лихвой компенсируется превосходным качеством получаемых иллюстраций.
- Для реализации описываемых алгоритмов мы использовали компилятор  $\text{GCC}$  — один из лучших доступных компиляторов языков  $\text{C/C++}$ .
- Также при создании прототипов программ мы иногда используем  $\text{Octave}$  — математический пакет, совместимый по языку с коммерческим пакетом  $\text{Matlab}$ .

## Обратная связь

С авторами можно связаться по адресу электронной почты `Olady@gmail.com`. Мы будем признательны за любые замечания, отзывы и сообщения об ошибках.

## Рекомендуемая литература

Литература по цифровой обработке сигналов очень обширна. Здесь приведены только те книги, которые непосредственно использовали авторы. Значительно более полную аннотированную коллекцию ссылок можно найти в книге [Залманзон, 1989]. Сознательно не приведены выходные данные книг; фамилии автора и названия обычно вполне достаточно, чтобы разыскать первоисточник. Тот материал, который не содержится в перечисленных книгах, основан на журнальных публикациях — соответствующие ссылки даны в начале каждой главы.

**[Зельдович, 1965]** *Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис Элементы прикладной математики.* Содержит простое изложение теории интегрального преобразования Фурье. (Гл. 1, 2)

**[Зиновьев, 1968]** *А. Л. Зиновьев, Л. И. Филиппов Введение в теорию сигналов и цепей.* Содержит довольно полное изложение материала, относящегося к спектрам сигналов и случайных процессов с точки зрения анализа физических систем обработки сигналов. (Гл. 1, 2)

**[Хемминг, 1972]** *Р. В. Хемминг Численные методы.* Главы, посвященные рядам Фурье, интегралу Фурье и фильтрам, содержат замечательный вводный материал. (Гл. 1, 2)

**[Богнер, 1976]** *Введение в цифровую фильтрацию / под ред. Р. Богнера и А. Константиноидиса.* Полно изложен материал, относящийся к дискретному преобразованию Фурье и алгоритму БПФ. (Гл. 4, 5)

**[Рабинер, 1978]** *Л. Рабинер, Б. Гоулд Теория и применение цифровой обработки сигналов.* Содержит весьма полное изложение теории и практики построения цифровых фильтров. (Гл. 6, 8)

**[Хемминг, 1980]** *Р. В. Хемминг Цифровые фильтры.* Замечательное изложение теории цифровой фильтрации и методов построения фильтров. (Гл. 6, 8)

**[Карташев, 1982]** *В. Г. Карташев Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров.* Хорошо изложена теория дискретизации и дискретного преобразования Фурье. (Гл. 3, 4)

**[Бендат, 1983]** *Дж. Бендат, А. Пирсол Применения корреляционного и спектрального анализа.* Содержит энциклопедическое изложение методов корреляционного и спектрального анализа случайных процессов. (Гл. 7, 9)

- [Залманзон, 1989] Л. А. Залманзон Преобразования Фурье, Уолша, Хара и их применение в управлении, связи и других областях Содержит конспективное изложение большей части вопросов ЦОС. Особую ценность представляют очень подробные библиографические комментарии в конце каждой главы и большой аннотированный список литературы.
- [Numerical Recipes, 1997] *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing* {[www.nr.com](http://www.nr.com)} Неплохой учебник и справочник по вычислительным методам. Содержит большую коллекцию программ, реализующих основные численные методы. Среди прочего здесь можно найти все основные быстрые спектральные алгоритмы. (Гл. 5)
- [Каханер, 1998] Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш Численные методы и программное обеспечение. Краткое изложение методов практического спектрального анализа. Содержит несколько интересных примеров спектрального анализа реальных данных. (Гл. 9)
- [DSP Guide, 1999] *Smith S.W. The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing.* {[www.dspguide.com](http://www.dspguide.com)} Неплохой вводный курс цифровой обработки сигналов. Содержит предельно упрощенное изложение большей части вопросов.
- [Баскаков, 2000] С. И. Баскаков Радиотехнические цепи и сигналы. Содержит изложение большей части материала, относящегося к цифровой обработке сигналов, но с точки зрения реализации физических систем обработки сигналов.
- [Солонина, 2001] А. Солонина, Д. Улахович, Л. Яковлев Алгоритмы и процессоры цифровой обработки сигналов. Подробное изложение вопросов, связанных с применением Фурье-процессоров.
- [Олссон, 2001] Г. Олссон, Д. Пиани Цифровые системы автоматизации и управления. Современное изложение теории цифрового управления системами. Главы, посвященные сбору и обработке данных, непосредственно примыкают к цифровой обработке сигналов. примыкают к цифровой обработке сигналов.

# 1 Ряд Фурье

Развивающиеся во времени натурные и модельные процессы описываются величинами, изменяющимися во времени. С точки зрения математики каждая такая величина представляет собой функцию времени  $x(t)$  — это так называемый *аналоговый сигнал*. Сигналы могут обрабатываться с использованием самых разнообразных методов. К *цифровой обработке сигналов (ЦОС)<sup>2</sup>* традиционно относят методы обработки сигналов, связанные со спектральными преобразованиями. Простейшее спектральное преобразование — ряд Фурье — изучается уже в анализе. Здесь мы приведем основные сведения, касающиеся рядов Фурье, и введем удобную для дальнейшего изложения терминологию.

## 1.1 Комплексный ряд Фурье

В анализе разложение  $T$ -периодической функции  $x(t)$  в ряд Фурье записывается обычно следующим образом:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n f_0 t + b_n \sin 2\pi n f_0 t, \quad (1)$$

где  $f_0 = 1/T$ . Формулы для коэффициентов получаются из соображений попарной ортогональности функций  $\cos 2\pi n f_0 t$ ,  $\sin 2\pi n f_0 t$  на отрезке  $[0, T]$ :

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin 2\pi n f_0 t \cos 2\pi m f_0 t dt &= 0, \\ \int_0^T \sin 2\pi n f_0 t \sin 2\pi m f_0 t dt &= \int_0^T \cos 2\pi n f_0 t \cos 2\pi m f_0 t dt = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ T/2, & n = m \end{cases}. \end{aligned}$$

Левая и правая части ряда Фурье умножаются поочередно на каждую из этих функций и после почленного интегрирования справа обнуляются все слагаемые, кроме одного. В результате получаются следующие формулы для коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos 2\pi n f_0 t dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin 2\pi n f_0 t dt. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>digital signal processing (DSP)

В дальнейшем нам будет удобнее пользоваться комплексной формой записи ряда Фурье, которая получается после перехода от тригонометрических функций к комплексным экспонентам по формулам Эйлера:

$$\begin{aligned}\cos 2\pi n f_0 t &= \frac{1}{2}[\exp(i2\pi n f_0 t) + \exp(-i2\pi n f_0 t)], \\ \sin 2\pi n f_0 t &= \frac{1}{2i}[\exp(i2\pi n f_0 t) - \exp(-i2\pi n f_0 t)].\end{aligned}$$

После подстановки и приведения подобных членов получим следующую формулу:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i2\pi n f_0 t), \quad (2)$$

где коэффициенты  $C_n$  оказываются комплексными числами. Формулу для коэффициентов Фурье  $C_n$  можно получить из формул для  $a_n$ ,  $b_n$ , но проще снова воспользоваться попарной ортогональностью функций  $\exp(i2\pi n f_0 t)$ :

$$\int_0^T \exp(i2\pi n f_0 t) \exp(i2\pi m f_0 t) dt = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ T, & n = m \end{cases}.$$

В результате получается следующая формула:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp(-i2\pi n f_0 t) dt. \quad (3)$$

Числа  $C_n$  называются *коэффициентами Фурье* функции  $x(t)$ . Легко видеть, что для вещественной функции  $x(t)$  коэффициенты Фурье обладают следующим свойством симметрии:

$$C_{-n} = C_n^*,$$

а коэффициент  $C_0$  в этом случае вещественен.

Отметим, что для любой  $T$ -периодической функции и всех  $a$  выполняется равенство

$$\int_a^{a+T} x(t) dt = \int_0^T x(t) dt.$$

Последнее утверждение сразу следует из равенства

$$\int_a^{a+T} = \int_a^0 + \int_0^T + \int_T^{a+T},$$

если иметь в виду следующее очевидное утверждение (здесь сделана замена переменной  $t = T + s$ ):

$$\int_T^{a+T} x(t) dt = \int_0^a x(T + s) ds = \int_0^a x(s) ds.$$



Таким образом, периодическую функцию можно интегрировать по любому отрезку с длиной, равной ее периоду, не заботясь о расположении отрезка на числовой оси. Наиболее часто это утверждение используется применительно к формуле (3), в которой интегрирование можно проводить по любому отрезку длиной  $T$ .

**Задача 1.1.** Пусть  $f(t) = \sin(2\pi mt) + \sin(2\pi nt)$ , где  $n$  и  $m$  — положительные целые числа. Является ли функция  $f(t)$  периодической? Если да, то какой у нее период?

**Задача 1.2.** Пусть  $f(t) = \sin(2\pi pt) + \sin(2\pi qt)$ , где  $p$  и  $q$  — положительные рациональные числа. Является ли функция  $f(t)$  периодической? Если да, то какой у нее период?

**Задача 1.3.** Доказать, что функция  $f(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)$  не является периодической.

**Задача 1.4.** Пусть  $\omega = \exp(2\pi i/n)$ . Вычислить  $\sum_{k=0}^{100} \omega^k$ . При каких  $n$  сумма принимает нулевое значение?

## 1.2 Физический смысл ряда Фурье

Известно, что установившийся режим в устойчивой линейной динамической системе общего положения может быть представлен в виде линейной комбинации гармонических колебаний:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i2\pi f_n t). \quad (4)$$

Многие физические системы, порождающие наблюдаемые нами сигналы, достаточно точно описываются линейными дифференциальными уравнениями, т. е. в первом приближении являются линейными динамическими системами. Именно этим объясняется поразительная эффективность методов, связанных с разложением сигнала по гармоническим функциям. Представление произвольного сигнала  $x(t)$  в виде линейной комбинации гармонических колебаний (если оно возможно) называется его *дискретным спектральным разложением*. Набор частот  $f_n$  и соответствующих им комплексных амплитуд  $C_n$  называется *дискретным спектром* сигнала  $x(t)$ . Набор вещественных амплитуд  $A_n = |C_n|$  называется *амплитудным дискретным спектром* сигнала  $x(t)$ . Ясно, что дискретный спектр сигнала полностью определяет свойства порождающей этот сигнал динамической системы. Заметим, что сумма гармоник оказывается периодической функцией только в том случае, когда частоты исходных гармоник соизмеримы<sup>3</sup>, а ряды Фурье работают только для пе-

<sup>3</sup>Числа  $a$  и  $b$  называются соизмеримыми, если их отношение является рациональным числом. Поскольку число  $\sqrt{2}$  не соизмеримо с единицей, то и функция  $\sin x + \sin \sqrt{2}x$  оказывается непериодической.

риодических функций. В этом смысле дискретное спектральное разложение оказывается шире разложения функции в ряд Фурье.

Рассмотрим более подробно случай  $T$ -периодической функции  $x(t)$ . В этом случае все члены спектрального разложения также должны быть  $T$ -периодическими функциями, т. е. в спектральном разложении будут участвовать только гармоники, удовлетворяющие равенству  $\exp i2\pi f(t+T) \equiv \exp i2\pi ft$ . Из последнего тождества получаем  $\exp i2\pi fT = 1$ , откуда сразу имеем  $f = f_n = n/T$  или  $f = f_n = nf_0$ , где  $f_0 = 1/T$ . В этом случае на отрезке длины  $T$  укладывается целое число периодов каждой гармоники. Следовательно, спектральное разложение (4)  $T$ -периодической функции  $x(t)$  содержит только гармоники с частотами, кратными частоте  $f_0 = 1/T$ .

Таким образом, произвольное периодическое колебание с периодом  $T$  и частотой  $f = 1/T$  получается в результате сложения гармонических колебаний с частотами  $n/T$ . Первая из этих частот ( $n = 1$ ) является частотой самого колебания и называется основной, остальные частоты называются верхними частотами, или *обертонами*. Так, высота звука определяется основной частотой колебаний воздуха: ноте «ля» первой октавы соответствует основная частота 440 Гц. Но эта нота, взятая на разных инструментах, имеет различный тембр. Оказывается, что тембр звука зависит от соотношения амплитуд верхних гармоник, наложенных на основную.

Коэффициенты Фурье вещественнозначной функции  $x(t)$  удовлетворяют равенству  $C_{-n} = C_n^*$ , а коэффициент  $C_0$  в этом случае вещественен. Воспользуемся этими свойствами для упрощения выражения (2). Представим коэффициенты Фурье в виде  $C_n = A_n \exp i\varphi_n$ , где  $A_n = |C_n|$ ,  $\varphi_n = \arg C_n$ . Из равенства  $C_{-n} = C_n^*$  следует, что  $A_{-n} = A_n$  и  $\varphi_{-n} = -\varphi_n$ , откуда сразу получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp[i(2\pi n f_0 t + \varphi_n)] = \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp[i(2\pi n f_0 t + \varphi_n)] + A_{-n} \exp[i(-2\pi n f_0 t + \varphi_{-n})] = \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\exp[i(2\pi n f_0 t + \varphi_n)] + \exp[-i(2\pi n f_0 t + \varphi_n)]) = \\ &= A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n). \quad (5) \end{aligned}$$

Обсудим отличительные особенности полученных разложений. Оказывается, что запись (5) ряда Фурье является с точки зрения физики более осмысленной, чем традиционная форма (1). Действительно, сдвиг начала отсчета

времени приводит к нетривиальному преобразованию коэффициентов  $(a_n, b_n)$  и, таким образом, представление сигнала в виде (1) не обладает *инвариантностью по отношению к смене начала отсчета времени*. Такая инвариантность важна, поскольку хотелось бы вне зависимости от момента начала наблюдений одного и того же сигнала получать одинаковые разложения. В то же время в случае разложения (5) коэффициенты  $A_n$  инвариантны к сдвигу начала отсчета времени, а к начальным фазам  $\varphi_n$  при этом добавляется постоянный сдвиг фаз. С этой точки зрения разложение (2) аналогично формуле (5). В дополнение к этому оказывается, что оперировать с комплексными экспонентами при проведении выкладок значительно удобнее.

Рассмотрим теперь более подробно гармонику  $x(t) = \cos(2\pi ft - \varphi)$ . Линейную функцию времени  $\Phi(t) = 2\pi ft - \varphi$  называют фазой колебания. Полное колебание соответствует изменению фазы на величину  $2\pi$ , и фаза колебания фактически определяется по модулю  $2\pi$ . Значение фазы в начальный момент времени  $\Phi(0) = \varphi$  называется начальной фазой колебания, или сдвигом фазы. Частота  $f$  есть число полных колебаний, совершаемых гармоникой за единицу времени. Угловая частота  $\omega = 2\pi f$  есть величина, на которую фаза изменяется за единицу времени. Период колебания (время совершения полного колебания)  $T = 2\pi/\omega = 1/f$  есть время, за которое фаза изменяется на  $2\pi$ .

### 1.3 Дискретный спектр Фурье

Представление произвольного  $T$ -периодического сигнала  $x(t)$  в виде разложения (2) называется его *дискретным спектральным разложением Фурье*. Спектральное разложение Фурье (2) отличается от спектрального разложения общего вида (4) тем, что в нем участвуют только гармоники с частотами, кратными частоте  $f_0 = 1/T$ . Последовательность комплексных амплитуд  $C_n$  называется *дискретным спектром Фурье* сигнала  $x(t)$ . Набор вещественных амплитуд  $A_n = |C_n|$  называется *амплитудным дискретным спектром* сигнала  $x(t)$ . Амплитудный спектр функции часто изображают в виде линейчатой диаграммы, на которой по оси абсцисс откладывается частота, по оси ординат — амплитуда соответствующей спектральной составляющей, а элемент амплитудного спектра  $|C_n|$  представляют в виде вертикального отрезка с абсциссой  $nf_0$  и высотой, равной  $|C_n|$ .

Формулы (3) и (2) осуществляют взаимно однозначное преобразование<sup>4</sup> периодической функции  $x(t)$  в набор коэффициентов  $\{C_n\}$  и обратно. Таким образом, *дискретный спектр Фурье периодической функции  $x(t)$  содержит*

---

<sup>4</sup>Отметим, что всегда, когда мы говорим о взаимной однозначности спектральных преобразований, мы имеем в виду взаимную однозначность с точностью до значений в точках разрыва, т. е. с точностью до значений функции на множестве меры нуль.

всю информацию о ее поведении. Говорят, что в частотной области<sup>5</sup> функция  $x(t)$  представлена своими коэффициентами Фурье  $C_n$ , а сама функция  $x(t)$  представляет ту же информацию во временной области<sup>6</sup>. Переход от рассмотрения сигнала как функции времени  $x(t)$  к рассмотрению его спектра  $C_n$  составляет основную идею спектрального анализа.

*В спектральной теории обычно не отождествляют сигнал с функцией  $x(t)$ , которая рассматривается лишь как одно из представлений сигнала. В этом случае функцию  $x(t)$  называют временным представлением сигнала, а спектр (интегральный или дискретный) — его спектральным представлением. При задании спектра говорят, что сигнал представлен в спектральной области, а при задании сигнала как функции  $x(t)$  говорят, что сигнал представлен во временной области.*

Еще раз подчеркнем, что временное и спектральное представления несут одинаковую информацию об исходном сигнале, т. е. они эквивалентны. В рамках спектрального подхода все операции, проводимые над сигналом, можно выполнять как во временной, так и в спектральной области. Большое значение приобретает выяснение того, к каким преобразованиям спектра приводят те или иные операции, производимые над временным представлением сигнала.

**Задача 1.5.** Разложить в комплексный ряд Фурье периодические функции  $f(t) = \sin(\pi t)$ ,  $g(t) = \cos(\pi t)$ ,  $h(t) = \sin(2\pi t) + \cos((3/2)\pi t)$ . Для каждой функции указать период. В каждом случае (не производя заново интегрирование) найти коэффициенты  $a_n$ ,  $b_n$  вещественного ряда Фурье по синусам и косинусам и коэффициенты  $A_n$ ,  $\varphi_n$  вещественного ряда Фурье по косинусам.

**Задача 1.6.** Вычислить дискретный спектр Фурье сигнала

$$x(t) = \sin\left(\frac{7\pi}{2}t\right) + \cos(3\pi t).$$

**Задача 1.7.** Вычислить дискретный спектр Фурье сигнала

$$x(t) = \sin(\pi t) \cos(5\pi t).$$

## 1.4 Теорема Парсеваля

Докажем теорему Парсеваля о спектре мощности сигнала. *Мощностью периодического сигнала* называется среднее (за период) значение квадрата

---

<sup>5</sup>frequency domain

<sup>6</sup>time domain

модуля сигнала:

$$E = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt.$$

Вычислим мощность сигнала, представленного в виде ряда Фурье:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) [x(t)]^* dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i2\pi n f_0 t) \right]^* dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^* \exp(-i2\pi n f_0 t) dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^* \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp(-i2\pi n f_0 t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^* C_n. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\boxed{\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2.}$$

Последнее равенство носит название *равенства Парсеваля*. Набор чисел  $P_n = |C_n|^2$  называется *дискретным спектром мощности* периодического сигнала  $x(t)$ .

Равенство Парсеваля позволяет оценить ошибку, допускаемую при использовании отрезка ряда Фурье. Рассмотрим отрезок ряда Фурье:

$$x_N(t) = \sum_{n=-N}^N C_n \exp(i2\pi n f_0 t).$$

Ясно, что функция  $\varepsilon(t) = x(t) - x_N(t)$  раскладывается в ряд Фурье следующим (единственным!) образом:

$$\varepsilon(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{C}_n \exp(i2\pi n f_0 t),$$

где

$$\bar{C}_n = \begin{cases} 0, & |n| \leq N, \\ C_n, & |n| > N \end{cases}.$$

Но для функции  $\varepsilon(t)$  и ее Фурье-разложения справедливо равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\varepsilon(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\bar{C}_n|^2 = \sum_{|n| > N} |C_n|^2.$$

Окончательно имеем:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |x(t) - x_N(t)|^2 dt = \sum_{|n|>N} |C_n|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt - \sum_{n=-N}^N |C_n|^2.$$

Таким образом, разность, стоящую в правой части равенства, можно считать мерой (среднеквадратичной) ошибки, допускаемой при замене ряда Фурье его отрезком.

## 1.5 Теорема о скорости убывания спектра

Большое значение имеет теорема о скорости убывания коэффициентов Фурье, точную формулировку которой можно найти в любом достаточно полном курсе анализа. Для наших целей будет достаточно следующей простой формулировки: если существует  $m$  первых производных функции  $x(t)$ , то  $|C_n| = O(n^{-(m+1)})$ .

Доказательство можно извлечь из очевидного равенства (получаемого интегрированием по частям):

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(s) \frac{d \exp(-i2\pi n f_0 s)}{-i2\pi n f_0} = \frac{1}{i2\pi n f_0} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x'(s) \exp(-i2\pi n f_0 s) ds.$$

Из последнего равенства следует также, что если  $C_n$  — коэффициенты ряда Фурье функции  $x(t)$ , а  $C'_n$  — аналогичные коэффициенты функции  $x'(t)$ , то  $C'_n = i2\pi n f_0 C_n$ .

Таким образом, если  $x(t)$  имеет разрывы первого рода, то  $|C_n|$  убывает как  $n^{-1}$  и это приводит к тому, что для достижения удовлетворительной точности приходится удерживать в разложении Фурье много членов. Обратно, если  $|C_n|$  убывают не быстрее чем  $O(1/n)$ , то  $x(t)$  с необходимостью имеет точки разрыва первого рода. Если  $|C_n|$  убывают, по крайней мере, как  $O(1/n^2)$ , то  $x(t)$  дифференцируема.

Сделаем важное замечание о разложении в ряд Фурье четных и нечетных функций. Легко видеть, что для четной функции ряд Фурье будет иметь вид

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n f_0 t,$$

а для нечетной функции

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin 2\pi n f_0 t.$$

Пусть функция  $x(t)$  определена на отрезке  $[0, L]$ . Доопределим ее на отрезок  $[-L, L]$  по четности. Полученную функцию можно разложить в ряд Фурье по косинусам. Продолжая исходную функцию на отрезок  $[-L, L]$  по нечетности, получим разложение по синусам. В зависимости от значений функции  $x(t)$  и ее производной в точках  $t = 0$  и  $t = L$  одно из двух полученных представлений функции в виде ряда Фурье окажется предпочтительным в смысле скорости сходимости.

## 1.6 Абстрактные ряды Фурье

Система  $\{e_\alpha\}_{\alpha=0}^\infty$  элементов евклидова пространства  $X$  называется ортонормированной, если  $(e_\alpha, e_\beta) = 0$  при  $\alpha \neq \beta$  и  $(e_\alpha, e_\alpha) = |e_\alpha|^2 = 1$ . Рассмотрим выражение

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} c_j e_j, \quad (*)$$

где  $c_j$  — некоторые постоянные коэффициенты. Умножая левую и правую части этого равенства скалярно на  $e_m$  и используя ортонормированность, получим выражение для коэффициентов  $c_m$ :

$$c_m = (x, e_m).$$

Коэффициенты  $c_m$  называются *коэффициентами Фурье* элемента  $x$  по ортонормированной системе  $\{e_\alpha\}$ . Выражение  $(*)$  называется *абстрактным рядом Фурье* элемента  $x$  по ортонормированной системе  $\{e_\alpha\}$ . Частичной суммой абстрактного ряда Фурье называется выражение

$$x_n = \sum_{j=0}^{n-1} c_j e_j.$$

Ортонормированная система  $\{e_\alpha\}$  называется *базисом* пространства  $X$ , если для произвольного элемента  $x \in X$  выполнено равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x - x_n| = 0. \quad (**)$$

Рассмотрим подпространство  $X_n = L(e_0, \dots, e_{n-1})$ , натянутое на первые  $n$  векторов базиса. Всякая частичная сумма  $x_n$  лежит в соответствующем подпространстве  $X_n$ , поэтому можно сказать, что  $X_n$  есть подпространство частичных сумм ряда Фурье длины  $n$ . Рассмотрим разность  $\varepsilon_n = x - x_n$  между элементом  $x$  и частичной суммой его ряда Фурье. Скалярное произведение

$$(\varepsilon_n, e_m) = (x - x_n, e_m) = (x, e_m) - (x_n, e_m) = c_m - (x_n, e_m)$$

равно нулю для всех  $0 \leq m < n$ , следовательно, вектор  $\varepsilon_n$  ортогонален подпространству  $X_n$ . Таким образом, частичная сумма  $x_n$  есть ортогональная проекция элемента  $x$  на соответствующее подпространство  $X_n$ . Из равенства (\*\*\*) следует, что

$$\text{cl} \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n = X.$$

Таким образом, объединение всех подпространств  $X_n$  плотно<sup>7</sup> в  $X$ .

Ясно, что перпендикуляр реализует кратчайшее расстояние от точки до подпространства, т. е.  $|x - x'_n| > |x - x_n|$  для любого  $x'_n \in X_n$ , отличного от  $x_n$ . Это сразу следует из равенства

$$|x - x'_n|^2 = |x - x_n + x_n - x'_n|^2 = |x - x_n|^2 + |x_n - x'_n|^2,$$

которое справедливо, поскольку векторы  $x - x_n = \varepsilon_n$  и  $x_n - x'_n \in X_n$  ортогональны и можно воспользоваться теоремой Пифагора<sup>8</sup>. Таким образом, частичная сумма  $x_n$  ряда Фурье элемента  $x \in X$  отличается от всех прочих линейных комбинаций первых  $n$  векторов системы  $\{e_{\alpha_j}\}$  минимальностью нормы отклонения от  $x$ .

Будем рассматривать пространство  $L_2[0, T]$  комплекснозначных функций, определенных на отрезке  $[0, T]$  и интегрируемых на нем вместе с квадратом модуля. Скалярное произведение<sup>9</sup> определим формулой:

$$(x, y) = \frac{1}{T} \int_0^T x(s) y(s)^* ds.$$

Система функций  $e_k(s) = \exp(ik2\pi f_0 s)$  ( $f_0 = 1/T$ ), рассматриваемая при всех  $k \in Z$ , ортонормирована. Абстрактные ряды Фурье по такой системе функций называются тригонометрическими. Коэффициенты Фурье могут быть найдены по формуле

$$c_k = (x, e_k) = \frac{1}{T} \int_0^T x(s) \exp(-ik2\pi f_0 s) ds,$$

и частичная сумма  $x_n$  ряда Фурье элемента  $x$  принимает вид

$$x_n(t) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} c_k \exp(ik2\pi f_0 s).$$

<sup>7</sup>Если замыкание некоторого множества  $A$  совпадает со всем пространством  $X$ , то говорят, что множество  $A$  плотно в  $X$ .

<sup>8</sup>Теорема Пифагора в произвольном евклидовом пространстве доказывается следующим образом: если  $(a, b) = 0$ , то  $|a + b|^2 = (a + b, a + b) = (a, a) + (a, b) + (b, a) + (b, b) = |a|^2 + |b|^2$ .

<sup>9</sup>Отметим, что в случае комплексного евклидова пространства свойство симметричности скалярного произведения приобретает следующий вид:  $(x, y) = (y, x)^*$ . В этом случае  $(x, \alpha y) = (\alpha y, x)^* = \alpha^*(y, x)^* = \alpha^*(x, y)$ .



Подпространство  $X_n$  образовано функциями, спектр которых ограничен сверху частотой  $(n - 1)f_0$ . В курсе анализа доказывается, что семейство функций  $\{e_k\}$  является базисом рассматриваемого пространства, следовательно,  $|x_n(t) - x(t)| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Из доказанного выше минимального свойства рядов Фурье следует, что *среднеквадратичная ошибка* приближения функции  $x(t)$  частичной суммой ряда Фурье

$$|\varepsilon_n| = |x - x_n| = \left[ \frac{1}{T} \int_0^T |x(t) - x_n(t)|^2 dt \right]^{1/2}$$

принимает минимальное значение. Мы пришли к важному заключению: *отрезок тригонометрического ряда Фурье осуществляет аппроксимацию функции  $x(t)$  тригонометрическим многочленом наилучшим образом в пространстве с евклидовой метрикой, т. е. в смысле минимальности среднеквадратичного отклонения.*

## 2 Преобразование Фурье

Несмотря на простоту и важность дискретного спектрального разложения Фурье, при теоретическом исследовании задач обработки сигналов более удобным оказывается т. н. интегральное спектральное разложение, включающее гармоники со всевозможными частотами и позволяющее работать с непериодическими функциями.

### 2.1 Предельный переход в ряде Фурье

*Носителем функции* называется замыкание множества тех значений аргумента, при которых значение функции отлично от нуля. Функция, имеющая ограниченный носитель, называется *финитной* или *локализованной*.

Пусть  $x(t)$  — финитный сигнал с носителем, лежащим на отрезке  $[-T/2, T/2]$ . Рассмотрим также  $T$ -периодическое продолжение  $x_T(t)$  функции  $x(t)$  на всю числовую ось. Функцию  $x_T(t)$  можно разложить в ряд Фурье:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp[-i2\pi n f_0 t] dt,$$

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp[i2\pi n f_0 t].$$

Здесь в первой формуле под интегралом стоит исходная функция  $x(t)$ , а не ее периодическое продолжение, поскольку интегрирование ведется по отрезку  $[-T/2, T/2]$  и значения функции в других точках не имеют значения.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f_0 = 1/T, \\ f_n &= nf_0 = n\Delta f\end{aligned}$$

и перепишем формулы для ряда Фурье следующим образом:

$$\begin{aligned}X_T(f) &= \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp[-i2\pi ft] dt, \\ x_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_T(f_n) \exp[i2\pi f_n t] \Delta f.\end{aligned}$$

Суммирование здесь ведется по  $n$ , и частота  $f_n = n\Delta f$  изменяется в соответствии со значением индекса  $n$ . Тождественность этих формул выписанным выше формулам для ряда Фурье становится очевидной, если учесть следующее равенство:  $C_n = X_T(f_n)\Delta f$ .

Если  $T$  очень велико, то число  $\Delta f$  становится очень малым и элементы спектра оказываются очень густо расположенными на оси частот. В пределе при  $T \rightarrow \infty$  сумма во второй формуле превращается в интеграл:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp[i2\pi ft] df. \quad (6)$$

Первая формула переписывается практически без изменений:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp[-i2\pi ft] dt. \quad (7)$$

Функция  $X(f)$  называется *интегральным спектром* сигнала  $x(t)$ , а функция  $A(f) = |X(f)|$  — его *амплитудным интегральным спектром*. Интегральный спектр состоит из всех возможных частот, вклад каждой из которых определяется величиной  $X(f)$ . Формулы (6), (7) реализуют взаимно однозначное преобразование<sup>10</sup> функции  $x(t)$  в ее интегральный спектр  $X(f)$  и обратно. Формула (7), осуществляющая переход от функции  $x(t)$  к ее интегральному спектру, носит название *прямого преобразования Фурье*<sup>11</sup>; формула (6), позволяющая по спектру восстановить сигнал, называется *обратным*

<sup>10</sup>Отметим, что всегда, когда мы говорим о взаимной однозначности спектральных преобразований, мы имеем в виду взаимную однозначность с точностью до значений в точках разрыва, т. е. с точностью до значений функции на множестве меры нуль.

<sup>11</sup>fourier transform

преобразованием Фурье. Спектр  $X(f)$  содержит всю информацию о поведении функции  $x(t)$ . Говорят, что функция  $x(t)$  представлена в частотной области<sup>12</sup> спектром  $X(f)$ , а сама функция  $x(t)$  представляет ту же информацию во временной области<sup>13</sup>.

Рассмотрим финитный сигнал  $x(t)$  с носителем, расположенным на отрезке  $[0, T]$  и его  $T$ -периодическое продолжение  $x_T(t)$ . Формулы для преобразования Фурье сигнала  $x(t)$  и коэффициентов Фурье сигнала  $x_T(t)$  имеют следующий вид:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp[-i2\pi n f_0 t] dt,$$

$$X_T(f) = \int_0^T x(t) \exp[-i2\pi f t] dt.$$

Сравнивая эти формулы, приходим к следующему важному выводу:

*Интегральный спектр сигнала конечной длительности  $T$  может быть задан коэффициентами Фурье его периодического продолжения с разрешением по частоте  $\Delta f = f_0 = 1/T$ :*

$$TC_n = X_T(n\Delta f, T).$$

Это утверждение позволяет выяснить взаимосвязь дискретного и интегрального спектров Фурье. Снова рассмотрим финитную функцию  $x(t)$  с носителем, лежащим на отрезке  $[0, T]$ . Пусть функция  $x(t)$  доопределена нулем на отрезок  $[0, T_v]$  (здесь  $T_v$  — интервал наблюдения) и в результате получаем функцию  $x_v(t)$  (результат наблюдения). Вычислим дискретный спектр  $C_n$   $T_v$ -периодического продолжения функции  $x_v(t)$ . Расстояние между спектральными линиями дискретного спектра равно  $\Delta f = f_0 = 1/T_v$ , и каждому интервалу изменения частоты соответствует конечное число спектральных составляющих. Пусть теперь  $T_v \rightarrow \infty$  и, соответственно,  $\Delta f \rightarrow 0$ . Ясно, что при этом  $C_n \rightarrow 0$  и в пределе мы получаем *представление непериодической функции в виде суммы бесконечного числа бесконечно малых по амплитуде колебаний, бесконечно близких по частоте*. В то же время при любом  $T_v$  выполнено соотношение  $\Delta f X(n\Delta f, T) = C_n$  и точки  $(n\Delta f, C_n/\Delta f)$  лежат на кривой  $X(f, T)$ . Выражение  $C_n/\Delta f$  имеет смысл плотности амплитуды, и в пределе амплитуда оказывается «размазанной» по вещественной оси с плотностью  $X(f, T)$ . Таким образом, при увеличении длительности наблюдения спектральные линии постепенно сближаются и число их на каждом

---

<sup>12</sup>frequency domain

<sup>13</sup>time domain

фиксированном отрезке увеличивается, устремляясь к бесконечности, что обеспечивает все более точное задание спектра  $X(f, T)$ .

Введем оператор FT, переводящий функцию  $x(t)$  в ее интегральный спектр:  $\text{FT}[x(\cdot)](f) = X(f)$ . Наиболее важным свойством оператора FT является его линейность. Пусть  $\text{FT}[x(t)] = X(f)$  и  $\text{FT}[y(t)] = Y(f)$ . Тогда  $\text{FT}[\alpha x(t) + \beta y(t)] = \alpha \text{FT}[x(t)] + \beta \text{FT}[y(t)] = \alpha X(f) + \beta Y(f)$ , что непосредственно следует из (6). Легко также показать, что спектр  $X(f)$  вещественнозначной функции  $x(t)$  обладает следующим свойством симметрии (проверьте!):  $X(-f) = X^*(f)$ .

## 2.2 Примеры

Рассмотрим спектр вида

$$X(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_*/2, \\ 0, & |f| > f_*/2 \end{cases}$$

и вычислим для него соответствующую функцию  $x(t)$ . Вычисления проводятся непосредственно:

$$x(t) = \int_{-f_*/2}^{f_*/2} \exp[i2\pi ft] df = \frac{\sin(\pi f_* t)}{\pi t}.$$

При  $f_* = 1$  получаем функцию  $x(t) = \sin(\pi t)/\pi t$ .

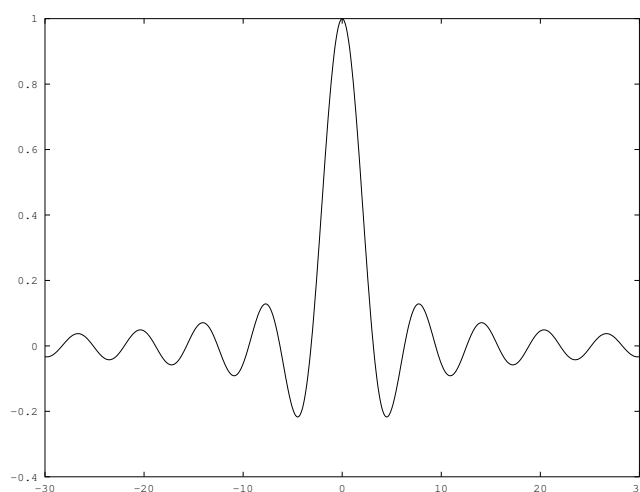


Рис. 1. Функция  $\text{sinc}(x)$

Функция  $\sin x/x$  (см. рис. 1) настолько часто встречается в цифровой обработке сигналов, что для нее используется специальное обозначение:

$$\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$$

(читается «синкус»).

В новых обозначениях формула для сигнала  $x(t)$  из примера принимает следующий вид:

$$x(t) = f_* \operatorname{sinc}(\pi f_* t).$$

При  $f_* = 1$  имеем  $x(t) = \operatorname{sinc}(\pi t)$ .

Если в формуле для преобразования Фурье положить  $f = 0$ , то получим

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt,$$

т. е. интеграл от функции совпадает со значением преобразования Фурье в точке  $f = 0$ . Для функции из примера получаем (при  $f_* = 1$ ):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(\pi t) dt = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(t) dt = X(0) = 1,$$

т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi.$$

Мы получили известный классический результат новым способом.

Вычислим еще спектр функции Гаусса:

$$x(t) = \exp[-t^2/2].$$

При этом используется табличный интеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \pi^{1/2}.$$

Эту формулу легко получить, проинтегрировав по вещественной плоскости  $R^2$  выражение  $\exp(-x^2 - y^2)$  путем перехода к полярным координатам:

$$\left( \int_R \exp(-x^2) dx \right)^2 = \int_{R^2} \exp(-x^2 - y^2) ds = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(-r^2) r dr d\varphi = \pi.$$

Проведем выкладки:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-t^2/2 - i2\pi ft] dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[(t/\sqrt{2} + i\sqrt{2}\pi f)^2 + 2\pi f] dt.$$

В результате получаем:

$$G_0(f) = (2\pi)^{1/2} g_0(2\pi f).$$

## 2.3 Теорема Парсеваля

Мощностью непериодического сигнала  $x(t)$  называется величина

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(s)|^2 ds.$$

Имеет место результат, аналогичный теореме Парсеваля для рядов Фурье:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df.}$$

Функция  $P(f) = |X(f)|^2$  называется *спектром мощности*<sup>14</sup> непериодического сигнала  $x(t)$ .

Для доказательства последней формулы вычислим мощность сигнала, представленного в виде интеграла Фурье:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) [x(t)]^* dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(i2\pi ft) df \right]^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \int_{-\infty}^{\infty} X(f)^* \exp(-i2\pi ft) df dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)^* \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i2\pi ft) dt df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)^* X(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df. \end{aligned}$$

## 2.4 Теорема двойственности

Пусть оператор  $\text{FT}[\cdot]$  переводит функцию  $x(t)$  в ее интегральный спектр  $X(f)$ :

$$\text{FT}[x(\cdot)](f) = X(f).$$

Заметим, что под  $\text{FT}[x(\cdot)](f)$  понимается значение в точке  $f$  функции, являющейся результатом действия оператора  $\text{FT}[\cdot]$  на функцию  $x(\cdot)$ .

Найдем результат действия оператора  $\text{FT}[\cdot]$  на спектр  $X(f)$ :

$$\text{FT}[X(\cdot)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(-i2\pi f\xi) df.$$

Легко видеть, что

$$\boxed{\text{FT}[X(\cdot)](\xi) = x(-\xi).}$$

Для обратного оператора  $\text{FT}^{-1}[\cdot]$ , преобразующего спектр  $X(\cdot)$  в исходный сигнал  $x(\cdot)$ , имеем:

$$\text{FT}^{-1}[X(\cdot)](t) = x(t) = \text{FT}[X(\cdot)](-t).$$

---

<sup>14</sup>power spectrum

Доказанное утверждение носит название *теоремы двойственности* и имеет многочисленные применения.

## 2.5 Теоремы подобия

Пусть функция  $x(t)$  имеет спектр  $X(f)$ . Тогда функции  $x_\lambda(t) = x(\lambda t)$  ( $\lambda > 0$ ) соответствует спектр  $X_\lambda(f) = (1/\lambda)X(f/\lambda)$ . Это свойство доказывается в одну строку заменой переменной  $s = \lambda t$ :

$$X_\lambda(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda t) \exp(-i2\pi ft) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp[-i2\pi(f/\lambda)s] ds / \lambda = (1/\lambda)X(f/\lambda).$$

Доказанное свойство с использованием введенной выше операторной символики может быть записано следующим образом:

$$\boxed{\text{FT}[x(\lambda t)] = \lambda^{-1}X(f/\lambda).}$$

Из доказанной теоремы и теоремы двойственности следует, что если спектр  $X(f)$  соответствует функции  $x(t)$ , то спектр  $X_\lambda(f) = X(\lambda f)$  соответствует функции  $x_\lambda(t) = x(t/\lambda)/\lambda$ :

$$\boxed{\text{FT}^{-1}[X(\lambda f)] = \lambda^{-1}x(t/\lambda).}$$

Смысл доказанного утверждения состоит в том, что при сжатии сигнала в  $\lambda$  раз вдоль оси времени частота каждой гармонической составляющей из спектрального представления сигнала увеличивается в  $\lambda$  раз и, следовательно, происходит такое же расширение спектра в область высоких частот.

## 2.6 Запаздывание сигнала и сдвиг спектра

Если функция  $x(t)$  имеет спектр  $X(f)$ , то функции  $x_\tau(t) = x(t - \tau)$  соответствует спектр  $X_\tau(f) = \exp(-i2\pi f\tau)X(f)$ :

$$\boxed{\text{FT}[x(t - \tau)] = \exp(-i2\pi f\tau)X(f).}$$

Это свойство также доказывается в одну строку заменой переменной  $s = t - \tau$ :

$$\begin{aligned} X_\tau(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \exp(-i2\pi ft) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp[-i2\pi f(s + \tau)] ds = \exp(-i2\pi f\tau)X(f). \end{aligned}$$

Доказанное свойство демонстрирует инвариантность амплитудного спектра относительно сдвига преобразуемого сигнала:  $|X_\tau(f)| = |X(f)|$ .

Если спектр  $X(f)$  соответствует функции  $x(t)$ , то спектр  $X_{f_0}(f) = X(f - f_0)$  соответствует функции  $x_{f_0}(t) = x(t) \exp(i2\pi f_0 t)$ :

$$\boxed{\text{FT}^{-1}[X(f - f_0)] = x(t) \exp(i2\pi f_0 t).}$$

Доказательство тривиально.

**Задача 2.1.** Функция  $x(t)$  финитна и ее носитель сосредоточен на отрезке  $[0, T]$ , а ее преобразование Фурье  $X(f)$  известно. Вычислить преобразование Фурье функции

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [0, T], \\ x(t + T), & t \in [-T, 0). \end{cases}$$

**Задача 2.2.** Вычислить преобразование Фурье функции

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [0, T], \\ x(-t), & t \in [-T, 0). \end{cases}$$

**Задача 2.3.** Вычислить преобразование Фурье функции  $y(t) = x(t) + x(t - 1)$ , если  $T = 4$  и

$$X(f) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1), \\ 0, & t \in [1, 4). \end{cases}$$

## 2.7 Принцип неопределенности

Пусть задан сигнал  $x(t)$  с мощностью  $E_0$ . Введем функции  $E_x(t)$  и  $E_X(f)$  следующим образом:

$$E_x(t) = \int_{-t}^t |x(s)|^2 ds,$$

$$E_X(f) = \int_{-f}^f |X(s)|^2 ds.$$

Ясно, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} E_x(t) = \lim_{f \rightarrow \infty} E_X(f) = E_0$ . Таким образом,  $E_X(f_0)$  — мощность сигнала, сосредоточенная на частотах  $|f| < f_0$ . *Шириной сигнала* назовем корень  $t_*$  уравнения  $E_x(t) = E_0/2$ ; *шириной спектра* назовем корень  $f_*$  уравнения  $E_X(f) = E_0/2$ . Ширина спектра определяет интервал частот, на котором сосредоточена половина мощности сигнала.

Рассмотрим теперь сигнал  $x^\lambda(t) = \sqrt{\lambda}x(\lambda t)$  при  $\lambda > 0$ . Легко проверить, что мощность сигнала  $x^\lambda(t)$  равна  $E_0$ . Рассмотрим функцию

$$E_x^\lambda(t) = \int_{-t}^t |x_\lambda(s)|^2 ds.$$



Тривиально проверяется равенство:

$$E_x^\lambda(t) = E_x(\lambda t).$$

Из последнего равенства сразу следует, что ширина  $t_*^\lambda$  сигнала  $x^\lambda(t)$  равна  $t_*/\lambda$ .

Из теоремы подобия следует, что интегральный спектр  $X^\lambda(f)$  сигнала  $x^\lambda(t)$  определяется соотношением

$$X^\lambda(f) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} X(f/\lambda).$$

Рассмотрим функцию

$$E_X^\lambda(f) = \int_{-f}^f |X^\lambda(s)|^2 ds.$$

Тривиально проверяется равенство:

$$E_X^\lambda(f) = E_X(f/\lambda).$$

Из последнего равенства сразу следует, что ширина  $f_*^\lambda$  спектра  $X^\lambda(f)$  равна  $\lambda f_*$ .

При уменьшении ширины сигнала в  $\lambda$  раз спектр сигнала становится во столько же раз шире. Произведение ширины сигнала и ширины спектра остается постоянным:

$$t_* f_* = \text{const}.$$

Это соотношение называется *соотношением неопределенностей Гейзенберга*. Таким образом, между шириной сигнала и шириной спектра существует простая и глубокая связь, составляющая содержание *принципа неопределенности Гейзенберга*.

*Коротким сигналам соответствует широкий спектр, и чем меньше длительность сигнала, тем шире его спектр. Другими словами, локализация сигнала на вдвое более коротком временном интервале приводит к вдвое хуже локализованному спектру.*

Отметим, что проведенные выше рассуждения имеют простой геометрический смысл. Действительно, переход от функции  $x(t)$  к функции  $x(\lambda t)$  при  $\lambda > 1$  соответствует сжатию графика функции в  $\lambda$  раз вдоль оси абсцисс и при этом в соответствии с теоремой подобия график амплитудного спектра становится шире в  $\lambda$  раз.

Полученное нами свойство спектра сигнала малой длительности приводит к принципиальным трудностям при реализации систем передачи информации с высокой пропускной способностью. Действительно, для обеспечения высокой скорости передачи информации желательно кодировать ее импульсами по возможности меньшей длительности, но это приводит к весьма широкому диапазону частот, представленному в спектре. В то же время любой канал связи имеет определенный диапазон пропускаемых частот и расширение этого диапазона сопряжено с существенными техническими трудностями.

## 2.8 Формы записи преобразования Фурье

В литературе широко используются эквивалентные способы записи формул для преобразования Фурье, отличающиеся от используемых нами.

Первая модификация связана с использованием угловой частоты  $\omega$  вместо линейной частоты  $f$ . Положим  $\omega = 2\pi f$  и

$$X_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} X\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i\omega t) dt.$$

Формула

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(i2\pi ft) df$$

принимает вид

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \exp(i\omega t) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega) \exp(i\omega t) d\omega.$$

Множитель  $1/(2\pi)$  в формуле прямого преобразования Фурье и асимметричность полученных формул приносят множество неудобств в выкладках. Часто используют еще одну форму записи, получаемую путем аналогичных преобразований:

$$\begin{aligned} X_2(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i\omega t) dt, \\ x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X_2(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \end{aligned}$$

Вторая из часто встречающихся модификаций связана со знаком экспоненты. В этом случае формулы приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} X_3(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(i2\pi ft) dt, \\ x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X_3(f) \exp(-i2\pi ft) df. \end{aligned}$$

Из теоремы двойственности следует, что спектр  $X_3(f)$  отличается от спектра  $X(f)$  направлением оси частот:

$$X_3(f) = X(-f).$$

Иногда встречаются случаи, когда преобразованием Фурье называют произвольную комбинацию описанных выше модификаций основных формул. Обычно такая несогласованность не приводит к большим трудностям, но вносит постоянную путаницу. Обращаясь к незнакомому источнику, всегда следует сначала выяснить, что конкретно автор понимает под термином «преобразование Фурье».

### 3 Теория дискретизации

До этого момента мы рассматривали исключительно аналоговые сигналы, заданные функциями непрерывно меняющегося аргумента. Цифровая вычислительная техника по своей природе не может непосредственно работать с аналоговыми сигналами.

Для представления аналогового сигнала используется процедура дискретизации<sup>15</sup>. Задавая интервал дискретизации  $\tau > 0$ , мы переходим от аналогового сигнала  $x(t)$  к последовательности  $\{x_k\}$ , образованной по правилу  $x_k = x(k\tau)$ . Получаемая в результате дискретизации последовательность значений сигнала в равноотстоящие моменты времени  $x_k$  называется *временным рядом*<sup>16</sup>.

При обработке натуральных данных дискретизация аналогового сигнала производится устройством, называемым *аналого-цифровым преобразователем (АЦП)*<sup>17</sup>. Для обратного преобразования временного ряда в аналоговый сигнал применяются *цифро-аналоговые преобразователи (ЦАП)*<sup>18</sup>. АЦП и ЦАП являются составной частью всех звуковых карт. При обработке результатов моделирования дискретная форма представления сигнала естественно возникает как результат применения численных методов.

Во всех случаях выбор правильного значения *интервала дискретизации*  $\tau$  представляет собой важную проблему. Интервал дискретизации выбирают из соображений *адекватности* и *неизбыточности* временного ряда. Представительность дискретизации подразумевает достаточно точное сохранение свойств исходной функции. Неизбыточность предполагает выбор достаточно большого шага дискретизации при сохранении представительности.

---

<sup>15</sup>sampling

<sup>16</sup>time series

<sup>17</sup>analog-digital converter (ADC)

<sup>18</sup>digital-analog converter (DAC)

### 3.1 Модель дискретизации

С точки зрения классического численного анализа дискретизация представляет собой переход от функции  $x(t)$  к временному ряду

$$x_k = x(k\tau).$$

Попробуем взглянуть на процесс дискретизации с несколько иной точки зрения.

Рассмотрим выражение

$$D_\tau(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - j\tau), \quad (8)$$

которое представляет последовательность дельтаобразных импульсов. Дискретизацией сигнала  $x(t)$  назовем сигнал  $x_\tau(t)$ , получаемый по правилу

$$x_\tau(t) = x(t)D_\tau(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - j\tau). \quad (9)$$

Легко непосредственно убедиться в справедливости равенства

$$x_k = \int_{k\tau-\varepsilon}^{k\tau+\varepsilon} x_\tau(t)dt$$

при  $\varepsilon < \tau$ . Таким образом, временной ряд  $x_k$  восстанавливается по дискретизации, но дискретизация не содержит, кроме значений  $x_k$ , никакой другой информации (поскольку  $D_\tau(t) = 0$  при  $t \neq k\tau$ ). Функция  $D_\tau(t)$  называется *дискретизирующей дельта-гребенкой*, или *ядром дискретизации*.

### 3.2 Теорема о наложении

Легко видеть, что функция  $D_\tau(t)$  является  $\tau$ -периодической функцией и может быть разложена в ряд Фурье:

$$D_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \exp(i2\pi n f_1 t),$$

где  $f_1 = 1/\tau$ . Найдем коэффициенты Фурье  $d_n$ :

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} D_\tau(t) \exp(-i2\pi n f_1 t) dt = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - j\tau) \exp(-i2\pi n f_1 t) dt = \\ &= \frac{1}{\tau} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \delta(t - j\tau) \exp(-i2\pi n f_1 t) dt. \end{aligned}$$

В последней сумме лишь одно слагаемое при  $j = 0$  отлично от нуля. Окончательно получим  $d_n = 1/\tau$  и

$$D_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi n f_1 t).$$

Пусть теперь сигнал  $x(t)$  имеет интегральный спектр  $X(f)$ . Вычислим интегральный спектр  $X_\tau(f)$  дискретизации  $x_\tau(t)$  сигнала  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} X_\tau(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_\tau(t) \exp(-i2\pi f t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) D_\tau(t) \exp(-i2\pi f t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi n f_1 t) \right] \exp(-i2\pi f t) dt = \\ &= \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp[-i2\pi(f - n f_1)t] dt = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n f_1). \end{aligned}$$

Итак,

$$\boxed{X_\tau(f) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n\tau^{-1}).} \quad (10)$$

Последнее равенство составляет содержание теоремы Найквиста о наложении спектров. Иначе говоря, *спектр дискретизированного сигнала образуется путем сложения спектров исходного сигнала, сдвинутых по частоте на величину, кратную  $f_1 = 1/\tau$ .*

**Задача 3.1.** Доказать аналогичное утверждение для случая рядов Фурье. А именно, доказать, что если  $T$ -периодической функции  $x(t)$  соответствуют коэффициенты Фурье  $C_n$ , то дискретизации  $x_\tau(t)$  при  $\tau = T/N$  соответствуют коэффициенты Фурье

$$C_n^\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{n-jN}.$$

**Указание.**

$$f_1 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{T/N} = N \frac{1}{T} = N f_0 \quad (f_0 = 1/T).$$

### 3.3 Частота Найквиста

Пусть сигнал  $x(t)$  имеет финитный спектр  $X(f)$ . Это означает, что существует число  $f_* > 0$  такое, что  $X(f) = 0$  при  $|f| > f_*$ . Пусть дискретизация сигнала производится при интервале дискретизации  $\tau$ . Тогда спектр

дискретизированного сигнала представляет собой сумму спектров исходного сигнала, сдвинутых по частоте друг относительно друга на величину, кратную  $f_1 = 1/\tau$ . Если спектр финитный и  $2f_* < f_1$ , то отдельные спектры при суммировании не перекрываются. В этом случае спектр исходного сигнала может быть восстановлен по спектру дискретизации следующим образом:

$$X(f) = \begin{cases} X_\tau(f), & |f| \leq f_*, \\ 0, & |f| > f_* \end{cases}. \quad (11)$$

Смысл сформулированного условия состоит в том, что в промежутке (по частоте) между отдельными слагаемыми в сумме (10) должно уместиться две полуширины  $f_*$  спектра исходного сигнала. Сформулированное условие носит название *условия Найквиста неналожения частот*. Замечая, что  $f_1 = 1/\tau$ , преобразуем условие Найквиста  $2f_* < f_1$  к виду, в котором оно чаще всего применяется на практике:

$$\tau < \frac{1}{2f_*}.$$

Таким образом, условие Найквиста оказывается выполненным, если *частота дискретизации*  $1/\tau$  сигнала выбрана в два раза большей, чем частота самой высокочастотной составляющей, присутствующей в сигнале.

Если условие Найквиста не выполнено, то «хвосты» спектров накладываются друг на друга и приподнимаются. В этом случае в спектре дискретизированного сигнала появляются ложные высокочастотные составляющие.

Физический смысл теоремы о наложении состоит в том, что после дискретизации мы теряем возможность различать частоты, отличающиеся друг от друга на  $1/\tau$ , и спектральной составляющей дискретизированного сигнала с частотой  $f'$  соответствуют спектральные составляющие исходного сигнала с частотами  $\{f' + k/\tau\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . Частота  $h_\tau = 1/\tau$  называется *частотой Найквиста*<sup>19</sup>. Таким образом, спектр дискретизированного сигнала определяет спектральный состав исходного сигнала по модулю  $h_\tau$  — ось частот «складывается гармошкой». Это явление называется *маскировкой частот*<sup>20</sup>.

Маскировку частот можно наблюдать в кино, когда в кадр попадает колесо со спицами и меняющейся частотой вращения (например, колесо разгоняющейся кареты). При увеличении скорости вращения колеса мы видим сначала, как оно ускоряется, затем его движение замедляется, колесо останавливается и начинает вращаться в обратную сторону. Дело в том, что при достаточно большой скорости вращения за время смены кадров ( $1/25$  сек.

<sup>19</sup>nyquist frequency

<sup>20</sup>frequency aliasing

в кино) колесо успевает повернуться на угол  $2\pi - \alpha$ . Когда в телепередачах показывают экран компьютера, видны черные полосы, которые также появляются в связи с маскировкой частот (тот же эффект можно наблюдать, поставив вентилятор перед экраном компьютера и поглядев на экран сквозь вращающиеся лопасти; интересно также попробовать изменять скорость вращения, подтормаживая лопасти рукой). Описанные явления известны в физике как стробоскопический эффект.

**Задача 3.2.** Сформулировать условие Найквиста в случае периодических сигналов и рядов Фурье.

### 3.4 Теорема Найквиста—Шеннона

Заметим, что если для дискретизации  $x_\tau(t)$  выполнено условие Найквиста, то появляется возможность восстановить по ней исходный сигнал  $x(t)$ . Действительно, по дискретизированному сигналу  $x_\tau(t)$  можно найти его спектр  $X_\tau(f)$ , затем восстановить спектр исходного сигнала  $X(f)$  и, уже зная спектр, восстановить исходный сигнал  $x(t)$ . Оказывается, что при выполненном условии Найквиста можно явно выписать формулу, позволяющую восстановить исходный сигнал  $x(t)$  по его дискретизации  $x_k = x(k\tau)$ . Эта формула называется рядом Найквиста, а сформулированное выше утверждение — теоремой Найквиста—Шеннона<sup>21</sup>.

**Теорема 3.1** (Найквиста—Шеннона). *Пусть сигнал  $x(t)$  имеет финитный спектр  $X(f)$  и соответствующая ему максимальная частота равна  $f_*$ . Тогда сигнал  $x(t)$  полностью определен своими значениями в точках  $t_k = k\tau$  при  $\tau = 1/2f_*$ .*

*Доказательство.* Так как  $X(f) = 0$  при  $|f| > f_*$ , то сигнал  $x(t)$  может быть получен по спектру  $X(f)$  с помощью формулы

$$x(t) = \int_{-f_*}^{f_*} X(f) \exp(i2\pi ft) df. \quad (*)$$

Замечая, что в правой части последней формулы используются значения спектра  $X(f)$  лишь при  $|f| < f_*$ , мы получаем возможность подставить в нее вместо спектра разложение в ряд Фурье его периодического продолжения.

Периодическое продолжение спектра  $X(f)$  на всю числовую ось является периодической функцией с периодом  $2f_*$ . Поэтому, учитывая, что  $1/2f_* = \tau$ , получим

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i2\pi n\tau f) \quad (**)$$

---

<sup>21</sup>sampling theorem

при  $|f| < f_*$ .

Подставим  $(**)$  в  $(*)$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-f_*}^{f_*} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i2\pi n\tau f) \right) \exp(i2\pi f t) df = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{-f_*}^{f_*} \exp[i2\pi f(t + n\tau)] df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{2 \sin 2\pi f_*(t + n\tau)}{2\pi(t + n\tau)}. \end{aligned}$$

Найдем коэффициенты Фурье в разложении  $(**)$ . Формально

$$C_n = \frac{1}{2f_*} \int_{-f_*}^{f_*} X(f) \exp(-i2\pi n\tau f) df,$$

но из  $(*)$  следует, что

$$x(-n\tau) = \int_{-f_*}^{f_*} X(f) \exp(-i2\pi n\tau f) df,$$

откуда

$$C_n = \frac{1}{2f_*} x(-n\tau).$$

Итак,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x(-n\tau)}{2f_*} \cdot \frac{2 \sin 2\pi f_*(t + n\tau)}{2\pi(t + n\tau)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\tau) \frac{\sin 2\pi f_*(t - k\tau)}{2\pi f_*(t - k\tau)}$$

и окончательно

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\tau) \operatorname{sinc} 2\pi f_*(t - k\tau).$$

Учитывая, что  $x_k = x(k\tau)$ , последнюю формулу можно переписать в виде

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \operatorname{sinc} 2\pi f_*(t - k\tau).} \quad (12)$$

Теорема доказана.

Отметим, что если частота  $f_*$  ограничивает сверху частоты спектральных составляющих сигнала, т. е.  $X(f) = 0$  при  $|f| > f_*$ , то любая частота  $f_{**} > f_*$  также удовлетворяет этому условию. Поэтому сигнал  $x(t)$  с финитным спектром полностью определен отсчетами  $x_k = x(k\tau)$  при всех  $\tau < 1/2f_*$ .



Полагая, что  $\tau = 1/2f_*$  и  $t = j\tau$ , перепишем формулу (12) следующим образом:

$$x_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \operatorname{sinc} 2\pi f_* \left( j \frac{1}{2f_*} - k \frac{1}{2f_*} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \operatorname{sinc} \pi(j - k).$$

Выписанная формула представляет собой очевидное тождество, поскольку функция  $\operatorname{sinc} \pi(j - k)$  отлична от нуля лишь при  $k = j$ . Таким образом, формула (12) фактически является интерполяционной формулой, выражающей значение функции в любой момент времени через ее значения в узловых точках  $k\tau$ . Эта формула оказалась точной в самих узловых точках для произвольной функции  $x(t)$ , но для функций, спектр которых имеет ограниченный носитель, она оказывается точной при всех значениях аргумента.

### 3.5 Преобразование Фурье дискретного сигнала

Распространим развитые нами выше спектральные методы на случай дискретных сигналов. Пусть сигнал  $x(t)$  имеет финитный спектр  $X(f)$ . Тогда  $x(t)$  полностью задается своими отсчетами  $x_k = x(k\tau)$ , взятыми через промежуток  $\tau = 1/2f_*$ . Выразим спектр такого сигнала через его отсчеты. Для этого подставим выражение (12) в формулу прямого интегрального преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i2\pi ft) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\tau) \operatorname{sinc} 2\pi f_*(t - k\tau) \exp(-i2\pi ft) dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} 2\pi f_*(t - k\tau) \exp(-i2\pi ft) dt. \end{aligned}$$

**Задача 3.3.** Проверить, что при  $\tau = 1/2f_*$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} 2\pi f_*(t - k\tau) \exp(-i2\pi ft) dt = \begin{cases} \tau \exp(-i2\pi f k\tau), & |f| \leq f_*, \\ 0, & |f| > f_*. \end{cases}$$

Учитывая сделанное в формулировке задачи утверждение, имеем для  $|f| < f_*$ :

$$\boxed{X(f) = \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \exp(-i2\pi f k\tau).} \quad (13)$$

Подставляя  $t = k\tau$  в формулу обратного интегрального преобразования Фурье и учитывая, что носитель функции  $X(f)$  сосредоточен на отрезке  $[-f_*, f_*]$ , получаем

$$x_k = \int_{-f_*}^{f_*} X(f) \exp(i2\pi f k\tau) df. \quad (14)$$

### 3.6 Дискретизация в спектральной области

Применим полученные результаты теории дискретизации и теорему двойственности к выяснению свойств спектров финитных функций, или, как говорят, *сигналов конечной длительности*.

Пусть  $x(t) = 0$  при  $|t| > T/2$  и сигнал  $x(t)$  имеет спектр  $X(f, T)$ . Тогда, применяя теорему Найквиста—Шеннона в совокупности с теоремой двойственности, можно сделать следующее заключение: *спектр  $X(f, T)$  полностью определен своими значениями в точках  $f_n = n\Delta f$  при  $\Delta f = 1/T$  и*

$$\begin{aligned} X(f, T) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta f, T) \operatorname{sinc} 2\pi(T/2)(f - n\Delta f) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta f, T) \operatorname{sinc} \pi T(f - n\Delta f). \end{aligned} \quad (15)$$

Дискретный спектр сигнала конечной длительности вычисляется по формуле:

$$X(n\Delta f, T) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(i2\pi n\Delta f t) dt. \quad (16)$$

Сигнал  $x(t)$  можно восстановить по его дискретному спектру  $X(n\Delta f, T)$ , для чего восстановим сначала интегральный спектр Фурье  $X(f, t)$  по его отсчетам  $X(n\Delta f, T)$  с помощью формулы (15), а затем используем полученное выражение в формуле обратного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f, T) \exp(i2\pi f t) df = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta f, T) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \pi T(f - n\Delta f) \exp(i2\pi f t) df. \end{aligned}$$

Вспоминая задачу (\*), преобразуем полученное выражение следующим образом:

$$x(t) = \Delta f \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta f, T) \exp(i2\pi n\Delta f t). \quad (17)$$

Пусть сигнал конечной длительности ( $x(t) = 0$  при  $|t| > T/2$ ) имеет финитный спектр ( $X(f, T) = 0$  при  $|f| > f_*$ ). Тогда, с одной стороны, сигнал полностью определяется своей дискретизацией (при  $\tau < 1/2f_*$ ) и, с другой стороны, спектр сигнала также задается своей дискретизацией (при  $\Delta f < 1/T$ ). На самом деле сигнал конечной длительности всегда имеет спектр с неограниченным носителем, так что сделанное предположение внутренне противоречиво. Однако на практике оказывается, что большинство сигналов конечной длительности имеют достаточно быстро убывающий спектр, чтобы считать их (приближенно) имеющими финитный спектр.

Перепишем формулы прямого и обратного преобразований Фурье в предположении одновременной финитности сигнала и спектра. Формула (13) примет следующий вид:

$$X(n\Delta f, T) = \tau \sum_{k=-N/2}^{N/2} x_k \exp(-i2\pi n\Delta f k\tau).$$

Если  $\tau = T/N$  и  $\Delta f = 1/T$ , то  $\Delta f\tau = (1/T)(T/N) = 1/N$  и

$$X(n\Delta f, T) = \frac{T}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2} x_k \exp[-i(2\pi/N)nk]. \quad (18)$$

Формула обращения получается дискретизацией из (17):

$$x_k = \Delta f \sum_{n=-N/2}^{N/2} X(n\Delta f, T) \exp(i2\pi n\Delta f k\tau).$$

С учетом равенства  $\Delta f\tau = 1/N$  последняя формула принимает вид:

$$x_k = \frac{1}{T} \sum_{n=-N/2}^{N/2} X(n\Delta f, T) \exp[i(2\pi/N)nk]. \quad (19)$$

**Задача 3.4.** Про сигналы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  известно лишь то, что их спектры ограничены частотами  $f_1$  и  $f_2$  соответственно ( $f_2 > f_1$ ). С какой минимальной

частотой можно дискретизировать следующие сигналы:  $a(t) = x_1(t) + x_2(t)$ ,  $b(t) = x_1(t) \circ x_2(t)$ ,  $c(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$  при условии обратимости дискретизации.

**Задача 3.5.** Про сигналы  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$  известно лишь, что их спектры ограничены частотами  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$  соответственно ( $f_3 > f_2 > f_1$ ). Для сигнала

$$x(t) = x_1(t) \circ x_2(t) + x_1(t) \cdot x_3(t)$$

указать минимальную допустимую частоту дискретизации (если требуется ее обратимость).

**Задача 3.6.** Спектр сигнала удовлетворяет следующим условиям:

$$X(f) = \begin{cases} 0, & |f| < f_1, \\ a(|f|), & f_1 \leq |f| \leq f_2, \\ 0, & |f| > f_2. \end{cases}$$

Формальное применение условия Найквиста дает минимальную частоту дискретизации  $f_d = 2f_2$ . Можно ли в этом частном случае уменьшить частоту дискретизации, сохраняя обратимость процесса дискретизации? Если нет, то объяснить почему, если да, то указать допустимые значения частоты дискретизации.

## 4 Дискретное преобразование Фурье

В предыдущем разделе формулы дискретного преобразования Фурье (ДПФ) были получены в приближении сигналов конечной длительности с финитным спектром. Здесь мы покажем другой подход к выводу этих формул и изучим свойства ДПФ.

### 4.1 Дискретизация преобразования Фурье

Пусть сигнал  $x(t)$  финитен с носителем, лежащим на отрезке  $[-T/2, T/2]$ . В этом случае формулы для преобразования Фурье  $X(f, T)$  совпадают с формулами для коэффициентов Фурье  $C_n$  периодической функции, полученной  $T$ -периодическим продолжением на всю вещественную ось сужения функции  $x(t)$  на отрезок  $[-T/2, T/2]$ :

$$X(n\Delta f, T) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-i2\pi n\Delta f t) dt = TC_n,$$

где  $\Delta f = 1/T$ .

Вычислим коэффициенты  $C_n$  ряда Фурье приближенно, воспользовавшись формулой прямоугольников при  $\tau = T/N$ :

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-i2\pi n \Delta f t) dt \approx \frac{1}{T} \sum_{k=-N/2}^{N/2} x(k\tau) \exp(-i2\pi n \Delta f k\tau) \frac{T}{N}.$$

Замечая, что  $\Delta f \tau = (1/T)(T/N) = 1/N$  и полагая  $x_k = x(k\tau)$ , приходим к формуле

$$C_n \approx \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2} x_k \exp[-i(2\pi/N)nk].$$

Если  $C_n = 0$  при  $|n| > N/2$ , то

$$x_k = x(k\tau) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} C_n \exp(i2\pi n \Delta f k\tau) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} C_n \exp[i(2\pi/N)nk].$$

Таким образом, формулы прямого и обратного дискретного преобразования Фурье эквивалентны формулам разложения функции в ряд Фурье при условии, что интеграл заменен своим приближенным значением, вычисленным по формуле прямоугольников. Это замечание выясняет приближенный характер замены интегрального преобразования Фурье дискретным и позволяет оценить вносимую такой заменой погрешность. При спектральном подходе приближенный характер формул дискретного преобразования Фурье оказывается заключенным в предположении об одновременной финитности сигнала и спектра.

## 4.2 Дискретное преобразование Фурье

Введем последовательность  $X_n$  в соответствии с формулой:

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2} x_k \exp[-i(2\pi/N)kn]. \quad (dft)$$

Тогда

$$X(n\Delta f, T) = T X_n \quad (20)$$

и

$$x_k = \sum_{n=-N/2}^{N/2} X_n \exp[i(2\pi/N)kn]. \quad (idft)$$

Последовательность  $X_n$  называется *дискретным спектром* временного ряда  $x_k$ . Последовательность  $A_n = |X_n|$  называется *дискретным амплитудным спектром* временного ряда  $x_k$ . Формулы (dft), (idft) называются соответственно прямым и обратным *дискретным преобразованием Фурье (ДПФ)*<sup>22</sup>. Легко убедиться, что в случае вещественного временного ряда  $x_k$  дискретный спектр обладает следующим свойством симметрии  $X_{-n} = X_n^*$ .

Для упрощения записи формул ДПФ введем следующие обозначения:

$$W_N = \exp[i(2\pi/N)].$$

Число  $W_N$  при заданном  $N$  называется *поворачивающим множителем*. Если не возникает двусмысленности, нижний индекс при поворачивающем множителе можно опускать. В новых обозначениях

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2} x_k W_N^{-kn},$$

$$x_k = \sum_{n=-N/2}^{N/2} X_n W_N^{nk}.$$

Дискретный спектр  $X_n$  оказывается периодическим:  $X_{n+N} = X_n$ . Действительно,

$$X_{n+N} = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2} x_k W_N^{-k(n+N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2} x_k W_N^{-kn} = X_n,$$

т. к.

$$W_N^{mN} = \exp[im(2\pi/N)N] = \exp(2\pi im) = 1.$$

Совершенно аналогично доказывается периодичность сигнала  $x_k$ , восстановленного по дискретному спектру:  $x_{k+N} = x_k$ . Ясно, что  $N$ -периодичность последовательностей  $x_k$ ,  $X_n$  и  $W_N^{nk}$  позволяет вести суммирование в формулах прямого и обратного дискретного преобразования Фурье по любому промежутку длины  $N$ .

С учетом периодичности формулы дискретного преобразования Фурье переписываются следующим образом:

$$\boxed{\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k W_N^{-kn}, \\ x_k &= \sum_{n=0}^{N-1} X_n W_N^{nk}. \end{aligned}} \quad (21)$$

---

<sup>22</sup>discrete Fourier transform

Условие вещественности (с учетом равенства  $X_{-n} = X_{N-n}^*$ ) принимает вид:  $X_{N-n} = X_n^*$ .

### 4.3 Взаимная однозначность ДПФ

Приближенный характер формул дискретного преобразования Фурье приводит к необходимости более детально остановиться на взаимоотношении между формулами прямого и обратного дискретного преобразования Фурье. Пусть

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k W_N^{-kn}, \quad \bar{x}_k = \sum_{n=0}^{N-1} X_n W_N^{kn}.$$

Убедимся, что  $\bar{x}_k = x_k$ . Последнее утверждение неочевидно, поскольку при выводе формул прямого и обратного дискретного преобразования Фурье мы пользовались предположениями, которые выполняются лишь приближенно.

*Доказательство.*

$$\bar{x}_j = \sum_{n=0}^{N-1} X_n W_N^{jn} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k W_N^{-kn} W_N^{jn} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(j-k)}.$$

Но при  $j = k$

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(j-k)} = N,$$

а при  $j \neq k$

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(j-k)} = \frac{1 - W_N^{N(j-k)}}{1 - W_N^{j-k}} = 0.$$

Из последних двух равенств сразу следует доказываемое утверждение.

Доказанная взаимная однозначность фактически оказалась справедливой в результате того, что функции  $\exp(i2\pi n \Delta f t)$  ортогональны не только на отрезке  $0 \leq t \leq T$  ( $\Delta f = 1/T$ ), но и на дискретном множестве точек  $t_k = k\tau$ . Последнее является одним из самых замечательных свойств системы тригонометрических функций.

### 4.4 Теорема Парсеваля

Мощностью сигнала  $x_k$  называется величина

$$E = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2.$$

Вычислим мощность сигнала  $x_k$ , представленного своим дискретным спектром  $X_n$ :

$$E = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} X_n W^{kn} \sum_{l=0}^{N-1} X_l^* W^{-kl} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} X_n X_l^* \sum_{k=0}^{N-1} W^{k(n-l)} = \sum_{n=0}^{N-1} |X_n|^2.$$

Полученная формула составляет содержание теоремы Парсеваля:

$$\boxed{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |X_n|^2.} \quad (22)$$

Набор чисел  $P_n = |X_n|^2$  называется дискретным спектром мощности сигнала  $x_k$ .

## 4.5 Формы записи ДПФ

В литературе встречаются различные формы записи формул для ДПФ. Первая из возможных модификаций связана с размещением множителя  $1/N$ :

$$\begin{aligned} X_n^1 &= \sum_{k=-N/2}^{N/2} x_k W_N^{-kn}, & X_n^2 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=-N/2}^{N/2} x_k W_N^{-kn}, \\ x_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2} X_n^1 W_N^{nk} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=-N/2}^{N/2} X_n^2 W_N^{nk}. \end{aligned}$$

Вторая модификация формул ДПФ связана со знаком экспоненты:

$$\begin{aligned} X_n^3 &= \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2} x_k W_N^{kn}, \\ x_k &= \sum_{n=-N/2}^{N/2} X_n^3 W_N^{-nk}. \end{aligned}$$

Спектр  $X_n^3$  по отношению к спектру  $X_n$  оказывается перевернутым.

Некоторые авторы иначе определяют поворачивающий множитель:

$$W'_N = \exp[-i(2\pi/N)].$$

Поскольку все описанные модификации могут встретиться в произвольном сочетании, следует проявлять исключительную осторожность и в первую очередь выяснять, какой формулой для ДПФ пользуется автор.



## 5 Быстрое преобразование Фурье

*Быстрое преобразование Фурье (БПФ)*<sup>23</sup> представляет собой экономичный способ вычисления прямого и обратного ДПФ<sup>24</sup>. В действительности мы получим эффективный алгоритм вычисления последовательности

$$A_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k W_N^{-nk}. \quad (*)$$

Ясно, что если  $a_k = x_k$ , то  $X_n = A_n/N$ . В следующем пункте показано, что и вычисление обратного ДПФ также сводится к вычислению последовательности  $A_n$ .

### 5.1 Вычисление обратного ДПФ

Проведем следующие очевидные преобразования формулы (\*):

$$\begin{aligned} A_n &= a_0 W^0 + a_1 W^{-n} + \dots + a_{N-1} W^{-(N-1)n} = \\ &= a_0 W^0 + a_{N-1} W^{-(N-1)n} + \dots + a_1 W^{-n} = \\ &= a_0 W^0 + a_{N-1} W^{-Nn} W^n + \dots + a_1 W^{-Nn} W^{(N-1)n} = \\ &= a_0 W^0 + a_{N-1} W^n + \dots + a_1 W^{(N-1)n}. \end{aligned}$$

Из полученной формулы видно, что если

$$a_0 = X_0, \quad a_{N-1} = X_1, \quad \dots \quad a_1 = X_{N-1}$$

или

$$a_k = \begin{cases} X_0, & k = 0, \\ X_{N-k}, & k > 0 \end{cases}$$

то  $x_k = A_k$ .

Таким образом, если имеется программа, быстро вычисляющая по сигналу  $a_k$  последовательность  $A_n$ , то ее можно использовать для вычисления как прямого, так и обратного дискретного преобразования Фурье.

### 5.2 Рекуррентная формула Ланцоша–Даниэльсона

Пусть  $N = 2M$  и  $a_k^0 = a_{2k}$  и  $a_k^1 = a_{2k+1}$  при  $0 \leq k \leq M-1$ . Тогда, учитывая, что

$$W_N^{2p} = \exp\left(i \frac{2\pi}{N} 2p\right) = \exp\left(i \frac{2\pi}{N/2} p\right) = W_{N/2}^p = W_M^p,$$

---

<sup>23</sup>Fast Fourier Transform (FFT)

<sup>24</sup>Алгоритм принадлежит Кули и Тьюки (Cooley and Tukey)

получим при  $0 \leq n < M$

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k=0}^{M-1} a_{2k} W_N^{-n(2k)} + \sum_{k=0}^{M-1} a_{2k+1} W_N^{-n(2k+1)} = \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} a_k^0 W_N^{-2nk} + W_N^{-n} \sum_{k=0}^{M-1} a_k^1 W_N^{-2nk} = \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} a_k^0 W_M^{-nk} + W_N^{-n} \sum_{k=0}^{M-1} a_k^1 W_M^{-nk} = A_n^0 + W_N^{-n} A_n^1,
\end{aligned}$$

где

$$A_n^q = \sum_{k=0}^{M-1} a_k^q W_M^{-nk}, \quad q = 0, 1.$$

При  $M \leq n < N$  положим  $n = M + n'$ , где снова  $0 \leq n' < M$  и тогда

$$W_N^{-n} = W_N^{-(M+n')} = W_N^{-M} W_N^{-n'} = -W_N^{-n'},$$

откуда следует равенство

$$A_n = A_{M+n'} = A_{M+n'}^0 + W_N^{-(M+n')} A_{M+n'}^1 = A_{n'}^0 - W_N^{-n'} A_{n'}^1.$$

Окончательно имеем:

$$A_n = \begin{cases} A_n^0 + W_N^{-n} A_n^1, & 0 \leq n < M, \\ A_{n'}^0 - W_N^{-n'} A_{n'}^1, & M \leq n < N, \end{cases} \quad (23)$$

где  $n' = n - M$ . Последняя формула называется рекуррентной формулой Ланцоша–Даниэльсона.

### 5.3 Схема БПФ

Если  $N = 2^r$ , то, применяя формулу (23)  $r$  раз, мы сведем вычисление ДПФ  $N$ -точечной последовательности к вычислению  $N$  1-точечных ДПФ. ДПФ 1-точечной последовательности вычисляется тривиально:  $A_0 = a_0$ . Такая схема вычисления ДПФ называется *быстрым преобразованием Фурье* (БПФ).

Оценим получаемый выигрыш в быстродействии. При непосредственном вычислении ДПФ  $N$ -точечной последовательности приходится производить  $O(N^2)$  умножений. Легко видеть, что при вычислении по схеме БПФ производится  $r = \log_2 N$  шагов вычислений по формуле (23) и на каждом таком

шаге производится  $N/2$  умножений. Таким образом, при вычислении БПФ всего производится  $O(N \log_2 N)$  умножений и мы получаем выигрыш в эффективности в  $O(N/\log_2 N)$  раз. При  $N = 1024 = 2^{10}$  БПФ приблизительно в 100 раз эффективнее прямого вычисления ДПФ.

Заметим еще, что

$$W_{N/2} = \exp\left(i \frac{2\pi}{N/2}\right) = \exp\left(2i \frac{2\pi}{N}\right) = W_N^2.$$

Эта формула позволяет вычислять значения поворачивающих множителей  $W_N$  рекуррентно.

Несмотря на то что мы достаточно подробно описали алгоритм БПФ, написать самостоятельно его нерекурсивную реализацию непросто. В то же время рекурсивная версия алгоритма является результатом почти формальной трансляции формулы (23) в нотацию используемого языка программирования. Рекурсивная версия в среднем всего в два раза менее эффективна по сравнению с чисто итеративным алгоритмом. Ниже мы приведем основные соображения, позволяющие реализовать алгоритм БПФ в виде нерекурсивной программы и приведем реализацию БПФ, используя в качестве языка программирования *ANSI-C*.

## 5.4 Двоичная инверсия

При вычислении ДПФ по описанной схеме БПФ на первом шаге исходная последовательность  $a_k$  разбивается на две последовательности вдвое меньшей длины — последовательность четных членов  $a_k^0$  и последовательность нечетных членов  $a_k^1$ . На втором шаге аналогичному разбиению подвергается каждая из последовательностей, полученных на первом шаге, и получается уже 4 последовательности:  $a_k^{00}, a_k^{01}, a_k^{10}, a_k^{11}$ . На  $j$ -м шаге каждая из  $2^{j-1}$  исходных последовательностей  $a_k^{b_1 \dots b_{j-1}}$  разбивается на две —  $a_k^{b_1 \dots b_{j-1}0}$  и  $a_k^{b_1 \dots b_{j-1}1}$ , и в результате получается  $2^j$  последовательностей  $a_k^{b_1 \dots b_j}$ . Следующая таблица иллюстрирует этот процесс в случае  $N = 8 = 2^3$ .

|     |       |       |       |       |     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-----|
| 000 | $a_0$ | $a_0$ | $a_0$ | $a_0$ | 000 |
| 001 | $a_1$ | $a_2$ | $a_4$ | $a_4$ | 100 |
| 010 | $a_2$ | $a_4$ | $a_2$ | $a_2$ | 010 |
| 011 | $a_3$ | $a_6$ | $a_6$ | $a_6$ | 110 |
| 100 | $a_4$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | 001 |
| 101 | $a_5$ | $a_3$ | $a_5$ | $a_5$ | 101 |
| 110 | $a_6$ | $a_5$ | $a_3$ | $a_3$ | 011 |
| 111 | $a_7$ | $a_7$ | $a_7$ | $a_7$ | 111 |

В первой и последней колонках приведена двоичная запись индекса соответствующего элемента до процесса разбиения исходной последовательности и после проведения  $\log_2 N = 3$  шагов разбиения. Легко заметить, что в результате элемент  $a_k$  оказался в позиции с номером, двоичная запись которого получается из двоичной записи числа  $k$  перестановкой цифр в обратном порядке. К этому выводу легко прийти и в общем случае. Действительно, на  $j$ -м шаге в  $q$ -ю ( $q = 0, 1$ ) последовательность попадают элементы, в двоичной записи номера которых на  $j$ -м месте с конца стоит цифра  $q$ . Дальнейшее рассуждение тривиально.

Описанная перестановка элементов последовательности называется *двоичной инверсией* и является первым шагом программной реализации БПФ. Оказывается, что двоичная инверсия массива может быть выполнена с помощью следующего эффективного рекуррентного алгоритма. Пусть  $R(m)$  — позиция, на которую попадает в результате двоичной инверсии элемент с номером  $m$  (т.е. число, получающееся из  $m$  «переворачиванием» его двоичной записи). Ясно, что  $R(0) = 0$ . Пусть известно значение  $R(m)$ . Легко понять, что число  $R(m+1)$  получается из числа  $R(m)$  следующим образом: будем двигаться вдоль двоичной записи числа  $R(m)$  слева направо, заменяя единицы нулями (т.е. вычитая числа  $n/2, n/4, \dots$ ) до первого нуля, который заменяется на единицу. Эта процедура фактически повторяет алгоритм добавления единицы к числу, записанному в двоичной системе счисления. Ниже приведена реализация описанного алгоритма.

```
void binrevers( double *a, int n ){
    int i, j, k;

    for( j = i = 0; i < n - 1; i++ ){
        if( i < j ){
            double t = a[j];
            a[j] = a[i];
            a[i] = t;
        }
        for( k = n / 2; k <= j; k /= 2 )
            j -= k;
        j += k;
    }
}
```

## 5.5 Реализация формул Ланцоша–Даниэльсона

Здесь мы приведем программную реализацию формул Ланцоша–Даниэльсона, выполняющую все вычисления «на месте», т. е. без исполь-

зования дополнительной памяти — в процессе вычислений отсчеты дискретного спектра замещают отсчеты исходной последовательности. Функция `base_fft()` производит вычисление последовательности  $A_n$  по формуле (23). Вещественная и мнимая части элементов последовательности  $a_k$  помещаются в массивы `x` и `y` соответственно. После возврата из функции в этих массивах располагаются вещественные и мнимые части элементов последовательности  $A_k$ . В аргументе `n` передается длина массивов `x` и `y`; в аргументе `r` нужно передать двоичный логарифм числа `n`.

```
void base_fft( double *x, double *y, int r, int n ){
    double ur, ui, wr, wi, tr, ti, ur2;
    int i, j, l, le1, le2, ip;

    binrevers(x, n);
    binrevers(y, n);
    for( le2 = l = 1; l <= r; l++ ){
        le1 = le2;
        le2 *= 2;
        ur = 1.0;
        ui = 0.0;
        wr = cos(M_PI / le1);
        wi = -sin(M_PI / le1);
        for( j = 0; j < le1; j++ ){
            for( i = j; i < n; i += le2 ){
                ip = i + le1;
                tr = x[ip] * ur - y[ip] * ui;
                ti = x[ip] * ui + y[ip] * ur;
                x[ip] = x[i];
                y[ip] = y[i];
                x[i] += tr;
                y[i] += ti;
                x[ip] -= tr;
                y[ip] -= ti;
            }
            ur2 = ur * wr - ui * wi;
            ui = ur * wi + ui * wr;
            ur = ur2;
        }
    }
}
```

## 5.6 Программная реализация БПФ

Окончательная реализация алгоритма БПФ вычисления ДПФ выглядит следующим образом:

```
void scale( double *a, int n ){
    int i;
    for( i = 0; i < n; i++ )
        a[i] /= n;
}

void resort( double *a, int n ){
    int i;
    for( i = 1; i < n / 2; i++ ){
        double t = a[i];
        a[i] = a[n - i];
        a[n - i] = t;
    }
}

void cfft( double *a, double *b, int r, int n ){
    scale(a, n);
    scale(b, n);
    base_fft(a, b, r, n);
}

void ciff( double *a, double *b, int r, int n ){
    resort(a, n);
    resort(b, n);
    base_fft(a, b, r, n);
}
```

Функция `cfft()` производит вычисление прямого ДПФ, а функция `ciff()` — обратное ДПФ. Списки аргументов у обеих функций совпадают как формально, так и по смыслу. Первые два аргумента — массивы, содержащие соответственно вещественную и мнимую части преобразуемого временного ряда. Длины этих массивов должны совпадать и быть целой степенью числа 2. Аргумент `n` определяет длину обрабатываемых массивов; в аргументе `r` передается двоичный логарифм числа `n`. После выполнения функций результат преобразования помещается также в массивы `a` и `b` (`a` — вещественная часть, `b` — мнимая), затирая их содержимое.

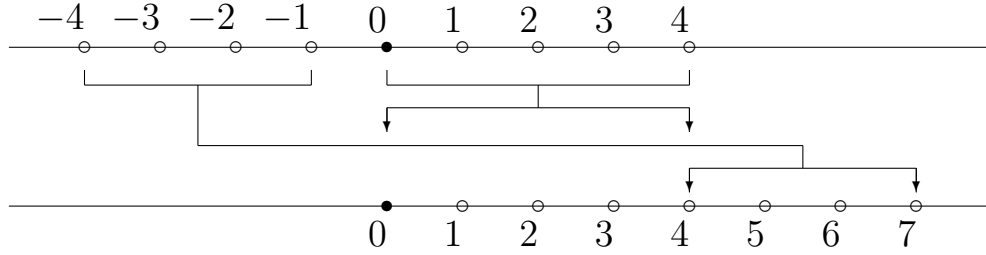


Рис. 2. Порядок отсчетов спектра

## 5.7 Порядок отсчетов

Для правильного использования процедуры БПФ совершенно необходимо ясно понимать, какие данные ожидаются на ее входе и какие результаты получаются на выходе.

В результате применения БПФ к временному ряду  $x_k$  получается набор комплексных спектральных отсчетов  $X_n$ . Исходная последовательность считается  $N$ -периодической:

$$x_{n+N} = x_n.$$

Последовательность отсчетов вычисленного спектра  $X_n$  также является  $N$ -периодической:

$$X_{n+N} = X_n,$$

следовательно,

$$X_{N-n} = X_{-n}. \quad (24)$$

В результате применения процедуры БПФ мы получаем массив, содержащий отсчеты периодического спектра  $X_n$  при  $0 \leq n < N$ . Из последней формулы следует, что последние  $N/2$  элементов спектра (при  $N/2 \leq n \leq N-1$ ) соответствуют отрицательным частотам, причем в том порядке, в котором они расположены на числовой оси.

*Первые  $N/2 + 1$  отсчетов с индексами  $0 \leq n \leq N/2$  содержат спектральные отсчеты для положительных частот. Отсчеты с индексами  $N/2 \leq n \leq N-1$  соответствуют отрицательным частотам  $n - N$ , пробегающим значения от  $-N/2$  до  $-1$ .*

Порядок отсчетов спектра может быть проиллюстрирован рисунком 2 и следующей таблицей:

|            |         |           |       |       |         |           |         |           |
|------------|---------|-----------|-------|-------|---------|-----------|---------|-----------|
| $X_{-N/2}$ | $\dots$ | $X_{-1}$  | $X_0$ | $X_1$ | $\dots$ | $X_{N/2}$ |         |           |
|            |         |           | $X_0$ | $X_1$ | $\dots$ | $X_{N/2}$ | $\dots$ | $X_{N-1}$ |
| $X_{N/2}$  | $\dots$ | $X_{N-1}$ | $X_0$ | $X_1$ | $\dots$ | $X_{N/2}$ |         |           |

Если последовательность  $a_j$  по смыслу задачи определена на симметричном относительно нуля отрезке  $-N/2 < j \leq N/2$ , то перед применением процедуры БПФ (прямого или обратного) следует доопределить ее на отрезок  $0 \leq j \leq N-1$ :

$$\hat{a}_j = \begin{cases} a_j & 0 \leq j \leq N/2 \\ a_{j-N} & N/2 < j \leq N-1 \end{cases}.$$

Напротив, если в результате вычисления БПФ получена последовательность  $\hat{a}_j$ , для которой естественной областью определения служит симметричный отрезок, то ее также следует доопределить на него по периодичности:

$$a_j = \begin{cases} \hat{a}_{N+j} & -N/2 < j < 0 \\ \hat{a}_j & 0 \leq j \leq N/2 \end{cases}.$$

Отметим, что «симметричный относительно нуля» отрезок  $-N/2 < j \leq N/2$  на самом деле расположен относительно нуля несимметрично. Из  $N$ -периодичности следует, что  $a_{-N/2} = a_{N/2}$ , что обычно хорошо согласуется со смыслом последовательности  $a_j$ .

## 5.8 Сдвиг нуля

Иногда описанный в предыдущем разделе порядок отсчетов, получаемых при БПФ, оказывается весьма обременительным. При увеличении индекса от нуля мы сначала проходим положительные частоты в порядке возрастания, а затем отрицательные, но уже в порядке убывания модуля. Добиться естественного порядка расположения отсчетов спектра можно, используя описанную ниже процедуру *сдвига нуля*. Такое преобразование особенно удобно, если спектр приходится умножать на взвешивающее окно, заданное как функция частоты.

Образуем последовательность  $\hat{x}_k$  по правилу

$$\hat{x}_k = (-1)^k x_k.$$

Заметим, что

$$(-1)^k = W_N^{kN/2},$$

и вычислим спектр  $\hat{X}_n$  сигнала  $\hat{x}_k$ :

$$\hat{X}_n = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k W_N^{-kn} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k W_N^{kN/2} W_N^{-kn} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k W_N^{-k(n-N/2)} = X_{n-N/2}.$$



Таким образом, спектр  $\hat{X}_n$  сигнала  $\hat{x}_k$  может быть получен из спектра  $X_n$  сигнала  $x_k$  с помощью сдвига вправо на  $N/2$  единиц. При таком сдвиге на отрезок  $0 \leq n \leq N-1$  как раз приходится интервал  $-N/2 \leq n - N/2 \leq N/2 - 1$  исходного спектра, причем в спектре  $\hat{X}_n$  отсчеты исходного спектра следуют в естественном порядке. При увеличении индекса от нуля мы сначала проходим отрицательные частоты в порядке убывания модуля, а затем положительные в порядке его возрастания. Отсчет спектра  $\hat{X}_n$  при  $n = N/2$  соответствует нулевой частоте в спектре исходного сигнала, а отсчет при  $n = 0$  соответствует частоте Найквиста.

**Задача 5.1.** Написать программу для вычисления спектра сигнала  $x(t) = \sin(t) + \sin(5t)$  с использованием алгоритма БПФ.

## 5.9 БПФ вещественной последовательности

Описанная выше процедура БПФ принимает на вход, вообще говоря, комплексную последовательность  $x_k$  и вычисляет комплексный спектр  $X_n$ . В большинстве задач исходная последовательность  $x_k$  оказывается вещественной и при непосредственном использовании процедуры БПФ попусту тратится вдвое больше памяти, чем необходимо. Кроме того, получаемый спектр  $X_n$  обладает симметрией

$$X_{N-n} = X_n^*$$

и при его вычислении лишнее время тратится на вычисление отсчетов, соответствующих отрицательным частотам. Здесь мы опишем эффективные методы вычисления БПФ вещественных последовательностей.

### Одновременное вычисление двух спектров

Пусть комплексная последовательность  $x_k$  образована из двух вещественных последовательностей  $y_k$  и  $z_k$  одинаковой длины  $N$  по правилу

$$x_k = y_k + iz_k.$$

Пусть вычислены спектры  $X_n$ ,  $Y_n$  и  $Z_n$  последовательностей  $x_k$ ,  $y_k$  и  $z_k$  соответственно. Буквой  $r$  на месте верхнего индекса будем обозначать вещественную часть числа, а буквой  $i$  — мнимую. Например,  $x_k^r = \operatorname{re}[x_k] = y_k$

и  $x_k^i = \text{im}[x_k] = z_k$ . Имеем:

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k W^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (y_k + iz_k) W^{-kn} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k W^{-kn} + i \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k W^{-kn} = Y_n + iZ_n = \\ &= Y_n^r + iY_n^i + i(Z_n^r + iZ_n^i) = (Y_n^r - Z_n^i) + i(Y_n^i + Z_n^r), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} X_n^r &= Y_n^r - Z_n^i, \\ X_n^i &= Z_n^r + Y_n^i. \end{aligned} \quad (*)$$

Поскольку  $Y_n$  и  $Z_n$  — спектры вещественных последовательностей, то их вещественные части симметричны, а мнимые антисимметричны, т. е. выполнены равенства:

$$\begin{aligned} Y_n^r &= Y_{N-n}^r, & Y_n^i &= -Y_{N-n}^i, \\ Z_n^r &= Z_{N-n}^r, & Z_n^i &= -Z_{N-n}^i \end{aligned} \quad (**)$$

при  $1 \leq n \leq N/2 - 1$ . Из сравнения равенств (\*) и (\*\*) получаем:

$$\begin{aligned} Y_n^r &= (X_n^r + X_{N-n}^r)/2, & Y_n^i &= (X_n^i - X_{N-n}^i)/2, \\ Z_n^r &= (X_n^i + X_{N-n}^i)/2, & Z_n^i &= -(X_n^r - X_{N-n}^r)/2 \end{aligned} \quad (A)$$

также при  $1 \leq n \leq N/2 - 1$ . Эти формулы легко обратить:

$$\begin{aligned} X_n^r &= Y_n^r - Z_n^i, & X_{N-n}^r &= Y_n^r + Z_n^i, \\ X_n^i &= Y_n^i + Z_n^r, & X_{N-n}^i &= Z_n^r - Y_n^i. \end{aligned} \quad (A')$$

Отметим, что для вещественной последовательности  $a_k$  отсчеты спектра  $A_0$  и  $A_{N/2}$  вещественны, поэтому

$$\begin{aligned} X_0 &= (Y_0^r - Z_0^i) + i(Y_0^i + Z_0^r) = Y_0^r + iZ_0^r, \\ X_{N/2} &= (Y_{N/2}^r - Z_{N/2}^i) + i(Y_{N/2}^i + Z_{N/2}^r) = Y_{N/2}^r + iZ_{N/2}^r, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} Y_0^r &= X_0^r, & Y_{N/2}^r &= X_{N/2}^r, \\ Z_0^r &= X_0^i, & Z_{N/2}^r &= X_{N/2}^i. \end{aligned} \quad (B)$$

Формулы (A) и (B) позволяют провести одновременное вычисление спектров двух вещественных последовательностей длины  $N$  путем вычисления БПФ одной комплексной последовательности длины  $N$ . Формулы (A') и (B)

позволяют выполнить одновременно два обратных БПФ по спектрам вещественных последовательностей. При этом используются только отсчеты спектров, соответствующие положительным частотам, т. е. значениям индекса  $0 \leq j \leq N/2$ . Таким образом, каждый из спектров содержит  $N/2 + 1$  отсчет. Для того чтобы проводить вычисление в рамках двух вещественных массивов длины  $N$ , воспользуемся тем, что в получаемых спектрах отсчеты с индексами 0 и  $N/2$  вещественны, и поместим вещественную часть отсчета спектра с индексом  $N/2$  на место мнимой части отсчета с индексом 0. Ниже приведена реализация прямого и обратного вещественного БПФ.

```
void rfft2( double *a, double *b, int r, int n ){
    int j;
    double xvj, xij, xrnj, xinj, xrn2, xin2;

    cfft(a, b, r, n);
    for( j = 1; j < n/2; j++ ){
        xvj = a[j];
        xij = b[j];
        xrnj = a[n-j];
        xinj = b[n-j];
        a[j] = (xvj + xrnj)/2.0;
        b[j] = (xij - xinj)/2.0;
        a[n-j] = (xij + xinj)/2.0;
        b[n-j] = (xrnj - xvj)/2.0;
    }
    xrn2 = a[n/2];
    xin2 = b[n/2];
    for( j = n/2+1; j < n; j++ ){
        a[j-1] = a[j];
        b[j-1] = b[j];
    }
    a[n-1] = b[0];
    b[n-1] = xin2;
    b[0] = xrn2;
}

void rirfft2( double *a, double *b, int r, int n ){
    int j;
    double zr0, zrn2, yvj, yij, zvj, zij;

    zr0 = a[n-1];
```

```

zrn2 = b[n-1];
for( j = n-1; j >= n/2+1; j-- ){
    a[j] = a[j-1];
    b[j] = b[j-1];
}
a[n/2] = b[0];
b[n/2] = zrn2;
b[0] = zr0;
for( j = 1; j < n/2; j++ ){
    ymj = a[j];
    yij = b[j];
    zrmj = a[n-j];
    zimj = b[n-j];
    a[j] = ymj - zimj;
    b[j] = yij + zrmj;
    a[n-j] = ymj + zimj;
    b[n-j] = zrmj - yij;
}
cifft(a, b, r, n);
}

```

Функция `rfft2()` вычисляет спектр двух вещественных последовательностей, расположенных в массивах `a` и `b` следующим образом:

|       |       |       |     |           |
|-------|-------|-------|-----|-----------|
| $j$   | 0     | 1     | ... | $N-1$     |
| $a_j$ | $y_0$ | $y_1$ | ... | $y_{N-1}$ |
| $b_j$ | $z_0$ | $z_1$ | ... | $z_{N-1}$ |

После выполнения функции `rfft2()` отсчеты спектров оказываются расположенными в массивах `a` и `b` следующим образом:

|       |             |         |     |               |               |     |         |             |
|-------|-------------|---------|-----|---------------|---------------|-----|---------|-------------|
| $j$   | 0           | 1       | ... | $N/2-1$       | $N/2$         | ... | $N-2$   | $N-1$       |
| $a_j$ | $Y_0^r$     | $Y_1^r$ | ... | $Y_{N/2-1}^r$ | $Z_{N/2-1}^r$ | ... | $Z_1^r$ | $Z_0^r$     |
| $b_j$ | $Y_{N/2}^r$ | $Y_1^i$ | ... | $Y_{N/2-1}^i$ | $Z_{N/2-1}^i$ | ... | $Z_1^i$ | $Z_{N/2}^r$ |

Функция `rifft2()` ожидает, что исходные спектры будут размещены в массивах `a` и `b` таким же образом, как в результате работы функции `rfft2()`. А выходные данные функции `rfft2()` размещены так же как исходные спектры для функции `rfft2()`.

## Вычисление одного спектра

Задача эффективного вычисления спектра одной вещественной последовательности с помощью рекуррентной формулы Ланцоша–Даниэльсона сво-

дится к разобранной в предыдущем пункте задаче.

Пусть дана вещественная последовательность  $x_k$  при  $0 \leq k \leq N-1$ . Спектр  $X_n$  будем вычислять только для положительных частот, т. е. при  $0 \leq n \leq N/2$ . Образует последовательности  $y_k$  и  $z_k$  при  $0 \leq k \leq N/2-1$  по правилу:

$$\begin{aligned} y_k &= x_{2k}, \\ z_k &= x_{2k+1}. \end{aligned}$$

Пусть  $Y_n$  и  $Z_n$  — спектры последовательностей  $y_k$  и  $z_k$  соответственно. Выпишем формулу Ланцоша–Даниэльсона применительно к спектрам:

$$X_n = (Y_n + W_N^{-n} Z_n)/2$$

при  $0 \leq n \leq N/2$  (при  $n = N/2$  следует учесть, что  $Y_{N/2} = Y_0$  и  $Z_{N/2} = Z_0$ ).

Последовательности  $y_k$ ,  $z_k$  — вещественные и содержат по  $N/2$  отсчетов, поэтому спектры  $Y_n$  и  $Z_n$  состоят из  $N/4$  отсчетов (для положительных частот). Перепишем предыдущее выражение в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} X_n &= (Y_n + W_N^{-n} Z_n)/2, \\ X_{N/2-n} &= (Y_{N/2-n} + W_N^{-(N/2-n)} Z_{N/2-n})/2, \\ X_{N/4} &= (Y_{N/4} + W_N^{-N/4} Z_{N/4})/2 \end{aligned}$$

при  $0 \leq n \leq N/4-1$ . Учитывая, что  $Y_{N/2-n} = Y_n^*$ ,  $Z_{N/2-n} = Z_n^*$ ,  $W_N^{-N/2} = -1$  и  $W_N^{-N/2} = -i$ , имеем

$$\begin{aligned} X_n &= (Y_n + W_N^{-n} Z_n)/2, \\ X_{N/2-n} &= (Y_n^* - W_N^n Z_n^*)/2, \\ X_{N/4} &= (Y_{N/4} - i Z_{N/4})/2. \end{aligned}$$

Эти формулы тривиально обращаются:

$$\begin{aligned} Y_n &= X_n + X_{N/2-n}^*, \\ Z_n &= (X_n - X_{N/2-n}^*) W_N^n, \\ Y_{N/4} &= 2 \operatorname{re}[X_{N/4}], \\ Z_{N/4} &= -2 \operatorname{im}[X_{N/4}]. \end{aligned}$$

Ниже приведены функции, реализующие полученные формулы.

```
void rfft( double *a, double *b, int r, int n ){
    int j;
```

```

double yrj, yij, zroj, zij, arg, cs, sn, yr0, yrn2, zr0, zrn2;

rfft2(a, b, r, n);
yr0 = a[0] / 2.0;
yrn2 = b[0] / 2.0;
zr0 = a[n-1] / 2.0;
zrn2 = b[n-1] / 2.0;
for( j = 1; j < n/2; j++ ){
    yrj = a[j] / 2.0;
    yij = b[j] / 2.0;
    zroj = a[n-1-j] / 2.0;
    zij = b[n-1-j] / 2.0;
    arg = M_PI * j / n;
    cs = cos(arg);
    sn = sin(arg);
    a[j] = yrj + cs * zroj + sn * zij;
    b[j] = yij + cs * zij - sn * zroj;
    a[n-1-j] = yrj - cs * zroj - sn * zij;
    b[n-1-j] = -yij + cs * zij - sn * zroj;
}
for( j = n-1; j > n/2; j-- ){
    a[j] = a[j-1];
    b[j] = b[j-1];
}
a[n/2] = yrn2;
b[n/2] = -zrn2;
a[0] = yr0 + zr0;
b[0] = yr0 - zr0;
}

void rffft( double *a, double *b, int r, int n ){
    int j;
    double xroj, xij, xrnj, xinj, arg, cs, sn, xrn4, xin4, xr0, xrn2;

    for( j = 1; j < n/2; j++ ){
        xroj = a[j];
        xij = b[j];
        xrnj = a[n-j];
        xinj = b[n-j];
        a[j] = xroj + xrnj;
        b[j] = xij - xinj;
    }
}

```

```

    arg = M_PI * j / n;
    cs = cos(arg);
    sn = sin(arg);
    a[n-j] = (xrj - xrnj) * cs - (xij + xinj) * sn;
    b[n-j] = (xrj - xrnj) * sn + (xij + xinj) * cs;
}
xrn4 = a[n/2];
xin4 = b[n/2];
for( j = n/2; j < n-1; j++ ){
    a[j] = a[j+1];
    b[j] = b[j+1];
}
xr0 = a[0];
xrn2 = b[0];
a[0] = xr0 + xrn2;
a[n-1] = xr0 - xrn2;
b[0] = 2.0 * xrn4;
b[n-1] = -2.0 * xin4;
rfft2(a, b, r, n);
}

```

Функция `rfft()` вычисляет БПФ вещественной последовательности  $x_k$ , записанной в массивы **a** и **b** в следующем порядке:

|       |       |       |     |           |
|-------|-------|-------|-----|-----------|
| $j$   | 0     | 1     | ... | $N/2 - 1$ |
| $a_j$ | $x_0$ | $x_2$ | ... | $x_{N-2}$ |
| $b_j$ | $x_1$ | $x_3$ | ... | $x_{N-1}$ |

Следует отметить, что параметр **n** и его двоичный логарифм **r** соответствуют длинам массивов **a** и **b**. В результате получается спектр, записанный в массивы **a** и **b** следующим образом:

|       |             |         |     |               |
|-------|-------------|---------|-----|---------------|
| $j$   | 0           | 1       | ... | $N/2 - 1$     |
| $a_j$ | $X_0^r$     | $X_1^r$ | ... | $X_{N/2-1}^r$ |
| $b_j$ | $X_{N/2}^r$ | $X_1^i$ | ... | $X_{N/2-1}^i$ |

Функция `rifft()` реализует обратное преобразование, принимая на вход спектр, расположенный в массивах **a** и **b** описанным выше способом.

**Задача 5.2.** Написать программу для вычисления спектра сигнала  $x(t) = \sin(t) + \sin(5t)$  с использованием алгоритма БПФ для вещественного сигнала. Сравнить временные затраты данной реализации с простым БПФ.

## 5.10 О реализациях БПФ

Описанная реализация алгоритма БПФ является вполне удовлетворительной для большинства приложений. Ниже приведены некоторые полезные замечания, касающиеся других известных реализаций алгоритма БПФ.

В нашей реализации использована схема БПФ, называемая алгоритмом с прореживанием по времени. Некоторые из известных реализаций БПФ используют алгоритм с прореживанием по частоте. В деталях эти алгоритмы различаются, но по всем остальным характеристикам совершенно эквивалентны.

Программа, реализующая алгоритм БПФ, часто последовательно обращается к элементам рабочих массивов, расположенным далеко друг от друга. Этот факт указывает на то, что алгоритм БПФ предъявляет серьезные требования к аппаратному кэшу (если массивы расположены в оперативной памяти) или к виртуальной памяти (если данные не помещаются в оперативную память).

В первом случае алгоритм БПФ может быть существенно оптимизирован при наличии априорных знаний об устройстве и размере кэша процессора. Ясно, что такой «оптимальный» алгоритм будет жестко ориентирован на конкретный процессор. Известна реализация алгоритма БПФ (библиотека FFTW {[www.fftw.org](http://www.fftw.org)}), которая «на лету» подстраивается под особенности кэша конкретного процессора.

Если рабочие массивы не помещаются в оперативную память, то во всех известных автору системах управления виртуальной памятью эффективность алгоритма становится катастрофически низкой, поскольку большая часть времени уходит на обмен страниц между оперативной памятью и диском. В [Numerical Recipes, 1997] описана модификация алгоритма БПФ, оптимизированная для работы с данными, расположенными на внешнем носителе.

Мы описали модификацию алгоритма БПФ, ориентированную на работы с вещественными данными, поскольку этот случай очень часто встречается на практике. В [Numerical Recipes, 1997] можно найти аналогичный алгоритм для двумерного БПФ.

## 6 Цифровые фильтры

Линейные системы представляют единственный достаточно широкий класс систем обработки сигналов, допускающих полное аналитическое описание. К счастью, не выходя за пределы линейных систем, можно строить интересные и полезные системы обработки сигналов. В действительности в цифровой обработке сигналов обычно еще сильнее сужают класс рассматриваемых систем, работая только с цифровыми фильтрами — линейными



системами, инвариантными к сдвигу. При исследовании цифровых фильтров наиболее адекватными оказываются развитые нами спектральные методы.

Цифровые фильтры могут быть использованы, если необходимо выделить некоторые спектральные составляющие наблюдаемого сигнала и задержать (отсеять) остальные частоты. Такая необходимость часто возникает при обработке экспериментальных данных, когда в силу особенностей аппаратуры в наблюдаемых данных присутствуют спектральные составляющие, не несущие информации о наблюдаемом процессе. Так, при использовании для регистрации сигнала аппаратуры, питающейся от бытовой осветительной сети переменного тока, в регистрируемом сигнале будет присутствовать частота питающего напряжения (50 Гц для Европы и 60 Гц для Америки) вне зависимости от качества экранирования и заземления.

## 6.1 Принцип суперпозиции

Определим понятие линейной системы. Пусть дискретный сигнал  $x_k$  при прохождении системы  $F$  преобразуется в дискретный сигнал  $y_k = F[x_k]$ . Если для любых дискретных сигналов  $x_k, y_k$  и чисел  $\alpha, \beta$  выполняется равенство  $F[\alpha x_k + \beta y_k] = \alpha F[x_k] + \beta F[y_k]$ , то систему  $F$  называют линейной.

Пусть теперь  $x_k = \sum_j a_j x_k^{(j)}$  и  $L$  — линейная система. Тогда

$$L[x_k] = L \left[ \sum_j a_j x_k^{(j)} \right] = \sum_j L \left[ a_j x_k^{(j)} \right] = \sum_j a_j L \left[ x_k^{(j)} \right]. \quad (25)$$

Выписанное равенство носит название *принципа суперпозиции*.

Если  $x_k^{(j)}$  — базисные сигналы, т. е. любой сигнал (или любой интересующий нас сигнал) можно представить в виде  $\sum_j a_j x_k^{(j)}$ , и если известны реакции  $y_k^{(j)} = L[x_k^{(j)}]$  системы  $L$  на базисные сигналы, то задача определения реакции системы на произвольный сигнал  $x_k = \sum_j a_j x_k^{(j)}$  решается тривиально с использованием принципа суперпозиции:  $L[x_k] = \sum_j a_j y_k^{(j)}$ . Важен правильный выбор набора базисных сигналов, но в случае линейных систем ответ известен — базис Фурье в этом случае оптимален.

В частном случае спектральных разложений

$$x_k = \sum_n X_n \exp(i2\pi n f_0 k \tau)$$

нужно знать реакцию линейной системы на гармонический входной сигнал  $L[\exp(i2\pi n f_0 k \tau)]$ . Эта задача решается в следующих разделах. Здесь мы полагаем, что сигнал дискретизирован с интервалом  $\tau = 1$ , так что максимальная частота, присутствующая в спектре равна  $f_{\max} = 1/2$ . Одновременно

делается предположение о конечности числа отсчетов  $N$  сигнала, так что можно работать с его периодическим продолжением и разложением в ряд Фурье при  $f_0 = 1/N$ . Иногда работают также с дискретным сигналом, определенным во всех точках целочисленной сетки. В этом случае спектр  $X(f)$  оказывается заданной на всей оси периодической функцией с периодом 1.

**Пример.** Рассмотрим формулу симметрического сглаживания сигнала по 3-м точкам:

$$y_k = \frac{1}{3} [x_{k-1} + x_k + x_{k+1}].$$

Эта формула задает простую линейную систему. Ниже мы вернемся к этому примеру и убедимся на нем в эффективности спектральных методов при исследовании линейных систем.

## 6.2 Импульсная характеристика

Получим общий вид преобразования, выполняемого линейной системой. Пусть

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}.$$

Тогда

$$\delta_{k-j} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j \end{cases}.$$

В этих обозначениях тривиально проверяется равенство

$$x_k = \sum_j x_j \delta_{k-j}$$

и, согласно принципу суперпозиции,

$$L[x_k] = \sum_j x_j L[\delta_{k-j}].$$

Линейная система  $L$  называется *линейной системой с постоянными параметрами (ЛПП-системой)*, если для любого сигнала  $x_k$  и любого целого  $j$  из равенства  $L[x_k] = y_k$  следует равенство  $L[x_{k-j}] = y_{k-j}$ . Легко выяснить физический смысл этого определения: если параметры системы постоянны во времени, то реакция системы на сигнал  $x_{k-j}$ , запаздывающий на  $j$  единиц времени по сравнению с сигналом  $x_k$ , также запаздывает на  $j$  единиц времени по сравнению с  $y_k$ . Последовательность  $h_k = L[\delta_k]$  называется *импульсной характеристикой (ИХ)*, или *импульсным откликом*<sup>25</sup> линейной

---

<sup>25</sup>impulse response

системы с постоянными параметрами. Следует заметить, что импульсная характеристика может быть полезна и имеет смысл лишь в случае линейных систем с постоянными параметрами.

Принимая во внимание определение импульсной характеристики ЛПП-системы и обозначая  $L[x_k]$  через  $y_k$ , перепишем последнее равенство в виде

$$y_k = \sum_j x_j h_{k-j}. \quad (26)$$

Таким образом, знание ИХ ЛПП-системы позволяет определить ее реакцию на произвольный сигнал и, следовательно, ИХ полностью характеризует ЛПП-систему. Равенство (26) называется основным уравнением ЛПП-системы. Линейная система с постоянными параметрами называется *цифровым фильтром (ЦФ)*<sup>26</sup>. Таким образом, цифровой фильтр может быть задан своей ИХ. Вследствие (26) задание ИХ является наиболее общим способом описания ЦФ.

**Пример.** Рассмотренная выше формула сглаживания по 3-м точкам задает цифровой фильтр с импульсной характеристикой

$$h_k = \begin{cases} 0, & k < -1, \\ 1/3, & -1 \leq k \leq 1, \\ 0, & 1 < k \end{cases}.$$

Этот фильтр называется симметрическим 3-точечным сглаживающим фильтром.

ЦФ является *физически реализуемым*, если  $h_k = 0$  при  $k < 0$ . ЦФ называется *фильтром с задержкой отклика  $l$*  ( $l \geq 0$ ), если  $h_k = 0$  при  $k < -l$ . Пусть отсчеты входного сигнала поступают последовательно так, что в момент времени  $t$  известны лишь отсчеты  $x_k$  при  $k \leq t$ . Реакция физически реализуемой системы с задержкой отклика  $l$  в момент времени  $t$  зависит не более чем от  $l$  будущих ( $k > t$ ) значений входного сигнала. В этом случае отклик  $y_k$  системы может быть определен уже в момент времени  $k + l$ . Симметрический 3-точечный сглаживающий фильтр является физически реализуемым с задержкой отклика  $l = 1$ . Физически реализуемый ЦФ с задержкой отклика  $l$  называется *фильтром с конечной импульсной характеристикой*, или *КИХ-фильтром*<sup>27</sup>, если существует  $m$  такое, что  $h_k = 0$  при  $k > m$ . В этом случае число  $l + m + 1$  называется *порядком КИХ-фильтра*.

Покажем, что для КИХ-фильтров уравнение (26) дает эффективный способ практической реализации ЦФ с заданной ИХ. Произведя в (26) замену

<sup>26</sup>digital filter

<sup>27</sup>finite impulse response (FIR)

индекса суммирования ( $s = k - j$ ), получим

$$y_k = \sum_j x_{k-j} h_j. \quad (27)$$

В случае КИХ-фильтра в последней формуле суммирование оказывается конечным и она дает искомую реализацию ЦФ.

Вообще говоря, мыслимы ЦФ, имеющие *бесконечную импульсную характеристику (БИХ-фильтры)*<sup>28</sup>. Иногда БИХ-фильтры также допускают эффективную алгоритмическую реализацию.

**Пример.** ЦФ, заданный формулой

$$y_k = \sum_{j=0}^k x_j,$$

является БИХ-фильтром, но допускает эффективную реализацию:

$$y_k = y_{k-1} + x_k.$$

Такое задание ЦФ называется *рекурсивным*.

### 6.3 Устойчивость цифровых фильтров

ЦФ называется *устойчивым*, если для любого ограниченного входного сигнала его отклик также ограничен. Сигнал  $x_k$  называют ограниченным, если существует постоянная  $M > 0$  такая, что  $|x_k| \leq M$  при всех  $k$ .

**Теорема 6.1.** ЦФ с импульсной характеристикой  $h_k$  устойчив тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_j |h_j| \quad (*)$$

сходится.

*Доказательство.* 1. Пусть ЦФ устойчив. Докажем, что ряд  $(*)$  сходится. Предположим противное — ряд  $(*)$  расходится. Пусть

$$x_k = \begin{cases} 1, & h_{-k} \geq 0, \\ -1, & h_{-k} < 0 \end{cases}.$$

Тогда

$$y_0 = \sum_j x_j h_{-j} = \sum_j |h_j|$$

---

<sup>28</sup>infinite impulse response (IIR)

и выходной сигнал  $y_k$  не может быть ограничен константой.

2. Пусть ряд (\*) сходится. Покажем, что для любого ограниченного входного сигнала  $x_k \leq M$  выходной сигнал  $y_k$  также ограничен. Это утверждение непосредственно следует из неравенства

$$|y_k| = \left| \sum_j x_j h_{k-j} \right| \leq \sum_j |x_j h_{k-j}| \leq M \sum_j |h_j|.$$

Доказательство завершено.

**Следствие 6.1.** *Любой КИХ-фильтр устойчив.*

## 6.4 Частотная характеристика

Вернемся к вопросу о преобразовании гармонического входного сигнала цифровым фильтром. Пусть  $x_k = \exp(i2\pi f k)$ . Тогда

$$y_k = \sum_j h_j x_{k-j} = \sum_j h_j \exp(i2\pi f(k-j)) = \exp(i2\pi f k) \left( \sum_j h_j \exp(-i2\pi f j) \right).$$

Таким образом, при прохождении цифрового фильтра гармонический сигнал не меняет своей природы, но его амплитуда умножается на число, зависящее лишь от частоты гармоника.

Число, на которое умножается амплитуда гармоника с частотой  $f$  при ее прохождении через ЦФ, называется *частотной характеристикой (ЧХ)*, или *передаточной функцией*<sup>29</sup> фильтра на частоте  $f$  и обозначается  $H(f)$ :

$$H(f) = \sum_j h_j \exp(-i2\pi f j). \quad (28)$$

Вспоминая принцип суперпозиции, мы приходим к выводу, что амплитуда частотной составляющей сигнала с частотой  $f$  при прохождении сигналом цифрового фильтра умножается на число  $H(f)$ .

Заметим, что из уравнения (28) сразу следует периодичность частотной характеристики с периодом, равным единице:

$$H(f+1) = H(f).$$

Пользуясь периодичностью, разложим функцию  $H(f)$  в ряд Фурье:

$$H(f) = \sum_n C_n \exp(i2\pi n f).$$

---

<sup>29</sup>filter response function

Сравнивая последнее выражение с (28), получим  $h_k = C_{-k}$ , но

$$C_n = \int_{-1/2}^{1/2} H(f) \exp(-i2\pi n f) df = \int_{-1/2}^{1/2} H(f) \exp(-i2\pi n f) df,$$

откуда

$$h_k = \int_{-1/2}^{1/2} H(f) \exp(i2\pi k f) df. \quad (29)$$

Таким образом, импульсная характеристика, однозначно задающая ЦФ, может быть получена из частотной характеристики путем преобразования (29). Отсюда следует, что частотная характеристика также полностью определяет фильтр и, следовательно, ЦФ может быть задан как посредством ИХ, так и через ЧХ.

Функция  $A(f) = |H(f)|$  называется *амплитудной частотной характеристикой* фильтра (АЧХ), а функция  $\varphi(f) = \arg H(f)$  — его *фазовой частотной характеристикой* (ФЧХ). В новых обозначениях

$$H(f) = A(f) \exp(i\varphi(f))$$

и, соответственно, гармоника  $x_k = a \exp(i2\pi f k)$  при прохождении фильтра превращается в

$$y_k = (A(f)a) \exp[i(2\pi f k + \varphi(f))].$$

Последнее выражение проясняет смысл АЧХ фильтра — значение АЧХ на некоторой частоте  $f^*$  определяет коэффициент ослабления ( $A(f^*) < 1$ ) или усиления ( $A(f^*) > 1$ ) спектральных составляющих сигнала, соответствующих частоте  $f^*$ .

**Задача 6.1.** Для фильтра

$$y_k = \frac{1}{10}(x_{k-2} + 2x_{k-1} + 4x_k + 2x_{k+1} + x_{k+2})$$

вычислить импульсную, частотную и амплитудную частотную характеристики.

**Задача 6.2.** Вычислить амплитудную частотную характеристику для фильтров

$$\begin{aligned} y_k &= y_{k-1} + (x_{k+1} + x_{k-1})/2, \\ y_k &= y_{k-1} + (x_{k+1} - x_{k-1}). \end{aligned}$$

## 7 Оконные преобразования

В этом разделе вводятся понятия мультипликативного и сглаживающего окна. Изучается влияние на спектр операций умножения на мультипликативное окно и свертки со сглаживающим окном. Полученные результаты

позволяют оценить влияние на спектр эффекта конечности времени наблюдения сигнала. Аппарат мультипликативных и сглаживающих окон является одним из наиболее мощных методов исследования эффектов в спектральной области.

## 7.1 Теорема о свертке

*Сверткой*<sup>30</sup> функций  $x(t)$  и  $y(t)$  (обозначается  $(x \circ y)(t)$ ) называется функция  $z(t)$ , определяемая равенством

$$z(t) = (x \circ y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)y(t-s)ds.$$

Замена переменной  $r = t - s$  позволяет легко убедиться в справедливости аналогичного равенства

$$z(t) = (x \circ y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-r)y(r)dr.$$

Таким образом, операция свертки коммутативна:  $x \circ y = y \circ x$ .

Вычислим преобразование Фурье свертки функций:

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(s)y(t-s)ds \exp(-i2\pi ft)dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-i2\pi fs) \int_{-\infty}^{\infty} y(t-s) \exp[-i2\pi f(t-s)]dt ds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-i2\pi fs)Y(f)ds = X(f)Y(f). \end{aligned}$$

Таким образом, свертке во временной области соответствует умножение спектров. Привлекая теорему двойственности, можно сделать вывод, что при свертке спектров в спектральной области во временной области происходит умножение сигналов, т. е. если  $Z(f) = X(f) \circ Y(f)$ , то  $z(t) = x(t)y(t)$ . В операторных обозначениях полученные результаты записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{FT}[x(t) \circ y(t)] &= X(f)Y(f), \\ \text{FT}^{-1}[X(f) \circ Y(f)] &= x(t)y(t). \end{aligned}$$

---

<sup>30</sup>convolution

## 7.2 Мультипликативные и сглаживающие окна

Смысл операции свертки проще всего продемонстрировать, выбрав в качестве одной из сворачиваемых функций прямоугольный импульс вида

$$y_\tau(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}.$$

В этом случае

$$z_\tau(t) = (x \circ y_\tau)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)y_\tau(s)ds = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t-s)ds.$$

Таким образом, свертка  $z_\tau(t)$  представляет собой результат сглаживания исходного сигнала  $x(t)$ , поскольку значение сигнала  $z_\tau(t)$  в каждой точке с точностью до множителя равно среднему значению сигнала  $x(t)$  на интервале  $(t - \tau/2, t + \tau/2)$ .

В случае когда сглаживающее окно имеет более сложную форму, оно интерпретируется как весовая функция, осуществляющая взвешенное усреднение значений исходного сигнала. Обычно в качестве окна  $w(t)$  выбирается локализованная вблизи нуля функция или достаточно быстро убывающая функция, которую на практике можно считать локализованной. В этом случае при вычислении значения свертки с окном в точке  $t$  производится взвешенное усреднение значений сигнала в некоторой окрестности этой точки.

Рассмотренный пример демонстрирует ситуацию, характерную для свертывающих окон. Хотя в теорему о свертке обе функции входят симметрично, на практике теорема о свертке обычно применяется в ситуации, когда функции, участвующие в свертке, имеют разный физический смысл. Одну из участвующих в свертке функций (например,  $y(t)$ ) обычно называют *сглаживающим окном*<sup>31</sup>. В этом случае говорят, что к сигналу  $x(t)$  применена операция свертки со сглаживающим окном  $y(t)$  или что сигнал  $x(t)$  сглажен окном  $y(t)$ <sup>32</sup>.

В соответствии с теоремой о свертке, при сглаживании сигнала окном в спектральной области происходит умножение спектра сигнала на спектр сглаживающего окна. В этом случае спектр сглаживающего окна называется *мультипликативным окном* в спектральной области. Вычислим спектр сглаживающего окна  $y_\tau(t)$ :

$$Y_\tau(f) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp(-i2\pi ft)dt = \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f} = \tau \operatorname{sinc}(\pi f\tau).$$

---

<sup>31</sup>window

<sup>32</sup>signal windowing



Если операция свертки применяется в спектральной области, то говорят, что сглаживание происходит в спектральной области или что спектр сглаживается окном. При сглаживании спектра во временной области происходит умножение сигнала на мультипликативное окно, спектр которого совпадает со сглаживающим окном в спектральной области.

### 7.3 Эффекты конечности времени наблюдения

Рассмотрим спектральные эффекты, возникающие вследствие того, что время наблюдения сигнала конечно. Исходный сигнал  $x(t)$ , определенный во все моменты времени, мы наблюдаем на промежутке  $0 \leq t \leq T$ , называемом интервалом наблюдения. В результате такого наблюдения мы получим сигнал  $x_T(t)$ , совпадающий с исходным сигналом  $x(t)$  на интервале наблюдения. Поскольку информация о значениях сигнала вне интервала наблюдения отсутствует, положим, что  $x_T(t) = 0$  при  $t < 0$  и  $t > T$ .

С точки зрения оконных преобразований ограниченность времени наблюдения эквивалентна умножению исходного сигнала на мультипликативное окно вида

$$w_T(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{else} \end{cases}.$$

Таким образом,  $x_T(t) = x(t)w_T(t)$ . В результате умножения сигнала на мультипликативное окно  $w_T(t)$  в спектральной области происходит свертка спектра  $X(f)$  сигнала со спектром  $W_T(f)$  окна  $w_T(t)$ :

$$X_T(f) = (X \circ W_T)(f).$$

Вычислим спектр окна  $w_T(t)$ :

$$W_T(f) = \int_0^T \exp(-i2\pi ft) dt = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} \exp(-i\pi fT) = T \operatorname{sinc}(\pi fT) \exp(-i\pi fT).$$

Спектр  $W_T(f)$  в данном случае выполняет роль сглаживающего окна.

При  $T \rightarrow \infty$  окно  $W_T(f)$  превращается в дельта-функцию Дирака, свертка с которой не изменяет исходную функцию. При конечных значениях времени наблюдения  $T$  происходит свертка с окном  $W_T(f)$ , которое тем лучше локализовано, чем большее значение принимает  $T$ . Вообще говоря, желательно, чтобы в результате ограничения времени наблюдения спектр менялся как можно меньше. С этой точки зрения сглаживающее окно следует выбирать высоким и узким, но такому сглаживающему окну соответствует широкое мультипликативное окно во временной области, и время наблюдения  $T$  становится большим. При использовании малых  $T$  сглаживающее окно оказывается широким и сильно искажает сигнал при свертке.

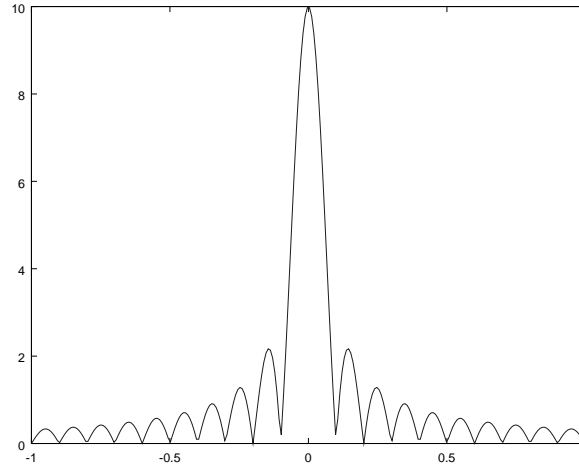


Рис. 3. Сглаживающее окно  $|W_T(f)|$  при  $T = 10$

Итак, в результате ограничения времени наблюдения сигнала происходит сглаживание спектра окном  $W_T(f)$ . Ясно, что на амплитудный спектр воздействует модуль окна  $W_T(f)$ . На рисунке 3 показана функция  $|W_T(f)|$ . Часть графика сглаживающего окна, расположенная вблизи нуля (между двумя наименьшими по модулю нулями функции  $W_T(f)$ ), называется *основным лепестком* окна. Основной лепесток окна осуществляет *сглаживание спектра* за счет усреднения значений соседних спектральных отсчетов. Ширина основного лепестка определяет полосу частот, на которой происходит сглаживание спектральных отсчетов.

Пульсации функции  $|W_T(f)|$  по обе стороны от основного лепестка называют *боковыми лепестками*. Боковые лепестки являются причиной т. н. *эффекта просачивания*<sup>33</sup>, в результате которого каждая спектральная составляющая «загрязняется» соседними составляющими. Просачивание приводит к существенному искажению спектра, особенно в случае узкополосного или гармонического процесса. В этом случае просачивание проявляется как появление в спектре ложных высокочастотных составляющих (обычно говорят о «*задирании*» *высокочастотной части спектра*).

## 7.4 Окно Ханна

Высокие боковые лепестки сглаживающего окна, соответствующего прямоугольному мультипликативному окну, обусловлены тем, что окно во временной области является разрывной функцией. Модуль спектра разрывной функции убывает линейно при увеличении частоты. Для ослабления боковых лепестков следует сделать окно непрерывным, а еще лучше гладким. Обычно при заданном  $T$  стараются так выбрать форму окна  $W_T(f)$ , чтобы минимизи-

<sup>33</sup>leakage

ровать амплитуду боковых лепестков, часто жертвуя при этом узостью окна и расширяя основной лепесток. На практике в качестве удовлетворительного мультипликативного окна  $w_T$  можно использовать практически произвольную неотрицательную функцию, имеющую единственный максимум в нуле и убывающую до нуля при возрастании аргумента до  $T$ .

Прямоугольное временное окно кажется нам естественным только по привычке. Использование гладких временных окон обеспечивает постепенный вход сигнала в интервал наблюдения и выход из нее. Фактически подобным приемом пользуются диджеи, когда постепенно увеличивают громкость одного из каналов микшера при переходе от речи к музыке.

Наибольшей популярностью пользуется *окно Ханна*<sup>34</sup>:

$$g_T(t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Введем обозначение  $f_1 = 1/T$  и перепишем эту формулу в виде, пригодном для вычисления при произвольных значениях времени:

$$g_T(t) = (1/2)[1 - \cos(2\pi f_1 t)]w_T(t).$$

Замечая, что

$$\cos(2\pi f_1 t) = (1/2)[\exp(i2\pi f_1 t) + \exp(-i2\pi f_1 t)]$$

и используя теорему о свертке, мы можем сразу выписать формулу для спектра окна Ханна:

$$G_T(f) = [(1/2)\delta(f) - (1/4)\delta(f - f_1) - (1/4)\delta(f + f_1)] \circ W_T(f).$$

В последней формуле результат свертки может быть вычислен в явном виде:

$$G_T(f) = (1/2)W_T(f) - (1/4)W_T(f - f_1) - (1/4)W_T(f + f_1).$$

На рисунке 4 приведен график функции  $|G_T(f)|$  при  $T = 10$ . Легко заметить, что при одинаковых  $T$  основной лепесток окна Ханна вдвое шире, чем в случае прямоугольного окна, но боковые лепестки имеют значительно меньшую амплитуду.

## 7.5 Теорема о локализации сигнала и спектра

Аппарат оконных преобразований позволяет доказать фундаментальную теорему о невозможности одновременно локализовать сигнал и его спектр. Ниже сформулирована теорема и приведено рассуждение, демонстрирующее основную идею ее доказательства. Строгое доказательство требует привлечения более тонкой аналитической техники и выходит за рамки книги.

---

<sup>34</sup>Hann window

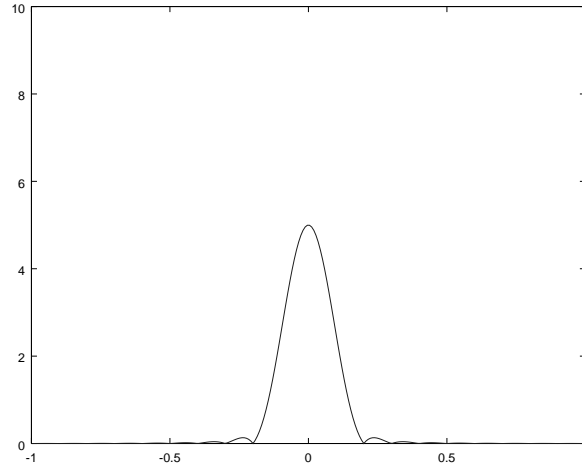


Рис. 4. Сглаживающее окно  $|G_T(f)|$  при  $T = 10$

**Теорема 7.1.** *Отличный от нуля локализованный сигнал имеет спектр с неограниченным носителем. Обратно, только сигнал с неограниченным носителем может иметь локализованный спектр.*

*Доказательство.* Без ограничения общности положим, что сигнал  $x(t)$  локализован на отрезке  $[-T/2, T/2]$ . Тогда сигнал  $x(t)$  инвариантен относительно операции умножения на мультипликативное окно  $w_T(t)$ :

$$x_T(t) = x(t),$$

где  $x_T(t) = x(t)w_T(t)$ , поскольку во всех точках, где  $w_T(t) = 0$  выполнено равенство  $x(t) = 0$ . Но в спектральной области операции умножения на мультипликативное окно  $w_T(t)$  соответствует свертка со сглаживающим окном вида  $W_T(f) = T \operatorname{sinc}(\pi f T)$ :

$$X_T(f) = (X \circ W_T)(f).$$

Из первого равенства следует, что

$$X_T(f) = X(f),$$

следовательно,

$$(X \circ W_T)(f) = X(f).$$

Таким образом, спектр локализованного сигнала инвариантен относительно операции свертки с функцией  $W_T(f)$ .

Предположим, что спектр локализованного сигнала сам оказался локализованным. Но для любой локализованной функции  $X(f)$  свертка  $(X \circ W_T)(f)$  оказывается функцией с неограниченным носителем<sup>35</sup>. Следовательно спектр

---

<sup>35</sup>Это — почти очевидное, но довольно тонкое утверждение, строгое доказательство которого далеко выходит за рамки книги. Читатель с хорошей математической подготовкой может попытаться доказать это утверждение самостоятельно.

локализованного сигнала не может быть инвариантен относительно операции свертки с функцией  $W_T(f)$ . Полученное противоречие доказывает первое утверждение теоремы. Второе утверждение теоремы доказывается совершенно аналогично.

## 7.6 Теорема о дискретной циклической свертке

Теорема о дискретной циклической свертке позволяет использовать метод окон применительно к ДПФ.

*Дискретной циклической сверткой* временных рядов  $\{x_k\}_{k=0}^{N-1}$  и  $\{y_k\}_{k=0}^{N-1}$  называется временной ряд  $z_k$ , определенный формулой

$$z_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j y_{k-j}.$$

В правой части формулы последовательности  $x_k$  и  $y_k$  считаются  $N$ -периодическими. Легко показать, что свертка коммутативна, т. е. что

$$z_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j y_{k-j} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_{k-j} y_j.$$

Вычислим дискретную циклическую свертку  $z_k$  временных рядов  $x_k$  и  $y_k$ , представленных своими дискретными спектрами  $X_n$  и  $Y_n$ :

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j y_{k-j} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} X_n W_N^{jn} \sum_{m=0}^{N-1} Y_m W_N^{(k-j)m} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} X_n Y_m W_N^{km} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} W_N^{j(n-m)} = \sum_{m=0}^{N-1} X_m Y_m W_N^{km}, \end{aligned}$$

откуда сразу следует, что дискретный спектр  $Z_n$  циклической свертки  $z_k$  определяется формулой:

$$Z_n = X_n Y_n.$$

Рассмотрим теперь операцию свертки в спектральной области. Свертка спектров определяется формулой:

$$Z_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} X_j Y_{n-j} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} X_{n-j} Y_j.$$

В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} Z_n &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} X_j Y_{n-j} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} x_p W_N^{-pj} \sum_{q=0}^{N-1} y_q W_N^{-q(n-j)} = \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} x_p y_q W_N^{-qn} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} W_N^{-j(p-q)} = \sum_{p=0}^{N-1} x_p y_q W_N^{-pn}, \end{aligned}$$

откуда

$$z_k = x_k y_k.$$

## 7.7 Свертка в спектральной области

Свертка последовательностей — одна из наиболее фундаментальных операций в цифровой обработке сигналов. Свертка обычно интерпретируется как фильтрация сигнала: одна из сворачиваемых последовательностей представляет ИХ  $h_k$  фильтра, другая же — обрабатываемый сигнал  $x_k$ .

Пусть ИХ  $h_k$  принимает ненулевые значения при  $-L_1 \leq k \leq L_2$  и  $L = L_1 + L_2 + 1$  — порядок фильтра. В случае симметричного фильтра  $L_1 = L_2$  и  $L = 2L_2 + 1$ , а для асимметричного  $L_1 = 0$  и  $L = L_2 + 1$ . Пусть исходный сигнал  $x_k$  определен при  $0 \leq k \leq N - 1$ . Обычно длина временного ряда  $N$  значительно превосходит длину импульсной характеристики  $L$ . Результат фильтрации  $y_k$  определяется формулой:

$$y_k = \sum_{j=-L_1}^{L_2} h_j x_{k-j} \quad (*)$$

при  $0 \leq k \leq N - 1$ . Здесь мы теряем несколько ненулевых значений последовательности  $y_k$  при  $k < 0$  и при  $k > N - 1$ . Обычно это не приводит к проблемам, поскольку естественно считать, что результат фильтрации имеет ту же длину, что и фильтруемая последовательность.

Эффективная реализация вычислений по формуле (\*) связана с переходом в спектральную область. При этом основным инструментом становится теорема о дискретной циклической свертке. Пусть  $\hat{h}_k$  и  $\hat{x}_k$  —  $N$ -периодические продолжения последовательностей  $h_k$  и  $x_k$  соответственно. Тогда

$$\hat{Y}_n = \hat{H}_n \hat{X}_n.$$

Полученная последовательность  $\hat{y}_k$  окажется результатом циклической свертки  $N$ -периодических последовательностей  $\hat{h}_k$  и  $\hat{x}_k$ . В результате будет наблюдаться *эффект затягивания*: на границах области задания последовательности  $\hat{y}_k$  ее отсчеты будут сильно отличаться от  $y_k$ . Для борьбы с затягиванием

достаточно доопределить последовательность  $x_k$  нулями справа на отрезок, длина которого совпадает с наибольшим из чисел  $L_1$  и  $L_2$ . При этом последовательности  $\hat{h}_k$  и  $\hat{x}_k$  становятся  $N'$ -периодическими, где

$$N' = N + \max(L_1, L_2).$$

Отметим, что  $N'$ -периодическое продолжение последовательности  $h_k$  на отрезок  $[0, N' - 1]$  осуществляется следующим образом:

|             |       |     |           |           |     |                |            |     |          |
|-------------|-------|-----|-----------|-----------|-----|----------------|------------|-----|----------|
| $k$         | 0     | ... | $L_2$     | $L_2 + 1$ | ... | $N' - L_1 - 1$ | $N' - L_1$ | ... | $N' - 1$ |
| $\hat{h}_k$ | $h_0$ | ... | $h_{L_2}$ | 0         | ... | 0              | $h_{-L_1}$ | ... | $h_{-1}$ |

Реализация дискретной циклической свертки в спектральной области оказывается весьма эффективной: переход в спектральную область осуществляется с помощью алгоритма БПФ, в спектральной области производится почленное перемножение отсчетов спектров, затем с помощью алгоритма обратного БПФ производится переход во временную область. При использовании алгоритма БПФ общее число умножений уменьшается до  $O(N \log N)$  по сравнению с  $N^2$  при прямом вычислении свертки. Поскольку переход в спектральную область производится с помощью БПФ, то необходимо еще дополнить исходный сигнал нулями так, чтобы его длина стала целой степенью двойки.

## 7.8 Секционирование свертки

При фильтрации длины последовательностей  $x_k$  и  $h_k$  существенно различны — обрабатываемый сигнал может быть представлен сколь угодно длинной последовательностью, тогда как импульсная характеристика имеет фиксированную и, как правило, небольшую длину. В противоположность этому, алгоритм, реализующий циклическую свертку в спектральной области, предполагает, что сворачиваемые последовательности имеют одинаковую длину. Решение проблемы состоит в доопределении ИХ нулями так, чтобы ее длина формально совпала с длиной фильтруемого сигнала (имеется в виду длина фильтруемого сигнала вместе с добавленными нулями). Если импульсная характеристика имеет ненулевые отсчеты при отрицательных значениях индекса, то после дополнения ее нулями следует доопределить полученную последовательность по периодичности на отрезок задания сигнала. При этом отсчеты ИХ, соответствующие отрицательным значениям индекса, окажутся расположенными у правой границы массива отсчетов.

Описанная выше схема вычисления свертки обладает существенным недостатком: при выполнении свертки сигнала, представленного большим количеством отсчетов, с относительно короткой ИХ она приводит к большим и бесполезным расходам памяти. Свертку временного ряда произвольной длины

с относительно короткой ИХ эффективно реализует описанный ниже *алгоритм секционирования свертки*.

Пусть задана  $L$ -точечная ИХ  $h_k$  и фильтруемая последовательность  $x_k$ . Выделим из последовательности  $x_k$  кадр  $\bar{x}_k$  длины  $N > L$  и вычислим свертку

$$y_k = \sum_{j=0}^{N-1} \bar{h}_j \bar{x}_{k-j},$$

где  $\bar{h}_k$  — результат дополнения импульсной характеристики  $h_k$  справа  $N - L$  нулями. Вычислим спектры  $X_n$  и  $H_n$  полученных последовательностей и спектр

$$Y_n = H_n X_n.$$

Обратное преобразование спектра  $Y_n$  во временную область даст последовательность  $\hat{y}_k$ , для которой

$$\hat{y}_k = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{h}_j \hat{x}_{k-j},$$

где  $\hat{h}_k$  и  $\hat{x}_k$  — периодические продолжения последовательностей  $\bar{h}_k$  и  $\bar{x}_k$  соответственно. Для последовательности  $\hat{y}_k$  справедливо равенство

$$\hat{y}_k = \sum_{j=0}^k \hat{h}_j \hat{x}_{k-j} + \sum_{j=k+1}^{N-1} \hat{h}_j \hat{x}_{k-j}.$$

При  $k \geq L$  вторая сумма равна нулю, поскольку  $\hat{h}_j = 0$  при  $j \geq L$  и

$$\hat{y}_k = \sum_{j=0}^k \hat{h}_j \hat{x}_{k-j} = \sum_{j=0}^{N-1} \bar{h}_j \bar{x}_{k-j}.$$

## 8 Синтез цифровых фильтров

В разделе описаны методы синтеза цифровых фильтров с наперед заданными спектральными свойствами. Рассмотрен вопрос о переходе от БИХ-фильтра к КИХ-фильтру с заданной длиной импульсной характеристики.



## 8.1 Основные формулы

Фильтр может быть задан как импульсной характеристикой  $h_j$ , так и частотной характеристикой  $H(f)$ . Эти формы задания эквивалентны:

$$H(f) = \sum_j h_j \exp(-i2\pi f j), \quad (30)$$

$$h_k = \int_{-1/2}^{1/2} H(f) \exp(i2\pi k f) df. \quad (31)$$

Если

$$H(f) = A(f) \exp(i\varphi(f)), \quad (32)$$

то гармоника  $x_k = a \exp(i2\pi f k)$  при прохождении фильтра превращается в гармонику

$$y_k = (A(f)a) \exp[i(2\pi f k + \varphi(f))]. \quad (33)$$

## 8.2 Задание АЧХ фильтра

В общем случае отсутствуют эмпирические соображения, позволяющие непосредственно задавать импульсную характеристику ЦФ. С другой стороны, частотная характеристика, записанная в виде (32), имеет простой физический смысл. Значение амплитудной частотной характеристики  $A(f)$  есть коэффициент, на который умножается амплитуда гармоники с частотой  $f$  при прохождении фильтра (см. (33)).

Физический смысл АЧХ ЦФ используется при задании ЦФ из эмпирических соображений. Если задачу обработки сигналов можно сформулировать в терминах фильтрации (непропускания, отсеивания) отдельных спектральных составляющих сигнала, то она сводится к построению ЦФ с заданной АЧХ. В качестве целевой АЧХ обычно выбирают (по смыслу задачи) некоторую ступенчатую функцию, принимающую значения 0 и 1. Отрезки, на которых АЧХ принимает единичное значение, называют *полосами пропускания*. Наиболее часто встречаются задачи, сводящиеся к построению ЦФ с АЧХ одного из перечисленных ниже типов. *Фильтр низких частот (ФНЧ)*<sup>36</sup> имеет полосу пропускания  $[0, f^*]$ . К задаче построения ФНЧ сводятся задачи сглаживания данных и фильтрации шумов. *Фильтр высоких частот (ФВЧ)*<sup>37</sup> имеет полосу пропускания  $[f^*, 1/2]$ . У *полосового фильтра*<sup>38</sup> полоса пропускания —  $[f^*, f^{**}]$ , у *режекторного*<sup>39</sup> —  $[0, f^*]$  и  $[f^{**}, 1/2]$ .

---

<sup>36</sup>low-pass filter

<sup>37</sup>high-pass filter

<sup>38</sup>band-pass filter

<sup>39</sup>notch filter

Сделаем важное для практических вычислений замечание. Задавая дискретизацию гармоник  $x(t) = \exp(i2\pi ft)$  в виде  $x_k = \exp(i2\pi fk)$ , мы фактически считаем, что  $x_k = x(k\tau) = x(k)$  и что  $\tau = 1$ . В этом случае говорят о *безразмерном времени* и, соответственно, *безразмерная частота* гармоник может выбираться из диапазона  $[0, 1/2]$ . В общем случае интервал дискретизации  $\tau$  определяет диапазон частот  $[0, 1/2\tau]$ , присутствующих в дискретном сигнале. Фильтры обычно рассчитывают, работая с безразмерной частотой. Переход к размерной частоте  $f_\tau$  производится по формуле

$$f_\tau = f/\tau.$$

Например, если при измерении сигнала регистрируется 10 отсчетов в секунду, то  $\tau = 0.1$  с и  $f_{\max} = 5$  Гц. Если нужно рассчитать полосовой фильтр, пропускающий частоты из диапазона  $[1, 4]$  Гц, то в безразмерных частотах мы получаем интервал пропускания  $[0.1, 0.4]$ .

### 8.3 Условие вещественности

Обычно входной сигнал фильтра полагают вещественным и желают получить на выходе фильтра также вещественный сигнал. Условие вещественности отклика фильтра на любой вещественный сигнал эквивалентно вещественности импульсной характеристики ЦФ. Сформулируем аналогичное условие в терминах частотных характеристик. Вещественность ИХ  $h_k$  эквивалентна условию  $h_k^* = h_k$ . Тогда

$$H(f)^* = \left( \sum h_j \exp(-i2\pi fj) \right)^* = \sum h_j \exp(i2\pi fj) = H(-f)$$

и, с другой стороны, если  $H(f)^* = H(-f)$ , то

$$h_k^* = \int_{-1/2}^{1/2} H(f)^* \exp(-i2\pi kf) df = \int_{-1/2}^{1/2} H(-f) \exp(-i2\pi kf) df = h_k.$$

Таким образом, условие вещественности ЦФ эквивалентно условию  $H(-f) = H(f)^*$ . В терминах АЧХ и ФЧХ условие вещественности ЦФ эквивалентно тому, что АЧХ — четная функция, а ФЧХ — нечетная:

$$\begin{aligned} A(-f) &= A(f), \\ \varphi(-f) &= -\varphi(f). \end{aligned}$$

Поэтому АЧХ традиционно задают на отрезке  $[0, 1/2]$  с подразумеваемым продолжением на отрезок  $[-1/2, 1/2]$  по четности.

## 8.4 Задание ФЧХ фильтра

Сформулируем теперь некоторые условия, накладываемые на ФЧХ фильтра. Перепишем формулу (33) в следующем виде:

$$y_k = [A(f)a] \exp \left[ i2\pi f \left( k + \frac{\varphi(f)}{2\pi f} \right) \right].$$

Пусть теперь  $\varphi(f) = -\alpha 2\pi f$  (это нечетная функция, так что условие вещественности выполнено). Тогда

$$y_k = [A(f)a] \exp[i2\pi f(k - \alpha)].$$

Таким образом, если ФЧХ — линейная функция частоты, то фильтр имеет одинаковую задержку для всех гармоник и не искажает форму сигнала со спектром, расположенным в полосе пропускания. Такие фильтры называют *фильтрами с линейной фазой*.

Оказывается, что в случае КИХ-фильтров нельзя выбирать в качестве  $\alpha$  произвольное число. Мы должны гарантировать выполнение равенства

$$H(f) = \sum h_j \exp(-i2\pi f j) = A(f) \exp(i\varphi(f)) = A(f) \exp(-i2\pi f \alpha),$$

которое эквивалентно системе

$$\begin{aligned} A(f) \cos 2\pi f \alpha &= \sum h_j \cos 2\pi f j, \\ A(f) \sin 2\pi f \alpha &= \sum h_j \sin 2\pi f j. \end{aligned}$$

Пусть сначала  $\alpha = 0$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} A(f) &= \sum h_j \cos 2\pi f j, \\ 0 &= \sum h_j \sin 2\pi f j \end{aligned}$$

и из второго равенства с необходимостью получаем  $h_{-j} = h_j$ . Этот случай соответствует симметричному фильтру. Вообще, симметричные фильтры всегда вещественны и обладают лишь одним недостатком — при заданном порядке, равном  $2n+1$ , они имеют задержку отклика, равную  $n$ . Симметричные фильтры называют также *фильтрами с нулевой фазой*.

Среди несимметричных фильтров мы будем рассматривать только один крайний случай — случай нулевой задержки отклика:  $h_j = 0$  при  $j < 0$  (такой фильтр иногда называют асимметричным). Если нужно сделать задержку отклика нулевой, то уже ясно, что мы получим ненулевое  $\alpha$  (единственный

такой фильтр с  $\alpha = 0$  соответствует неинтересному случаю  $h_0 \neq 0, h_j = 0$  при всех  $j \neq 0$ ). Подставив второе уравнение системы в первое, получим

$$\sum h_j \cos 2\pi f j \sin 2\pi f \alpha = \sum h_j \sin 2\pi f j \cos 2\pi f \alpha$$

или, что эквивалентно,

$$\sum h_j \sin [2\pi f(\alpha - j)] = 0.$$

Легко видеть, что при числе членов, равном  $n$ , для выполнения этого условия следует выбрать

$$\begin{array}{l} \alpha = (n - 1)/2, \\ h_j = h_{n-j-1}, \end{array}$$

где  $n$  — порядок фильтра. В этом случае все гармоники при прохождении фильтра сдвигаются вправо на  $\alpha$ , следовательно, на столько же задерживается по времени и произвольный сигнал. Таким образом, фильтр с нулевой задержкой отклика имеет ненулевую задержку сигнала, равную  $\alpha$ . Асимметричный фильтр нечетного порядка  $n = 2m + 1$  дает задержку сигнала  $\alpha = (n - 1)/2 = m$ , что совпадает с задержкой отклика симметричного фильтра того же порядка.

## 8.5 Симметричные фильтры

При расчете симметричного вещественного КИХ-фильтра в первую очередь из эмпирических соображений задают АЧХ на отрезке  $[0, 1/2]$  и фиксируют порядок фильтра  $n = 2m + 1$ . Поскольку ФЧХ симметричного фильтра нулевая, его частотная характеристика  $H(f)$  совпадает с АЧХ  $A(f)$ . Учитывая симметричность АЧХ, получим следующую формулу:

$$h_k = \int_{-1/2}^{1/2} A(f) \exp(i2\pi k f) df = 2 \int_0^{1/2} A(f) \cos(2\pi k f) df.$$

Если заданная АЧХ имеет простой вид (что имеет место в случаях ФНЧ, ФВЧ, полосового и режекторного фильтров), то эта формула позволяет получить ИХ в явном виде.

Получаемая последовательность  $h_k$  представляет собой ИХ идеального БИХ-фильтра, обладающего заданными параметрами. Одновременно числа  $h_k$  являются коэффициентами ряда Фурье для функции  $H(f)$ . Это соображение показывает, что  $|h_k|$  убывает к нулю при увеличении  $k$ . Вспоминая, что частичная сумма ряда Фурье является лучшим в среднеквадратичном смысле приближением исходной функции  $H(f)$  при заданном числе членов ряда

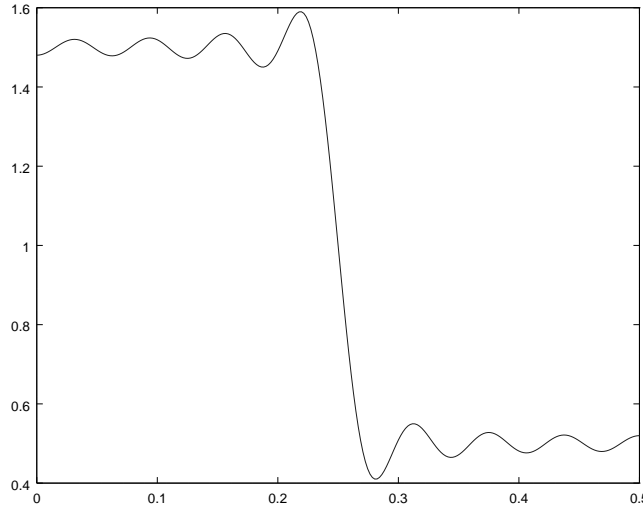


Рис. 5. Частотная характеристика ФНЧ (случай обрезания ИХ)

(т. е. при заданном порядке фильтра), мы получаем возможность тривиально перейти к КИХ-фильтру путем обрезания ряда Фурье. При обрезании ряда Фурье мы заменяем полученную бесконечную импульсную характеристику  $h_k$  на импульсную характеристику  $\bar{h}_k$  конечной длины, соответствующую КИХ-фильтру:

$$\bar{h}_k = \begin{cases} h_k & |k| \leq m, \\ 0 & |k| > m \end{cases}.$$

**Пример.** Пусть требуется синтезировать симметричный ФНЧ 31-го порядка с полосой пропускания  $[0, 1/4]$ .

Вычислим импульсную характеристику  $h_k$  идеального БИХ-фильтра с заданной полосой пропускания:

$$h_k = 2 \int_0^{1/4} \cos(2\pi k f) df = \frac{\sin(\pi k/2)}{\pi k}.$$

Переход к КИХ-фильтру осуществляется путем простого обрезания импульсной характеристики:

$$\bar{h}_k = \begin{cases} h_k & |k| \leq 15, \\ 0 & |k| > 15 \end{cases}.$$

На рисунке 5 показана амплитудная частотная характеристика полученного после обрезания КИХ-фильтра. Легко заметить относительно сильные колебания, которые претерпевает АЧХ вблизи точки разрыва.

## 8.6 Асимметричные фильтры

Пусть задана амплитудная характеристика  $A(f)$  фильтра. Фазовая частотная характеристика асимметричного фильтра задается формулой  $\varphi(f) =$

$-\alpha 2\pi f$ , где  $\alpha = (n - 1)/2$ . Полная частотная характеристика фильтра имеет вид:

$$H(f) = A(f) \exp(-i2\pi\alpha f).$$

Вычислим импульсную характеристику:

$$h_k = \int_{-1/2}^{1/2} A(f) \exp[i2\pi(k - \alpha)f] df = 2 \int_0^{1/2} A(f) \cos[2\pi(k - \alpha)f] df.$$

В случае нечетного порядка  $n = 2m + 1$  имеем  $\alpha = (n - 1)/2 = m$  и

$$h_k = 2 \int_0^{1/2} A(f) \cos[2\pi(k - m)f] df.$$

Пусть  $h'_k$  — импульсная характеристика симметричного фильтра с амплитудной характеристикой  $A(f)$ :

$$h'_k = 2 \int_0^{1/2} A(f) \cos[2\pi k f] df.$$

Тогда

$$h_k = h'(k - m).$$

Таким образом, мы пришли к выводу о полной эквивалентности симметричного и асимметричного фильтров равного нечетного порядка. На практике почти всегда используют асимметричные фильтры нечетного порядка. Импульсная характеристика такого фильтра получается формальным сдвигом импульсной характеристики симметричного фильтра с такой же амплитудной характеристикой.

**Пример.** Пусть требуется синтезировать асимметричный ФНЧ 31-го порядка с полосой пропускания  $[0, 1/4]$ .

Вспоминая формулу, полученную в предыдущем пункте для симметричного фильтра с такой же АЧХ, получим

$$h_k = \frac{\sin[\pi(k - 15)/2]}{\pi(k - 15)}$$

при  $0 \leq k \leq 30$ .

## 8.7 Синтез методом частотной выборки

Для фильтров с простой АЧХ удастся аналитически получить явное выражение для импульсной характеристики. В общем же случае получить явное

выражение для ИХ не удастся и приходится использовать описанный ниже метод частотной выборки.

Пусть для синтезируемого фильтра задана частотная характеристика  $H(f)$  на отрезке  $[-1/2, 1/2]$ . Доопределим ЧХ на отрезок  $[0, 1]$  по периодичности:

$$H'(f) = \begin{cases} H(f) & 0 \leq f \leq 1/2 \\ H(f-1) & 1/2 < f \leq 1 \end{cases}.$$

Выберем достаточно большое целое число  $N$  и дискретизируем полученную ЧХ при интервале дискретизации  $\Delta f = 1/N$ :

$$H'_n = H'(n\Delta f) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \exp(-i(2\pi/N)kn).$$

Полученная формула с точностью до множителя совпадает с формулой ДПФ последовательности  $H_n$ :

$$H'_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k W_N^{-kn} = N \cdot \text{ДПФ}[h_k].$$

Используя обратное ДПФ, получаем возможность вычислить периодическое продолжение  $h'_k$  импульсной характеристики  $h_k$ :

$$h'_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H'_n W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \text{ДПФ}^{-1}[H'_n].$$

При синтезе симметричного фильтра порядка  $n = 2m + 1$  в последовательности  $h'_k$  первые  $m + 1$  отсчетов дают искомую ИХ при неотрицательных значениях индекса. Отсчеты ИХ при отрицательных значениях индекса расположены у правого края последовательности  $h'_k$ , но их легко получить и непосредственно из соображений симметричности фильтра. Асимметричный фильтр нечетного порядка  $n = 2m + 1$  получается сдвигом импульсной характеристики симметричного фильтра вправо на  $m$  отсчетов.

При практической реализации метода частотной выборки обычно вместо периодического доопределения частотной характеристики на отрезок  $[0, 1]$  используют сдвиг частотной характеристики вправо на  $1/2$ :

$$\hat{H}(f) = H(f - 1/2).$$

Переход во временную область осуществляется с помощью ДПФ:

$$\hat{h}_k = \frac{1}{N} \text{ДПФ}^{-1}[\hat{H}_n].$$

При этом периодическая ИХ  $h'_k$  получается из последовательности  $\hat{h}_k$  следующим образом:

$$h'_k = (-1)^k \hat{h}_k.$$

Отметим, что описанный метод частотной выборки является по сути приближенным методом вычисления интеграла (31). Ясно, что метод частотной выборки гарантирует равенство ЧХ синтезированного фильтра заданной ЧХ в точках  $n\Delta f = n/N$ , но нет возможности управлять значениями ЧХ в промежутках между этими точками, где ЧХ может сильно отличаться от заданной. Параметр  $N$  определяет точность, с которой вычисляются элементы импульсной характеристики, и не связан непосредственно с длиной ИХ синтезируемого фильтра — его следует выбирать по возможности большим. Обычно значение параметра  $N$  выбирают в 4–8 раз большим, чем порядок синтезируемого фильтра. Для вычисления ДПФ обычно используется алгоритм БПФ. При этом выбранное число  $N$  следует округлить вверх до ближайшей степени двойки<sup>40</sup>.

**Задача 8.1.** Найти импульсную характеристику симметричного фильтра 5-го порядка, если  $H(0) = H(1/4) = 1$ ,  $H(1/2) = 0$ .

**Задача 8.2.** Фильтры  $A$  с ИХ  $[1, 1, \hat{4}, 1, 1]$  и  $B$  с ИХ  $[-1, \hat{2}, -1]$  включены последовательно. Вычислить импульсную характеристику полученного фильтра.

**Задача 8.3.** Фильтр  $C$  образован из последовательно включенных фильтров  $A$  и  $B$ . Для фильтров  $A$  и  $C$  заданы импульсные характеристики:

$$\begin{array}{ll} A & [1, 2, \hat{4}, 2, 1], \\ C & [-1, 0, -1, \hat{4}, -1, 0, -1] \end{array}$$

(галочкой отмечен элемент  $h_0$  импульсной характеристики).

1. Вычислить частотную характеристику фильтра  $B$ .
2. Найти импульсную характеристику фильтра  $B$ .

## 8.8 Явление Гиббса

Коэффициенты импульсной характеристики цифрового фильтра по сути представляют собой коэффициенты Фурье частотной характеристики. При простом обрезании ИХ фактически происходит замена частотной характеристики частичной суммой ряда Фурье. Мы рассмотрим эффекты, возникающие при обрезании ряда Фурье в общей ситуации.

<sup>40</sup>Здесь никогда не используется процедура дополнения нулями! (почему?)



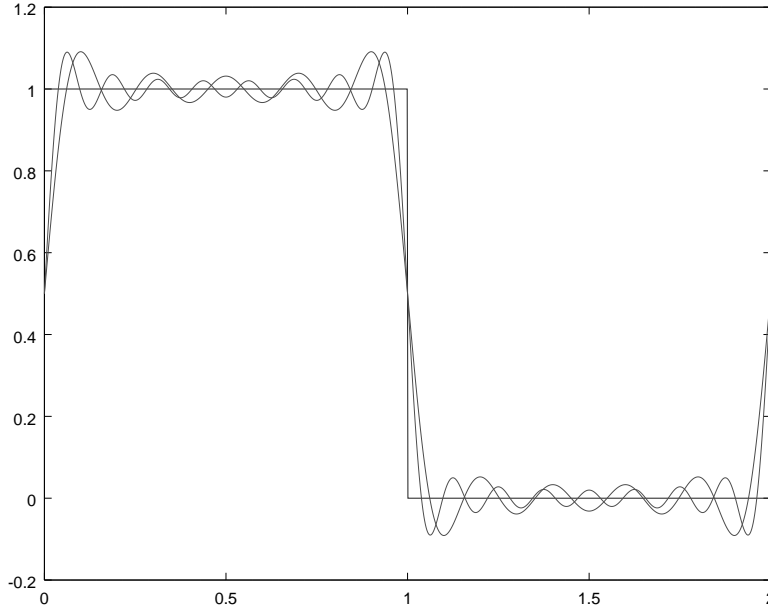


Рис. 6. Явление Гиббса (случай 10 и 15 гармоник)

Разложим в ряд Фурье прямоугольный импульс вида:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1, \\ 0 & 1 \leq t < 2. \end{cases} \quad (34)$$

Найдем коэффициенты Фурье периодического продолжения функции  $x(t)$ :

$$C_k = \frac{1}{2} \int_0^1 \exp(-i\pi ks) ds = \frac{\sin \pi k/2}{\pi k} \exp(-i\pi k/2).$$

На рисунке 6 показаны графики частичных сумм разложения прямоугольного импульса в ряд Фурье. На этом рисунке легко заметить явление Гиббса. Действительно, при увеличении числа удерживаемых в разложении членов максимальное отклонение частичной суммы от функции  $x(t)$  не убывает<sup>41</sup>. Если обозначить через  $x_{\max}$  и  $x_{\min}$  значения первых соответственно максимума и минимума частичной суммы ряда Фурье при уменьшении  $t$  от  $1/2$  до  $0$ , то  $x_{\max} \approx 1.09 = 1 + 0.09$  (ошибка порядка 9%) и  $x_{\min} \approx 0.95 = 1 - 0.05$  (ошибка порядка 5%).

Появление наблюдаемых в рассмотренном примере пульсаций частичных сумм ряда Фурье называется *явлением Гиббса* и является результатом обрезания неравномерно сходящегося ряда (операция перехода от ряда Фурье

<sup>41</sup>Это сразу следует из следующего рассуждения. Если бы максимальное отклонение убывало к нулю, то ряд сходился бы равномерно, но в этом случае функция  $x(t)$  была бы непрерывной как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Вообще неравномерность сходимости ряда Фурье к функции, имеющей разрывы первого рода, реализуется обычно следующим образом: максимальное отклонение не убывает, но длина участка оси абсцисс, на котором отклонение больше наперед заданного числа, убывает к нулю.

с бесконечным числом членов к конечным частичным суммам называется *обрезанием ряда*). Рассмотренный пример является для цифровых фильтров в некотором смысле наиболее общим, поскольку для ФНЧ, ФВЧ, полосового и режекторного фильтров на границе полос пропускания и непропускания наблюдаются в точности такие же пульсации.

**Задача 8.4.** Написать программу для вычисления частичных сумм разложения прямоугольного импульса в ряд Фурье. Построить графики, аналогичные 6, иллюстрирующие явление Гиббса.

## 8.9 Теорема о циклической свертке

Подходящим инструментом при изучении природы явления Гиббса является теорема о циклической свертке для рядов Фурье, аналогичная теореме о свертке для преобразований Фурье.

Пусть функции  $x(t)$  и  $y(t)$  периодические с одинаковым периодом  $T$ . Определим их *циклическую свертку*  $z(t) = (x \circ y)(t)$  равенством

$$z(t) = (x \circ y)(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(s)y(t-s)ds = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t-s)y(s)ds.$$

Последнее равенство проверяется заменой переменной. Таким образом,  $x \circ y = y \circ x$  и операция циклической свертки коммутативна.

Пусть функциям  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$  поставлены в соответствие наборы коэффициентов Фурье  $X_n$ ,  $Y_n$  и  $Z_n$  соответственно и  $z(t) = (x \circ y)(t)$ . Вычислим спектр  $Z_n$ :

$$\begin{aligned} Z_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(s)y(t-s)ds \exp(-i2\pi n f_0 t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(s) \exp(-i2\pi n f_0 s) \left( \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t-s) \exp(-i2\pi n f_0 (t-s)) dt \right) ds. \end{aligned}$$

В последнем выражении произведем замену переменной  $x = t - s$ :

$$Z_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(s) \exp(-i2\pi n f_0 s) \left( \frac{1}{T} \int_{-T/2-s}^{T/2-s} y(x) \exp(-i2\pi n f_0 x) dx \right) ds.$$

Но интеграл

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2-s}^{T/2-s} y(x) \exp(-i2\pi n f_0 x) dx,$$

вследствие  $T$ -периодичности подынтегрального выражения, не зависит от  $s$  и равен  $Y_n$ . Поэтому

$$Z_n = Y_n \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(s) \exp(-i2\pi n f_0 s) ds = Y_n X_n.$$

## 8.10 Спектральная модель обрезания ряда Фурье

Пусть для  $T$ -периодической функции  $x(t)$  выписано разложение в ряд Фурье:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i2\pi n f_0 t).$$

Рассмотрим полученную в результате обрезания частичную сумму:

$$x_N(t) = \sum_{n=-N}^N C_n \exp(i2\pi n f_0 t).$$

Функция  $x_N(t)$  сама является  $T$ -периодической и может быть разложена в ряд Фурье:

$$x_N(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{C}_n \exp(i2\pi n f_0 t).$$

Из единственности ряда Фурье следует, что  $\bar{C}_n = D_N(n)C_n$ , где

$$D_N(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq N, \\ 0, & |n| > N \end{cases}.$$

Таким образом, переход от суммы ряда Фурье к его частичной сумме в спектральной области эквивалентен умножению спектра на прямоугольное окно  $D_N(n)$ . Из теоремы о циклической свертке следует, что в этом случае  $x_N(t) = d_N(t) \circ x(t)$ . Следовательно, обрезание ряда Фурье во временной области эквивалентно свертке исходной функции  $x(t)$  с окном  $d_N(t)$ . Найдём функцию  $d_N(t)$ :

$$\begin{aligned} d_N(t) &= \sum_{n=-N}^N \exp(i2\pi n f_0 t) = \\ &= \exp(-i2\pi N f_0 t) \frac{1 - \exp(i2\pi(2N+1)f_0 t)}{1 - \exp(i2\pi f_0 t)} = \frac{\sin \pi(2N+1)f_0 t}{\sin \pi f_0 t}. \end{aligned}$$

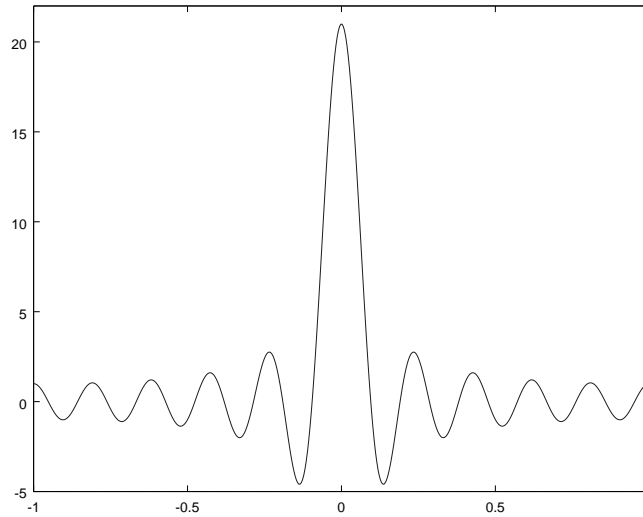


Рис. 7. Свертывающее окно  $d_N(t)$  при  $N = 10$

График функции  $d_N(t)$  при  $N = 10$  и  $f_0 = 1/2$  показан на рисунке 7. Свертка сигнала  $x(t)$  с функцией  $d_N(t)$  приводит к явлению, сходному со спектральным просачиванием, когда исходный сигнал «размазывается» и каждый его отсчет «загрязняется» соседними отсчетами. Наиболее отчетливо такое искажение сигнала проявляется вблизи точек разрыва кусочно постоянного сигнала, где результат свертки просто повторяет форму сворачивающего окна.

Как обычно, последовательность  $D_N(n)$  называют *мультипликативным окном*, а функцию  $d_N(t)$  — соответствующим *свертывающим окном*. Часто говорят, что при обрезании ряда Фурье мы *наблюдаем сигнал  $x(t)$  через свертывающее окно  $d_N(t)$* <sup>42</sup>.

Частичные суммы ряда Фурье непрерывны, поэтому в окрестности точек разрыва функции  $x(t)$  они выглядят как некий сглаженный окном  $d_N(t)$  вариант исходной функции. Окрестность точки разрыва, в которой значения частичных сумм в результате такого сглаживания сильно отличаются от значений исходной функции, называют *переходной полосой*, или *областью среза* (последний термин чаще используют применительно к частотным характеристикам цифровых фильтров). Легко понять, что основной лепесток сглаживающего окна отвечает за образование переходной полосы, а боковые лепестки приводят к явлению Гиббса — они «загрязняют» каждый отсчет сигнала соседними.

## 8.11 Дискретное окно Ханна

Теперь мы видим, что обрезание ряда Фурье кажется нам простой и естественной операцией только по привычке. Полученная спектральная модель

<sup>42</sup>signal windowing

этого процесса позволяет модифицировать его таким образом, чтобы получить минимальные искажения сигнала  $x(t)$  при свертке. Модификация процесса обрезания заключается в выборе последовательности  $D_N(n)$  (дискретного мультипликативного окна) таким образом, чтобы функция  $d_N(t)$  обладала по возможности удовлетворительными свойствами как окна, участвующее в свертке. При этом именно дискретное мультипликативное окно  $D_N(n)$  будет непосредственно производить обрезание ряда.

В качестве подходящего дискретного мультипликативного окна может быть выбран результат дискретизации модифицированного окна Ханна:

$$G_N(n) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \frac{\pi n}{N} \right].$$

Здесь следует обратить внимание, что модификация коснулась исключительно области определения оконной функции, которая сделана симметричной относительно нуля. Это связано с особенностью процесса обрезания ряда Фурье вещественной функции, когда симметричные гармоники оставляются или отбрасываются одновременно (поскольку необходимо сохранить вещественность функции). Совершенно аналогично производится взвешивание симметричных гармоник мультипликативным окном — такие гармоники должны умножаться на одинаковые коэффициенты.

Отметим, что при использовании дискретного окна Ханна для обрезания ИХ симметричного фильтра порядок получаемого фильтра равен  $n = 2(N - 1) + 1 = 2N - 1$ . Поэтому при синтезе симметричного фильтра порядка  $n = 2m + 1$  обычно используют окно Ханна при  $N = m + 1$ . При синтезе асимметричного фильтра порядка  $n$  обрезание производится следующим образом:

$$\bar{h}_k = G_{\alpha+1}(k - \alpha)h_k,$$

где  $\alpha = (n - 1)/2$ .

Получим аналитическое выражение для свертывающего окна Ханна. Формулу для  $G_N(n)$  можно переписать в виде:

$$G_N(n) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \exp(i\pi n N^{-1}) + \frac{1}{2} \exp(-i\pi n N^{-1}) \right].$$

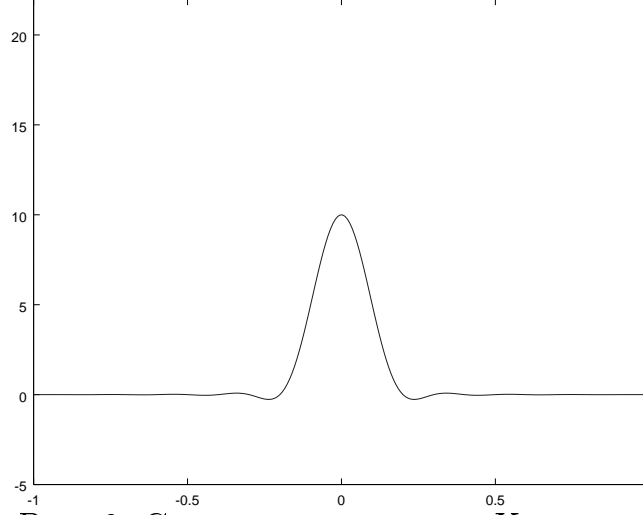


Рис. 8. Свертывающее окно Ханна при  $N = 10$

Тогда

$$\begin{aligned}
 g_N(t) &= \sum_{n=-N}^N G_N(n) \exp(i2\pi n f_0 t) = \\
 &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2} \exp(i2\pi n f_0 t) + \frac{1}{4} \exp(i\pi n(2f_0 t + N^{-1})) + \frac{1}{4} \exp(i\pi n(2f_0 t - N^{-1})) = \\
 &= \frac{\sin \pi M f_0 t}{2 \sin \pi f_0 t} + \frac{\sin \pi M(f_0 t + \alpha)}{4 \sin \pi(f_0 t + \alpha)} + \frac{\sin \pi M(f_0 t - \alpha)}{4 \sin \pi(f_0 t - \alpha)} = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ d_N(t) + \frac{1}{2} d_N(t + \alpha f_0^{-1}) + \frac{1}{2} d_N(t - \alpha f_0^{-1}) \right],
 \end{aligned}$$

где  $\alpha = N^{-1}/2$  и  $M = 2N + 1$ . Функция  $g_N(t)$  получается сложением трех функций  $d_N(t)$ , сдвинутых на величину, близкую к расстоянию между ее нулями. За счет этого убираются пульсации в боковых лепестках функции  $d_N(t)$ . На рисунке 8 показан график свертывающего окна Ханна.

**Пример.** Рассмотрим снова пример синтеза симметричного КИХ-фильтра низких частот. Воспользуемся мультипликативным окном Ханна при  $N = 15$  для перехода от идеального БИХ-фильтра к реальному КИХ-фильтру:

$$\bar{h}_j = D_j h_j = \frac{1 + \cos(j\pi/15)}{2} \cdot \frac{\sin(j\pi/2)}{j\pi}.$$

На рисунке 9 показана амплитудная частотная характеристика полученного КИХ-фильтра. Легко заметить, что колебания вблизи точки разрыва практически полностью исчезли, но вдвое увеличилась ширина переходной зоны. Отметим также, что при использовании окна Ханна мы получаем фильтр с длиной импульсной характеристики  $2N - 1$ , поскольку  $G_{-N} = G_N = 0$ .

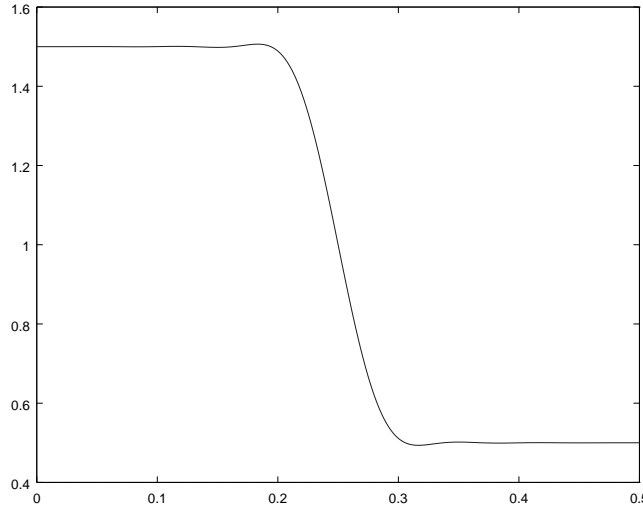


Рис. 9. Частотная характеристика ФНЧ (окно Ханна)

## 8.12 Примеры синтеза классических фильтров

К классическим относятся фильтр низких частот, фильтр высоких частот, полосовой и режекторный фильтры. В этом разделе мы приведем общеупотребительные формулы для импульсных характеристик соответствующих идеальных симметричных БИХ-фильтров. Импульсная характеристика аппроксимирующего КИХ-фильтра может быть получена умножением импульсной характеристики БИХ-фильтра на мультипликативное окно. Тривиальный сдвиг ИХ симметричного фильтра превращает его в асимметричный.

**Фильтр низких частот:**

$$A(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_1, \\ 0, & |f| > f_1 \end{cases}.$$

$$h_k = 2 \int_0^{f_1} \cos(2\pi f k) df = \begin{cases} (\pi k)^{-1} \sin(2\pi f_1 k), & k \neq 0 \\ 2f_1, & k = 0 \end{cases}.$$

**Фильтр высоких частот:**

$$A(f) = \begin{cases} 1, & |f| \geq f_1, \\ 0, & |f| < f_1 \end{cases}.$$

$$h_k = 2 \int_{f_1}^{1/2} \cos(2\pi f k) df = \begin{cases} -(\pi k)^{-1} \sin(2\pi f_1 k), & k \neq 0 \\ 1 - 2f_1, & k = 0 \end{cases}.$$

**Полосовой фильтр:**

$$A(f) = \begin{cases} 1, & f_1 \leq |f| \leq f_2, \\ 0, & \text{else} \end{cases}.$$

$$h_k = 2 \int_{f_1}^{f_2} \cos(2\pi f k) df = \begin{cases} (\pi k)^{-1} [\sin(2\pi f_2 k) - \sin(2\pi f_1 k)], & k \neq 0 \\ 2(f_2 - f_1), & k = 0 \end{cases}.$$

**Режекторный фильтр:**

$$A(f) = \begin{cases} 0, & f_1 \leq |f| \leq f_2, \\ 1, & \text{else} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} h_k &= 2 \int_0^{f_1} \cos(2\pi f k) df + 2 \int_{f_2}^{1/2} \cos(2\pi f k) df = \\ &= \begin{cases} -(\pi k)^{-1} [\sin(2\pi f_2 k) - \sin(2\pi f_1 k)], & k \neq 0 \\ 1 - 2(f_2 - f_1), & k = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

## 9 Практический спектральный анализ

Задача спектрального анализа — выявление и анализ спектрального состава (структуры) сигнала. При спектральном анализе широко применяются описанные методы и математический аппарат. В то же время практический спектральный анализ натуральных сигналов является сложной инженерной задачей и для успешного ее решения, кроме формального владения теорией спектральных преобразований, требуются терпение, опыт и некоторая доля здравого смысла. Эти три компонента в удачной пропорции составляют искусство спектрального анализа данных. Настоящий раздел призван суммировать приведенные сведения о спектрах и служить руководством к практическому применению аппарата спектрального анализа.

### 9.1 Порядок отсчетов

Основной инструмент спектрального анализа — дискретное преобразование Фурье (ДПФ). При вычислении ДПФ на практике всегда применяется алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ). Порядок отсчетов при БПФ



уже обсуждался в разделе 5.7. Здесь приведены дополнительные замечания и особенности, характерные для спектрального анализа сигналов.

При спектральном анализе имеет смысл рассматривать отсчеты спектра  $X_n$  при  $|n| \leq N/2$ , поэтому порядок отсчетов, получающийся после БПФ, оказывается в этом случае неудачным. С другой стороны, при спектральном анализе вещественного сигнала мы получаем спектр, обладающий следующим свойством:

$$X_{-n} = X_n^*,$$

что с учетом периодичности последовательности  $X_n$  дает

$$X_{N-n} = X_n^*.$$

Спектр мощности  $P_n = |X_n|^2$  вещественного сигнала оказывается симметричным, причем условие симметрии имеет следующим вид:

$$P_{N-n} = P_n.$$

Таким образом, для вещественного сигнала мощность каждой спектральной составляющей оказывается распределенной между отсчетами, соответствующими положительной и отрицательной частотам. Отдельно следует рассматривать частоты  $n = 0$  и  $n = N/2$ , которым соответствуют непарные спектральные составляющие. Отметим, что

$$X_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k,$$

$$X_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k x_k,$$

поэтому для вещественного сигнала отсчеты  $X_0$  и  $X_{N/2}$  спектра оказываются вещественными.

Вместо симметричного спектра мощности  $P_n$  часто рассматривают так называемый односторонний спектр мощности  $\bar{P}_n$ , определенный только для неотрицательных частот:

$$\bar{P}_n = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ P_n & n = 0 \\ 2P_n & 1 \leq n \leq N/2 - 1 \\ P_n & n = N/2 \end{cases}.$$

Мощность спектральных составляющих  $X_n$  при  $1 \leq n \leq N/2 - 1$  симметрично распределена между отсчетами с положительной и отрицательной частотами. Исключение составляют спектральные составляющие с нулевой частотой ( $n = 0$ ) и с частотой Найквиста ( $n = N/2$ ).

Таким образом, при спектральном анализе вещественного сигнала фактически используются отсчеты спектра  $X_n$  при  $0 \leq n \leq N/2$ , поэтому процедура сдвига нуля редко применяется в спектральном анализе.

## 9.2 Время и частота

### Разрешение по частоте

Если исходный временной ряд длины  $N$  есть результат дискретизации аналогового сигнала, заданного на интервале наблюдения длины  $T$  при интервале дискретизации  $\tau$ , то  $x_k = x(k\tau)$  и  $\tau = T/N$ . Интервал между отсчетами спектра составляет в этом случае

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\tau}.$$

Таким образом, предельное разрешение по частоте тем выше, чем длиннее интервал наблюдения.

При применении БПФ к временному ряду мы получим  $N$  отсчетов спектра  $X_n$ . В этом случае спектральному отсчету  $X_n$  соответствуют частота

$$f_n = n\Delta f = \frac{n}{T}$$

и период

$$T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{T}{n}.$$

Спектральному отсчету  $X_n$  соответствует гармоника, у которой на интервале наблюдения  $T$  уместается ровно  $n$  периодов.

Отметим, что разрешение по частоте постоянно и не зависит от значения частоты, разрешение же по периодам гармоник зависит от периода и максимально в области коротких периодов (т. е. высоких частот).

## Частота Найквиста в спектре

При дискретизации с интервалом дискретизации  $\tau$  в сигнале сохраняются частоты вплоть до частоты Найквиста (теорема Найквиста о наложении)

$$f_* = \frac{1}{2\tau}.$$

Частоте Найквиста соответствует отсчет спектра с номером

$$n_* = f_* T = \frac{T}{2\tau} = \frac{N}{2}.$$

Дискретная гармоника с частотой Найквиста имеет вид

$$x_k = \exp(i2\pi f_* k\tau) = \exp(i\pi k) = (-1)^k.$$

Обычно интервал дискретизации исходных данных бывает выбран в соответствии с принципом неналожения частот. Если же данные подозрительны на предмет неправильного выбора интервала дискретизации, то следует внимательно следить за значениями отсчета спектра с индексом  $N/2$ .

*При правильном выборе интервала дискретизации отсчет спектра  $X_{N/2}$  всегда нулевой. Отличное от нуля значение отсчета  $X_{N/2}$  — верный признак проявления эффекта маскировки частот.*

Этот рецепт не всегда работает (можно получить нулевое значение на частоте Найквиста и при неверно выбранном интервале дискретизации), но иногда оказывается полезным.

## Безразмерное время и безразмерная частота

Часто удобно работать с безразмерными единицами времени и безразмерными единицами частоты. Безразмерные единицы согласованы с выбранным интервалом дискретизации.

Пусть задан сигнал  $x(t)$  и интервал дискретизации  $\tau$ . Перейдем к безразмерному времени  $s$  по формуле  $t = s\tau$ . В безразмерном времени получим новый сигнал  $\bar{x}(s) = x(s\tau)$ .

Дискретизация исходного сигнала с интервалом дискретизации  $\tau$  соответствует дискретизации сигнала  $\bar{x}(s)$  при интервале дискретизации  $\Delta s = 1$ :

$$x_k = x(k\tau) = \bar{x}(k).$$

Единица измерения безразмерного времени совпадает с интервалом дискретизации сигнала, т. е. безразмерное время фактически измеряется в отсчетах.

Единицей измерения безразмерного периода  $\bar{T}$  является интервал дискретизации, т. е. безразмерный период измеряется в отсчетах:

$$T = \bar{T}\tau.$$

Соответственно для частоты получаем соотношение

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\bar{T}\tau} = \frac{\bar{f}}{\tau},$$

где  $\bar{f} = 1/\bar{T}$  — безразмерная частота, которая измеряется в «обратных отсчетах» ( $1/\bar{f}$  есть безразмерный период в отсчетах).

Пусть временной ряд  $x_k$  имеет длину  $N$  отсчетов. Разрешение по безразмерной частоте при спектральном анализе зависит только от длины временного ряда:

$$\Delta\bar{f} = \Delta f\tau = \frac{1}{N}.$$

Спектральному отсчету  $X_n$  соответствуют безразмерная частота

$$\bar{f}_n = f_n\tau = \frac{n}{N}$$

и безразмерный период

$$\bar{T}_n = \frac{N}{n}.$$

Безразмерная частота Найквиста равна

$$\bar{f}_* = \frac{1}{2}.$$

## Выбор интервала дискретизации

При обработке натурных данных редко предоставляется возможность произвольно выбирать интервал дискретизации. Временное разрешение обычно определяется возможностями используемой аппаратуры. В случае обработки результатов моделирования обычно имеется больший произвол в выборе интервала дискретизации.

В общем случае интервал дискретизации определяется значением наивысшей частоты, которую следует принимать во внимание. При этом величину интервала дискретизации выбирают в соответствии с критерием Найквиста, но обычно с запасом в 2–5 раз, т. е.

$$\tau = \frac{\alpha}{2f_{\max}},$$

где  $\alpha$  принимает значения от 0.5 до 0.2. Если интервал дискретизации задан изначально, то следует иметь в виду, что по спектру можно будет уверенно идентифицировать лишь спектральные составляющие с частотами не выше, чем половина (а при пессимизме — 1/5) частоты Найквиста.

*Интервал дискретизации определяет максимальную наблюдаемую в спектре частоту.*

## Выбор длины интервала наблюдения

Вторым вопросом при подготовке данных является выбор длины обрабатываемого временного ряда. Число отсчетов во временном ряду определяет длину интервала наблюдения, который, в свою очередь, определяет минимальное доступное разрешение по частоте. Поэтому необходимая длина временного ряда определяется требуемым разрешением по частоте, или, что то же, частотой самой низкочастотной интересующей нас спектральной составляющей. Предельное разрешение по частоте (а значит, и длину временного ряда) следует выбирать таким образом, чтобы отсчет, соответствующий минимальной интересующей нас частоте, был хорошо отделен от нулевого отсчета. Поэтому длину временного ряда обычно выбирают с запасом не менее чем в 2–5 раз, т. е.

$$T = \frac{\beta}{\Delta f},$$

где  $\beta$  принимает значения от 2 до 5.

При обработке натуральных данных часто оказывается так, что длина временного ряда определяется самим фактом наличия данных и не может быть выбрана произвольно. В этом случае, если данных мало, то их количество определяет предельное разрешение по частоте, которое превзойти не удастся. При этом следует иметь в виду, что в спектре будут уверенно идентифицироваться только спектральные составляющие с по крайней мере вдвое большей частотой, чем формально вычисленное предельное разрешение по частоте. Если же данных много, то может случиться так, что желаемое разрешение по частоте удастся получить уже при обработке их малой части. В этом случае появляется возможность отследить временную эволюцию спектрального состава сигнала с помощью т. н. скользящего ДПФ. Если же в наблюдаемом сигнале присутствуют шумы и другие случайные составляющие, то следует обратиться к методам спектрального анализа случайных сигналов, которые позволяют использовать избыточные данные для увеличения точности оценки спектра.

*Число отсчетов определяет предельное разрешение по частоте.*

## Единицы измерения частоты

Для измерения относительных значений частот используется заимствованное из музыки понятие октавы. *Октавой* называется интервал, на котором происходит удвоение частоты. Частота 440 Гц отличается от частоты 880 Гц на одну октаву. При увеличении частоты на одну октаву на отрезке длиной в один период гармоника начинает помещаться два полных периода. Использование октав эквивалентно применению для измерения частот логарифмической шкалы (с логарифмом по основанию 2). Логарифмическая шкала является в некотором смысле наиболее естественным способом измерения относительных значений частот<sup>43</sup>, поскольку она обеспечивает постоянную степень детализации вдоль оси частот.

## 9.3 Предобработка данных

При проведении спектрального анализа часто приходится производить так называемую предобработку данных, позволяющую избавиться от некоторых вредных спектральных эффектов.

### Исключение постоянной составляющей

Нулевой отсчет спектра равен среднему значению отсчетов анализируемого сигнала. Отличное от нуля значение нулевого отсчета свидетельствует о присутствии в сигнале постоянной составляющей. При записи сигнала в натурном эксперименте приборы всегда настраивают так, чтобы по возможности уменьшить постоянную составляющую (при желании ее можно измерить независимо). Присутствие постоянной составляющей в натуральных данных часто говорит о сдвиге нуля у регистрирующей аппаратуры. Постоянная составляющая не несет информации о спектральном составе сигнала и должна исключаться перед спектральным анализом. Для исключения постоянной составляющей от временного ряда  $x_k$  переходят к ряду

$$\bar{x}_k = x_k - m,$$

где  $m$  — среднее значение отсчетов временного ряда.

Необходимость исключения постоянной составляющей связана с тем, что она практически исключает возможность идентификации относительно низкочастотных составляющих, искажая до неузнаваемости низкочастотную часть спектра. Дело в том, что постоянной составляющей соответствует нулевая частота и она сильно задирает значение нулевого отсчета спектра. Поскольку спектр сигнала является непрерывной функцией, большое значение

---

<sup>43</sup>На слух звуки с частотами, отличающимися на октаву, воспринимаются как одинаковые по тону, но различные по высоте.

нулевого отсчета приводит к задиранию значений и соседних отсчетов (непрерывная функция не может мгновенно уменьшить свое значение). В результате относительно низкочастотные составляющие проявляются как небольшие пики на ниспадающем фронте, на фоне которого они часто незаметны.

*Постоянную составляющую следует всегда исключать.*

## Использование окон

При спектральном анализе имеют дело с временным рядом, являющимся результатом наблюдения сигнала на конечном интервале наблюдения. Как показано в разделе 7.3, конечность времени наблюдения приводит к появлению просачивания, в результате которого спектральные составляющие «загрязняются» соседними отсчетами спектра. Просачивание существенно искажает спектры узкополосных сигналов, приводя к задиранию их высокочастотной части. При спектральном анализе всегда применяется временное окно, обеспечивающее постепенный ввод временного ряда на интервал наблюдения и вывод из него, что уменьшает влияние эффекта просачивания<sup>44</sup>.

Обычно используют дискретное окно Ханна вида

$$g_N(k) = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi k}{N} \right),$$

где  $N$  — длина временного ряда. Рассмотрим влияние окна Ханна на спектр временного ряда. Образует последовательность  $y_k$  по правилу  $y_k = g_N(k)x_k$ . Из теоремы о дискретной циклической свертке следует, что

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} G_j X_{n-j}.$$

Вычислим спектр окна Ханна. Поскольку

$$g_N(k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \exp(i(2\pi/N)k) - \frac{1}{4} \exp(-i(2\pi/N)k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} W_N^k - \frac{1}{4} W_N^{-k},$$

то

$$G_n = \begin{cases} -1/4 & |n| = 1 \\ 1/2 & n = 0 \end{cases}.$$

Окончательно получаем

$$Y_n = \frac{1}{4} (-X_{n-1} + 2X_n - X_{n+1}).$$

Таким образом, умножение сигнала во временной области на окно Ханна соответствует сглаживанию спектра в частотной области.

---

<sup>44</sup>data windowing

## Дополнение нулями

При использовании для вычисления ДПФ процедуры БПФ длину преобразуемой последовательности приходится выбирать равной целой степени двойки. Это условие часто оказывается излишне стесняющим.

Для вычисления ДПФ временного ряда, имеющего длину, отличную от целой степени двойки, производят операцию *дополнения нулями*<sup>45</sup>. При этом к временному ряду добавляются нулевые отсчеты так, чтобы длина полученной последовательности оказалась целой степенью двойки.

При дополнении нулями следует помнить, что сдвиг нуля должен выполняться до дополнения временного ряда нулями. При этом шаг по частоте в полученном спектре определяется длиной всей обрабатываемой последовательности (включая добавленные нули).

Последнее замечание лежит в основе простого метода повышения частотного разрешения спектра: увеличивая длину временного ряда за счет дополнения его нулями, можно увеличить разрешение по частоте. Следует однако помнить, что увеличение частотного разрешения путем дополнения нулями не приводит к улучшению разрешения для малых частот. Как и раньше, минимальная идентифицируемая по спектру частота определяется лишь длиной исходного временного ряда (до дополнения нулями). Действительно, для идентификации спектральной составляющей необходимо, чтобы на отрезке наблюдения помещался, по крайней мере, один период соответствующей гармоника (на практике для уверенной идентификации требуется 2–5 периодов). Таким образом, в результате дополнения нулями в спектре появляются ложные отсчеты в области самых низких частот.

## 9.4 Интерпретация спектра

Спектр сигнала позволяет идентифицировать спектральные компоненты, образующие сигнал, и указать их частоты. Для визуального анализа амплитудный спектр (или спектр мощности) может быть представлен как график зависимости амплитуды (соответственно мощности) спектральной составляющей от частоты.

При интерпретации спектра широко используется теорема Парсеваля, позволяющая интерпретировать спектр как график распределения суммарной мощности сигнала по частотам. В связи с этим спектр мощности  $|X_n|^2$  используют чаще, чем амплитудный спектр  $|X_n|$ .

На практике важно ясно понимать физический смысл элементов спектра, что требует достаточно большого опыта, но зато позволяет делать некоторые выводы о природе исследуемого сигнала уже при одном визуальном рассмот-

---

<sup>45</sup>zero padding



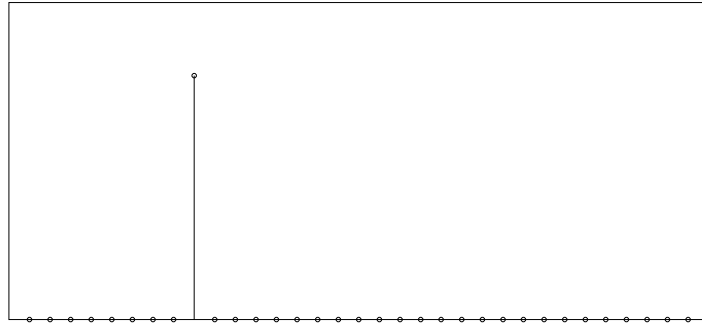


Рис. 10. Спектр при  $T = 8$

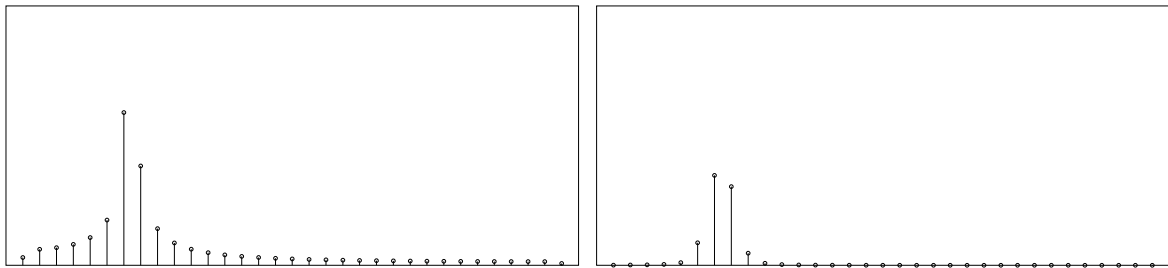


Рис. 11. Спектр при  $T = 10$ , справа – с использованием окна и слева – без

рении его спектра мощностей. К примеру, периодические и квазипериодические процессы имеют ярко выраженный линейчатый спектр, в то время как стохастические процессы характеризуются сплошным спектром, в котором отдельные спектральные составляющие представлены обычно в равной степени.

## Характерный спектр

Эксперты часто используют эмпирическое понятие «четкого максимума» спектра — это высокий узкий максимум, соответствующий присутствующей в сигнале частоте, хорошо отделенный от соседних максимумов промежутками с практически нулевой мощностью. «Характерным» называют спектр, состоящий из одних четких максимумов. Справедливости ради следует сказать, что характерные спектры в реальных задачах практически не встречаются. Во многих случаях максимумы спектра оказываются размытыми («широкими»), зачастую мощная спектральная составляющая с широким максимумом «маскирует» соседние составляющие — соответствующие им максимумы спектра приходятся на фронты более мощного максимума и оказываются на его фоне едва заметными. Успешный визуальный анализ спектров является искусством, требующим наличия опыта.

## Спектр гармоник

Отсчеты спектра соответствуют безразмерным частотам  $f_n = n/N$ , которые равномерно распределены по всему диапазону частот. Напротив, период  $n$ -го элемента спектра есть  $T_n = N/n$ , поэтому периоды распределены на отрезке  $[2, N]$  неравномерно — плотно в области высокочастотных колебаний и весьма редко для низкочастотных. Таким образом, при заданной длине временного ряда высокочастотные спектральные составляющие могут быть локализованы по периоду весьма точно, низкочастотные же локализуются плохо и тем хуже, чем ниже их частота. Такая неравномерность — еще одно проявление фундаментального принципа неопределенности: период гармоник локализуется тем лучше, чем больше относительное время наблюдения по отношению к периоду локализуемой гармоник.

При спектральном анализе сигнала мы идентифицируем спектральную компоненту по расположению и виду соответствующего ей максимума спектра. Если период гармоник совпадает с периодом одного из элементов спектра, то мы можем надеяться на характерный спектр с четким максимумом. Если же период гармоник расположен далеко от периодов элементов спектра, то мощность гармоник размазывается по соседним элементам спектра. Использование окна ослабляет эффект размазывания, но само окно также ухудшает локализацию элементов спектра по частоте за счет сглаживания.

**Пример.** Пусть для гармонического сигнала  $x_k = \sin(2\pi T^{-1}k)$  при  $0 \leq k < N$  вычисляется амплитудный спектр  $A_n = |X_n|$  при  $N = 64$ . На рисунках 10 и 11 (слева) показан линейчатый спектр для случаев  $T = 8$  и  $T = 10$ , которые мало отличаются по частоте. Видно, что в первом случае равенство  $T = N/8$  обеспечивает качественную локализацию, во втором же случае наблюдается сильное размытие максимума. На рисунке 11 справа показан спектр при  $T = 10$ , но в случае использования окна Ханна. Размазывание здесь менее заметно, но максимум стал менее четким.

## Кратные гармоники

Часто спектральный анализ сигнала используется для выявления характерных для него периодичностей. Здесь имеются некоторые особенности, которые рассмотрены ниже.

Если  $x(t)$  — периодическая функция с периодом  $T$ , то ее можно представить в виде ряда Фурье:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i2\pi n f_0 t).$$

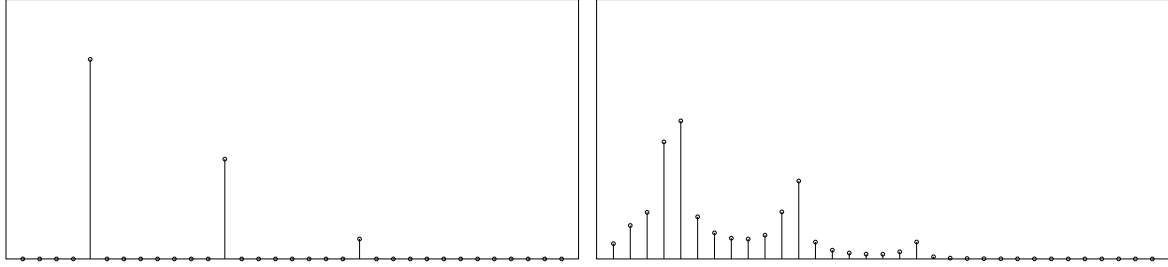


Рис. 12. Спектр при  $T = 16$  (слева) и  $T = 18$  (справа)

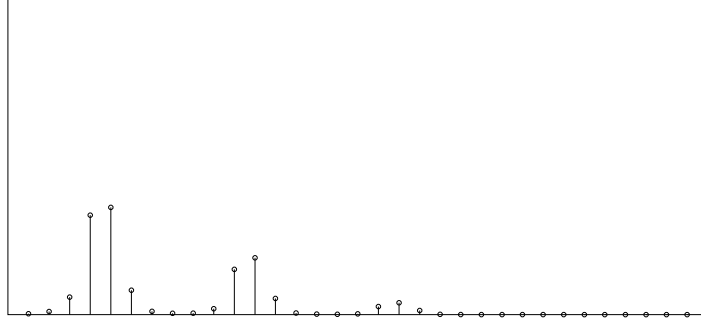


Рис. 13. Спектр при использовании окна ( $T = 18$ )

Спектр такого сигнала имеет вид:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(f - n f_0).$$

Таким образом, спектр периодического сигнала оказывается дискретным и содержит помимо основной частоты  $f_0$ , гармоники с частотами  $k f_0$ .

**Пример.** Пусть для периодического сигнала  $x_k = [\sin(2\pi T^{-1}k)]^5$  при  $0 \leq k < N$  вычисляется амплитудный спектр  $A_n = |X_n|$  при  $N = 64$ . На рисунках 12 показан линейчатый спектр для случаев  $T = 16$  и  $T = 18$ . В первом случае ясно видны кратные гармоники, во втором же случае амплитуда каждой гармоники размазывается по соседним частотам, что делает спектр еще более сложным. На рисунке 13 показан спектр при  $T = 18$ , но в случае использования окна Ханна.

Функция  $x(t)$  называется *квазипериодической*, если она может быть представлена в виде

$$x(t) = \varphi(2\pi f_1 t, 2\pi f_2 t, \dots, 2\pi f_m t),$$

где функция  $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  является  $2\pi$ -периодической по каждой переменной<sup>46</sup>, а частоты  $f_1, \dots, f_m$  несоизмеримы<sup>47</sup>.

<sup>46</sup>Т. е. при любых  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  и любых целочисленных  $n_1, \dots, n_m$  выполняется равенство  $x(\alpha_1 + 2\pi n_1, \alpha_2 + 2\pi n_2, \dots, \alpha_m + 2\pi n_m) = x(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ .

<sup>47</sup>Числа  $f_1, \dots, f_m$  называются несоизмеримыми, если не существует такого числа  $f_0$ , что все  $f_k$  являются его целыми кратными.

Вычислим спектр квазипериодического сигнала. Для этого разложим  $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  в кратный ряд Фурье<sup>48</sup>:

$$\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{n_1, \dots, n_m} C_{n_1, \dots, n_m} \exp[i(n_1\alpha_1 + \dots + n_m\alpha_m)].$$

Тогда

$$x(t) = \sum_{n_1, \dots, n_m} C_{n_1, \dots, n_m} \exp[i2\pi(n_1f_1 + \dots + n_mf_m)t].$$

Спектр такого сигнала имеет вид:

$$X(f) = \sum_{n_1, \dots, n_m} C_{n_1, \dots, n_m} \delta[f - (n_1f_1 + \dots + n_mf_m)].$$

Таким образом, спектр квазипериодического сигнала содержит всевозможные линейные комбинации  $n_1f_1 + \dots + n_mf_m$  его частот  $f_1, \dots, f_m$ .

Форма спектра позволяет сделать вывод о природе сигнала. Гармонический сигнал имеет импульсный спектр. Спектр негармонического  $T$ -периодического сигнала является линейчатый и содержит спектральные составляющие, соответствующие кратным частотам  $nf_0$ , где  $f_0 = 1/T$  — характерная частота сигнала. Спектр квазипериодического сигнала с частотами  $f_1, \dots, f_m$  также имеет дискретный характер, но содержит спектральные составляющие, соответствующие всевозможным целочисленным линейным комбинациям характерных частот сигнала. Если число характерных частот велико, то линии в спектре могут быть расположены весьма густо, но спектр сохраняет линейчатость. Таким образом, с увеличением сложности сигнала увеличивается и количество ненулевых элементов спектра.

**Задача 9.1.** Сигнал, спектр которого состоит из двух спектральных составляющих с частотами 10 Гц и 45 Гц соответственно, дискретизируется с частотой дискретизации 60 Гц. Какие спектральные составляющие присутствуют в дискретизированном сигнале в полосе 0–60 Гц.

## Единицы измерения мощности

При измерении относительных значений мощности спектральных составляющих широко используется специфическая единица измерения — децибел. Говорят, что мощность  $P_1$  отличается от мощности  $P_2$  на

$$D = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2}$$

---

<sup>48</sup>Здесь мы используем аппарат многомерных рядов Фурье, который описан в главе 11. Читатель, незнакомый с кратными рядами Фурье, может уже сейчас разобрать соответствующие разделы этой главы.

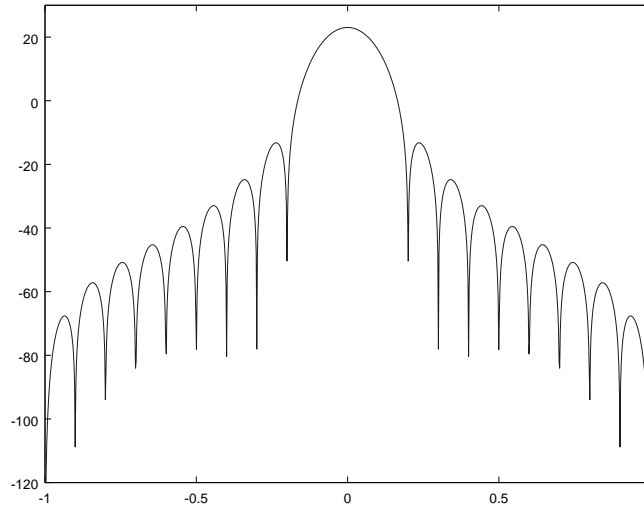


Рис. 14. Сглаживающее окно  $|G_T(f)|$  при  $T = 10$

*децибел* (обозначают эту единицу так: дБ или dB). Децибел является безразмерной относительной логарифмической единицей измерения мощности.

Введенные выше децибелы — это так называемые «децибелы по мощности». При анализе амплитудного спектра используют также «децибелы по амплитуде». Поскольку  $P_j = |A_j|^2$  (здесь  $A_j$  — амплитуда соответствующей гармоники), то

$$D = 20 \log_{10} \frac{A_1}{A_2}.$$

Если амплитуда гармоники увеличится вдвое, т. е. на 6 дБ «по амплитуде», то ее мощность увеличится вчетверо, но снова на 6 дБ «по мощности».

Полезно запомнить несколько характерных значений:

| дБ        | 3    | 6 | 10   | 20  | 40     | 60     |
|-----------|------|---|------|-----|--------|--------|
| $P_1/P_2$ | 2    | 4 | 10   | 100 | $10^4$ | $10^6$ |
| $A_1/A_2$ | 1.41 | 2 | 3.16 | 10  | 100    | 1000   |

Логарифмическая шкала мощности обеспечивает постоянную степень детализации вдоль оси частот и облегчает анализ спектров, содержащих как высокоамплитудные, так и маломощные составляющие<sup>49</sup>. Поэтому логарифмический масштаб оси мощностей широко используется при графическом изображении спектров. В этом случае по оси ординат откладывают относительное значение в децибелах. При большом диапазоне изменения амплитуды гармоник логарифмический масштаб позволяет лучше разглядеть на одном и том же графике и малые и большие значения. Для примера на рисунке 14 показан график сглаживающего окна Ханна с использованием децибелов для

<sup>49</sup> Логарифмическая шкала также наиболее естественна для слуха. Эмпирический закон Вебера утверждает, что субъективная сила звука пропорциональна логарифму его мощности.

измерения амплитуды (по оси ординат отложено значение оконной функции в децибелах). Видно, что неразличимые на рисунке 4 боковые лепестки стали заметны и появилась возможность оценить их амплитуду по графику.

## Амплитудная модуляция и биения

Амплитудно-модулированным сигналом или АМ-сигналом называется сигнал вида

$$z(t) = [1 + Mx(t)]y(t).$$

Здесь  $M$  — параметр, определяющий *глубину модуляции*,  $y(t)$  — *несущий сигнал*. Говорят, что несущий сигнал  $y(t)$  промодулирован сигналом  $x(t)$ . Сигнал  $x(t)$  называется *оглибающей* АМ-сигнала  $z(t)$ . В роли несущего сигнала обычно выступает гармоника  $\exp(i2\pi f_0 t)$ ; ее частота  $f_0$  называется *несущей частотой*. В радиотехнике амплитудная модуляция используется для переноса спектра сигнала в область высоких частот. При спектральном анализе сигналов часто оказывается, что наблюдаемый сигнал представляет собой АМ-сигнал, в котором несущая промодулирована исследуемым сигналом. Так происходит, когда параметры наблюдаемого периодического процесса зависят от состояния изучаемого процесса.

Рассмотрим ситуацию, когда несущая гармоника  $y(t) = \cos 2\pi f_0 t$  промодулирована гармоническим сигналом  $x(t) = \cos 2\pi ft$ :

$$z(t) = [1 + M \cos 2\pi ft] \cos 2\pi f_0 t.$$

Изучим спектральный состав такого АМ-сигнала. Имеем

$$\begin{aligned} z(t) &= \cos 2\pi f_0 t + M \cos 2\pi ft \cos 2\pi f_0 t = \\ &= \cos 2\pi f_0 t + \frac{M}{2} \cos 2\pi(f_0 + f)t + \frac{M}{2} \cos 2\pi(f_0 - f)t. \end{aligned}$$

Таким образом, с точки зрения спектральной теории АМ-сигнал выглядит как сигнал, состоящий из трех спектральных составляющих — несущей частоты  $f_0$  и двух *боковых полос* с частотами  $f_0 - f$  и  $f_0 + f$ .

Явление, похожее на амплитудную модуляцию имеет место, когда смешиваются два гармонических сигнала с близкими частотами  $f_1$  и  $f_2$ :

$$\begin{aligned} &A_1 \exp(i2\pi f_1 t) + A_1 \exp(i2\pi f_2 t) = \\ &= \exp(i2\pi(f_1 + f_2)t/2) [A_1 \exp(i2\pi(f_1 - f_2)t/2) + A_1 \exp(-i2\pi(f_1 - f_2)t/2)]. \end{aligned}$$

В этом случае смесь гармоник выглядит как АМ-сигнал, в котором высокая частота  $(f_1 + f_2)/2$  промодулирована малой частотой  $(f_1 - f_2)/2$ . Наблюдаемые в этом случае низкочастотные осцилляции амплитуды высокочастотной несущей называются *биениями*.

Приведенные в этом разделе результаты показывают, что при спектральном анализе случаи сложения гармоник с близкими частотами и амплитудной модуляции несущей гармоник практически неотличимы. Возможность правильной интерпретации спектров в такой ситуации полностью определяется априорными данными и опытом исследователя.

## Нелинейные эффекты

Рассмотрим ситуацию, когда наблюдаемый сигнал подвергается нелинейному преобразованию. Мы исследуем простейший случай малой квадратичной нелинейности вида

$$y(t) = x(t) + \varepsilon[x(t)]^2,$$

где  $\varepsilon$  — малый коэффициент нелинейности. Здесь имеется в виду, что  $x(t)$  — исследуемый сигнал, а  $y(t)$  — наблюдаемый сигнал.

Нелинейное преобразование сигнала приводит к нескольким интересным эффектам. Попробуем подать на вход такого нелинейного преобразователя чистую гармонику  $x(t) = A \cos(2\pi ft)$ . Ясно, что на выходе мы получим сигнал, несколько отличающийся от гармонического колебания, — имеют место *нелинейные искажения*. Имеем

$$y(t) = A \cos(2\pi ft) + \varepsilon[A \cos(2\pi ft)]^2 = A \cos(2\pi ft) + \frac{\varepsilon}{2}A^2 + \frac{\varepsilon}{2}A^2 \cos(2\pi(2f)t).$$

Итак, на выходе, кроме исходной гармоник, мы получили также гармонику с удвоенной частотой. Таким образом, нелинейное преобразование сигнала приводит к появлению *высших гармоник*. Кроме этого, в выходном сигнале присутствует постоянная составляющая  $A^2\varepsilon/2$ , сдвигающая среднее значение сигнала. Эффект появления сдвига среднего значения при нелинейном преобразовании называется *детектированием*.

Рассмотрим теперь нелинейное преобразование сигнала, содержащего две спектральные составляющие:

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) + \varepsilon[A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)]^2 = \\ &= x(t) + \varepsilon A_1^2 [\cos(2\pi f_1 t)]^2 + \varepsilon A_2^2 [\cos(2\pi f_2 t)]^2 + 2\varepsilon A_1 A_2 \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t). \end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое дает исходное гармоническое колебание, а второе — постоянную составляющую и высшие гармоники с частотами  $2f_1$  и  $2f_2$ . Последнее же слагаемое демонстрирует еще один нелинейный эффект — *модуляцию*. Действительно, если частоты  $f_1$  и  $f_2$  отличаются значительно ( $f_1 \ll f_2$ ),

то можно считать, что в сигнале  $y(t)$  появилась АМ-составляющая, в которой несущая гармоника  $\cos(2\pi f_2 t)$  промодулирована колебанием  $\cos(2\pi f_1 t)$ . С другой стороны,

$$2\varepsilon A_1 A_2 \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t) = \varepsilon A_1 A_2 [\cos(2\pi(f_1 - f_2)t) + \cos(2\pi(f_1 + f_2)t)]$$

и можно считать, что в сигнале  $y(t)$  просто появились две новые спектральные составляющие с частотами  $f_1 - f_2$  и  $f_1 + f_2$ .

Таким образом, мы описали разнообразные нелинейные эффекты: появление высших гармоник, детектирование и модуляцию. Все нелинейные эффекты оказались пропорциональны произведениям амплитуд сигналов, поэтому можно ожидать, что нелинейные эффекты будут сильнее проявляться для высокоамплитудных сигналов. Заметим также, что если рассмотренная нами квадратичная нелинейность приводит к появлению только второй гармоники, то нелинейности высшего порядка будут добавлять более высокие гармоники. Все устройства, используемые для усиления, передачи и регистрации сигналов вносят во входной сигнал нелинейные искажения. В качестве примера скажем, что ухо человека также нелинейное устройство. При большой громкости даже для чистого тона создается ощущение, что в сигнале присутствуют высшие гармоники.

## 9.5 Схема спектрального анализа

Описанные выше процедуры предобработки данных для спектрального анализа взаимосвязаны и предполагают некоторый порядок выполнения. Например, не имеет смысла выполнять умножение на окно или исключение постоянной составляющей после дополнения временного ряда нулями. При описании отдельных процедур были сделаны необходимые замечания. Здесь приведена окончательная схема спектрального анализа временного ряда, суммирующая информацию о взаимосвязи процедур предобработки:

1. Выбор интервала дискретизации или оценка максимальной частоты по заданному интервалу дискретизации;
2. Выбор длины анализируемого временного ряда или оценка частотного разрешения по заданной длине временного ряда (на этом этапе также принимается решение о необходимости дополнения ряда нулями);
3. Исключение постоянной составляющей и умножение временного ряда на мультипликативное окно;
4. Дополнение временного ряда нулями;



5. Выполнение процедуры быстрого преобразования Фурье;
6. Переупорядочение отсчетов спектра (при необходимости) и переход к одностороннему спектру.

Процедуры исключения постоянной составляющей и умножения на мультипликативное окно тесно и нетривиально взаимосвязаны. Применение окна к данным с сильно смещенным средним может привести к появлению переходных полос по краям временного ряда, которые существенно искажают спектр, поэтому перед применением окна всегда производится исключение постоянной составляющей. В свою очередь, применение окна может привести к смещению среднего, поэтому после применения окна следует еще раз исключить постоянную составляющую. Следует заметить, что существенное смещение среднего при применении окна говорит о наличии в данных некоторых аномалий, которые сами могут затруднить спектральный анализ. Например, к таким аномалиям относится присутствие в данных выраженного монотонного нелинейного изменения сигнала (тренда), которое приводит к сильному искажению спектра на низких частотах.

## 9.6 Недостатки спектрального анализа Фурье

Преобразование Фурье находит многочисленные приложения в области анализа и обработки сигналов по причине простоты, наглядности и простоты физической интерпретации спектра Фурье. В то же время преобразование Фурье имеет ряд серьезных недостатков, основные из которых мы перечислим.

Первый недостаток заключается в невозможности одновременной локализации сигнала и спектра. Это свойство спектров Фурье может быть продемонстрировано принципом неопределенности Гейзенберга, предельная форма которого составляет содержание теоремы о локализации сигнала и спектра. Причиной этого явления является плохая временная локализация базисных функций Фурье.

Второй недостаток преобразования Фурье связан с тем, что для получения информации о спектральном составе сигнала используются его значения на всем интервале наблюдения, причем *спектральный состав сигнала осредняется по времени*. Такой подход неприемлем для нестационарных сигналов, спектральный состав которых изменяется с течением времени. По этой причине преобразование Фурье не различает два сигнала, один из которых представляет собой сумму двух гармоник с разными частотами, а другой содержит те же гармоники, включающиеся последовательно одна за другой. В некоторой степени этот недостаток спектрального анализа Фурье можно обойти, применяя т. н. локальный спектральный анализ.

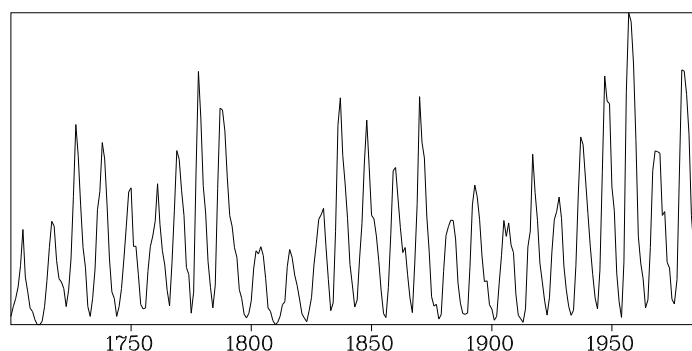


Рис. 15. Изменение числа Вульфа с 1700 по 1987 год

Важным частным следствием осреднения спектра является тот факт, что при спектральном анализе Фурье информация обо всех спектральных составляющих получается из анализа всего временного ряда. В то же время кажется естественным получать информацию о спектральной составляющей на основе анализа участка временного ряда, длина которого согласована с частотой этой спектральной составляющей. Действительно, информацию о высокочастотных спектральных составляющих естественно получать на основе анализа малых временных интервалов. В результате спектры Фурье часто оказываются не поддающимися интерпретации.

Перечисленные недостатки спектрального анализа Фурье решаются в рамках вейвлетного анализа. Вейвлетное преобразование оказывается свободным от недостатков преобразования Фурье — оно обеспечивает локализованность спектра функций, локализованных во временной области и позволяет определять локальный спектральный состав нестационарного сигнала. По способу преодоления перечисленных трудностей вейвлетное преобразование напоминает оконное преобразование Фурье и по самой своей природе обладает подвижным частотно-временным окном, узким на малых масштабах и широким на больших. Благодаря этому, вейвлетное преобразование особенно удобно для анализа нестационарных процессов с широким спектром.

## 9.7 Пример спектрального анализа

Известна гипотеза о связи многих явлений на Земле с динамикой солнечной активности. Интенсивность солнечной активности оценивается т. н. числом Вульфа, характеризующим наблюдаемое состояние поверхности солнца. Особенно важно, что доступны подробные результаты наблюдения солнечной активности за последние 300 лет. Это позволяет проводить их обработку различными методами и использовать результаты для сравнения информативности различных методов анализа.

Здесь мы проведем спектральный анализ данных о среднегодовом индексе

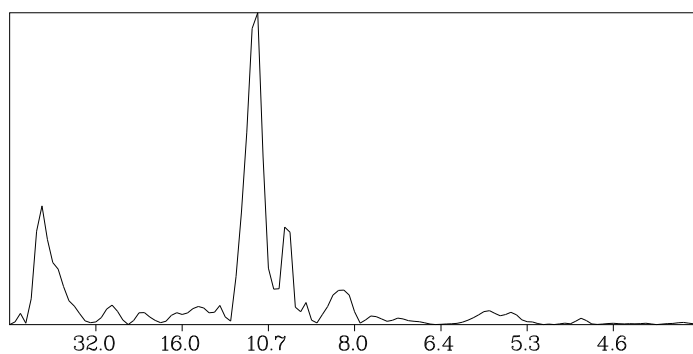


Рис. 16. Спектр мощности солнечной активности

солнечной активности за период с 1700 по 1987 год, что составляет 288 отсчетов. График изменения среднегодового значения числа Вульфа приведен на рисунке 15. Простой визуальный анализ показывает наличие мощной периодической составляющей с периодом примерно в 10 лет. Проведем полный спектральный анализ данных.

Интервал дискретизации изначально задан и равен 1 году. Соответственно период самой высокочастотной составляющей, которая может быть идентифицирована, составляет 2 года. Ясно, что не следует надеяться на уверенную идентификацию составляющих с периодами короче чем 5 лет. Длина временного ряда составляет 288 лет, что в теории обеспечивает идентификацию гармоник с периодами вплоть до 288 лет, но на практике мы можем доверять информации только для гармоник с периодами не длиннее 100 лет.

Значения, составляющие временной ряд, лежат в интервале от 0.0 до 190.2. Среднее значение существенно отлично от нуля (оно равно 48.4), поэтому необходимо исключение постоянной составляющей. После этого можно произвести умножение на окно Ханна. После применения окна среднее значение сигнала становится равно  $-1.4$ , что более чем на два порядка меньше диапазона изменения исходных данных, и можно сделать вывод об отсутствии мощного нелинейного тренда. Проведем все же повторное исключение постоянной составляющей.

Перед применением процедуры БПФ дополним временной ряд нулями до длины в 512 отсчетов. После выполнения БПФ получим массив комплексных чисел из 512 спектральных отсчетов. Отсчеты с индексами  $1 \leq n \leq 256$  умножим на 2 для получения одностороннего спектра. В итоге получим 257 спектральных отсчетов. На частоте Найквиста (отсчет с номером 256) сосредоточена мощность, равная  $5 \cdot 10^{-3}$ , что составляет  $-37.8$  дБ по отношению к самой мощной составляющей, и дискретизацию можно считать корректной. На частотах, соответствующих отсчетам при  $n > 128$ , сосредоточена суммарная мощность, равная 4.5, что, однако, составляет всего лишь  $-17.7$  дБ по отношению к суммарной мощности всех спектральных составляющих. По-

что вся мощность сосредоточена в спектральных отсчетах при  $0 \leq n \leq 128$ , которые показаны в виде графика на рисунке 16.

Для интерпретации спектра следует выяснить масштаб по оси частот. При вычислении спектра использовался временной ряд длиной в 512 отсчетов, поэтому спектральному отсчету с индексом  $n$  соответствует спектральная компонента с периодом  $T_n = 512/n$  лет. Анализ спектра позволяет выделить следующие спектральные компоненты (мощность приведена в децибелах по отношению к самой мощной составляющей):

|           |      |      |      |      |
|-----------|------|------|------|------|
| $T$ (лет) | 11.1 | 85.3 | 10.0 | 8.3  |
| $P$ (дБ)  | 0.0  | -4.2 | -5.0 | -9.6 |

Если первые две спектральные составляющие могут быть непосредственно обнаружены при внимательном изучении рисунка 15, то четко различимые периодичности в 11.1, 10.0 и 8.3 лет на графике совершенно неотличимы друг от друга.

## 10 Приложения спектральных методов

### 10.1 Идеология спектральных методов

Один из наиболее общих подходов к обработке сигналов связан с выделением набора *характерных признаков*<sup>50</sup>, достаточно полно описывающих сигнал. Такие признаки обычно являются числовыми характеристиками сигнала, число которых значительно меньше числа отсчетов сигнала. Таким образом, от представления сигнала вектором его отсчетов, имеющим высокую размерность, мы переходим к так называемому *маломодовому* представлению сигнала небольшим количеством числовых характеристик. *Основной задачей ЦОС является задача выбора оптимального (т. е. наиболее информативного с точки зрения решаемой задачи) маломодового представления сигналов.* В большинстве случаев без такого преобразования информация, содержащаяся в сигнале, не может быть выделена и осмыслена человеком.

Одна из задач, решаемых с помощью маломодового представления, — задача классификации сигналов по некоторому признаку (например, хочется отличать шум исправного двигателя от шума, характерного для некоторой неисправности). В большинстве случаев человеку не удастся провести такую классификацию путем визуального анализа сигнала.

При маломодовом представлении сигнала большое значение имеет «сжатие» результатов многочисленных измерений до легко обозримых человеком

---

<sup>50</sup>feature extraction

форм. Здесь полезно отметить, что упомянутое «сжатие» информации широко применяется специалистами во многих областях, где анализ сигналов является важной практической задачей. Так, при анализе электрокардиограммы (записи электрической активности сердечной мышцы) определяются значения некоторых характерных величин (высота и продолжительность импульсов, временные промежутки между ними), которые используются впоследствии для постановки диагноза. При постановке диагноза врач руководствуется небольшим набором числовых параметров, достаточно полно характеризующих интересующий его процесс.

Представление сигнала в виде временного ряда в большинстве случаев оказывается малоинформативным ввиду своей избыточности. Отдельные компоненты временных рядов всегда сильно коррелированы, что часто приводит к проблемам при их численном анализе. При переходе к спектральному представлению осуществляется линейная замена координат и происходит (при некоторой удаче) так называемое *расцепление корреляций*<sup>51</sup>: элементы спектра, представляющие временной ряд в спектральной области, оказываются слабо коррелированными<sup>52</sup>. Спектр сигнала или простые характеристики спектра являются одним из самых популярных маломодовых представлений сигнала. Свойство расцепления корреляций особенно широко применяется для сокращения избыточности (сжатия) изображений и звука.

Интуитивно ясно, что эффективность применения спектральных разложений в смысле расцепления корреляций зависит от «естественности» используемого набора базисных функций, т. е. от того, насколько элементы базиса характерны для динамики исследуемого временного ряда. Естественность применения того или иного спектрального разложения требует в каждом случае отдельного серьезного обсуждения. Следует ясно понимать, что никакие сколь угодно элегантные спектральные разложения не будут эффективны для обработки сигнала, если природа базиса входит в явное противоречие с происхождением сигнала.

В теории цифровой обработки сигналов исследуемую функцию представляют спектром и операции над функцией сводят к соответствующим операциям над ее спектром. Такой подход во многом аналогичен приему, используемому в численных методах анализа, когда функцию заменяют ее полиномиальной аппроксимацией, а операции над функцией сводят к операциям над аппроксимирующим ее многочленом<sup>53</sup>. Использование спектральных разло-

---

<sup>51</sup>decorrelation

<sup>52</sup>Известно спектральное разложение по ортогональному базису (разложение Карунена-Лоэва), оптимальное в смысле наименьшей корреляции спектральных компонентов, однако чаще применяются спектральные разложения, допускающие более эффективную реализацию.

<sup>53</sup>Отметим, что при фиксированных узлах  $t_k$  коэффициенты аппроксимирующего многочлена однозначно определяются значениями  $x_k = x(t_k)$  функции  $x(t)$  в узлах. Поэтому фактически все операции над исходной функцией сводятся к операциям над дискретным набором ее значений  $x_k$  в узлах аппрокси-

жений Фурье, т. е. разложений по гармоническим функциям полностью определяет специфику цифровой обработки сигналов. Только в последнее время в цифровую обработку сигналов начали проникать методы, основанные на спектральных разложениях, отличных от разложений Фурье (например, вейвлетные спектры).

Другим маломодовым представлением сигнала является его авторегрессионная модель. Представление сигнала коэффициентами авторегрессора особенно популярно в задачах классификации и идентификации сигналов. Оказывается, что параметры авторегрессионной модели во многих задачах являются достаточно представительными характеристиками сигнала, позволяющими выявить его природу.

## 10.2 Классификация спектральных представлений

В зависимости от природы сигнала используется одно из рассмотренных выше спектральных представлений. В этом разделе сделана попытка некоторой систематизации свойств изученных нами спектральных представлений.

- Непериодический аналоговый сигнал  $x(t)$  может быть представлен непериодическим аналоговым спектром  $X(f)$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(i2\pi ft) df, \\ X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i2\pi ft) dt. \end{aligned}$$

- $T$ -периодический аналоговый сигнал  $x(t)$  представляется непериодическим дискретным спектром  $C_n$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp[i(2\pi/T)nt], \\ C_n &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp[-i(2\pi/T)nt] dt. \end{aligned}$$

- Непериодический дискретный сигнал  $x_k$  представляется 1-

---

мации. Совершенно аналогичная ситуация имеет место в теории дискретизации, когда спектр оказывается однозначно задан дискретными отсчетами исходного сигнала и все операции над спектром сводятся к операциям над отсчетами.

периодичным аналоговым спектром  $X(f)$ :

$$x_k = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) \exp(i2\pi f k) df,$$

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \exp(-i2\pi f k).$$

- $N$ -периодический дискретный сигнал  $x_k$  представляется дискретным  $N$ -периодичным спектром  $X_n$ :

$$x_k = \sum_{n=-N/2}^{N/2} X_n \exp[i(2\pi/N)kn],$$

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2} x_k \exp[-i(2\pi/N)kn].$$

Легко заметить, что

- *периодическим сигналам соответствуют дискретные спектры, а непериодическим — аналоговые;*
- *дискретным сигналам соответствуют периодические спектры, а аналоговым — непериодические.*

### 10.3 Передискретизация

Передискретизацией<sup>54</sup> временного ряда называется процедура изменения интервала дискретизации. При увеличении интервала дискретизации обычно говорят о *децимации* сигнала, а уменьшение интервала дискретизации называют *интерполяцией* сигнала.

Пусть временной ряд  $x_k$  получен дискретизацией сигнала  $x(t)$  при интервале дискретизации  $\tau$ . При передискретизации по временному ряду  $x_k$  получают новый временной ряд  $x'_k$ , соответствующий дискретизации сигнала  $x(t)$  при новом значении  $\tau'$  интервала дискретизации. Ясно, что если мы имеем только временной ряд  $x_k$  с известным интервалом дискретизации  $\tau$ , то задача передискретизации в общем случае не может быть решена — имеется сколько угодно различных сигналов, принимающих заданные значения в точках дискретизации.

---

<sup>54</sup>resampling

Теорема о наложении гарантирует возможность передискретизации в частном случае сигналов с финитным спектром, для которых можно по спектру дискретизации восстановить спектр исходного сигнала. Используя теорему Найквиста-Шеннона, можно выписать явную формулу для передискретизации сигнала с финитным спектром. Пусть сигнал  $x(t)$  имеет финитный спектр, ограниченный частотой  $f_*$ , и для исходной дискретизации  $x_k$  выполнено условие Найквиста:  $\tau < 1/2f_*$ . Тогда в соответствии с теоремой Найквиста-Шеннона по отсчетам  $x_k$  можно восстановить исходную функцию:

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \operatorname{sinc} 2\pi f_*(t - j\tau).$$

Теперь передискретизация может быть тривиально получена как дискретизация восстановленной функции  $x(t)$  при новом значении интервала дискретизации  $\tau'$ :

$$x'_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \operatorname{sinc} 2\pi f_*(k\tau' - j\tau).$$

Ясно, что передискретизация имеет смысл, только если новое значение интервала дискретизации удовлетворяет условию Найквиста. Если исходная дискретизация удовлетворяет условию Найквиста, то имеет смысл любая передискретизация, приводящая к уменьшению интервала дискретизации. Таким образом, для сигнала с финитным спектром по исходной корректной дискретизации мы можем получить сколь угодно мелкую дискретизацию.

Описанный выше метод передискретизации временного ряда сводится к весьма трудоемким вычислениям. Поскольку функция  $\operatorname{sinc}(x)$  очень медленно затухает, при вычислении каждого отсчета временного ряда  $x'_k$  придется производить суммирование по всем значениям индекса  $j$ , соответствующим ненулевым отсчетам  $x_j$ . Таким образом, при  $\tau' = \tau/M$  передискретизация временного ряда из  $N$  отсчетов, дающая новый временной ряд из  $MN$  отсчетов, требует выполнения  $MN^2 = O(N^2)$  операций умножения (здесь мы не учитываем затраты на вычисление значений функции  $\operatorname{sinc}(x)$ ). Использование БПФ позволяет производить быструю передискретизацию временного ряда.

Пусть исходный временной ряд  $x_k$  содержит  $N$  отсчетов. Вычислим спектр  $X_n$  временного ряда  $x_k$ . В полученном спектре интервал дискретизации по частоте равен  $\Delta f = 1/N\tau$ , а отсчету с номером  $n$  соответствует частота  $f_n = n\Delta f$ . Отсчету с номером  $N/2$  соответствует частота  $f_{N/2} = (N/2)\Delta f = 1/2\tau$ , равная частоте Найквиста  $f_*$ . Поскольку для исходной дискретизации предполагается выполненным условие Найквиста, в спектре исходного сигнала отсутствуют составляющие с частотами, большими  $f_*$ .



Пусть  $\tau' = \tau/M$ , т. е. результирующий временной ряд  $x'_k$  содержит  $N' = MN$  отсчетов. В спектре  $X'_n$  временного ряда  $x'_k$  интервал дискретизации по частоте равен  $\Delta f' = 1/N'\tau' = [(MN)(\tau/M)]^{-1} = \Delta f$ . Отсчету с номером  $N/2$ , как и раньше, соответствует частота  $f_{N/2} = (N/2)\Delta f' = (N/2)\Delta f = f_*$ . Отсчетам при  $n > N/2$  соответствуют частоты  $f_n > f_*$ , отсутствующие в спектре исходного сигнала. Поэтому спектр  $X'_n$  временного ряда  $x'_k$  может быть получен путем простого дополнения нулями спектра  $X_n$  временного ряда  $x_k$ .

Пусть теперь  $N = 2^n$  и  $M = 2^m$ . Тогда для вычисления спектра  $X_n$  и перехода от спектра  $X'_n$  к временному ряду  $x'_k$  может быть использована процедура БПФ. В этом случае для выполнения передискретизации требуется выполнить  $N \log N + N' \log N' = N \log N + MN(\log N + \log M) = O(MN \log N)$  умножений. Здесь удобно использовать процедуру сдвига нуля:  $\hat{x}_k = (-1)^k x_k$ . Тогда при  $1 \leq n \leq N - 1$  получаем:

$$\hat{X}'_{d+n} = \hat{X}_n, \quad d = (N' - N)/2.$$

Отдельно следует рассмотреть непарный отсчет с индексом  $n = 0$ , соответствующий в спектре  $\hat{X}_n$  частоте Найквиста, который перестает быть непарным в спектре  $\hat{X}'_n$ . Мощность этой спектральной составляющей должна быть распределена между соответствующими отсчетами спектра  $\hat{X}'_n$ :

$$\hat{X}'_d = \hat{X}'_{d+N} = \hat{X}_0/2.$$

Отметим, что процедуру быстрой передискретизации можно использовать и для временных рядов, длина которых  $N$  не является целой степенью двойки. В этом случае перед выполнением БПФ проводят дополнение временного ряда нулями. После восстановления временного ряда  $x'_k$  следует усечь его до длины  $N' = MN$ . Отметим также, что предварительное исключение постоянной составляющей уменьшает потери точности при БПФ, а при использовании процедуры дополнения нулями оно становится необходимым.

**Задача 10.1.** Напишите программу, выполняющую процедуру быстрой передискретизации с помощью БПФ.

## 10.4 Фильтрация при децимации

Часто по тем или иным причинам появляется необходимость проредить временной ряд, т. е. заменить его более коротким временным рядом. Прореживание обычно осуществляется путем простого отбрасывания отсчетов. Например при прореживании вдвое отбрасывают каждый второй отсчет исходного сигнала. Операция прореживания сигнала в цифровой обработке сиг-

налов называется *децимацией*<sup>55</sup>. Для определенности в этом разделе под децимацией будем понимать прореживание сигнала вдвое.

С точки зрения спектральной теории операция децимации корректна только в том случае, когда получающийся после нее интервал дискретизации продолжает удовлетворять условию Найквиста. Пусть исходный сигнал при частоте дискретизации  $f_1 = \tau^{-1}$  удовлетворяет условию Найквиста. Тогда спектр сигнала ограничен сверху частотой  $f_* = f_1/2$ . После децимации частота дискретизации станет равна  $f_2 = f_1/2 = (2\tau)^{-1}$  и спектр должен быть ограничен сверху уже частотой  $f_{**} = f_2/2 = f_*/2$ . Таким образом, для корректности децимации необходимо, чтобы в спектре отсутствовали составляющие в диапазоне частот  $[f_*/2, f_*]$ , т. е. правая половина спектра сигнала должна быть нулевой.

Пусть производится децимация сигнала, содержащего спектральные составляющие с частотами  $f > f_*/2$ . По теореме о наложении спектр полученного после децимации сигнала имеет вид

$$X_2(f) = f_2 [X(f - f_2) + X(f) + X(f + f_2)],$$

где  $X(f)$  — спектр исходного сигнала. Учитывая, что  $f_2 = f_*$ , приходим к выводу, что в спектральный отсчет с частотой  $0 \leq f < f_*/2$  внесет вклад также и спектральная составляющая с частотой  $f_*/2 < f_* - f \leq f_*$ . Спектральная составляющая с частотой  $f_* - f > f_*/2$ , проявляющаяся как составляющая с частотой  $f < f_*/2$ , называется «*духом*»<sup>56</sup>. Для звуковых сигналов «духи» проявляются как неприятный металлический лязг.

На практике операция прореживания успешно применяется, когда суммарная мощность, сосредоточенная на частотах из диапазона  $[f_*/2, f_*]$  мала и ею можно пренебречь. Однако в этом случае нельзя просто проредить сигнал, поскольку в этом случае его спектр в диапазоне  $[0, f_*/2]$  окажется загрязнен «духами». Перед децимацией необходимо путем фильтрации подавить спектральные составляющие с частотами  $f > f_*/2$ .

Опишем здесь простую схему предварительной фильтрации, позволяющей избавиться от духов при децимации. Пусть исходный сигнал  $x_k$  обработан фильтром

$$y_k = \frac{1}{3}(x_k + x_{k+1} + x_{k+2}),$$

а затем сигнал  $y_k$ , в свою очередь, обработан фильтром

$$z_k = \frac{1}{4}(y_k + y_{k+1} + y_{k+2} + y_{k+3}).$$

---

<sup>55</sup>decimation

<sup>56</sup>alias frequency

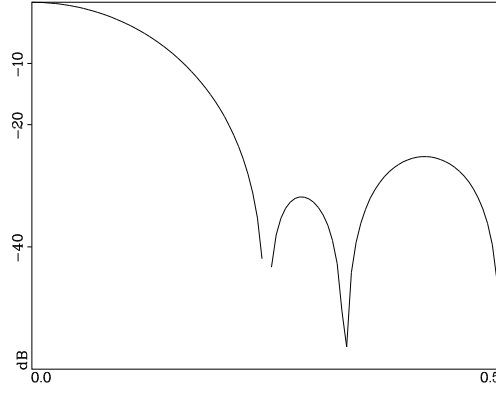


Рис. 17. АЧХ фильтра-дециматора

Для первого фильтра амплитудная частотная характеристика вычисляется тривиально:

$$A_{xy}(f) = |1 + 2 \cos(2\pi f)|/3.$$

Для второго фильтра имеем

$$\begin{aligned} H_{yz}(f) &= \frac{1}{4}[1 + \exp(-i2\pi f) + \exp(-i2\pi(2f)) + \exp(-i2\pi(3f))] = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \exp(-i2\pi(4f))}{1 - \exp(-i2\pi f)} = \frac{\exp(-i2\pi(2f))}{4 \exp(-i2\pi f/2)} \cdot \frac{\exp(i2\pi(2f)) - \exp(-i2\pi(2f))}{\exp(i2\pi f/2) - \exp(-i2\pi f/2)}, \end{aligned}$$

откуда

$$A_{yz}(f) = \left| \frac{\sin 2\pi(2f)}{4 \sin 2\pi f/2} \right| = \left| \frac{\sin 4\pi f}{4 \sin \pi f} \right|.$$

Легко получить формулу, непосредственно выражающую  $z_k$  через  $x_k$ :

$$z_k = \frac{1}{12}(x_k + 2x_{k+1} + 3x_{k+2} + 3x_{k+3} + 2x_{k+4} + x_{k+5}).$$

Частотная характеристика фильтра, преобразующего  $x_k$  в  $z_k$ , получается как произведение частотных характеристик  $A_{xy}(f)$  и  $A_{yz}(f)$ :

$$A_{xz}(f) = \left| \frac{\sin 4\pi f}{12 \sin \pi f} [1 + 2 \cos(2\pi f)] \right|.$$

На рисунке 17 показана АЧХ построенного фильтра в логарифмическом масштабе.

## 10.5 Фильтры в спектральной области

Здесь рассмотрена реализация цифровых фильтров в спектральной области. Иногда спектральная реализация фильтров оказывается чрезвычайно

удобной, несмотря на невозможность использования такой реализации для фильтрации в реальном масштабе времени. Кроме линейных ЦФ, в спектральной области могут быть реализованы некоторые простые нелинейные схемы фильтрации.

## Линейный фильтр в спектральной области

Теория цифровых фильтров была подробно рассмотрена выше, но в некоторых случаях для фильтрации сигналов используется более простая и несколько более ограниченная схема. Описанный вариант фильтра отличается простотой реализации, но, несмотря на это, может быть с успехом использован для простой обработки экспериментальных данных.

Рассмотрим временной ряд  $x_k$  при  $0 \leq k < N$ , со спектром  $X_n$ . Пусть временной ряд  $x_k$  получен дискретизацией исходного сигнала с интервалом дискретизации  $\tau$ . Тогда отсчет спектра с индексом  $n$  соответствует спектральной составляющей с частотой  $f_n = n\Delta f$ , где  $\Delta f = 1/(N\tau)$ . Пусть спектр  $Y_n$  получен из спектра  $X_n$  по правилу

$$Y_n = H(n\Delta f)X_n,$$

где  $H(f)$  — частотная характеристика фильтра. Перейдем теперь от спектра  $Y_n$  к сигналу  $y_k$ . Описанная процедура реализует фильтр с частотной характеристикой  $H(f)$  в спектральной области. Отметим, что такую реализацию можно использовать только в ситуации, когда все отсчеты исходного временного ряда заранее известны. Описанная схема неприменима, когда отсчеты временного ряда поступают в процессе их измерения и должны обрабатываться в реальном времени. Фильтры, допускающие работу в реальном времени, реализуются во временной области и задаются импульсной характеристикой.

Сделаем несколько замечаний относительно практической реализации описанной схемы. Спектр  $X_n$  исходного сигнала можно вычислять с использованием описанной выше процедуры спектрального анализа, за исключением применения взвешивающего окна во временной области. При этом приходится смириться с некоторой погрешностью, вносимой за счет просачивания задерживаемых частот в область пропускания фильтра при свертке со спектром прямоугольного окна. Процедуры дополнения сигнала нулями и исключения постоянной составляющей используются в неизменном виде.

При задании частотной характеристики фильтра следует помнить, что ее свойства должны быть согласованы с порядком отсчетов спектра  $X_n$ . Здесь удобно применить процедуру сдвига нуля и перейти к сигналу  $\hat{x}_k = (-1)^k x_k$ . В этом случае и частотную характеристику приходится сдвигать вправо

на  $1/2\tau$ :

$$\hat{Y}_n = H((n - N/2)\Delta f)\hat{X}_n.$$

Для сигнала  $\hat{y}_k$  производится обратный сдвиг нуля:  $y_k = (-1)^k \hat{y}_k$ .

## Нелинейная пороговая фильтрация

Рассмотрим модификацию описанной в предыдущем разделе схемы фильтрации, предназначенную для подавления маломощных случайных шумов. Во всех временных рядах, получаемых в результате натурных измерений, присутствует шум (помехи), обусловленный различными наводками. Образует спектр  $Y_n$  из спектра  $X_n$  исходного сигнала  $x_k$  по правилу

$$Y_n = \begin{cases} X_0 & n = 0 \\ 0 & n = N/2, \\ \theta_\varepsilon(X_n) & \text{else} \end{cases}$$

где

$$\theta_\varepsilon(s) = \begin{cases} s & 2|s|^2 > \varepsilon \\ 0 & 2|s|^2 \leq \varepsilon \end{cases}$$

и  $\varepsilon > 0$  — порог пропускания фильтра. Эта формула уже учитывает специфическую симметричную структуру дискретного спектра мощности вещественного сигнала. Фильтр пропускает высокоамплитудные спектральные составляющие, задерживая низкоамплитудные. В качестве порога пропускания часто выбирают некоторую долю от мощности самой мощной спектральной составляющей сигнала. Предварительное исключение постоянной составляющей позволяет ограничить потери точности при БПФ, а дополнение нулями используется в неизменном виде. Такая нелинейная пороговая фильтрация базируется на следующем предположении: в шуме присутствуют все частоты и мощность шума «размазывается» по всей оси частот. При этом и так малая мощность шума относительно равномерно распределяется по оси частот, порождая уже совсем маломощные шумовые спектральные составляющие.

Нелинейная пороговая фильтрация иногда оказывается удивительно эффективным методом. Особенно удобно использовать такой фильтр в задаче удаления шума из записи узкополосного процесса. Рассмотрим простой пример применения пороговой фильтрации.

Рассмотрим сигнал  $x_k^*$  вида

$$x_k^* = \sin\left(2\pi f_1 \frac{k}{128}\right) + \cos\left(2\pi f_2 \frac{k}{128}\right), \quad 0 \leq k < 128$$

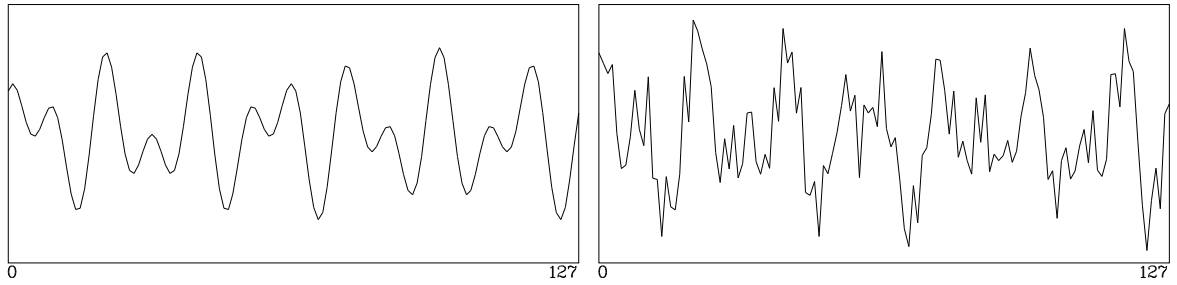


Рис. 18. Слева – исходный сигнал  $x_k^*$ , справа – зашумленный сигнал  $x_k$

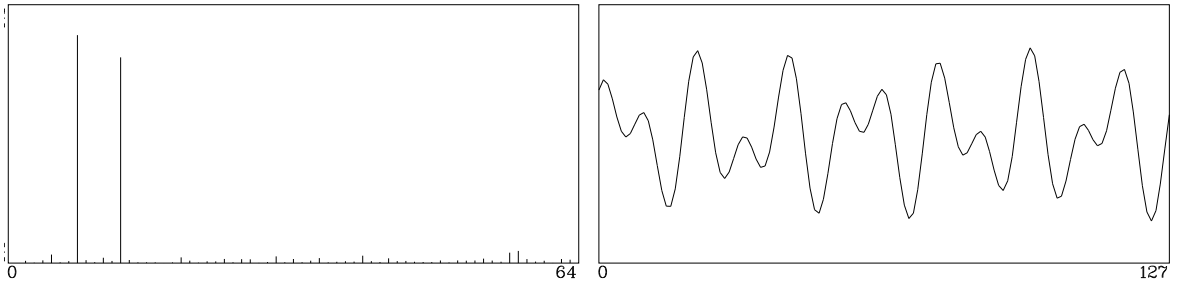


Рис. 19. Слева – спектр сигнал  $x_k$ , справа – результат фильтрации

при  $f_1 = 7$  и  $f_2 = 12$ . График этого сигнала показан на рисунке 18 слева. Справа показан «зашумленный» вариант этого сигнала  $x_k$ , который представляет собой

$$x_k = x_k^* + s_k,$$

где  $s_k$  — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке  $[-1, 1]$ .

Вычислим спектр  $X_n$  сигнала  $x_k$ . Спектр мощности показан на рисунке 19 слева. Исходный сигнал является узкополосным, поэтому его мощность вся сосредоточена в узком частотном диапазоне и спектральным составляющим сигнала соответствуют высокоамплитудные компоненты спектра. Наоборот, спектр шума широкополосен и мощность шума оказывается «размазанной» по всему частотному диапазону, поэтому амплитуда каждой шумовой спектральной составляющей оказывается небольшой.

Выберем в качестве порогового значения величину  $\varepsilon = 0.03$ . Вычисляя обратное преобразование для спектра  $Y_n$ , мы можем получить исходный сигнал  $x_k^*$ , выделив его из шума. Результирующий сигнал показан на рисунке 19 справа. Видно, что исходный сигнал восстановлен с неплохой точностью, при большой амплитуде шума.

## 10.6 Спектральный анализ разностных схем

Разностные схемы, применяемые в численном анализе, с точки зрения цифровой обработки сигналов являются цифровыми фильтрами и могут анализироваться с помощью развитых нами спектральных методов. Оказывает-

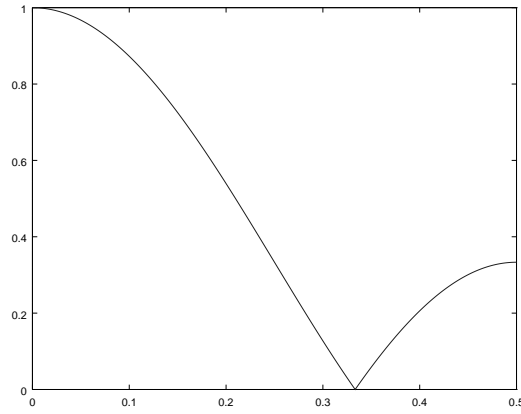


Рис. 20. Частотная характеристика схемы скользящего среднего

ся, что такой подход является чрезвычайно полезным и позволяет легко выяснить некоторые важные свойства широко употребляемых разностных схем.

### Скользящее среднее

При обработке реальных данных часто используют процедуру, называемую *сглаживанием по методу скользящего среднего*<sup>57</sup> и описываемую в простейшем случае симметричного 3-точечного сглаживания формулой:

$$y_k = \frac{1}{3}(x_{k-1} + x_k + x_{k+1}).$$

Вычислим частотную характеристику рассматриваемой системы. Положим для этого

$$x_k = \exp(i2\pi f k).$$

Тогда

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{1}{3}[\exp(i2\pi f(k-1)) + \exp(i2\pi f k) + \exp(i2\pi f(k+1))] = \\ &= \frac{1}{3}[\exp(-i2\pi f) + 1 + \exp(i2\pi f)] \exp(i2\pi f k) \end{aligned}$$

и

$$H(\omega) = \frac{1}{3}[\exp(-i2\pi f) + 1 + \exp(i2\pi f)] = \frac{1}{3}(1 + 2 \cos 2\pi f).$$

График амплитудной характеристики рассмотренного метода сглаживания показан на рисунке 20. Легко видеть, что здесь мы просто имеем дело с фильтром низких частот. Вообще *все сглаживающие фильтры являются по сути фильтрами низких частот.*

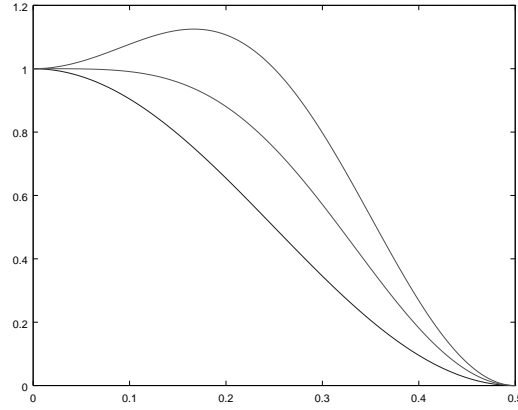


Рис. 21. АЧХ фильтров из двухпараметрического семейства

## Двухпараметрическое семейство фильтров

Рассмотрим двухпараметрическое семейство симметрических фильтров

$$y_k = ax_{k-2} + bx_{k-1} + cx_k + bx_{k+1} + ax_{k+2}.$$

Такой фильтр имеет частотную характеристику вида

$$\begin{aligned} H(f) &= a \exp(-i4\pi f) + b \exp(-i2\pi f) + c + b \exp(i2\pi f) + a \exp(i4\pi f) = \\ &= 2a \cos(4\pi f) + 2b \cos(2\pi f) + c. \end{aligned}$$

Будем подбирать параметры так, чтобы получался фильтр низких частот, удовлетворяющий некоторым условиям. Так как мы синтезируем фильтр низких частот, то естественно положить  $H(0) = 1$  и  $H(1/2) = 0$ . Эти условия позволяют исключить два из трех свободных параметров:

$$\begin{aligned} H(0) &= 2a + 2b + c = 1, \\ H(1/2) &= 2a - 2b + c = 0, \end{aligned}$$

откуда  $b = 1/4$ ,  $c = 1/2 - 2a$  и

$$H(f) = 2a \cos(4\pi f) + \frac{1}{2} \cos(2\pi f) + \frac{1}{2} - 2a.$$

Значение оставшегося параметра можно подобрать экспериментально, рассматривая графики функции  $H(f)$  при разных  $a$  и выбирая наиболее удачный. Мы здесь поступим иначе — добавим к уже сформулированным условиям на параметры еще одно независимое условие, однозначно определяющее параметр  $a$ . Выбрать такое условие можно многими способами. Рассмотрим несколько наиболее естественных.

---

<sup>57</sup> moving average (MA)



**Условие симметричности.** Выбор условия

$$H(1/4) = 1/2$$

дает  $a = 0$  и  $c = 1/2$  и приводит к фильтру с импульсной характеристикой

$$\frac{1}{4}(0, 1, 2, 1, 0).$$

Этот фильтр в некотором смысле «самый симметричный» среди фильтров нашего семейства.

**Условие высокого качества на низких частотах.** Выбор условия

$$H(1/4) = 1$$

дает  $a = -1/8$  и  $c = 3/4$  и приводит к фильтру с импульсной характеристикой

$$\frac{1}{8}(-1, 2, 6, 2, -1).$$

Этот фильтр хорошо пропускает частоты из отрезка  $[0, 1/4]$ .

**Условие высокого качества вблизи нуля.** Выбор условия

$$H''(0) = 0$$

дает  $a = -1/16$  и  $c = 5/8$  и приводит к фильтру с импульсной характеристикой

$$\frac{1}{16}(-1, 4, 10, 4, -1).$$

Заметим, что первая производная частотной характеристики в нуле равна нулю вне зависимости от выбора параметра  $a$ . Этот фильтр очень хорошо пропускает частоты, близкие к нулевой частоте.

Графики частотных характеристик всех описанных в этом пункте фильтров показаны на рисунке 21.

## Дифференцирующие фильтры

Рассмотрим две распространенные схемы *дифференцирования временного ряда*:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - x_{k-1}, \\ y_k &= (x_{k+1} - x_{k-1})/2. \end{aligned}$$

Частотные характеристики этих фильтров могут быть легко вычислены:

$$\begin{aligned} H(f) &= 2 \sin(\pi f) i \exp(-i\pi f), \\ H(f) &= i \sin(2\pi f). \end{aligned}$$

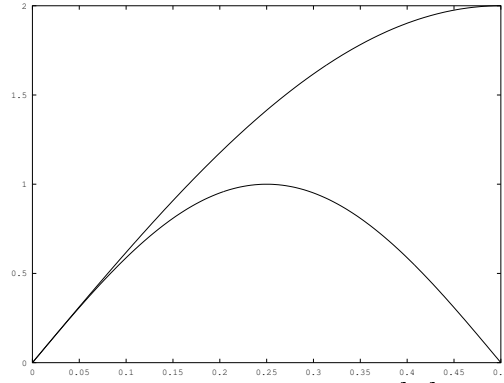


Рис. 22. Частотные характеристики дифференцирующих фильтров

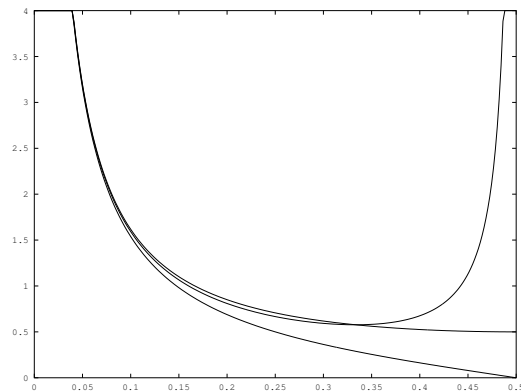


Рис. 23. Частотные характеристики интегрирующих фильтров

Амплитудные характеристики обеих схем показаны на рисунке 22. Из рисунка видно, что вторая схема обладает значительно лучшими спектральными свойствами по сравнению с первой. Действительно, первая схема удваивает амплитуду шума с частотой Найквиста, в то время как вторая схема такой шум (и все высокочастотные шумы) почти полностью подавляет.

## Интегрирующие фильтры

Рассмотрим три разностные схемы *интегрирования временного ряда*:

$$\begin{aligned} y_k &= y_{k-1} + x_k, \\ y_k &= y_{k-1} + (x_k + x_{k-1})/2, \\ y_k &= y_{k-2} + (x_k + 4x_{k-1} + x_{k-2})/3, \end{aligned}$$

в которых легко узнать соответственно формулу прямоугольников, трапеций и Симпсона интегрирования сеточной (дискретизированной) функции.

Легко отыскать частотные характеристики фильтров, заданных приведенными выше формулами. Приведем соответствующие вычисления для пер-

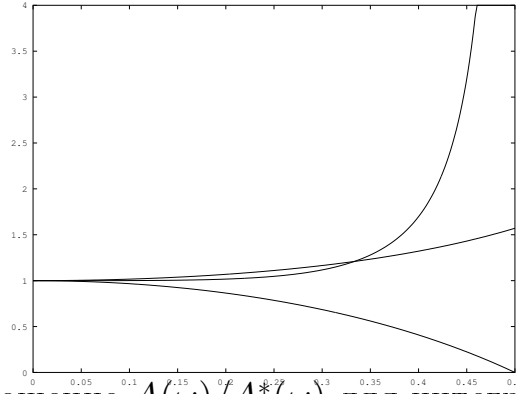


Рис. 24. Отношение  $A(\omega)/A^*(\omega)$  для интегрирующих фильтров

вого из выписанных фильтров. Положим  $x_k = \exp(i2\pi fk)$ . Тогда

$$H(f) \exp(i2\pi fk) = H(f) \exp(i2\pi f(k-1)) + \exp(i2\pi fk)$$

и, следовательно,

$$H(f)(1 - \exp(-i2\pi f)) = 1,$$

откуда

$$H(f) = [1 - \exp(-i2\pi f)]^{-1}.$$

Выпишем результат для амплитудных характеристик:

$$A(f) = |2 \sin(\pi f)|^{-1}$$

$$A(f) = |\cos(\pi f)| \cdot |2 \sin(\pi f)|^{-1}$$

$$A(f) = (2 + \cos(2\pi f)) \cdot |3 \sin(2\pi f)|^{-1}.$$

Графики амплитудных характеристик показаны на рисунке 23.

*Идеальным интегрирующим фильтром* называется фильтр, преобразующий сигнал  $x_k = x(k\tau)$  в сигнал  $y_k = y(k\tau)$ , где

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(s) ds.$$

Легко вычислить амплитудную характеристику идеального интегратора:  $A^*(\omega) = |2\pi f|^{-1}$ .

Вычислим для каждого из рассмотренных интегрирующих фильтров отношение его амплитудной характеристики к характеристике идеального интегратора. Получим соответственно:

$$A(f)/A^*(f) = |\pi f| \cdot |\sin(\pi f)|^{-1},$$

$$A(f)/A^*(f) = |\pi f| \cdot |\sin(\pi f)|^{-1} \cdot |\cos(\pi f)|,$$

$$A(f)/A^*(f) = |2\pi f| \cdot |\sin(2\pi f)|^{-1} \cdot (2 + \cos(2\pi f))/3.$$

На рисунке 24 показаны графики вычисленных отношений. На низких частотах заметно превосходство формулы Симпсона — соответствующий ей график отношения  $A(f)/A^*(f)$  лежит ближе других к единице. Однако при наличии в сигнале высокочастотных шумов (с частотой, близкой к частоте Найквиста) применение формулы Симпсона становится опасным, т. к. шум на частоте Найквиста усиливается соответствующим фильтром в бесконечное число раз! Здесь уже лучшей становится формула трапеций, которая вовсе не пропускает высокочастотный шум.

## Выводы и замечания

Одним из важных свойств используемых нами методов обработки данных является их устойчивость (или неустойчивость) по отношению к малым изменениям параметров. Естественно ожидать, что малое шевеление решаемой задачи должно приводить к малому изменению ответа. Решение, полученное в ситуации отсутствия устойчивости, вероятно, лишено физического смысла. В то же время для большинства методов достаточно полное исследование их свойств отсутствует. Более того, методы, устойчивые в одной ситуации, могут оказаться неустойчивыми в другой. Свойства используемого метода обработки по отношению к шуму во входных данных являются мощнейшей из доступных характеристик устойчивости. Любая широко используемая численная формула должна быть исследована с точки зрения ее отношения к наличию шума. Такой подход дает новый взгляд на численные методы, поскольку большинство популярных формул высокого порядка оказываются неудовлетворительными в спектральной области. Кроме того, спектральные свойства применяемых методов часто позволяют глубже понять их природу.

Здесь мы процитируем отрывок из книги [Хемминг, 1972], чтобы обратить внимание читателя на некоторые опасные подводные камни, характерные для простых преобразований исходных данных:

«Из сказанного выше вытекает, что какую-нибудь линейную комбинацию равноотстоящих узлов можно рассматривать как некоторую «фильтрацию» функции. В прошлом, пока соответствующая теория не была достаточно ясна, нередко случалось, что некоторые невинно выглядевшие преобразования, выполненные на ранней стадии вычислений, существенно влияли на полученный результат, который затем интерпретировался как физический эффект, а не как эффект обработки данных.

В качестве примера представим себе белый шум (в котором, как и в белом свете, присутствуют все частоты с одинаковой амплитудой, но случайной фазой) и при обработке его удалим почти все частоты, кроме небольшого интервала; тогда последую-

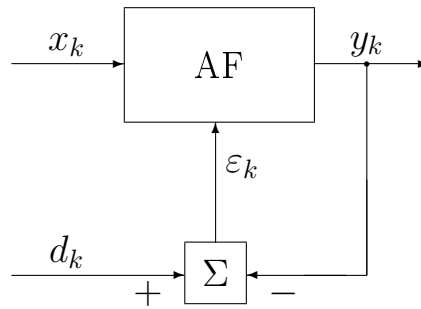


Рис. 25. Адаптивный фильтр

щий анализ показал бы наличие преобладающей частоты, и одна и та же частота появлялась бы независимо от источника белого шума, будь то рыночные цены или количество пятен на Солнце.»

## 10.7 Адаптивные фильтры

До этого момента мы всегда рассматривали статические фильтры, структура которых выбирается на этапе синтеза и остается неизменной в процессе функционирования. В последнее время распространение получили адаптивные схемы фильтрации, в которых структура фильтра динамически изменяется во время его работы. В простейшем случае адаптивный фильтр<sup>58</sup> состоит из обычного КИХ-фильтра и алгоритма адаптации, динамически изменяющего коэффициенты фильтра. Вообще говоря, такой фильтр не является линейной системой, поскольку коэффициенты КИХ-фильтра зависят от входного сигнала. Здесь мы опишем простейшую и наиболее употребляемую схему адаптивной фильтрации, принадлежащую Видроу и Хоффу<sup>59</sup>.

На рисунке 25 показана общая структурная схема адаптивного фильтра. Блок, обозначенный буквами AF (adaptive filter), представляет собой собственно адаптивный фильтр. На вход адаптивного фильтра подается входной сигнал  $x_k$  и сигнал ошибки  $\varepsilon_k$ . Выходной сигнал  $y_k$  образуется в соответствии с формулой

$$y_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j^k x_{k-j},$$

где  $n$  — порядок фильтра, а  $a_j^k$  — его коэффициенты на  $k$ -м шаге. Считается, что отсчеты входного сигнала  $x_k$  подаются на вход адаптивного фильтра по одному в реальном масштабе времени. На каждом шаге алгоритм адаптации производит изменение коэффициентов фильтра таким образом, чтобы

<sup>58</sup>adaptive filter

<sup>59</sup>Widrow B., Winter R. Neural Nets for Adaptive Filtering and Adaptive Pattern Recognition //Computer. 1988. N 3.

по возможности минимизировать средний квадрат сигнала ошибки  $\varepsilon_k$ :

$$E = \langle \varepsilon_k^2 \rangle \rightarrow \min.$$

Сигнал ошибки получается как разность выходного сигнала фильтра и целевого сигнала  $d_k$ :

$$\varepsilon_k = d_k - y_k.$$

По сути, алгоритм адаптации изменяет структуру фильтра таким образом, чтобы выходной сигнал как можно меньше отличался от целевого сигнала:

$$E = \langle (d_k - y_k)^2 \rangle \rightarrow \min.$$

### Алгоритм адаптации

Опишем алгоритм адаптации, предложенный Видроу и Хоффом и называемый также дельта-правилом Видроу–Хоффа<sup>60</sup>. Рассмотрим вектор  $A_k \in R^n$  коэффициентов фильтра на  $k$ -м шаге<sup>61</sup>:

$$A_k = [a_0, \dots, a_{n-1}]^T.$$

На каждом шаге вектор коэффициентов изменяется на величину  $\Delta A_k \in R^n$ :

$$A_{k+1} = A_k + \Delta A_k.$$

Рассмотрим также входной вектор  $X_k$ , состоящий из тех отсчетов входного сигнала, которые используются для вычисления  $k$ -го отсчета выходного сигнала  $y_k$ :

$$X_k = [x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-(n-1)}]^T.$$

Во введенных обозначениях формула для  $k$ -го отсчета выходного сигнала  $y_k$  может быть переписана в следующем виде:

$$y_k = X_k^T A_k.$$

Соответственно сигнал ошибки  $\varepsilon_k$  может быть вычислен по формуле:

$$\varepsilon_k = d_k - X_k^T A_k.$$

Изменение  $k$ -го отсчета сигнала ошибки  $\varepsilon_k$  может быть легко вычислено:

$$\Delta \varepsilon_k = \Delta(d_k - X_k^T A_k) = -X_k^T \Delta A_k.$$

---

<sup>60</sup>Widrow-Hoff delta rule

<sup>61</sup>Здесь символ  $T$  в качестве верхнего индекса обозначает операцию транспонирования матрицы.

Алгоритм адаптации Витроу–Хоффа заключается в изменении коэффициентов фильтра в соответствии со следующей формулой:

$$\Delta A_k = \alpha \varepsilon_k \frac{X_k}{|X_k|}.$$

Покажем, что при использовании такой схемы адаптации действительно происходит уменьшение ошибки:

$$\Delta \varepsilon_k = \varepsilon'_k - \varepsilon_k = -\alpha \varepsilon_k \frac{X_k^T X_k}{|X_k|} = -\alpha \varepsilon_k.$$

Из этого равенства следует, что

$$\varepsilon'_k = (1 - \alpha) \varepsilon_k.$$

Таким образом, если выполнено условие

$$0 < \alpha < 1,$$

то на каждом шаге адаптации происходит уменьшение ошибки. Выбор величины  $\alpha$  определяет скорость процесса адаптации.

## Примеры применения

Рассмотрим некоторые примеры применения адаптивного фильтра для решения практических задач обработки сигналов.

**Выделение сигнала из шума.** Пусть полезный сигнал  $s_k$  наблюдается на фоне мощного аддитивного шума  $n_k$ :

$$s'_k = s_k + n_k.$$

Пусть наблюдаемый зашумленный сигнал  $s'_k$  подается на целевой вход  $d_k$  адаптивного фильтра. Пусть также наблюдается шумовой сигнал  $n_k$ , но результатом наблюдения является сигнал  $n'_k$ , скоррелированный с зашумляющим сигналом  $n_k$ . Сигнал  $n'_k$  подадим на вход  $x_k$  адаптивного фильтра. Схема фильтра показана на рисунке 26. Фильтр получает на вход шум  $n'_k$ , фильтрует его и вычитает результат фильтрации из зашумленного сигнала  $s_k + n_k$ . Выходом системы является сигнал ошибки  $\varepsilon_k$  адаптивного фильтра. В процессе адаптации фильтр начинает оценивать шум  $n_k$  по входному шуму  $n'_k$ . Эта особенность описанной схемы фильтрации позволяет успешно использовать ее для выделения слабых сигналов из мощных шумов.

Проанализируем работу описанного адаптивного фильтра. Предположим, что сигналы  $s_k$ ,  $n_k$  и  $n'_k$  стационарны и центрированы. Предположим также,

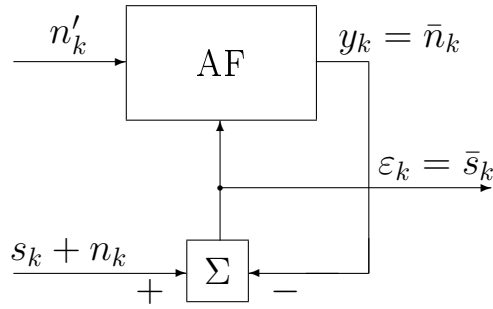


Рис. 26. Адаптивная система подавления шума

что сигнал  $s_k$  не коррелирует с шумами  $n_k$  и  $n'_k$ . По условию шум  $n'_k$  скоррелирован с шумом  $n_k$ . Рассмотрим выход системы:

$$\varepsilon_k = s_k + n_k - y_k. \quad (*)$$

Вычислим среднее значение квадрата обеих частей этого равенства:

$$\langle \varepsilon_k^2 \rangle = \langle s_k^2 \rangle + \langle (n_k - y_k)^2 \rangle + 2 \langle s_k(n_k - y_k) \rangle.$$

Поскольку сигнал  $s_k$  не коррелирован с шумом  $n_k$  (по условию) и выходом адаптивного фильтра  $y_k$  (как результатом фильтрации  $n_k$ ), то последнее равенство принимает вид:

$$\langle \varepsilon_k^2 \rangle = \langle s_k^2 \rangle + \langle (n_k - y_k)^2 \rangle.$$

Адаптивный фильтр минимизирует среднеквадратичное значение ошибки  $\varepsilon_k$ , причем среднеквадратичное значение  $\langle s_k^2 \rangle$  сигнала остается постоянным, поэтому фактически происходит минимизация величины:

$$\langle (n_k - y_k)^2 \rangle \rightarrow \min.$$

Следовательно, в процессе адаптации происходит подстройка коэффициентов фильтра таким образом, что его выход  $y_k$  оказывается оптимальной оценкой шума  $n_k$ :

$$y_k = \bar{n}_k.$$

Из равенства (\*) следует, что при минимизации величины  $\langle (n_k - y_k)^2 \rangle$  одновременно происходит минимизация величины  $\langle (\varepsilon_k - s_k)^2 \rangle$ , так что сигнал ошибки  $\varepsilon_k$  адаптивного фильтра оказывается оптимальной оценкой полезного сигнала  $s_k$ :

$$\varepsilon_k = \bar{s}_k.$$

**Моделирование системы.** Пусть имеется линейная система  $F$  неизвестной структуры, преобразующая входной сигнал  $s_k$  в выходной сигнал  $s'_k$ . Один



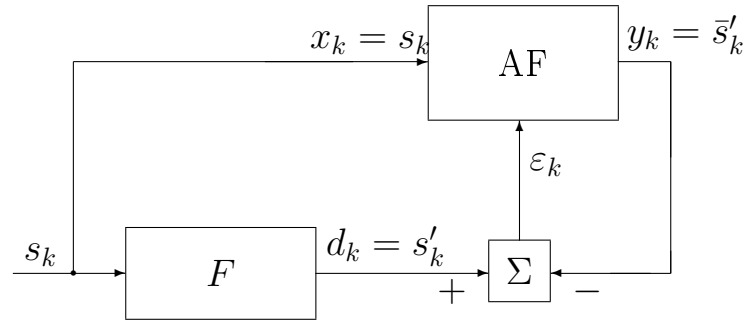


Рис. 27. Адаптивная прямая модель

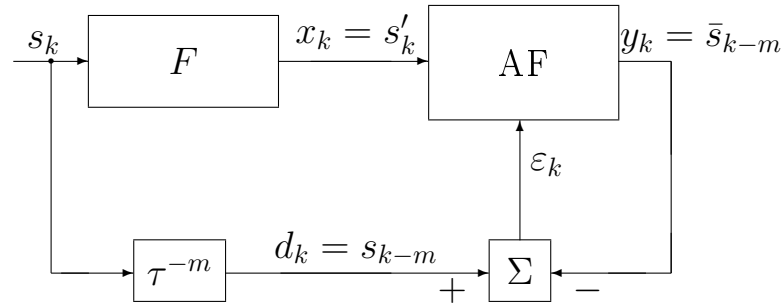


Рис. 28. Адаптивная обратная модель

из способов изучения неизвестной системы состоит в построении ее модели, т. е. системы с известной структурой, выполняющей тоже преобразование входного сигнала.

При *прямом моделировании* на вход  $x_k$  адаптивного фильтра подается входной сигнал  $s_k$  системы  $F$ , а ее выход (сигнал  $s'_k$ ) рассматривается как целевой вход  $d_k$  адаптивного фильтра. Соответствующая схема адаптивного фильтра показана на рисунке 27. Минимизируемая ошибка  $\varepsilon_k$  есть отклонение реакции адаптивного фильтра от реакции системы  $F$  на общий входной сигнал. В результате адаптации коэффициентов строится модель системы  $F$  — система заданного порядка, оптимально приближающая поведение системы  $F$ . При этом выход  $y_k$  адаптивного фильтра оказывается оптимальной оценкой отклика системы  $F$  на входной сигнал:  $y_k = \bar{s}'_k$ . Если порядок моделирующей системы выбран верно, то после обучения она будет в ответ на произвольный входной сигнал выдавать тот же отклик, что и моделируемая система. В этом случае полученные после адаптации коэффициенты адаптивного фильтра представляют собой не что иное, как импульсную характеристику моделируемой системы.

Возможен другой подход к решению задачи моделирования — так называемое *обратное моделирование*<sup>62</sup>. При обратном моделировании на вход  $x_k$

<sup>62</sup>inverse modeling

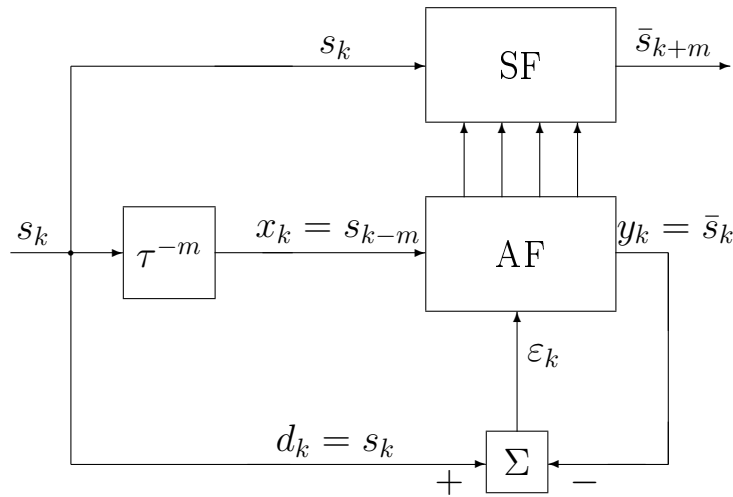


Рис. 29. Адаптивный предиктор

адаптивного фильтра подается выходной сигнал  $s'_k$  системы  $F$ , а на целевой вход  $d_k$  подается ее входной сигнал  $s_k$ , задержанный на  $m$  отсчетов. Соответствующая схема адаптивного фильтра показана на рисунке 28. На этом рисунке блок, обозначенный символом  $\tau^{-m}$ , осуществляет задержку входного сигнала на  $m$  отсчетов, т. е. выходным сигналом этого блока является сигнал  $s_{k-m}$ . Фактически при обратном моделировании строится система, обратная к исследуемой.

Рассмотрим функционирование схемы обратного моделирования. Сначала положим для простоты  $m = 0$ . В этом случае среднеквадратичная ошибка  $\langle \varepsilon_k^2 \rangle$  будет малой, если система  $F$  и адаптивный фильтр, включенные последовательно и рассматриваемые как единый фильтр, будут осуществлять тождественное преобразование входного сигнала. При этом алгоритм адаптации построит фильтр с частотной характеристикой, обратной по отношению к частотной характеристике системы  $F$ . Выбор ненулевой величины задержки  $m$  позволяет естественным образом учесть возможный фазовый сдвиг сигнала, осуществляемый исследуемой системой.

**Статистическая предикция.** Под статистической предикцией понимается предсказание будущих значений временного ряда на основе данных о его поведении в предшествующие моменты времени. Возможность статистической предикции основана на наличии корреляционной связи между соседними отсчетами временного ряда.

Рассмотрим схему, реализующую оптимальную статистическую предикцию на базе адаптивного фильтра. На вход  $x_k$  адаптивного фильтра подается исходный сигнал  $s_k$ , задержанный на  $m$  отсчетов (т. е. сигнал  $s_{k-m}$ ), а на целевой вход  $d_k$  подается текущий отсчет  $s_k$  входного сигнала. Соответствующая схема адаптивного фильтра показана на рисунке 29. В резуль-

тате адаптации коэффициенты фильтра настраиваются таким образом, что адаптивный фильтр осуществляет оптимальное оценивание текущего отсчета входного сигнала по значениям его  $n$  отсчетов (где  $n$  — порядок адаптивного фильтра), отстоящих от текущего момента времени на  $m$  единиц. Полученные коэффициенты импортируются во вспомогательный фильтр SF (slave filter). Этот фильтр получает на вход текущий отсчет  $s_k$  входного сигнала без задержки и формирует оптимальную предикцию отсчета  $s_{k+m}$ .

## 11 Двумерные спектральные методы

В этом разделе будут кратко описаны некоторые спектральные методы обработки изображений исключительно с целью демонстрации эффективности спектрального подхода в задачах обработки изображений. В отличие от других разделов, здесь мы излагаем теоретический материал конспективно, полагаясь на опыт работы со спектрами, который читатель уже приобрел. Основное внимание уделено ключевым идеям и отличиям от одномерного случая.

Обычно под сигналом понимается результат наблюдения за изменением некоторой величины с течением времени. В этом случае аналоговый сигнал является функцией одной вещественной переменной, а дискретный сигнал — последовательностью чисел, занумерованных с помощью одного индекса. Важным свойством такого сигнала является т. н. линейная корреляционная структура образующей его последовательности чисел. Соседние отсчеты сигнала всегда оказываются зависимыми, поскольку значение сигнала не может сильно измениться за время, равное интервалу дискретизации.

Важным на практике оказывается случай двумерной корреляционной структуры, которой обладает, например, плоское дискретное изображение в градациях серого<sup>63</sup>. Здесь соседние (на плоскости) отсчеты (пиксели) изображения зависимы, поскольку яркость картинки обычно изменяется относительно медленно от пиксела к пикселу. Двумерные спектральные методы позволяют использовать при обработке изображений основную идею спектрального представления — информация о внутренней корреляционной структуре данных «упаковывается» в используемый базис.

### 11.1 Двумерные ряды Фурье

Функция двух вещественных переменных  $x(t_1, t_2)$  называется  $(T_1, T_2)$ -периодической, если для любых целых чисел  $k_1$  и  $k_2$  равенство

$$x(t_1 + k_1 T_1, t_2 + k_2 T_2) = x(t_1, t_2)$$

---

<sup>63</sup> grayscale image

выполняется тождественно по переменным  $t_1$  и  $t_2$ .

Пусть задана  $(T_1, T_2)$ -периодическая функция  $x(t_1, t_2)$ . Зафиксируем  $t_2$  и рассмотрим функцию  $x_{t_2}(t_1) = x(t_1, t_2)$ . Функция  $x_{t_2}(t_1)$  является  $T_1$ -периодической и может быть разложена при каждом значении  $t_2$  в ряд Фурье:

$$x_{t_2}(t_1) = x(t_1, t_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} C_{n_1}(t_2) \exp(i2\pi n_1 f_1^0 t_1),$$

где  $f_1^0 = 1/T_1$ .

При каждом  $t_2$  значение коэффициента  $C_{n_1}(t_2)$  может быть вычислено по формуле:

$$C_{n_1}(t_2) = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} x(s_1, t_2) \exp(-i2\pi n_1 f_1^0 s_1) ds_1.$$

Из последней формулы сразу следует  $T_2$ -периодичность коэффициента  $C_{n_1}(t_2)$  как функции переменной  $t_2$  и возможность следующего разложения:

$$C_{n_1}(t_2) = \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} C_{n_1 n_2} \exp(i2\pi n_2 f_2^0 t_2),$$

где  $f_2^0 = 1/T_2$  и коэффициенты  $C_{n_1 n_2}$  могут быть вычислены по формуле

$$C_{n_1 n_2} = \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} C_{n_1}(s_2) \exp(-i2\pi n_2 f_2^0 s_2) ds_2.$$

Выпишем теперь полностью полученное разложение функции  $x(t_1, t_2)$ :

$$x(t_1, t_2) = \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} C_{n_1 n_2} \exp[i2\pi(n_1 f_1^0 t_1 + n_2 f_2^0 t_2)].$$

Формула для коэффициентов  $C_{n_1 n_2}$  также может быть выписана явно:

$$C_{n_1 n_2} = \frac{1}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} x(s_1, s_2) \exp[-i2\pi(n_1 f_1^0 s_1 + n_2 f_2^0 s_2)] ds_1 ds_2.$$

Прием, примененный нами при выводе формул двумерного ряда Фурье, носит название *переразложения коэффициентов* и широко применяется в прикладной математике для распространения одномерных методов на двумерные данные. Фактически при разложении функции двух переменных в двумерный ряд Фурье происходит разложение по базису вида

$$e_{n_1, n_2}(t_1, t_2) = \exp[i2\pi(n_1 f_1^0 s_1 + n_2 f_2^0 s_2)] = \exp(i2\pi n_1 f_1^0 s_1) \exp(i2\pi n_2 f_2^0 s_2).$$

Функция этого базиса с индексом  $(n_1, n_2)$  получена перемножением функций с индексами  $n_1$  и  $n_2$  из обычного базиса Фурье. Двумерный базис, образованный таким способом из одномерных базисов, называется *тензорным произведением базисов*. Аналогично можно получить базис произвольной размерности.

## 11.2 Двумерное ДПФ и БПФ

Двумерную дискретную функцию  $x[k_1, k_2]$  ( $0 \leq k_1 \leq N_1 - 1$ ,  $0 \leq k_2 \leq N_2 - 1$ ) можно считать результатом дискретизации двумерной  $(T_1, T_2)$ -периодической функции  $x(t_1, t_2)$ :

$$x[k_1, k_2] = x(k_1\tau_1, k_2\tau_2),$$

где  $\tau_1 = T_1/N_1$  и  $\tau_2 = T_2/N_2$  — интервалы дискретизации по первому и второму аргументу соответственно. Совершенно аналогично рассмотренному выше одномерному случаю может быть построена теория дискретизации для функций двух переменных. Мы не будем здесь подробно заниматься этими вопросами.

Как и в одномерном случае, путем формальной дискретизации формулы для коэффициентов Фурье могут быть получены формулы двумерного дискретного преобразования Фурье:

$$X[n_1, n_2] = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} x[k_1, k_2] W_{N_1}^{-n_1 k_1} W_{N_2}^{-n_2 k_2},$$

$$x[k_1, k_2] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} X[n_1, n_2] W_{N_1}^{n_1 k_1} W_{N_2}^{n_2 k_2}.$$

Совокупность чисел  $X[n_1, n_2]$  называется *двумерным дискретным спектром* функции  $x[k_1, k_2]$ .

Формулу для двумерного дискретного преобразования Фурье можно переписать следующим образом:

$$X[n_1, n_2] = \frac{1}{N_1} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \left( \frac{1}{N_2} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} x[k_1, k_2] W_{N_2}^{-n_2 k_2} \right) W_{N_1}^{-n_1 k_1}.$$

Полученное выражение позволяет сформулировать следующий быстрый алгоритм вычисления двумерного ДПФ с помощью одномерного БПФ, называемый *двумерным БПФ*. Пусть функция  $x[k_1, k_2]$  задана в виде матрицы из  $N_1$  строк и  $N_2$  столбцов и первый индекс означает номер строки. Для каждой

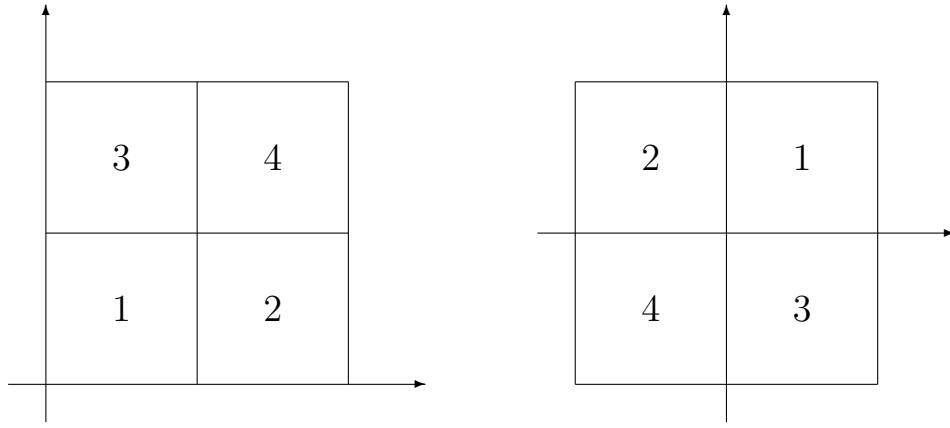


Рис. 30. Порядок отсчетов двумерного спектра

строки матрицы  $x[k_1, k_2]$  вычислим БПФ и результат поместим в соответствующую строку матрицы  $f[k_1, n_2]$ . После этого для каждого столбца матрицы  $f[k_1, n_2]$  также вычислим БПФ и результат этой операции даст нам соответствующий столбец искомой матрицы  $X[n_1, n_2]$ . Совершенно аналогично может быть получен быстрый алгоритм вычисления обратного двумерного ДПФ, называемый *двумерным обратным БПФ*. Трудоемкость двумерного БПФ при  $N_1 = N_2 = N$  составляет  $O(N^2 \log N)$  умножений.

Порядок отсчетов двумерного спектра  $X[n_1, n_2]$  определяется его периодичностью по каждому аргументу:

$$\begin{aligned} X[N_1 - n_1, n_2] &= X[-n_1, n_2], \\ X[n_1, N_2 - n_2] &= X[n_1, -n_2] \end{aligned}$$

и может быть проиллюстрирован рисунком 30. Легко заметить, что описанный порядок отсчетов получается путем независимого применения к строкам и столбцам матрицы правила переупорядочивания отсчетов одномерного спектра. Учитывать правило переупорядочивания отсчетов двумерного спектра на практике оказывается обременительно, поэтому в двумерных спектральных алгоритмах чаще всего применяют метод сдвига нуля. Если изображение  $x[k_1, k_2]$  имеет спектр  $X[n_1, n_2]$ , то изображению

$$x'[k_1, k_2] = (-1)^{k_1+k_2} x[k_1, k_2]$$

соответствует спектр

$$X'[n_1, n_2] = X[n_1 - N_1/2, n_2 - N_2/2].$$

В матрице  $X'[n_1, n_2]$  нулевой частоте соответствует отсчет  $X'[N_1/2, N_2/2]$ , частоте Найквиста — отсчет  $X'[0, 0]$  и спектральные отсчеты расположены в естественном порядке.

|   |   |
|---|---|
| — | + |
| + | — |

Рис. 31. Двумерная гармоника

### 11.3 Идеология двумерных спектральных методов

В двумерном случае важно естественным образом ввести понятие, эквивалентное частоте одномерной гармоник. Рассмотрим вектор  $t = (t_1, t_2)^T \in R^2$ , вектор с целочисленными координатами  $n = (n_1, n_2)^T \in Z^2$  и вектор  $f_n = (n_1 f_1^0, n_2 f_2^0)^T \in R^2$ . В новых обозначениях спектральное разложение двумерной функции принимает вид:

$$x(t) = \sum_{n \in Z^2} C_n \exp(i2\pi f_n^T t),$$

где

$$C_n = \frac{1}{T_1 T_2} \int_V x(t) \exp(-i2\pi f_n^T t) dt,$$

где  $V = [0, T_1] \times [0, T_2]$ . Вектор  $f_n = (n_1 f_1^0, n_2 f_2^0)^T \in R^2$  называется *волновым вектором*, или *вектором пространственных частот* двумерной гармоник

$$g_n(t) = \exp(i2\pi f_n^T t).$$

Рассмотрим координатный вектор  $t(s) \in R^2$ , зависящий от параметра  $s \in R$  по закону  $t(s) = s t^0$ , где  $t^0 \in R^2$  и  $|t^0| = 1$ . Скалярное произведение  $f_n^T t$  может быть записано в виде  $\gamma \cdot |f_n| \cdot |t|$ , где  $\gamma$  — косинус угла между векторами  $t$  и  $f_n$ . В случае описанной выше зависимости вектора  $t(s)$  от параметра  $s$  величина  $\gamma$  остается постоянной при изменении  $s$ , а  $|t(s)|$  изменяется по закону  $|t(s)| = |t^0| \cdot |s| = |s|$ . Тогда  $f_n^T t = \gamma \cdot |f_n| \cdot |t(s)| = \gamma \cdot |f_n| \cdot |s|$ , откуда получаем:

$$g_n(t(s)) = \exp(i2\pi \gamma |f_n| \cdot |s|).$$

Таким образом, одномерное сечение двумерной гармоник представляет собой гармонику с частотой  $\gamma |f_n|$ . Частота полученной гармоник зависит от выбранного направления, вдоль которого производится сечение, и величины модуля волнового вектора  $f_n$ . Модуль волнового вектора  $f_n$  гармоник  $g_n(t) = \exp(i2\pi f_n^T t)$  называется ее *волновым числом*.

Гармоника  $g_n(t) = \exp(i2\pi f_n^T t)$  может быть представлена в виде произведения гармоник  $\exp(i2\pi n_1 f_1^0 t_1)$  и  $\exp(i2\pi n_2 f_2^0 t_2)$  и является  $T_1$ -периодической

функцией координаты  $t_1$  (при  $T_1 = 1/f_1^0$ ) и  $T_2$ -периодической функцией координаты  $t_2$  (при  $T_2 = 1/f_2^0$ ). Прямоугольник  $[0, T_1] \times [0, T_2]$  называется *волновой ячейкой*. Структура двумерной гармоник на волновой ячейке вполне выясняется рисунком 31, на котором показан знак вещественной части гармоник в квадрантах волновой ячейки. Спектральное разложение двумерной функции есть представление ее в виде линейной комбинации двумерных гармоник со всевозможными волновыми векторами. При таком представлении информация о двумерной структуре функции оказывается упакованной в базис, а коэффициенты разложения уже лишены двумерной корреляционной структуры.

**Задача 11.1.** Реализовать вычисление спектра изображения и его вывод в виде изображения в градациях серого. Для простых геометрических структур (точка, прямые под различными углами, сетка из равноотстоящих параллельных прямых под различными углами к горизонтали) построить спектр и объяснить его структуру.

## 11.4 Двумерные фильтры

Пусть двумерная дискретная функция  $x[k_1, k_2]$  (изображение) представлена своим двумерным дискретным спектром  $X[n_1, n_2]$ . Отсчет  $X[n_1, n_2]$  спектра соответствует гармонике с волновым вектором  $f_n = (n_1 f_1^0, n_2 f_2^0)^T$ , где  $n = (n_1, n_2)^T$ ,  $f_1^0 = 1/N_1$  и  $f_2^0 = 1/N_2$ . По заданной функции  $H(f) = H(f_1, f_2)$ , где  $f \in R^2$  образует дискретную функцию

$$H[n_1, n_2] = H(n_1 f_1^0, n_2 f_2^0) = H(f_n).$$

Дискретный спектр  $Y[n_1, n_2]$  образуем по правилу

$$Y[n_1, n_2] = H(f_n)X[n_1, n_2] = H[n_1, n_2]X[n_1, n_2].$$

Спектру  $Y[n_1, n_2]$  соответствует функция  $y[k_1, k_2]$ , которая получается из него путем применения обратного двумерного ДПФ. В этом случае будем говорить о *двумерной фильтрации* функции (изображения)  $x[k_1, k_2]$  фильтром с частотной характеристикой  $H(f)$ .

В двумерном случае уже задание частотной характеристики составляет определенную трудность, поскольку у человека отсутствует физическая интуиция, связанная с понятием волнового вектора. Обычно используют осесимметричные частотные характеристики вида

$$H(f) = H(|f|),$$

придавая волновому числу  $|f|$  смысл средней скорости изменения яркости изображения при изменении координат. В двумерном случае большое значе-



ние приобретает простое описание визуального эффекта, к которому приводит обработка изображения фильтром. В случае фильтров низкой частоты обычно говорят о сглаживании изображения и устранении мелких деталей, а в случае фильтров высокой частоты — о выявлении контуров и увеличении контрастности.

Двумерные фильтры обычно реализуют в спектральной области с помощью процедуры сдвига нуля. Пусть

$$x'[k_1, k_2] = (-1)^{k_1+k_2} x[k_1, k_2]$$

и

$$X'[n_1, n_2] = X[n_1 - N_1/2, n_2 - N_2/2].$$

Тогда

$$\begin{aligned} Y'[n_1, n_2] &= Y[n_1 - N_1/2, n_2 - N_2/2] = \\ &= H[n_1 - N_1/2, n_2 - N_2/2] X[n_1 - N_1/2, n_2 - N_2/2] = \\ &= H[n_1 - N_1/2, n_2 - N_2/2] X'[n_1, n_2]. \end{aligned}$$

Таким образом, полагая

$$\hat{H}[n_1, n_2] = H[n_1 - N_1/2, n_2 - N_2/2],$$

имеем

$$Y'[n_1, n_2] = \hat{H}[n_1, n_2] X'[n_1, n_2]$$

и

$$y[k_1, k_2] = (-1)^{k_1+k_2} y'[k_1, k_2].$$

Как и в случае одномерного сигнала, для преобразования, осуществляемого двумерным фильтром, может быть записана формула, действующая непосредственно на функцию  $x[k_1, k_2]$  во временной области:

$$y[k_1, k_2] = \sum_{j_1} \sum_{j_2} h[j_1, j_2] x[k_1 - j_1, k_2 - j_2],$$

где матрица  $h[j_1, j_2]$  называется *двумерной импульсной характеристикой*. Импульсную характеристику двумерного фильтра называют также *функцией рассеяния точки*, поскольку для входного изображения, состоящего из одной светлой точки на темном фоне результат фильтрации окажется пропорционален импульсной характеристике.

Формально подставив вместо  $x[k_1, k_2]$  функцию  $\exp[i2\pi(f_1 k_1 + f_2 k_2)]$ , получим:

$$y[k_1, k_2] = \exp[i2\pi(f_1 k_1 + f_2 k_2)] \sum_{j_1} \sum_{j_2} h[j_1, j_2] \exp[-i2\pi(f_1 j_1 + f_2 j_2)].$$

Функция

$$H(f_1, f_2) = \sum_{j_1} \sum_{j_2} h[j_1, j_2] \exp[-i2\pi(f_1 j_1 + f_2 j_2)]$$

представляет собой частотную характеристику фильтра.

Синтез нетривиальных двумерных фильтров является сложной задачей, поэтому обычно во временной области работают только с простыми фильтрами малого порядка. Чаще всего используют симметричный сглаживающий фильтр с импульсной характеристикой вида

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Легко убедиться, что такой сглаживающий фильтр относится к классу фильтров низких частот.

**Задача 11.2.** Реализовать схему фильтрации изображения в спектральной области. Реализовать ФНЧ, ФВЧ и полосовой фильтры, прокомментировать результаты работы на примере простых геометрических структур.

## 11.5 Покоординатные фильтры

Рассмотрим два одномерных фильтра с импульсными характеристиками  $h_k$  и  $g_k$  и частотными характеристиками  $H(f)$  и  $G(f)$  соответственно. Преобразуем изображение  $x[k_1, k_2]$ , обработав фильтром  $h_k$  строки матрицы  $x[k_1, k_2]$  и затем обработав фильтром  $g_k$  столбцы полученной матрицы. В результате мы получим изображение  $y[k_1, k_2]$ :

$$y[k_1, k_2] = \sum_{j_1} g_{j_1} \sum_{j_2} h_{j_2} x[k_1 - j_1, k_2 - j_2] = \sum_{j_1} \sum_{j_2} g_{j_1} h_{j_2} x[k_1 - j_1, k_2 - j_2].$$

Результирующий двумерный фильтр имеет импульсную характеристику

$$h[j_1, j_2] = g_{j_1} h_{j_2}.$$

Легко получить выражение для частотной характеристики построенного двумерного фильтра:

$$\begin{aligned} H(f_1, f_2) &= \sum_{j_1} \sum_{j_2} g_{j_1} h_{j_2} \exp[-i2\pi(f_1 j_1 + f_2 j_2)] = \\ &= \sum_{j_1} g_{j_1} \exp(-i2\pi f_1 j_1) \sum_{j_2} h_{j_2} \exp(-i2\pi f_2 j_2) = G(f_1)H(f_2). \end{aligned}$$

Таким образом, для рассмотренной схемы покоординатной фильтрации имеет место *факторизация частотной характеристики* — частотная характеристика оказывается представленной в виде произведения частотных характеристик одномерных фильтров.

Схема покоординатной фильтрации позволяет строить двумерные фильтры с помощью методов, разработанных для одномерных фильтров. Например, двумерный ФНЧ можно реализовать посредством покоординатной обработки изображения одномерным ФНЧ. В то же время формула для частотной характеристики покоординатного фильтра показывает, что двумерный фильтр может работать как фильтр низких частот по одной координате и фильтр высоких частот по другой координате. К сожалению, отсутствуют простые способы описания визуальных эффектов, к которым приводит обработка изображения таким фильтром.

**Задача 11.3.** Реализовать схему покординатной фильтрации изображения. Реализовать ФНЧ, ФВЧ и полосовой фильтр, используя соответствующие классические фильтры, прокомментировать результаты работы на примере простых геометрических структур.

## 11.6 Передискретизация изображений

В разделе 10.3 мы уже рассматривали задачу передискретизации одномерного сигнала. Напомним, что передискретизацией называется процедура изменения интервала дискретизации. В случае изображений передискретизация, приводящая к уменьшению интервала дискретизации, означает повышение пространственного разрешения<sup>64</sup>. Интуитивно ясно, что увеличение разрешения связано со значительным увеличением количества информации, содержащейся в изображении. При этом на нем появляются новые более мелкие детали, а для крупных деталей улучшается проработка. На первый взгляд кажется, что принципиально невозможно увеличить разрешение изображения, не имея дополнительной информации. Спектральная передискретизация исходит из предположения о том, что воображаемое идеальное изображение с большим разрешением не содержит спектральных составляющих в правой (высокочастотной) части спектра по каждой координате. Таким образом, при увеличении разрешения с помощью спектральной передискретизации на изображении не могут появиться новые более мелкие детали, но проработка присутствующих на изображении деталей существенно улучшается.

Рассмотрим задачу увеличения разрешения изображения. Пусть исходное изображение  $x[k_1, k_2]$  размером  $N_1 \times N_2$  имеет дискретный спектр  $X[n_1, n_2]$ ,

---

<sup>64</sup>resolution

а изображению  $x'[k_1, k_2]$  размером  $N'_1 \times N'_2$ , полученному после передискретизации, соответствует спектр  $X'[n_1, n_2]$ . Будем считать, что  $N'_1 = M_1 N_1$  и  $N'_2 = M_2 N_2$ . Спектр  $X'[n_1, n_2]$  получается из спектра  $X[n_1, n_2]$  путем дополнения его нулями. Если  $N_1 = 2^{r_1}$  и  $N_2 = 2^{r_2}$ , то для вычисления спектра  $X[n_1, n_2]$  может быть использована процедура БПФ. Если также  $M_1 = 2^{p_1}$  и  $M_2 = 2^{p_2}$ , то БПФ можно использовать и для восстановления изображения  $x'[k_1, k_2]$ .

При спектральной передискретизации изображений удобно использовать процедуру сдвига нуля. После выполнения процедуры сдвига нуля нулевой частоте соответствует отсчет  $(N_1/2, N_2/2)$  спектра  $\hat{X}[n_1, n_2]$ . Дополнение нулями следует выполнять таким образом, чтобы отсчет, соответствующий нулевой частоте, оказался в спектре  $\hat{X}'[n_1, n_2]$  в позиции  $(N'_1/2, N'_2/2)$ :

$$\hat{X}'[d_1 + n_1, d_2 + n_2] = \hat{X}[n_1, n_2],$$

где  $1 \leq n_1 \leq N_1 - 1$ ,  $1 \leq n_2 \leq N_2 - 1$  и

$$\begin{aligned} d_1 &= (N'_1 - N_1)/2, \\ d_2 &= (N'_2 - N_2)/2. \end{aligned}$$

Следует также помнить, что непарные отсчеты спектра при  $n_1 = 0$  и  $n_2 = 0$  перестают быть непарными в спектре  $\hat{X}'[n_1, n_2]$ . Мощность этих спектральных составляющих должна быть распределена между соответствующими отсчетами спектра  $\hat{X}'[n_1, n_2]$ :

$$\begin{aligned} \hat{X}'[d_1, d_2 + n_2] &= \hat{X}'[d_1 + N_1, d_2 + n_2] = \hat{X}[0, n_2]/2, \\ \hat{X}'[d_1 + n_1, d_2] &= \hat{X}'[d_1 + n_1, d_2 + N_2] = \hat{X}[n_1, 0]/2, \end{aligned}$$

где  $1 \leq n_1 \leq N_1 - 1$  и  $1 \leq n_2 \leq N_2 - 1$ . Мощность отсчета  $\hat{X}[0, 0]$  распределяется между четырьмя отсчетами спектра  $\hat{X}'[n_1, n_2]$ :

$$\hat{X}'[d_1, d_2] = \hat{X}'[d_1, d_2 + N_2] = \hat{X}'[d_1 + N_1, d_2] = \hat{X}'[d_1 + N_1, d_2 + N_2] = \hat{X}[0, 0]/4.$$

Описанную процедуру можно использовать и для изображений, размеры которых  $N_1$  и  $N_2$  не являются целой степенью двойки. В этом случае перед выполнением БПФ проводят дополнение изображения нулями справа и снизу. После восстановления изображение  $x'[k_1, k_2]$  усекают до размеров  $N'_1 \times N'_2$ . Как обычно, предварительное исключение постоянной составляющей желательно, а при использовании дополнения нулями — необходимо.

## 11.7 Схема JPEG сжатия изображений

Сжатие информации основано на выявлении в ней и утилизации избыточности, которая обычно проявляется как внутренняя корреляционная струк-

тура — отдельные элементы представления информации оказываются зависимыми. В случае изображений очевидная избыточность связана с тем, что соседние точки изображения имеют обычно близкую яркость. Основная трудность задачи сжатия изображений связана с тем, что для изображений характерна двумерная корреляционная структура, которую сложно утилизировать традиционными алгоритмами сжатия. Использование спектральной предобработки позволяет разрешить эту проблему — двумерная корреляционная структура вся оказывается сосредоточенной в выбранном базисе, а коэффициенты разложения уже лишены такой структуры. Поразительная эффективность спектральных методов сжатия изображений в сравнении с полной беспомощностью традиционных методов демонстрирует адекватность описанного подхода.

Наиболее известный спектральный метод сжатия изображений разработан в конце 80-х годов XX века группой JPEG (Joint Photographic Experts Group). Стандарт JPEG предусматривает различные методы сжатия и множество технических деталей их реализации. В стандарт входят как методы сжатия без потерь, когда сжатое изображение точно соответствует исходному, так и методы сжатия с потерями, когда при сжатии в исходное изображение вносятся искажения. Использование методов сжатия с потерями позволяет достичь существенно лучших коэффициентов сжатия при относительно невысоком уровне вносимых искажений. Здесь мы рассмотрим только базовый вариант сжатия с потерями, причем для простоты мы опускаем большинство технических подробностей. Кроме того, описывается схема сжатия изображения в градациях серого<sup>65</sup>. Сжатие полноцветного изображения происходит аналогичным образом в каждой из цветовых плоскостей, но предварительно производится переход от цветового пространства RGB к цветовому пространству YCrCb (яркость-красное-синее), используемому в телевидении. Цветовые компоненты Cr и Cb можно сжимать с большими потерями, поскольку глаз более чувствителен к яркости, чем к цвету.

## Дискретное косинусное преобразование

Если временной ряд  $x_j$  при  $j = 0, \dots, N$  доопределить по четности на интервал  $-(N-1) \leq j \leq N$  длиной  $2N$ , то дискретное преобразование Фурье

---

<sup>65</sup> Отметим, что яркость точки, цвет которой задан цветовыми компонентами RGB, вычисляется по формуле  $Y = 0.299R + 0.587G + 0.114B$ . Приведенные коэффициенты представляют собой экспериментально определенные чувствительности глаза к соответствующим цветам.

превращается в разложение сигнала по косинусам:

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{2N} \sum_{j=-(N-1)}^N x_j \exp \left( -i \frac{2\pi}{2N} jn \right) = \\ &= \frac{1}{2N} \left[ x_0 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} x_j \cos \left( \frac{\pi}{N} jn \right) + (-1)^n x_N \right] = \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^N C(j) x_j \cos \left( \frac{\pi}{N} jn \right), \end{aligned}$$

где

$$C(j) = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ 2 & 1 \leq j \leq N-1 \\ 1 & j = N \end{cases}.$$

Спектр  $X_n$  также определен при  $n = 0, \dots, N$  и симметричен ( $X_{-n} = X_n$ ), поэтому формулу обратного ДПФ удастся преобразовать аналогичным образом:

$$\begin{aligned} x_j &= \sum_{n=-(N-1)}^N X_n \exp \left( -i \frac{2\pi}{2N} jn \right) = \\ &= X_0 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} X_n \cos \left( \frac{\pi}{N} jn \right) + (-1)^j X_N = \sum_{n=0}^N C(n) X_n \cos \left( \frac{\pi}{N} jn \right). \end{aligned}$$

Очевидная симметрия полученных выражений позволяет объединить их в одну формулу. Определим оператор  $\text{DCT}_n[x_j]$ , преобразующий временной ряд  $x_j$ , в соответствии с формулой

$$\text{DCT}_n[x_j] = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{j=0}^N C(j) x_j \cos \left( \frac{\pi}{N} jn \right).$$

Тогда  $X_n = \text{DCT}_n[x_j]/\sqrt{2N}$  и  $x_j = \sqrt{2N} \text{DCT}_j[X_n]$  и ясно, что  $x_j = \text{DCT}_j[\text{DCT}_n[x_j]]$ . Таким образом, введенное нами преобразование оказывается взаимно обратным самому себе. Преобразование, осуществляемое оператором  $\text{DCT}$ , называется *дискретным косинусным преобразованием (ДКП)*.

Двумерное дискретное косинусное преобразование задается формулой:

$$\text{DCT}_{nm}[x_{jk}] = \frac{1}{2\sqrt{NM}} \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^M C(j)C(k) x_{jk} \cos \left( \frac{\pi}{N} jn \right) \cos \left( \frac{\pi}{M} km \right).$$

В [Numerical Recipes, 1997] описана схема и приведена реализация алгоритма быстрого одномерного и двумерного ДКП. В идейном плане алгоритм быстрого ДКП аналогичен алгоритму БПФ.

При сжатии алгоритмом JPEG изображения в градациях серого на первом этапе происходит сегментация изображения на неперекрывающиеся квадратные блоки одинакового размера. Обычно используются блоки размером  $8 \times 8$  пикселей. Для каждого блока вычисляется матрица ДКП, в результате чего происходит переход от пространственного представления изображения к его спектральному представлению. Базовая идея алгоритма состоит в том, что для визуального восприятия изображения человеком наиболее важными являются низкочастотные компоненты спектрального представления, соответствующие плавному изменению яркости. Отбрасывая наименее значимые спектральные составляющие, можно выбирать между качеством изображения и степенью сжатия.

## Квантование коэффициентов

В матрице ДКП элементы, стоящие в левом верхнем углу, соответствуют спектральным компонентам с низкой пространственной частотой и наиболее важны для качественного воспроизведения изображения. Элементы, стоящие в правом нижнем углу, напротив, соответствуют высоким пространственным частотам и несут меньшую визуальную информацию. Компоненты спектрального представления, соответствующие высоким частотам могут кодироваться с большими потерями без существенного искажения изображения. Описанный ниже процесс округления элементов матрицы ДКП реализует идею о различной важности пространственных частот для визуального восприятия изображения.

Округление приводит к сокращению числа битов, необходимых для хранения высокочастотных элементов матрицы ДКП за счет потери точности. Округление матрицы ДКП производится посредством матрицы округления  $R_{nm}$ . Процесс округления коэффициентов ДКП заключается в поэлементном делении матрицы ДКП на матрицу округления  $R$  с последующим округлением результата до ближайшего целого числа. Чем больше элемент матрицы округления, тем больше теряется информации о значении соответствующего коэффициента. Значения элементов матрицы округления растут по направлению слева направо и сверху вниз. От выбора матрицы округления зависит баланс между качеством изображения и степенью сжатия. Стандарт JPEG рекомендует использовать матрицу округления следующего вида:

$$R_{nm} = 1 + Q(1 + n + m),$$

где  $Q$  — показатель качества. Показатель качества определяет скорость роста элементов матрицы округления. При больших значениях параметра  $Q$  происходит большая потеря качества изображения при соответственно больших

коэффициентах сжатия. Приведем вид матрицы округления для характерного значения  $Q = 2$ :

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 \\ 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 \\ 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 \\ 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 \\ 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 & 25 \\ 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 & 25 & 27 \\ 15 & 17 & 19 & 21 & 23 & 25 & 27 & 29 \\ 17 & 19 & 21 & 23 & 25 & 27 & 29 & 31 \end{bmatrix}$$

## Кодирование спектральной информации

Полученная после ДКП и квантования совокупность матриц кодируется на следующем шаге с целью сокращения избыточности.

Коэффициент с индексами  $(0, 0)$  в матрице ДКП представляет среднюю яркость точек блока. Ясно, что средняя яркость меняется от блока к блоку относительно медленно. Поэтому значение коэффициента  $(0, 0)$  заменяется на разность между его значением и значением соответствующего коэффициента в предыдущей матрице (блоки обходятся в порядке сверху вниз и слева направо), что дает меньшие значения этого коэффициента и, соответственно, большее число нулей в его двоичной записи.

На следующем шаге производится развертка каждой матрицы ДКП в линейный вектор коэффициентов. Для этого матрица ДКП обходится зигзагообразно в порядке, показанном ниже:

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0  | 1  | 5  | 6  | 14 | 15 | 27 | 28 |
| 2  | 4  | 7  | 13 | 16 | 26 | 29 | 42 |
| 3  | 8  | 12 | 17 | 25 | 30 | 41 | 43 |
| 9  | 11 | 18 | 24 | 31 | 40 | 44 | 53 |
| 10 | 19 | 23 | 32 | 39 | 45 | 52 | 54 |
| 20 | 22 | 33 | 38 | 46 | 51 | 55 | 60 |
| 21 | 34 | 37 | 47 | 50 | 56 | 59 | 61 |
| 35 | 36 | 48 | 49 | 57 | 58 | 62 | 63 |

Здесь число, стоящее на месте элемента матрицы ДКП, — это индекс в линейном векторе, приписываемый соответствующему коэффициенту ДКП при развертке.

На последнем этапе к каждому вектору применяются последовательно алгоритм кодирования серий (RLE) и алгоритм кодирования энтропии (кодирование Хаффмана или арифметическое кодирование). Эти алгоритмы общеизвестны, и их описание не входит в наши задачи.



# Оглавление

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Ряд Фурье</b>                                   | <b>7</b>  |
| 1.1      | Комплексный ряд Фурье . . . . .                    | 7         |
| 1.2      | Физический смысл ряда Фурье . . . . .              | 9         |
| 1.3      | Дискретный спектр Фурье . . . . .                  | 11        |
| 1.4      | Теорема Парсеваля . . . . .                        | 12        |
| 1.5      | Теорема о скорости убывания спектра . . . . .      | 14        |
| 1.6      | Абстрактные ряды Фурье . . . . .                   | 15        |
| <b>2</b> | <b>Преобразование Фурье</b>                        | <b>17</b> |
| 2.1      | Предельный переход в ряде Фурье . . . . .          | 17        |
| 2.2      | Примеры . . . . .                                  | 20        |
| 2.3      | Теорема Парсеваля . . . . .                        | 22        |
| 2.4      | Теорема двойственности . . . . .                   | 22        |
| 2.5      | Теоремы подобия . . . . .                          | 23        |
| 2.6      | Запаздывание сигнала и сдвиг спектра . . . . .     | 23        |
| 2.7      | Принцип неопределенности . . . . .                 | 24        |
| 2.8      | Формы записи преобразования Фурье . . . . .        | 26        |
| <b>3</b> | <b>Теория дискретизации</b>                        | <b>27</b> |
| 3.1      | Модель дискретизации . . . . .                     | 28        |
| 3.2      | Теорема о наложении . . . . .                      | 28        |
| 3.3      | Частота Найквиста . . . . .                        | 29        |
| 3.4      | Теорема Найквиста—Шеннона . . . . .                | 31        |
| 3.5      | Преобразование Фурье дискретного сигнала . . . . . | 33        |
| 3.6      | Дискретизация в спектральной области . . . . .     | 34        |
| <b>4</b> | <b>Дискретное преобразование Фурье</b>             | <b>36</b> |
| 4.1      | Дискретизация преобразования Фурье . . . . .       | 36        |
| 4.2      | Дискретное преобразование Фурье . . . . .          | 37        |
| 4.3      | Взаимная однозначность ДПФ . . . . .               | 39        |
| 4.4      | Теорема Парсеваля . . . . .                        | 39        |
| 4.5      | Формы записи ДПФ . . . . .                         | 40        |
| <b>5</b> | <b>Быстрое преобразование Фурье</b>                | <b>41</b> |
| 5.1      | Вычисление обратного ДПФ . . . . .                 | 41        |
| 5.2      | Рекуррентная формула Ланцоша—Даниэльсона . . . . . | 41        |
| 5.3      | Схема БПФ . . . . .                                | 42        |
| 5.4      | Двоичная инверсия . . . . .                        | 43        |
| 5.5      | Реализация формул Ланцоша—Даниэльсона . . . . .    | 44        |
| 5.6      | Программная реализация БПФ . . . . .               | 46        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 5.7      | Порядок отсчетов . . . . .                         | 47        |
| 5.8      | Сдвиг нуля . . . . .                               | 48        |
| 5.9      | БПФ вещественной последовательности . . . . .      | 49        |
| 5.10     | О реализациях БПФ . . . . .                        | 56        |
| <b>6</b> | <b>Цифровые фильтры</b>                            | <b>56</b> |
| 6.1      | Принцип суперпозиции . . . . .                     | 57        |
| 6.2      | Импульсная характеристика . . . . .                | 58        |
| 6.3      | Устойчивость цифровых фильтров . . . . .           | 60        |
| 6.4      | Частотная характеристика . . . . .                 | 61        |
| <b>7</b> | <b>Оконные преобразования</b>                      | <b>62</b> |
| 7.1      | Теорема о свертке . . . . .                        | 63        |
| 7.2      | Мультипликативные и сглаживающие окна . . . . .    | 64        |
| 7.3      | Эффекты конечности времени наблюдения . . . . .    | 65        |
| 7.4      | Окно Ханна . . . . .                               | 66        |
| 7.5      | Теорема о локализации сигнала и спектра . . . . .  | 67        |
| 7.6      | Теорема о дискретной циклической свертке . . . . . | 69        |
| 7.7      | Свертка в спектральной области . . . . .           | 70        |
| 7.8      | Секционирование свертки . . . . .                  | 71        |
| <b>8</b> | <b>Синтез цифровых фильтров</b>                    | <b>72</b> |
| 8.1      | Основные формулы . . . . .                         | 73        |
| 8.2      | Задание АЧХ фильтра . . . . .                      | 73        |
| 8.3      | Условие вещественности . . . . .                   | 74        |
| 8.4      | Задание ФЧХ фильтра . . . . .                      | 75        |
| 8.5      | Симметричные фильтры . . . . .                     | 76        |
| 8.6      | Асимметричные фильтры . . . . .                    | 77        |
| 8.7      | Синтез методом частотной выборки . . . . .         | 78        |
| 8.8      | Явление Гиббса . . . . .                           | 80        |
| 8.9      | Теорема о циклической свертке . . . . .            | 82        |
| 8.10     | Спектральная модель обрезания ряда Фурье . . . . . | 83        |
| 8.11     | Дискретное окно Ханна . . . . .                    | 84        |
| 8.12     | Примеры синтеза классических фильтров . . . . .    | 87        |
| <b>9</b> | <b>Практический спектральный анализ</b>            | <b>88</b> |
| 9.1      | Порядок отсчетов . . . . .                         | 88        |
| 9.2      | Время и частота . . . . .                          | 90        |
| 9.3      | Предобработка данных . . . . .                     | 94        |
| 9.4      | Интерпретация спектра . . . . .                    | 96        |
| 9.5      | Схема спектрального анализа . . . . .              | 104       |
| 9.6      | Недостатки спектрального анализа Фурье . . . . .   | 105       |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 9.7       | Пример спектрального анализа . . . . .             | 106        |
| <b>10</b> | <b>Приложения спектральных методов</b>             | <b>108</b> |
| 10.1      | Идеология спектральных методов . . . . .           | 108        |
| 10.2      | Классификация спектральных представлений . . . . . | 110        |
| 10.3      | Передискретизация . . . . .                        | 111        |
| 10.4      | Фильтрация при децимации . . . . .                 | 113        |
| 10.5      | Фильтры в спектральной области . . . . .           | 115        |
| 10.6      | Спектральный анализ разностных схем . . . . .      | 118        |
| 10.7      | Адаптивные фильтры . . . . .                       | 125        |
| <b>11</b> | <b>Двумерные спектральные методы</b>               | <b>131</b> |
| 11.1      | Двумерные ряды Фурье . . . . .                     | 131        |
| 11.2      | Двумерное ДПФ и БПФ . . . . .                      | 133        |
| 11.3      | Идеология двумерных спектральных методов . . . . . | 135        |
| 11.4      | Двумерные фильтры . . . . .                        | 136        |
| 11.5      | Покоординатные фильтры . . . . .                   | 138        |
| 11.6      | Передискретизация изображений . . . . .            | 139        |
| 11.7      | Схема JPEG сжатия изображений . . . . .            | 140        |

Учебное издание

# Введение в цифровую обработку сигналов

**Учебное пособие**

**Мячин** Михаил Леонидович  
**Дунаева** Ольга Александровна

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова  
Верстка М. Л. Мячин, О. А. Дунаева

Подписано в печать 04.09.2015. Формат 60х84 1/16.

Усл. печ. л. 8,6. Уч.-изд. л. 7.0

Тираж 50 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен  
в редакционно-издательском отделе  
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.  
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.