

570.15.1  
К 31

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию  
Ярославский государственный университет  
им. П.Г. Демидова

Д.С. Кащенко, И.С. Кащенко

# Динамика уравнений первого порядка с запаздыванием

*Учебное пособие*

*Рекомендовано  
Научно-методическим советом университета  
для студентов специальности  
Прикладная математика и информатика*

Чит. зал

ЯРОСЛАВЛЬ 2006

273020

УДК 517  
ББК В161.6  
К 31

*Рекомендовано  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2006 года*

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук, профессор Н.Х. Розов;  
кафедра математики физического факультета Московского  
государственного университета им. М.В. Ломоносова

**Кашенко, Д.С.** Динамика уравнений первого порядка с запаздыванием: учебное пособие / Д.С. Кашенко, И.С. Кашенко; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2006. – 132 с.  
ISBN 5-8397-0495-4 (978-5-8397-0495-4)

В пособии дано описание динамики дифференциальных уравнений первого порядка с запаздыванием. В первой части описаны новые методы исследования поведения решений в малой окрестности состояния равновесия, основанные на методах нормальных форм. Во второй части новыми методами сингулярного возмущения исследованы вопросы о существовании, устойчивости и асимптотике периодических решений сложной структуры в некоторой области фазового пространства.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 010501 Прикладная математика и информатика (дисциплина „Математическое моделирование“, блок ОПД), очной формы обучения.

Рис. 21. Библиогр.: 44 назв.

УДК 517  
ББК В161.6

ISBN 5-8397-0495-4 (978-5-8397-0495-4)

© Ярославский  
государственный университет  
им. П.Г. Демидова, 2006  
Кашенко Д.С.,  
Кашенко И.С. 2006

БИБЛИОТЕКА ЯрГУ  
ОСНОВНОЙ ФОНД

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>Часть I. Локальный анализ</b>	<b>7</b>
§1. Общие сведения	8
§2. Бифуркация Андронова-Хопфа	11
§3. Локальная динамика уравнения с большим запаздыванием	18
§4. Локальная динамика уравнения с двумя запаздываниями	28
§5. Динамика уравнения с двумя большими „близкими“ друг другу запаздываниями	40
§6. Динамика уравнения с двумя большими пропорциональными запаздываниями	50
§7. Динамика уравнения с большим и очень большим запаздыванием	54
§8. Динамика системы с линейно распределенным запаздыванием	63
§9. Нормализация в системе с периодически распределенным запаздыванием	79
§10. Заключение	86
<b>Часть II. Нелокальный анализ</b>	<b>88</b>
§1. Динамика уравнения с релейной запаздывающей обратной связью	91
§2. Динамика уравнения со ступенчатой нелинейной обратной связью. Асимптотический анализ	100
§3. Динамика уравнения с нелинейностью импульсного типа	110
§4. Числовые характеристики аттракторов уравнения первого порядка со ступенчатой нелинейностью	116
§5. Заключение	124
<b>Литература</b>	<b>127</b>

# Введение

Уравнения первого порядка с запаздыванием вида

$$\dot{x} + x = f(x(t - T)) \quad (T > 0) \quad (0.1)$$

возникают во многих прикладных задачах [9, 31, 30, 33, 34, 35, 36, 39, 40, 43, 26, 5, 6, 21, 32, 22, 24, 29].

Фазовым пространством уравнения (0.1) удобно считать пространство  $C'_{[-T,0]}$  непрерывных на  $[-T, 0]$  функций со стандартной нормой. В этом смысле уравнение (0.1) существенно сложнее уравнения

$$\dot{x} + x = f(x), \quad (0.2)$$

в которое оно переходит при  $T = 0$ . Обыкновенное дифференциальное уравнение (0.2), как известно, интегрируется в квадратурах. Его решения стремятся либо к состоянию равновесия, т.е. к решению уравнения  $x = f(x)$ , либо неограниченно растут по модулю при  $t \rightarrow \infty$ . Решения уравнения (0.1) тоже вычислить достаточно просто. Так, положив в качестве начального условия функцию  $\varphi(s) \in C_{[-T,0]}$  (т.е.  $x(s) = \varphi(s)$  при  $s \in [-T, 0]$ ), на отрезке  $t \in [0, T]$  приходим к уравнению

$$\dot{x} + x = f(\varphi(t - T)), \quad t \in [0, T],$$

из которого получаем, что при  $t \in [0, T]$

$$x(t) = \varphi(0)e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-s)} f(\varphi(s - T)) ds.$$

Теперь, зная решение  $x(t)$  при  $t \in [0, T]$ , мы аналогично можем получить формулу для  $x(t)$  при  $t \in [T, 2T]$  и т.д. Ниже будет показано, что в отличие от уравнения (0.2) динамика уравнения (0.1) может быть существенно богаче и интереснее. Основное внимание будет уделено изучению динамики уравнения (0.1) асимптотическими методами. Первая



часть посвящена локальному анализу уравнения (0.1), т.е. исследованию поведения решений (0.1) в малой окрестности состояния равновесия. Наибольший интерес в этой части представляет изучение поведения решений этого уравнения при условии, когда запаздывание  $T$  достаточно велико. Во второй части изучается нелокальное поведение решений уравнения (0.1). Различными аналитическими методами будут изучены вопросы о существовании, устойчивости и асимптотике периодических решений сложной структуры.

# Часть I.

## Локальный анализ

Структура части I такова. В первом и втором параграфах приводятся общие сведения и хорошо известные базовые результаты о поведении решений нелинейных уравнений с запаздыванием.

В §3 рассматривается локальная динамика уравнений с большим запаздыванием. Приводятся результаты из [14] и полученные новые результаты, существенно их дополняющие.

Параграфы 4 – 7 посвящены локальной динамике уравнений с двумя запаздываниями. В §4 изучается случай, когда одно запаздывание является большим, а второе имеет порядок 1. Исследуется также ситуация, когда слагаемое с большим запаздыванием входит с малым множителем. Описаны результаты, приведенные в [19], а также ряд новых результатов. В §5 рассматривается случай, когда оба запаздывания являются большими, различающимися на константу числами, а в §6 — ситуация, когда оба запаздывания большие, пропорциональные друг другу величины. Наконец, в §7 рассматривается ситуация, когда оба запаздывания большие, но различные по порядку. Отдельно там же изучается случай, когда перед слагаемым с самым большим запаздыванием стоит малый множитель. Во всех случаях приведены новые, специфичные для данного типа уравнений результаты.

В параграфах 8 и 9 рассматривается локальная динамика уравнений с распределенным на асимптотически большом отрезке запаздыванием. Параграф 8 посвящен уравнениям с линейно распределенным запаздыванием, а параграф 9 — уравнениям с периодически распределенным запаздыванием.

Последний параграф содержит итоги, обобщения и сравнение полученных результатов.

## §1. Общие сведения

**1.1.** Рассматривается дифференциально-разностное уравнение

$$\dot{x} + x = f(x(t - T)), \quad (1.1)$$

где  $T > 0$ , а функция  $f(x)$  предполагается достаточно гладкой. Пусть  $x_0$  — состояние равновесия этого уравнения, т.е.

$$x_0 = f(x_0).$$

В уравнении (1.1) произведем замену

$$x = x_0 + y.$$

В результате получим уравнение

$$\dot{y} + y = ay(t - T) + F(y(t - T)), \quad (1.2)$$

где  $a = f'(x_0)$ , а  $F(y)$  имеет в нуле порядок малости выше первого, т.е.  $\lim_{|y| \rightarrow 0} \frac{F(y)}{y} = 0$ . Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, для уравнения (1.2) имеет место теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Для того, чтобы сформулировать соответствующий результат, рассмотрим линеаризованное на нулевом состоянии равновесия уравнения (1.2) уравнение

$$\dot{y} + y = ay(t - T). \quad (1.3)$$

Ниже через  $R(r)$  обозначен шар радиуса  $r$  с центром в нуле в пространстве  $C_{[-T, 0]}$ .

**Утверждение 1.1** Пусть решения уравнения (1.3) асимптотически устойчивы. Тогда найдется такое  $r_0 > 0$ , что при всех  $\varphi(s) \in R(r_0)$  решения уравнения (1.2) с начальными условиями  $x(s) = \varphi(s)$  стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Если же уравнение (1.3) имеет экспоненциально растущее по модулю при  $t \rightarrow \infty$  решение, то найдется такое  $r_0 > 0$ , что для каждого  $0 < r < r_0$  в шаре  $R(r)$  найдется такой элемент  $\varphi(s)$  и такое  $t_0(r, \varphi)$ , что решение с начальным условием  $\varphi(s)$  не принадлежит шару  $R(r_0)$  при  $t = t_0(r, \varphi)$ .

Таким образом, для анализа решений исходного уравнения (1.2) весьма важно поведение существенно более простого линейного уравнения (1.3). Как и в случае ОДУ, поведение решений линейного автономного уравнения определяется характеристическим уравнением. Для его нахождения положим в (1.3)

$$y = e^{\lambda t}$$

и после очевидных сокращений получим для нахождения неизвестного параметра  $\lambda$  характеристический квазимоночлен

$$\lambda + 1 = ae^{-\lambda T}. \quad (1.4)$$

Имеет место следующее утверждение.

**Утверждение 1.2** Пусть все корни характеристического уравнения (1.4) имеют отрицательные вещественные части. Тогда решения (1.3) асимптотически устойчивы. Если же характеристический квазиполином (1.4) имеет корень  $\lambda_0$  с положительной вещественной частью, то уравнение (1.3) имеет экспоненциально растущее решение  $x = \exp \lambda_0 t$ .

Отметим, что квазиполином (1.4) имеет бесконечное число корней, но для любого вещественного  $p$  в комплексной полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda \geq p$  количество его корней конечно.

Таким образом, необходимо исследовать поведение решений уравнения (1.2) в малой окрестности состояния равновесия лишь в тех случаях, когда квазиполином (1.4) имеет корни с нулевой вещественной частью (или близкой к нулю) и не имеет с положительной.

**1.2.** Изучим поведение корней характеристического квазиполинома (1.4) в зависимости от параметров.

При  $a = 0$  все корни (1.4) имеют отрицательные вещественные части, а значит, при всех близких к нулю значениях  $a$  это свойство сохраняется. В силу непрерывной зависимости корней от параметра  $a$ , найдутся такие  $a^0(T) > 0$  и  $a_0(T) < 0$ , что при  $a_0(T) < a < a^0(T)$  все корни квазиполинома имеют отрицательные вещественные части, а при  $a = a_0(T)$  и при  $a = a^0(T)$  квазиполином (1.4) имеет чисто мнимый корень  $\lambda_0 = i\omega(T)$  ( $\omega \geq 0$ ).

Рассмотрим сначала случай  $a < 0$ . Положим в (1.4)  $a = a_0(T)$  и  $\lambda = i\omega$ . В результате получим

$$i\omega + 1 = a_0 e^{-i\omega T}.$$

Выделим действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} 1 &= a_0 \cos \omega T, \\ \omega &= -a_0 \sin \omega T. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} a_0^2 &= 1 + \omega^2, \\ -\omega &= \operatorname{tg} \omega T. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В силу условия  $a < 0$  значение  $\omega$  не может обращаться в ноль. Обозначим через  $\omega(T)$  наименьший положительный корень уравнения (1.6) (см. рисунок 1). Положим  $a_0(T) = -\sqrt{1 + \omega^2(T)}$ .

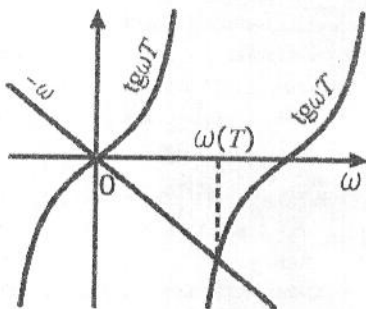


Рис. 1.

**Лемма 1.1** При  $a_0(T) < a < 0$  все корни уравнения (1.4) имеют отрицательные вещественные части, а при  $a < a_0(T)$  существует корень (1.4) с положительной вещественной частью.

Для обоснования леммы надо лишь показать, что при каждом  $a < a_0(T)$  найдется корень с положительной вещественной частью. Обозначим через  $\lambda(a)$  какой-либо корень уравнения (1.4). Очевидно, что  $\lambda(a)$  непрерывно зависит от параметра  $a$ . Утверждение будет доказано, если удастся показать, что

$$\operatorname{Re} \frac{d\lambda(a)}{da} \Big|_{a=a_0, \lambda(a_0)=i\omega} < 0.$$

Дифференцируя равенство (1.4) по  $a$ , полагая  $a = a_0$  и  $\lambda(a_0) = i\omega$  и учитывая равенства (1.5)–(1.6), получаем, что

$$\operatorname{Re} \frac{d\lambda(a)}{da} \Big|_{a=a_0, \lambda(a_0)=i\omega} = \frac{\omega^2 T + 1 + T}{a((1+T)^2 + \omega^2 T^2)}. \quad (1.7)$$

Отсюда и из условия  $a < 0$  следует требуемое неравенство.

Пусть теперь  $a > 0$ . Из (1.5)–(1.6) очевидно, что  $a_0(T) = 1$  и  $\omega(T) = 0$ .

**Лемма 1.2** Пусть  $0 < a < 1$ . Тогда все корни (1.4) имеют отрицательные вещественные части. Если же  $a > 1$ , то уравнение (1.4) имеет корень с положительной вещественной частью.

Как и при доказательстве леммы 1.1, для доказательства второго утверждения этой теоремы привлекаем неравенство

$$\operatorname{Re} \frac{d\lambda(a)}{da} \Big|_{a=a_0, \lambda(a_0)=i\omega} > 0,$$

которое следует из (1.7) и условия  $a > 0$ .

**Упражнение 1.1.** Показать, что при условии  $0 < aT < \pi/2$  решения уравнения

$$\dot{x} = -ax(t - T)$$

асимптотически устойчивы, а при  $a < 0$  или  $a > \pi/2$  – неустойчивы.

## §2. Бифуркация Андронова-Хопфа

### 2.1. Изучим динамику уравнения

$$\dot{x} + x = ax(t - T) + F(x(t - T)) \quad (2.1)$$

в случае, когда значения параметров  $a$  и  $T$  близки к критическим, т.е.

$$T = T_0(1 + \varepsilon T_1), \quad a = a_0 + \varepsilon a_1.$$

Здесь  $0 < \varepsilon \ll 1$  малый параметр,  $a_0 = a_0(T_0)$  либо  $a_0 = a^0(T_0)$ , где  $a_0(T)$  и  $a^0(T)$  определены в предыдущем параграфе. Поставим задачу исследовать поведение решений (2.1) при достаточно малых значениях  $\varepsilon$  в некоторой малой (но не зависящей от  $\varepsilon$ ) окрестности нулевого решения.

Удобно считать, что в окрестности нуля функция  $F(x)$  имеет вид

$$F(x) = f_2 x^2 + f_3 x^3 + \dots$$

Для того, чтобы исключить зависимость запаздывания от малого параметра  $\varepsilon$ , произведем в (2.1) замену

$$t = (1 + \varepsilon T_1) t_1$$

и переобозначим опять  $t_1$  через  $t$  и  $x((1 + \varepsilon T_1)t_1)$  через  $x(t)$ . В результате получим уравнение

$$\frac{1}{1 + \varepsilon T_1} \frac{dx}{dt} + x = (a_0(T_0) + \varepsilon a_1)x(t - T_0) + f_2 x^2(t - T_0) + f_3 x^3(t - T_0) + \dots \quad (2.2)$$

Рассмотрим отдельно случаи  $a_0 < 0$  и  $a_0 > 0$ .

## 2.2. Пусть сначала

$$a_0 = a_0(T_0) < 0.$$

В этом случае характеристический квазиполином

$$\lambda + 1 = a_0 e^{-\lambda T_0} \quad (2.3)$$

имеет пару чисто мнимых корней  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ , а все остальные его корни имеют отрицательные вещественные части. Линеаризованное уравнение

$$\dot{x} + x = a_0 x(t - T_0) \quad (2.4)$$

имеет периодическое решение  $y = \exp(i\omega_0 t)$ .

Известно, что в фазовом пространстве  $C_{[-T_0, 0]}$  имеется локальное экспоненциально устойчивое интегральное многообразие (см. [30, 25, 2, 1])  $S_2$ . К этому многообразию при  $t \rightarrow \infty$  стремятся все решения (2.2) с достаточно малым (и не зависящим от  $\varepsilon$ ) начальным условием. Таким образом, необходимо лишь исследовать поведение решений (2.2) только на двумерном многообразии  $S_2$ . На нем уравнение (2.2) можно записать в виде системы двух ОДУ, которую с помощью некоторых преобразований можно представить в наиболее простой форме. Эта форма называется нормальной (см., например, [2, 1]). В рассматриваемом случае, когда в линеаризованном уравнении (2.4) реализуется критический случай пары чисто мнимых корней характеристического квазимногочлена, соответствующая нормальная форма имеет вид одного комплексного уравнения

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon \lambda_1 z + d|z|^2 z + O(\varepsilon^2 + |z|^5 + \varepsilon|z|^3). \quad (2.5)$$

В случае, когда  $\operatorname{Re} \lambda_1 \neq 0$  и  $\operatorname{Re} d \neq 0$  динамические свойства решений (2.5), а значит, и уравнения (2.2), определяются укороченным нормализованным уравнением

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_1 \xi + d|\xi|^2 \xi, \quad (2.6)$$

где  $\tau = \varepsilon t$  и  $z = \sqrt{\varepsilon} \xi$ . Формула, которая связывает решения  $y(t, \varepsilon)$  уравнения (2.2) и его нормальной формы (2.5), имеет вид

$$x(t, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} [\xi(\tau) e^{i\omega_0 t} + \bar{\xi}(\tau) e^{-i\omega_0 t}] + \varepsilon x_2(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} x_3(t, \tau) + \dots \quad (2.7)$$

Отметим, что зависимость от  $t$  в (2.7)  $2\pi/\omega_0$ -периодичная. Формула (2.7) дает одновременно алгоритм нахождения коэффициентов  $\lambda_1$  (называется „надкритичностью“) и  $d$  (называется ляпуновской величиной). Для определения  $\lambda_1$  и  $d$  подставим в (2.2) формулу (2.7) и будем собирать в получившемся тождестве коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . На первом шаге, приравнявая коэффициенты при  $\varepsilon^{1/2}$ , в силу определения величин  $a_0$  и  $\omega_0$  получим верное тождество. На втором шаге придем к дифференциальному уравнению относительно  $x_2$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} + x_2 = a_0 x_2(t - T_0, \tau) + f_2 \left[ \xi(\tau)^2 e^{2i\omega_0(t-T_0)} + |\xi(\tau)|^2 + \bar{\xi}(\tau)^2 e^{-2i\omega_0(t-T_0)} \right].$$

Из условия периодичности функции  $x_2(t, \tau)$  находим, что

$$x_2 = x_{20} + x_{21} e^{2i\omega_0 t} + \bar{x}_{21} e^{-2i\omega_0 t},$$

где

$$\begin{aligned} x_{20} &= \frac{f_2}{1 - a_0} |\xi(\tau)|^2, \\ x_{21} &= \frac{f_2 \exp(-2i\omega_0 T_0)}{1 + 2i\omega_0 - a_0 \exp(-2i\omega_0 T_0)} \xi^2(\tau). \end{aligned}$$

Наконец, собирая коэффициенты при  $\varepsilon^{3/2}$ , получим выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_3}{\partial t} + x_3 - a_0 x_3(t - T_0, \tau) = & - \left( (1 + a_0 T_0 e^{-i\omega_0 T_0}) \frac{d\xi}{d\tau} e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.} \right) + \\ & + (a_0 T_1 + a_1 - 1) (\xi(\tau) e^{i\omega_0(t-T_0)} + \bar{\xi}(\tau) e^{-i\omega_0(t-T_0)}) + \\ & + 2f_2 x_2(t - T_0, \tau) (\xi(\tau) e^{i\omega_0(t-T_0)} + \bar{\xi}(\tau) e^{-i\omega_0(t-T_0)}) + \\ & + f_3 (\xi(\tau) e^{i\omega_0(t-T_0)} + \bar{\xi}(\tau) e^{-i\omega_0(t-T_0)})^3. \end{aligned}$$



Необходимое и достаточное условие существования  $2\pi/\omega_0$ -периодических решений этого уравнения состоит в том, что сумма всех коэффициентов при  $\exp(i\omega_0 t)$  и при  $\exp(-i\omega_0 t)$  в правой части должна быть равна нулю. Подставляя выражение для  $x_2$ , раскрывая скобки и используя (2.3), получим, что для существования  $2\pi\omega_0$ -периодических решений должно выполняться равенство

$$(1 + T_0 + iT_0\omega_0)\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{a_1 + i\omega_0(a_1 + a_0T_1)}{a_0}\xi + \left[ 2f_2^2 \left( \frac{1}{1-a_0} + \frac{1}{2i\omega_0 - a_0 \exp(-2i\omega_0 T_0) + 1} \right) + 3f_3 \right] e^{-i\omega_0 T_0} |\xi|^2 \xi. \quad (2.8)$$

Аналогичное уравнение также будет и для  $\bar{\xi}$ . Как легко заметить, полученное равенство в точности соответствует (2.6). Используя выражение (2.3), надкритичность  $\lambda_1$  и ляпуновскую величину  $d$  можно записать следующим образом:

$$\lambda_1 = (1 + T_0 + iT_0\omega_0)^{-1} \frac{a_1 + i\omega_0(a_1 + a_0T_1)}{a_0},$$

$$d = \left[ 2f_2^2 \left( \frac{1}{1-a_0} + \frac{1}{2i\omega_0 - a_0 \exp(-2i\omega_0 T_0) + 1} \right) + 3f_3 \right] \frac{1 + i\omega_0}{a_0}.$$

Нормализованное уравнение (2.8) является комплексным. Если комплексную функцию  $\xi$  представить в виде  $\xi(\tau) = \rho(\tau) \exp i\varphi(\tau)$ , то для амплитуды  $\rho$  и для фазы  $\varphi$  получим уравнения

$$\frac{d\rho}{d\tau} = (\operatorname{Re} \lambda_1)\rho + (\operatorname{Re} d)\rho^3, \quad (2.9)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = (\operatorname{Im} \lambda_1)\rho + (\operatorname{Im} d)\rho^2. \quad (2.10)$$

Рассмотрим уравнение (2.9). Это скалярное, автономное уравнение. Корни его правой части — это корни уравнения

$$(\operatorname{Re} \lambda_1)\rho + (\operatorname{Re} d)\rho^3 = 0.$$

Это уравнение всегда имеет нулевой корень, и, если  $\operatorname{Re} \lambda_1$  и  $\operatorname{Re} d$  разных знаков, пару корней  $\pm\rho_*$ , где

$$\rho_* = \sqrt{-\frac{\operatorname{Re} \lambda_1}{\operatorname{Re} d}}.$$

Как известно, решения скалярных дифференциальных уравнений либо стремятся к постоянной величине (корню правой части), либо неограниченно возрастают. Поэтому справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.1** Если  $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ ,  $\operatorname{Re} d < 0$ , тогда все решения уравнения (2.9) стремятся к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Если  $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ ,  $\operatorname{Re} d > 0$ , тогда решения уравнения (2.9) с начальным условием  $|\rho(0)| < \rho_*$  стремятся к нулю, а все остальные неограниченно возрастают при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Если  $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$ ,  $\operatorname{Re} d > 0$ , тогда все решения уравнения (2.9) неограниченно возрастают при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Если  $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$ ,  $\operatorname{Re} d < 0$ , тогда все решения уравнения (2.9) стремятся либо к  $\rho_*$ , либо к  $-\rho_*$  при  $\tau \rightarrow \infty$ .

В силу теоремы 2.1 и равенства (2.7), которое связывает решения нормальной формы и решения исходного уравнения на экспоненциально устойчивом интегральном многообразии  $C_2$ , верны следующие утверждения.

**Теорема 2.2** Если  $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ ,  $\operatorname{Re} d < 0$ , то при достаточно малых значениях  $\epsilon$  решения уравнения (2.2) из некоторой окрестности нуля стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

**Теорема 2.3** Если  $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ ,  $\operatorname{Re} d > 0$ , то при достаточно малых значениях  $\epsilon$  нулевое решение уравнения (2.2) асимптотически устойчиво, кроме того, в окрестности нуля существует неустойчивый цикл с асимптотикой  $x_*(t) = \sqrt{\epsilon} \rho_* \cos \varphi(\epsilon t(1 + o(1)))(1 + o(1))$ .

**Теорема 2.4** Если  $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$ ,  $\operatorname{Re} d > 0$ , то при малых  $\epsilon$  нулевое решение уравнения (2.2) неустойчиво, и в его некоторой (не зависящей от  $\epsilon$ ) окрестности нет устойчивых режимов.

**Теорема 2.5** Если  $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$ ,  $\operatorname{Re} d < 0$ , тогда все решения уравнения (2.2) из некоторой окрестности нуля стремятся к устойчивому циклу  $x_*(t) = \sqrt{\epsilon} \rho_* \cos \varphi(\epsilon t(1 + o(1)))(1 + o(1))$ .

Теоремы 2.2–2.5 полностью описывают локальную динамику уравнения (2.2) в окрестности нуля при малых  $\epsilon$ . Фазовый портрет системы (2.2) на многообразии  $C_2$  показан на рисунке 2.

**2.3.** Пусть теперь

$$a = a^0(T_0) > 0.$$

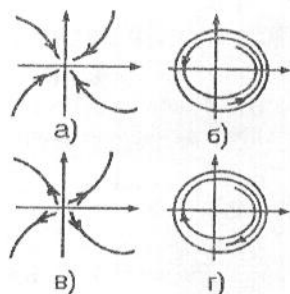


Рис. 2. Фазовые портреты системы (2.2) на многообразии  $C_2$  при  $a_0 = a_0(T) < 0$  в случаях: а)  $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ ,  $\operatorname{Re} d < 0$ ; б)  $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ ,  $\operatorname{Re} d > 0$ ; в)  $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$ ,  $\operatorname{Re} d > 0$ ; г)  $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$ ,  $\operatorname{Re} d < 0$ .

Тогда, как было показано в §1,

$$a^0(T_0) = 1.$$

При таких значениях параметра линейризованное уравнение

$$\dot{x} + x = x(t - T_0)$$

имеет постоянное ненулевое решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda + 1 = e^{-\lambda T_0}$$

имеет нулевой корень, а все остальные его корни имеют отрицательные действительные части. В этом случае в фазовом пространстве  $C_{[-T_0, 0]}$  существует экспоненциально устойчивое интегральное многообразие  $C_1$ . Все решения (2.2) с достаточно малым (но не зависящим от  $\varepsilon$ ) начальным условием стремятся при  $t \rightarrow \infty$  к этому многообразию. Следовательно, нужно исследовать поведение решений (2.2) на гладком одномерном многообразии  $C_1$ . Так же как и в предыдущем случае, на этом многообразии исходную систему можно представить в наиболее простой — нормальной — форме. В нашем случае, когда характеристический многочлен имеет один корень на мнимой оси, нормальная форма имеет вид скалярного уравнения

$$\dot{z} = \varepsilon \lambda_1 z + dz^2 + O(\varepsilon^3 + \varepsilon z^2 + z^3). \quad (2.11)$$

В случае общности положения, когда  $\lambda_1 d \neq 0$ , поведение решений (2.11), а значит, и (2.2), определяются укороченным — нормализованным

– уравнением

$$\frac{dz}{d\tau} = \lambda_1 z + dz^2. \quad (2.12)$$

Здесь  $z = \varepsilon \xi$ ,  $\tau = \varepsilon t$ . Алгоритм нахождения коэффициентов  $\lambda_1$  и  $d$  получается из формулы, связывающей решения системы (2.2) и ее нормальной формы (2.11):

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon z(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \dots \quad (2.13)$$

Действуя так же, как и выше, т.е. подставляя (2.13) в (2.2) и собирая в получившемся равенстве коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим, что для  $z(\tau)$  должно выполняться соотношение

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{a_1}{1+T_0} z + \frac{f_2}{1+T_0} z^2. \quad (2.14)$$

Динамика этой системы полностью описывается следующей теоремой.

**Теорема 2.6** Пусть  $a_1 < 0$ ,  $f_2 > 0$  ( $f_2 < 0$ ), тогда решения (2.14) с начальными условиями меньше (больше)  $-a_1 f_2^{-1}$  стремятся к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$ , а остальные неограниченно возрастают по модулю.

Пусть  $a_1 > 0$ ,  $f_2 > 0$  ( $f_2 < 0$ ) тогда решения (2.14) с положительными (отрицательными) начальными условиями стремятся по модулю к бесконечности, а все остальные сходятся к  $z_* = -a_1 f_2^{-1}$  при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Исходя из этой теоремы, можно описать динамику уравнения (2.2) в окрестности нулевого решения.

**Теорема 2.7** Пусть  $a_1 < 0$ , тогда при достаточно малых значениях  $\varepsilon$  нулевое решение (2.2) асимптотически устойчиво.

**Теорема 2.8** Пусть  $a_1 > 0$ , тогда нулевое решение (2.2) неустойчиво, и в его малой (но не зависящей от  $\varepsilon$ ) окрестности существует единственное асимптотически устойчивое решение

$$x_* = -\varepsilon \frac{a_1}{f_2} (1 + o(1)).$$

**Упражнение 2.1.** Рассмотреть более общее, по сравнению с (2.1) уравнение

$$\dot{x} + x = (a_0 + \varepsilon)x(t - T_0) + f_{21}x^2(t - T_0) + f_{31}x^3(t - T_0) + f_{22}x^2(t) + f_{32}x^3(t).$$

273020

**Упражнение 2.2.** Для уравнения Хатчинсона

$$\dot{x} = ax(t - T)[1 + x(t)],$$

где  $aT = \pi/2 + \varepsilon$ , изучить вопрос о поведении решений этого уравнения при  $0 < \varepsilon \ll 1$  в достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия.

### §3. Локальная динамика уравнения с большим запаздыванием

**3.1.** Основное предположение этого параграфа состоит в том, что в уравнении

$$\frac{dx}{dt} + x = ax(t - T) + F(x(t - T)) \quad (3.1)$$

параметр  $T$ , характеризующий запаздывание, является достаточно большим, т.е.

$$T \gg 1.$$

При этом условии рассматривается вопрос о поведении решений уравнения (3.1) в малой (но не зависящей от  $T$ ) окрестности нулевого состояния равновесия. Удобно через  $\varepsilon$  обозначить малый параметр  $\varepsilon = T^{-1}$ . Тем самым

$$0 < \varepsilon \ll 1.$$

В уравнении (3.1) произведем замену времени  $t \rightarrow Tt$ . В результате приходим к уравнению

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} + x = ax(t - 1) + F(x(t - 1)). \quad (3.2)$$

В окрестности нуля нелинейная функция  $F(x)$  представима в виде

$$F(x) = f_2 x^2 + f_3 x^3 + \dots$$

Так же, как и в предыдущих параграфах, о локальной динамике уравнения (3.2) можно судить по динамике линеаризованного уравнения

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} + x = ax(t - 1).$$

Это уравнение является сингулярно возмущенным, получающееся при  $\varepsilon = 0$  вырожденное уравнение

$$x = ax(t-1)$$

не является дифференциальным. Подставим сюда  $x = \exp \lambda t$ . Для  $\lambda$  получится характеристическое уравнение

$$\varepsilon \lambda + 1 = a e^{-\lambda}. \quad (3.3)$$

Расположение корней характеристического квазиполинома (3.3) определяет поведение решений (3.2). Справедливы следующие утверждения.

**Утверждение 3.1** Пусть существует такое  $M > 0$ , что при любом сколь угодно малом  $\varepsilon > 0$  найдется корень характеристического полинома (3.3)  $\lambda(\varepsilon)$ , такой что  $\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon) > M$ . Тогда существует  $\varepsilon_0 > 0$ , такое что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  нулевое решение уравнения (3.2) неустойчиво, более того, в некоторой его достаточно малой (но не зависящей от  $\varepsilon$ ) окрестности нет устойчивых режимов.

**Утверждение 3.2** Пусть существует такое  $M > 0$ , что при каждом достаточно малом  $\varepsilon > 0$  все корни характеристического квазиполинома (3.3) удовлетворяют условию  $\operatorname{Re} \lambda < -M$ . Тогда при малых  $\varepsilon$  нулевое решение исходного уравнения (3.2) асимптотически устойчиво.

Таким образом, необходимо проводить дополнительные исследования поведения решений уравнения (3.2) только в том случае, когда характеристический квазиполином (3.3) имеет корень  $\lambda(\varepsilon)$  такой, что  $\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon) \rightarrow 0$ , и не имеет корней в правой комплексной полуплоскости, отделенных от мнимой оси при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**3.2.** Исследуем расположение корней квазиполинома (3.3) при малых значениях  $\varepsilon$  в зависимости от параметра  $a$ .

При  $a = 0$  все корни находятся в левой комплексной полуплоскости. Значит, при близких к нулю значениях  $a$  все корни (3.3) удовлетворяют условиям утверждения 3.2. Пусть это свойство впервые нарушается при  $a = a_0 < 0$  или  $a = a^0 > 0$ . В силу непрерывной зависимости корней (3.3) от  $a$ , при таком значении параметра у характеристического квазиполинома существует корень, действительная часть которого стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Представим этот корень в виде асимптотического ряда

$$\lambda(\varepsilon) = i(\omega_- \varepsilon^{-\gamma} + \omega_0(\varepsilon)) + o(1),$$

где  $\gamma > 0$ , а  $\omega_0$  ограничено при малых  $\varepsilon$ . Подставим это в (3.3) и будем последовательно приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ .

Если  $\gamma > 1$ , то старшей степенью будет  $\varepsilon^{1-\gamma}$ , а главная часть уравнения примет вид

$$i\omega_- = 0,$$

откуда  $\omega_- = 0$ .

Если  $\gamma = 1$ , то при  $\varepsilon^0$  получим равенство

$$\frac{i\omega_- + 1}{a} = \exp(-i\omega_- \varepsilon^{-\gamma} - i\omega_0(\varepsilon)).$$

Модуль правой части равен единице, следовательно, модуль левой части тоже должен быть равен единице. Получаем

$$\omega_-^2(\varepsilon) + 1 = a^2.$$

Наименьшее  $|a|$ , при котором это равенство может быть выполнено, это  $|a| = 1$ . При этом  $\omega_- = 0$ .

Наконец, если  $0 < \gamma < 1$ , то равенство коэффициентов при  $\varepsilon^0$  будет иметь вид

$$1 = a \exp(-i\omega_- \varepsilon^{-\gamma} - i\omega_0(\varepsilon)).$$

Это уравнение будет иметь решение, только если  $|a| = 1$

Итак, мы получили значения параметров

$$a_0 = -1, \quad a^0 = 1.$$

Пусть сначала  $a = a^0 = 1$ . Как было показано выше, возможны две ситуации:  $\omega_- = 0$  и  $\omega_- \neq 0$ . В первом случае параметр  $\gamma$  теряет смысл, а во втором необходимо, чтобы  $0 < \gamma < 1$ .

Если  $\omega_- = 0$ , то главная часть квазиполинома (3.3) принимает вид уравнения

$$1 = \exp(-i\omega_0),$$

которое имеет счетное число корней  $\omega_{0k} = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Получаем асимптотическое представление корней (3.3), стремящихся к мнимой оси ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$\lambda_k = 2\pi i k(1 - \varepsilon + \varepsilon^2) - 2\pi^2 k^2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (3.4)$$

Если  $0 < \gamma < 1$ ,  $\omega_- \neq 0$ , то главная часть (3.3) представляется как

$$1 = \exp(-i\omega_- \varepsilon^{-\gamma} - i\omega_0(\varepsilon)). \quad (3.5)$$

Введем величину  $\theta = \theta(\varepsilon)$  по правилу

$$\theta(\varepsilon) \equiv -\frac{\omega}{\varepsilon^\gamma} \pmod{2\pi}.$$

Таким образом,  $\theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$  и  $\omega_- \varepsilon^{-\gamma} + \theta(\varepsilon)$  является целым кратным  $2\pi$ . Тогда видно, что при любом  $\omega_-$  уравнение (3.5) имеет корень  $\omega_- \varepsilon^{-\gamma} i + \theta(\varepsilon) i$ . Следовательно, получаем еще одну асимптотику корней (3.3) ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$\lambda_k(\omega, \varepsilon) = \frac{\omega k}{\varepsilon^\gamma} i + k\theta(\varepsilon) i + i\varepsilon^{1-\gamma}(-\omega k + o(1)) + \varepsilon^{2-2\gamma} \left( -\frac{\omega^2 k^2}{2} + o(1) \right). \quad (3.6)$$

Отметим, что хоть формула (3.6) зависит от непрерывного параметра  $\omega$ , уравнение (3.3) имеет лишь счетное число корней.

Значит, при  $a = 1$  у характеристического квазимногочлена (3.3) существует бесконечное число корней, стремящихся к мнимой оси при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Аналогичным образом рассмотрим ситуацию  $a = a_0 = -1$ . В результате получим, что при таком  $a$  квазиполином (3.3) также имеет счетное число корней, действительная часть которых стремится к нулю. В случае  $\omega_- = 0$  получаем асимптотику ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$\lambda_k = \pi i(2k-1)(1-\varepsilon+\varepsilon^2) - \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{2} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (3.7)$$

Пусть  $0 < \gamma < 1$ . Рассмотрим тогда величину  $\theta_1 = \theta_1(\varepsilon) \in [0, \pi)$  такую, что

$$\theta_1(\varepsilon) \equiv -\frac{\omega}{\varepsilon^\gamma} \pmod{\pi}.$$

Тогда можно сказать, что у квазиполинома (3.3) есть корни с асимптотикой ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$\begin{aligned} \lambda_k(\omega, \varepsilon) = & \frac{\omega(2k-1)}{\varepsilon^\gamma} i + (2k-1)\theta_1(\varepsilon) i + \varepsilon^{1-\gamma}(-\omega(2k-1) + o(1)) i + \\ & + \varepsilon^{2-2\gamma} \left( -\frac{\omega^2(2k-1)^2}{2} + o(1) \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

**Лемма 3.1** Если  $|a| < 1$ , то существуют такие  $M > 0$  и  $\varepsilon_0 > 0$ , что все корни характеристического квазиполинома (3.3) при всех  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  удовлетворяют условию  $\operatorname{Re} \lambda < -M$ .



Если  $|a| > 1$ , то существуют такие  $M > 0$  и  $\varepsilon_0 > 0$ , что при каждом  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  квазиполином (3.3) имеет корень  $\lambda_0$ , удовлетворяющий  $\operatorname{Re} \lambda_0 > M$ .

Для доказательства леммы нам достаточно показать, что при  $|a| > 1$  найдутся  $M > 0$  и  $\varepsilon_0 > 0$  такие, что при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  уравнение (3.3) имеет корень с вещественной частью большей  $M$ . Обозначим через  $\lambda(a, \varepsilon)$  какой-нибудь корень. Утверждение будет доказано, если удастся показать, что для какого-нибудь номера  $k$  неравенства

$$\operatorname{Re} \frac{d\lambda(a, \varepsilon)}{da} \Big|_{a=1, \lambda=\lambda_k} > 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} \frac{d\lambda(a, \varepsilon)}{da} \Big|_{a=-1, \lambda=\lambda_k} < 0$$

выполняются при всех  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . В первом неравенстве  $\lambda_k$  определяется по формуле (3.4), а во втором — по формуле (3.7). Вычислим значение действительной части производной, которая стоит в левой части неравенств. Получим

$$\operatorname{Re} \frac{d\lambda(a, \varepsilon)}{da} = \frac{1 + \varepsilon(\varepsilon \operatorname{Re} \lambda + 1 + 2\operatorname{Re} \lambda + \varepsilon|\lambda|^2)}{a|\varepsilon + 1 + \varepsilon\lambda|^2}.$$

Фиксируем  $\lambda = \lambda_k$  ( $k$  возьмем произвольным). Тогда выражение, стоящее в числителе дроби, при малых  $\varepsilon$  положительно, следовательно, знак всей дроби совпадает со знаком  $a$ . Что и требовалось доказать.

**3.3.** Изучим динамику (3.2) при значениях  $a$  близких к 1. Если  $a = 1$ , то, как было показано выше, у характеристического квазиполинома (3.3) нет корней с отделенной при  $\varepsilon \rightarrow 0$  положительной вещественной частью и есть счетное число корней  $\lambda_k(\varepsilon)$ , действительная часть которых стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Все такие корни описываются асимптотическими равенствами (3.4) и (3.6).

Рассмотрим сначала случай, когда

$$a = 1 + \varepsilon^2 a_1. \quad (3.9)$$

В предыдущем параграфе мы рассматривали случай, когда только два корня характеристического квазимногочлена стремились к мнимой оси. Несмотря на то, что теперь таких корней бесконечное количество, воспользуемся аналогичным методом.

Положим в (3.2)

$$x = \varepsilon^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{2\pi i k t_1} + \varepsilon^4 x_1(t_1, \tau) + \dots, \quad (3.10)$$

где  $\tau = \varepsilon^2 t$ ,  $t_1 = (1 - \varepsilon + \varepsilon^2)t$ , а функция  $x_1(t_1, \tau)$  предполагается периодической по первому аргументу с периодом 1. Так же как и выше, подставим выражение для  $x$  в формулу (3.2) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . На первом и втором шаге, приравнявая коэффициенты при  $\varepsilon^2$  и  $\varepsilon^3$  соответственно, получим верные тождества. На третьем шаге придем к уравнению относительно  $x_1$ .

$$x_1 = x_1(t_1 - 1, \tau) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} [(a_1 - 2\pi^2 k^2) \xi_k(\tau) - \frac{d\xi_k}{d\tau}] e^{2\pi i k t_1} + \\ + f_2 \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{2\pi i k t_1} \right)^2.$$

Так как  $x_1(t_1, \tau)$  периодична, то  $x_1(t_1, \tau) = x(t_1 - 1, \tau)$ , следовательно, это уравнение принимает вид

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [(a_1 - 2\pi^2 k^2) \xi_k(\tau) - \frac{d\xi_k}{d\tau}] e^{2\pi i k t_1} + f_2 \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{2\pi i k t_1} \right)^2.$$

Откуда следует, что для каждого  $k \in Z$  выполняется

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = [a_1 - 2\pi^2 k^2] \xi_k + f_2 \varphi_k(\xi). \quad (3.11)$$

Здесь через  $\varphi_k(\xi)$  обозначен коэффициент при  $\exp(2\pi i k t)$  в разложении функции

$$\left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k e^{2\pi i k t} \right)^2$$

в ряд Фурье.

Систему (3.11) можно записать в виде одного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + f_2 u^2 \quad (3.12)$$

с периодическим краевым условием

$$u(\tau, r + 1) = u(\tau, r). \quad (3.13)$$

Действительно, если разложить решение задачи (3.12)—(3.13) в ряд по собственным функциям линеаризованной правой части, который совпадает с рядом Фурье,

$$u(\tau, r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(2\pi i k r),$$

то для определения амплитуд  $\xi_k(\tau)$  получим в точности систему (3.11). Поэтому задача (3.12)—(3.13) играет роль нормализованной формы для исходного уравнения (3.2). Как известно, устойчивыми решениями такой краевой задачи могут быть только пространственно-однородные состояния равновесия, которым, в силу формулы (3.10), будут соответствовать устойчивые решения (3.2), близкие к постоянным. В силу этого, динамика (3.2) в случае (3.9) описывается следующей теоремой.

**Теорема 3.1** Пусть  $a_1 > 0$ . Тогда нулевое решение уравнения (3.2) неустойчиво, и существует асимптотически устойчивое стационарное решение  $y_0(t, \varepsilon)$ , причем

$$y(t) = -\varepsilon^2 \frac{a_1}{f_2} (1 + o(1)).$$

Если же  $a_1 < 0$ , то нулевое решение уравнения (3.2) асимптотически устойчиво.

Перейдем теперь к ситуации

$$a = 1 + \varepsilon^p a_1, \quad 0 < p < 2. \quad (3.14)$$

Положим  $\gamma = 1 - p/2$ .

Подставим в (3.2) следующий ряд:

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^p \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{kit_1} + \varepsilon^{2p} x_2(t_1, \tau) + \dots, \quad (3.15)$$

где  $\tau = \varepsilon^p t$ ,  $t_1 = (\omega \varepsilon^{-\gamma} + \theta(\varepsilon) - \varepsilon^{1-\gamma} \omega + o(1))t$ , а  $x_2(t_1, \tau)$   $2\pi$ -периодична по первому аргументу. Действуя так же, как и выше, т.е. собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим систему для определения амплитуд  $\xi_k$ , которую можно представить в виде одного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + a_1 u + f_2 u^2 \quad (3.16)$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(\tau, r) = u\left(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}\right). \quad (3.17)$$

Отметим, что выбор  $\omega$  был абсолютно произволен. Следовательно, если мы возьмем другое значение параметра  $\omega = \omega_1$ , то получим аналогичную (3.16)–(3.17) краевую задачу, но краевые условия будут уже иными. Таким образом мы получили сразу целый класс уравнений, являющихся нормализованными формами. Так же как и у системы (3.12)–(3.13), у краевой задачи (3.16)–(3.17) могут быть устойчивы только пространственно-однородные состояния равновесия (которые от выбора  $\omega$  не зависят).

**Теорема 3.2** Пусть  $a_1 > 0$ . Тогда нулевое решение уравнения (3.2) неустойчиво, и существует асимптотически устойчивое стационарное решение, допускающее представление вида

$$x(t, \varepsilon) = -\varepsilon^p \frac{a_1}{f_2}(1 + o(1)).$$

Если же  $a_1 < 0$ , то нулевое решение уравнения (3.2) асимптотически устойчиво.

**3.4.** Рассмотрим теперь (3.2) при значениях  $a$  близких к  $-1$ . Положим сначала

$$a = -1 + \varepsilon^2 a_1. \quad (3.18)$$

Рассмотрим асимптотический ряд, аналогичный (3.10)

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{\pi i(2k-1)t_1} + \varepsilon^2 x_2(t_1, \tau) + \varepsilon^3 x_3(t_1, \tau) + \dots, \quad (3.19)$$

где все параметры такие же, как и в предыдущем случае:  $\tau = \varepsilon^2 t$ ,  $t_1 = (1 - \varepsilon + \varepsilon^2)t$ ,  $x_n(t_1, \tau)$  периодичны по первому аргументу с периодом 1. Подставим ряд (3.19) в (3.2) и последовательно будем приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon^1$ , как легко убедиться, получим верное тождество. Из уравнения, получившегося при  $\varepsilon^2$  после очевидных сокращений,

$$x_2 + x_2(t_1 - 1, \tau) = f_2 \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{\pi i(2k-1)t_1} \right)^2,$$

используя периодичность  $x_2$ , получим

$$x_2(t_1, \tau) = \frac{f_2}{2} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{\pi i(2k-1)t_1} \right)^2.$$

Приравнивая коэффициенты при  $\varepsilon^3$ , приходим к уравнению

$$\begin{aligned} x_3 + x_3(t_1 - 1, \tau) = & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \left( -\frac{\pi^2(2k-1)^2}{2} + a_1 \right) \xi_k(\tau) - \frac{d\xi_k}{d\tau} \right] e^{\pi i(2k-1)t_1} + \\ & + 2f_2x_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{\pi i(2k-1)t_1} + f_3 \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{\pi i(2k-1)t_1} \right)^3. \end{aligned}$$

В левой части стоит периодическая по  $t_1$  функция. Значит, выражение в правой части тоже периодически зависит от  $t_1$ . Это может быть, только если правая часть равна нулю. Т.е. для всех целых  $k$  выполняются равенства

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = \left( -\frac{\pi^2(2k-1)^2}{2} + a_1 \right) \xi_k + (f_2^2 + f_3)\varphi_k(\xi), \quad (3.20)$$

где через  $\varphi_k(\xi)$  обозначен коэффициент при  $\exp(\pi(2k-1)it)$  в разложении

$$\left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{\pi i(2k-1)t_1} \right)^3$$

в ряд Фурье.

Систему (3.20) можно представить в виде одного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + (f_2^2 + f_3)u^3 \quad (3.21)$$

с антипериодическими краевыми условиями

$$u(\tau, r) = -u(\tau, r+1). \quad (3.22)$$

Если решения (3.21)–(3.22) разложить в ряд по собственным функциям линеаризованной правой части

$$u(\tau, r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{\pi i(2k-1)r},$$

то для определения амплитуд  $\xi_k$  получим систему (3.20). Поэтому краевую задачу (3.21)–(3.22) можно считать нормализованной формой уравнения (3.2) при условии (3.18).

У этой краевой задачи, в отличие от (3.12)–(3.13), могут быть устойчивые нестационарные периодические решения.

Будем говорить, что  $x_*(t, \varepsilon)$  является решением по невязке уравнения  $L(x, \varepsilon) = 0$  с точностью  $\varepsilon^n$ , если выполняется  $L(x_*(t, \varepsilon), \varepsilon) = o(\varepsilon^n)$ .

**Теорема 3.3** Пусть краевая задача (3.21)–(3.22) имеет решение  $u_*(\tau, r)$ . Тогда уравнение (3.2) имеет асимптотическое по невязке решение

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon u(\varepsilon^2 t, t(1 - \varepsilon + \varepsilon^2))(1 + o(1)).$$

Рассмотрим теперь случай

$$a = -1 + \varepsilon^p a_1, \quad 0 < p < 2. \quad (3.23)$$

Положим  $\gamma = 1 - p/2$ .

Подставим в (3.2) следующий ряд:

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{(2k-1)it_1} + \varepsilon^p x_2(t_1, \tau) + \varepsilon^{3p/2} x_3(t_1, \tau) + \dots, \quad (3.24)$$

где  $\tau = \varepsilon^p t$ ,  $t_1 = (\omega \varepsilon^{-\gamma} + \theta_1(\varepsilon) - \varepsilon^{1-\gamma} \omega + o(1))t$ , а  $x_2(t_1, \tau)$  и  $x_3(t_1, \tau)$   $2\pi$ -периодичны по первому аргументу. Напомним, что  $\theta_1(\varepsilon) \in [0, \pi)$  выбирается так, чтобы число  $\omega \varepsilon^{-\gamma} + \theta_1(\varepsilon)$  было целым кратным  $\pi$ . Действуя так же, как и выше, т.е. собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим систему для определения амплитуд  $\xi_k$ , которую можно представить в виде одного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + (f_2^2 + f_3) u^2 \quad (3.25)$$

с антипериодическими краевыми условиями

$$u(\tau, r) = -u(\tau, r + \frac{\pi}{\omega}). \quad (3.26)$$

Так же, как и в предыдущем пункте, мы получили в качестве нормализованной формы семейство краевых задач (3.25)–(3.26), зависящее от непрерывного параметра  $\omega > 0$ . При различных значениях параметра динамика этой задачи может быть, вообще говоря, различной.

**Теорема 3.4** Пусть при каком-то фиксированном  $\omega > 0$  краевая задача (3.25)–(3.26) имеет решение  $u_*(\tau, r)$ . Тогда исходное уравнение (3.2) имеет асимптотическое по невязке решение вида

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p/2} u_*(\varepsilon^p t, (\frac{\omega}{\varepsilon^\gamma} + \theta(\varepsilon) - \varepsilon^{1-\gamma} \omega + \varepsilon \theta(\varepsilon)) t).$$

Из этой теоремы мы не можем сделать вывод, существует ли у (3.2) точное решение с приведенной асимптотикой. Можем лишь сказать, что если  $u_*$  неустойчиво, то даже если точное решение и существует, то оно заведомо неустойчиво. Поэтому рассматривать нужно только устойчивые решения (3.25)–(3.26).

**Упражнение 3.1.** Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$\varepsilon \dot{z} + z = az(t-1) + \mu f(z(t-1)),$$

где  $0 < \mu \ll 1$ . Покажите, что при условии  $a = 1$  и  $a = -1$  роль нормализованного уравнения, описывающего динамику исходной системы уже не в малой, но в произвольной фиксированной окрестности нуля, играют, соответственно, краевые задачи

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + f(u), \quad u(\tau, r) = u(\tau, r+1)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \Phi(u), \quad u(\tau, r) = -u(\tau, r+1),$$

где обозначено:  $\delta = \varepsilon \mu^{-1/2}$ ,  $\Phi(u) = (f(-u) - f(u))/2$ .

## §4. Локальная динамика уравнения с двумя запаздываниями

**4.1.** В этом и трех последующих параграфах изучим локальную динамику дифференциального уравнения с двумя запаздываниями вида

$$\dot{x} + x = ax(t-T) + bx(t-T_1) + f(x, x(t-T), x(t-T_1)). \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) является естественным обобщением уравнения с одним запаздыванием. Здесь  $0 < T < T_1$ , а достаточно гладкая функция  $f(\cdot, \cdot, \cdot)$

имеет в нуле порядок малости выше первого. Для упрощения дальнейших вычислений будем считать, что нелинейность  $f$  зависит только от первого аргумента, т.е.  $f(x, y, z) \equiv f(x)$ . Представим в окрестности нуля

$$f(x) = f_2 x^2 + f_3 x^3 + \dots$$

Ситуация, когда  $f$  зависит от  $x(t - T)$  и от  $x(t - T_1)$ , разбирается полностью аналогично.

Центральное место исследования занимает изучение поведения корней характеристического квазиполинома

$$\lambda + 1 - a \exp(-\lambda T) - b \exp(-\lambda T_1), \quad (4.2)$$

линеаризованного в нуле уравнения (4.1).

Критический случай в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия (4.1) реализуется при условии, когда характеристическое уравнение (4.2) имеет корни с нулевой вещественной частью и не имеет с положительной. В отличие от случая одного запаздывания, здесь может реализовываться критический случай двух пар чисто мнимых корней; случай нулевого и пары чисто мнимых корней и др. Наибольший интерес представляет выявление тех особенностей, которые, во-первых, возникают при условии, когда хотя бы один из параметров  $T$  или  $T_1$ , характеризующих запаздывание, является достаточно большим и, во-вторых, специфичны для уравнения с двумя запаздываниями.

**4.2.** Изучим динамику уравнения (4.1) при условии, когда параметр  $T_1$  является достаточно большим. Здесь будем предполагать, что параметры  $a$ ,  $b$  и  $T$  как-то фиксированы, а для параметра  $T_1$  выполнено условие

$$T_1 \gg 1. \quad (4.3)$$

Выполним нормировку времени  $t \rightarrow tT_1$ . В итоге получим другую форму записи уравнения (4.1)

$$\varepsilon \dot{x} + x = ax(t - \varepsilon T) + bx(t - 1) + f(x), \quad (4.4)$$

где  $0 < \varepsilon = T_1^{-1} \ll 1$ .

Рассмотрим сначала линейное уравнение

$$\varepsilon \dot{x} + x = ax(t - \varepsilon T) + bx(t - 1)$$

и его характеристический квазиполином

$$\varepsilon \lambda + 1 = a \exp(-\varepsilon \lambda T) + b \exp(-\lambda). \quad (4.5)$$



Введем комплексную функцию

$$P(\omega) = i\omega + 1 - a \exp(-i\omega T) = \rho(\omega) \exp(i\varphi(\omega))$$

вещественного аргумента  $\omega$ , которая получается из (4.5) при  $\lambda = i\omega$ . Здесь  $\rho(\omega) \geq 0$  и  $\varphi(\omega)$  — вещественнозначные функции. Пусть  $b_0$  такое, что  $bb_0 \geq 0$  и

$$|b_0| = \min_{0 \leq \omega < \infty} \rho(\omega) = \rho(\omega_0).$$

Отметим, что  $\omega_0$  определяется единственным образом. Сформулируем несколько простых промежуточных утверждений. Через  $q$  ниже обозначается некоторая положительная и не зависящая от  $\varepsilon$  постоянная, точное значение которой несущественно.

В параграфе 1 была введена константа  $a_0(T)$ .

**Лемма 4.1** Пусть  $a > 1$  либо  $a < a_0(T)$ . Тогда при всех достаточно малых  $\varepsilon$  уравнение (4.5) имеет корень  $\lambda(\varepsilon)$ , удовлетворяющий неравенству  $\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon) \geq q$ .

Тем самым в условии леммы 4.1 задача о динамике уравнения (4.4) становится нелокальной: в произвольно фиксированной (но не зависящей от  $\varepsilon$ ) окрестности нулевого состояния равновесия уравнения (4.4) не может существовать аттрактор. Поэтому ниже предполагаем, что выполнено неравенство

$$a_0(T) \leq a \leq 1.$$

Отметим, что в случае  $a = a_0(T)$  или  $a = 1$  параметр  $b_0 = 0$ . Этот случай будет рассмотрен в следующем пункте. Здесь же будем считать, что

$$a_0(T) < a < 1. \quad (4.6)$$

В §1 было показано, что условие (4.6) является необходимым и достаточным для асимптотической устойчивости решений более простого уравнения

$$\varepsilon \dot{x} + x = ax(t - \varepsilon T).$$

**Лемма 4.2** Пусть  $|b| > |b_0|$ . Тогда при всех достаточно малых  $\varepsilon$  существует такой корень  $\lambda(\varepsilon)$  уравнения (4.5), для которого  $\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon) \geq q$ .

**Лемма 4.3** Пусть  $|b| < |b_0|$ . Тогда при всех достаточно малых  $\varepsilon$  все корни уравнения (4.5) удовлетворяют неравенству  $\operatorname{Re} \lambda \leq -q$ .

В условии леммы 4.2 задача о динамике уравнения (4.4) снова является нелокальной, а в условии леммы 4.3 — тривиальной: все решения из произвольно фиксированной (но не зависящей от  $\varepsilon$ ) окрестности нулевого решения стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Таким образом, в изучении нуждается ситуация, когда параметр  $b$  близок по модулю к  $b_0$ . Мы изучим две ситуации:

$$b = b_0(1 + \varepsilon^2 b_1), \quad (4.7)$$

и

$$b = b_0(1 + \varepsilon^p b_1), \quad 0 < p < 2. \quad (4.8)$$

Пусть сначала выполнено условие (4.7). Тогда квазимногочлен (4.5) имеет бесконечное количество корней вида

$$\lambda_k = \frac{\omega_0}{\varepsilon} i + (\theta(\varepsilon) + \Omega + 2\pi k) i + \varepsilon \lambda_{k1} + \varepsilon^2 \lambda_{k2} + O(\varepsilon^3),$$

где  $\theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$  такое, что  $\omega_0 \varepsilon^{-1} + \theta(\varepsilon)$  является целым кратным  $2\pi$ ,  $\Omega \in [0, 2\pi)$  определяется уравнением

$$b_0 \exp(-i\Omega) = i\omega_0 + 1 - a \exp(-i\omega_0 T),$$

а для  $\lambda_{k1}$  и  $\lambda_{k2}$  справедливы формулы

$$\begin{aligned} \lambda_{k1} &= -\varphi'(\omega_0)(\theta(\varepsilon) + \Omega + 2\pi k)i, \\ \lambda_{k2} &= b_1 - \frac{1}{2}(\varphi'(\omega_0))^2 + \frac{\rho''(\omega_0)}{b_0^{-1}}(\theta(\varepsilon) + \Omega + 2\pi k)^2 - \\ &\quad - (\varphi'(\omega_0))^2(\theta + \Omega + 2\pi k)i - \frac{1}{2}\varphi''(\omega_0)(\theta(\varepsilon) + \Omega + 2\pi k)^2 i. \end{aligned}$$

Рассмотрим асимптотический ряд

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= \varepsilon e^{(\omega_0 \varepsilon^{-1} + \theta + \Omega - \varepsilon \varphi'(\omega_0)(\theta + \Omega))ti} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{2\pi i k t_1} + \\ &\quad + \varepsilon e^{-(\omega_0 \varepsilon^{-1} + \theta + \Omega - \varepsilon \varphi'(\omega_0)(\theta + \Omega))ti} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\xi}_k(\tau) e^{-2\pi i k t_1} + \\ &\quad + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \dots, \end{aligned} \quad (4.9)$$

в котором  $t_1 = (1 - \varepsilon \varphi'(\omega_0))t$ ,  $\tau = \varepsilon^2 t$ , а функции  $x_j = x_j(t\varepsilon^{-1}, t_1, \varepsilon t, \tau)$  периодичны по первым трем аргументам. Подставим этот ряд в (4.4)

и соберем коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon^3$  получим уравнение относительно  $x_3$ , которое имеет периодические решения тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = \lambda_{k2}\xi_k + \left( 3f_3 e^{i\Omega} + 2f_2 [P(2\omega_0) - b_0 e^{-2i\Omega}]^{-1} \right) \Psi_k(\xi), \quad (4.10)$$

где через  $\Psi_k(\xi)$  обозначен коэффициент при  $\exp(2\pi i k t)$  в разложении функции

$$\left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m(\tau) e^{2\pi i m t} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\xi}_m(\tau) e^{-2\pi i m t} \right)^3$$

в ряд Фурье.

Система (4.10) может быть записана в виде одной краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + d_2 \frac{\partial u}{\partial r} + d_3 u + d u |u|^2, \quad u(\tau, r) \equiv u(\tau, r+1), \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{2} ((\varphi'(\omega_0))^2 + \rho''(\omega_0) b_0^{-1} + i \varphi''(\omega_0)), \\ d_2 &= -(\varphi'(\omega_0))^2 + 2i d_1 (\theta + \Omega), \\ d_3 &= b_1 - d_1 (\theta + \Omega)^2 - (\varphi'(\omega_0))^2 (\theta + \Omega), \\ d &= 3f_3 e^{i\Omega} + 2f_2 [P(2\omega_0) - b_0 e^{-2i\Omega}]^{-1}. \end{aligned}$$

Эта система играет роль нормальной формы для уравнения (4.4).

**Теорема 4.1** Пусть (4.11) имеет периодическое орбитально устойчивое (неустойчивое) решение  $u_*(\tau, r)$ . Тогда исходное уравнение (4.4) имеет быстро осциллирующее асимптотическое по невязке решение

$$x_*(t) = \varepsilon e^{(\omega_0 \varepsilon^{-1} + \theta + \Omega - \varepsilon \varphi'(\omega_0)(\theta + \Omega)) i t} u(\varepsilon^2 t, t(1 - \varepsilon \varphi'(\omega_0)) + \kappa.c.)(1 + o(1)). \quad (4.12)$$

Пусть теперь выполнено условие (4.8). Тогда характеристический многочлен (4.5) имеет для любого  $\omega > 0$  набор корней вида

$$\lambda_k(\varepsilon) = \left( \frac{\omega_0}{\varepsilon} + \frac{\omega k}{\varepsilon^{1-p/2}} + \theta_0(\varepsilon) + k\theta(\varepsilon) + \Omega \right) i + \varepsilon^{p/2} i (\lambda_{k1} + o(1)) + \varepsilon^p (\lambda_{k2} + o(1)),$$

где  $\theta_0, \theta \in [0, 2\pi)$  и дополняют до целого кратного  $2\pi$  величины  $\omega_0 \varepsilon^{-1}$  и  $\omega \varepsilon^{p/2-1}$  соответственно. А коэффициенты  $\lambda_{k1}$  и  $\lambda_{k2}$  определяются по формулам

$$\begin{aligned}\lambda_{k1} &= -i\omega k\varphi'(\omega_0), \\ \lambda_{k2} &= b_1 - \frac{\omega^2 k^2}{2}((\varphi'(\omega_0))^2 + \rho''(\omega_0)b_0^{-1}).\end{aligned}$$

Произведем в (4.4) замену, аналогичную (4.9)

$$\begin{aligned}x(t, \varepsilon) &= \varepsilon^{p/2} e^{(\omega_0 \varepsilon^{-1} + \theta_0 + \Omega)ti} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{\omega i k t_1} + \\ &+ \varepsilon^{p/2} e^{-(\omega_0 \varepsilon^{-1} + \theta_0 + \Omega)ti} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\xi}_k(\tau) e^{-\omega i k t_1} + \varepsilon^p x_2 + \varepsilon^{3p/2} x_3 + \dots\end{aligned}\quad (4.13)$$

Здесь  $t_1 = (\omega \varepsilon^{p/2-1} + \theta - \varepsilon^{p/2} \varphi'(\omega_0))t$ ,  $\tau = \varepsilon^p t$ , а функции  $x_j = x_j(t \varepsilon^{-1}, t_1, \tau)$  периодичны по первым двум аргументам. Действуя так же, как и выше, получим, что амплитуды  $\xi_k$  должны удовлетворять системе

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = \lambda_{k2} \xi_k + \left( 3f_3 e^{i\Omega} + 2f_2 [P(2\omega_0) - b_0 e^{-2i\Omega}]^{-1} \right) \Psi_k(\xi). \quad (4.14)$$

Здесь, как и ранее, через  $\Psi_k(\xi)$  обозначен коэффициент при  $\exp(2\pi i k t)$  в разложении функции

$$\left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m(\tau) e^{2\pi i m t} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\xi}_m(\tau) e^{-2\pi i m t} \right)^3$$

в ряд Фурье.

Система (4.14) может быть представлена в виде параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + b_1 u + d u |u|^2, \quad u(\tau, r) \equiv u\left(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}\right), \quad (4.15)$$

где

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{1}{2}((\varphi'(\omega_0))^2 + \rho''(\omega_0)b_0^{-1} + i\varphi''(\omega_0)), \\ d &= 3f_3 e^{i\Omega} + 2f_2 [P(2\omega_0) - b_0 e^{-2i\Omega}]^{-1}.\end{aligned}$$

**Теорема 4.2** Пусть краевая задача (4.15) имеет решение  $u_*(\tau, r)$ . Тогда у исходного уравнения (4.4) существует асимптотическое по невязке с точностью до  $O(\varepsilon^{3p/2})$  решение вида

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p/2} e^{(\omega_0 \varepsilon^{-1} + \theta_0 + \Omega) t i} u_*(\varepsilon^p t, (\omega \varepsilon^{p/2-1} + \theta - \varepsilon^{p/2} \varphi'(\omega_0)) t) (1 + o(1)).$$

Отметим, что мы не можем сделать вывод о существовании у (4.4) точного решения с приведенной асимптотикой. Однако, если  $u_*$  неустойчиво, то даже если точное решение существует, то оно неустойчиво. Таким образом, нам достаточно рассматривать только устойчивые решения (4.15).

**4.3.** Изучим роль малых возмущений в уравнениях с большим запаздыванием. Предположим теперь, что кроме условия (4.3) выполнено

$$|b| \ll 1, \quad (4.16)$$

т.е. большое значение запаздывания присутствует в слагаемом с малым множителем. Введем обозначения:

$$\varepsilon = T_1^{-1}, \quad b = \varepsilon^p b_1, \quad \text{где } 0 < \varepsilon \ll 1, \quad 0 < p \leq 1.$$

Тогда уравнение (4.4) записывается в виде

$$\varepsilon \dot{x} + x = ax(t - \varepsilon T) + \varepsilon^p b_1 x(t - 1) + f(x). \quad (4.17)$$

Рассмотрим линеаризованное уравнение

$$\varepsilon \dot{x} + x = ax(t - \varepsilon T) + \varepsilon^p b_1 x(t - 1) \quad (4.18)$$

и его характеристический квазиполином

$$\varepsilon \lambda + 1 = a \exp(-\varepsilon \lambda T) + \varepsilon^p b_1 \exp(-\lambda). \quad (4.19)$$

Кроме этого, рассмотрим характеристический квазимногочлен

$$\lambda + 1 = a \exp(-\lambda T) \quad (4.20)$$

„вырожденного“ уравнения

$$\dot{x} + x = ax(t - T). \quad (4.21)$$

Сформулируем несколько простых утверждений.

**Лемма 4.4** Пусть характеристический квазимногочлен (4.20) уравнения (4.21) имеет корень  $\lambda_0$  с положительной вещественной частью. Тогда характеристический квазимногочлен (4.19) уравнения (4.18) имеет корень  $\lambda_0(\varepsilon)$  с асимптотикой

$$\lambda_0(\varepsilon) = \frac{\lambda_0}{\varepsilon} + o(\varepsilon^{-1}).$$

Тем самым, при условии  $\operatorname{Re} \lambda_0 > 0$  и при достаточно малых  $\varepsilon$  решения уравнения (4.18) неустойчивы и задача о поведении решений уравнения (4.1) в малой окрестности состояния равновесия становится нелокальной.

**Лемма 4.5** Пусть все корни характеристического квазимногочлена (4.20) имеют отрицательные вещественные части. Тогда при малых  $\varepsilon$  все решения линейного уравнения (4.18) и все решения из достаточно малой (но не зависящей от  $\varepsilon$ ) окрестности нулевого состояния равновесия уравнения (4.1) стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Таким образом, в изучении нуждаются лишь так называемые критические случаи, когда характеристический квазиполином (4.20) уравнения первого приближения (4.21) имеет корни с нулевой вещественной частью и не имеет с положительной. Критических случаев, как было показано в §1, возможны лишь два. Первый из них реализуется, когда  $a = 1$ , и уравнение (4.20) имеет простой нулевой корень, а второй — когда  $a = a_0(T) < 0$ , и уравнение (4.20) имеет пару чисто мнимых корней  $\lambda = \pm i\omega_0$ .

Первый случай. Пусть

$$a = 1 + \varepsilon^p a_1.$$

Тогда уравнение первого приближения (4.20) имеет корень

$$\lambda_0(\varepsilon) = (1 + T)^{-1} a_1 \varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

а все остальные его корни имеют отрицательные вещественные части и отделены от мнимой оси при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Рассмотрим вопрос о поведении корней уравнения (4.19).

Если  $a_1 > 0$ , то у него существует корень  $\lambda_+(\varepsilon) = a_1 \varepsilon^{p-1} (1 + o(1))$ . Понятно, что при малых  $\varepsilon$  этот корень имеет положительную вещественную часть и отделен от нуля. Следовательно, в некоторой окрестности нулевого решения уравнения (4.4) нет устойчивых решений.

Если  $a_1 < 0$ , то положим в (4.19)  $\lambda = \varepsilon^{p-1}\lambda_1(\varepsilon) + \dots$ . Выделяя главную часть уравнения, получим, что  $\lambda_1(\varepsilon)$  должно удовлетворять

$$(1+T)\lambda_1(\varepsilon) = a_1 + b_1 \exp(-\varepsilon^{p-1}\lambda_1(\varepsilon)). \quad (4.22)$$

Уравнение (4.22) является характеристическим квазиполиномом для уравнения с запаздыванием

$$(1+T)\dot{x} = a_1x + b_1x(t - \varepsilon^{p-1}). \quad (4.23)$$

Обозначим через  $\lambda_{1k}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) все корни (4.22) (занумеруем в порядке убывания вещественных частей). Таким образом определяется бесконечное множество корней  $\lambda_k(\varepsilon)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) уравнения (4.19) вида

$$\lambda_k(\varepsilon) = \varepsilon^{p-1}\lambda_{1k} + O(\varepsilon^2),$$

а значит, устойчивость решений уравнения (4.18) определяется свойствами устойчивости решения уравнения (4.23).

Перейдем теперь к рассмотрению нелинейного уравнения (4.17). Положим в нем

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^p \xi(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \varepsilon^3 x_3(\tau) + \dots, \quad (4.24)$$

где  $\tau = \varepsilon^{p-1}t$ , а функции  $x_2(\tau)$ ,  $x_3(\tau)$  и т.д. — ограничены при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Подставим (4.24) в (4.17) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . На первом шаге приходим к верному тождеству, а на втором — получим уравнение для нахождения  $\xi(\tau)$

$$(1+T)\frac{d\xi}{d\tau} = a_1\xi(\tau) + b_1\xi(\tau - \varepsilon^{p-1}) + f_2\xi^2. \quad (4.25)$$

Основной результат состоит в том, что в рассматриваемом случае уравнение (4.25) играет роль нормализованной формы для исходного уравнения (4.17).

Отметим, что при  $p < 1$  уравнение (4.25) является уравнением с большим запаздыванием. Для исследования его динамики применимы методы, изложенные в §3.

**Теорема 4.3** Пусть уравнение (4.25) имеет экспоненциально устойчивое состояние равновесия  $\xi(\tau) \equiv \xi_*$ . Тогда уравнение (4.17) имеет устойчивое решение

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^p \xi_*(1 + o(1)).$$

Пусть уравнение (4.25) имеет решение  $\xi^*(\tau)$ . Тогда и исходное уравнение (4.17) имеет асимптотическое по невязке решение

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^p \xi^*(\varepsilon^{p-1} \tau (1 + o(1))(1 + o(1))).$$

Второй случай. Пусть

$$a = a_0(T)(1 + \varepsilon^p a_1), \quad (4.26)$$

где  $a_0(T)$  такое, как было определено в §1. Квазиполином

$$\lambda + 1 = a_0(T) \exp(-\lambda T)$$

имеет два чисто мнимых корня  $\pm i\omega_0$ , а все остальные корни лежат в левой комплексной полуплоскости.

При условии (4.26) квазимногочлен (4.20) имеет пару комплексно сопряженных корней  $\lambda_{\pm}(\varepsilon)$  вида

$$\lambda_{+}(\varepsilon) = i\omega_0(T) + \varepsilon\lambda_1 + O(\varepsilon^2), \quad (4.27)$$

где  $\lambda_1$  описывается выражением

$$\lambda_1 = \frac{a_1(i\omega_0(T) + 1)}{1 + T(i\omega_0(T) + 1)}.$$

При этом все остальные корни квазимногочлена (4.20) имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При условии (4.26) рассмотрим вопрос об устойчивости решений линейного уравнения (4.18). Для этого изучим поведение корней его характеристического квазимногочлена (4.19). Введем одно обозначение. Пусть

$$\theta = \theta(\varepsilon) = -\frac{\omega_0(T)}{\varepsilon} \pmod{2\pi}.$$

То есть  $\theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ , и выражение  $\omega_0(T)\varepsilon^{-1} + \theta(\varepsilon)$  является целым кратным  $2\pi$ . Затем в (4.19) положим

$$\lambda = \lambda(\varepsilon) = \frac{i\omega_0(T)}{\varepsilon} + \varepsilon^{p-1}\lambda_1(\varepsilon) + \dots$$

Собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , приходим к уравнению для определения  $\lambda_1(\varepsilon)$

$$\lambda_1 = A + B \exp(-\lambda_1 \varepsilon^{p-1}), \quad (4.28)$$



в котором

$$A = \frac{a_1(i\omega_0(T) + 1)}{1 + (i\omega_0(T) + 1)T}$$

$$B = \frac{b_1}{1 + (i\omega_0(T) + 1)T} \exp(i\theta(\varepsilon))$$

Уравнение (4.28) имеет счетное множество корней  $\lambda_{jk}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), которые можно занумеровать в порядке убывания их вещественных частей. Важно отметить, что это уравнение является характеристическим квазиполиномом уравнения с запаздыванием

$$\dot{x} - Ax = Bx(t - \varepsilon^{p-1}).$$

Все остальные корни характеристического квазиполинома (4.19) имеют отрицательные вещественные части, которые при  $\varepsilon \rightarrow 0$  находятся в левой комплексной полуплоскости и отделены от мнимой оси.

Вернемся к исходному нелинейному уравнению (4.17). Положим в нем

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p/2} \left[ \xi(\tau) e^{i\omega_0(T)\varepsilon^{-1}t} + \text{к.с.} \right] + \varepsilon^p x_2(t, \tau) + \varepsilon^{3p/2} x_3(t, \tau) + \dots, \quad (4.29)$$

где  $\tau = \varepsilon^{p-1}t$ , а функции  $x_j(t, \tau)$  являются  $2\pi/\omega_0(T)$ -периодическими по первому аргументу. Подставим (4.29) в (4.17) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . На первом шаге получится верное тождество, а на втором, т.е. при  $\varepsilon^p$ , получим уравнение для нахождения  $x_2(t, \tau)$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} + x_2 - a_0(T)x_2(t - T) = f_2 \left( \xi^2(\tau) e^{2i\omega_0\varepsilon^{-1}t} + 2|\xi(\tau)|^2 + \bar{\xi}^2(\tau) e^{-2i\omega_0\varepsilon^{-1}t} \right). \quad (4.30)$$

Из (4.30) находим функцию  $x_2(t, \tau)$

$$x_2(t, \tau) = x_{21}\xi^2(\tau)e^{2i\omega_0(T)\varepsilon^{-1}t} + x_{22}|\xi(\tau)|^2 + \bar{x}_{21}\bar{\xi}^2(\tau)e^{-2i\omega_0(T)\varepsilon^{-1}t},$$

где

$$x_{21}(\tau) = \frac{f_2 a_0(T)}{(1 + i\omega_0(T))^2 + a_0(1 + 2i\omega_0(T))},$$

$$x_{22}(\tau) = \frac{2f_2}{1 - a_0(T)}.$$

После этого, собирая коэффициенты при  $\varepsilon^{3/2}$ , приходим к уравнению для определения функции  $x_3(t, \tau)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_3}{\partial t} + x_3 - a_0(T)x_3(t - T, \tau) + \left[ (1 + T(1 + i\omega_0)) \frac{d\xi}{d\tau} e^{i\omega_0 \varepsilon^{-1} t} + \text{к.с.} \right] = \\ = a_1 \left[ (1 + i\omega_0) \xi e^{i\omega_0 \varepsilon^{-1} t} + \text{к.с.} \right] + b_1 \left[ \xi(\tau - \varepsilon^{p-1}) e^{i\theta(\varepsilon) + i\omega_0 \varepsilon^{-1} t} + \text{к.с.} \right] + \\ + 2f_2 x_2(t, \tau) \left( \xi e^{i\omega_0 \varepsilon^{-1} t} + \bar{\xi} e^{-i\omega_0 \varepsilon^{-1} t} \right) + f_3 \left( \xi e^{i\omega_0 \varepsilon^{-1} t} + \bar{\xi} e^{-i\omega_0 \varepsilon^{-1} t} \right)^3. \end{aligned}$$

Условие разрешимости этого уравнения в классе  $2\pi\varepsilon/\omega_0$ -периодических функций состоит в выполнении равенства

$$\frac{d\xi}{d\tau} - A\xi = B\xi(\tau - \varepsilon^{p-1}) + \sigma_1 |\xi|^2 \xi, \quad (4.31)$$

где

$$\sigma_1 = 2f_2(x_{21} + x_{22}) + 3f_3.$$

Уравнение (4.31) играет роль нормальной формы для уравнения (4.17) в случае (4.26). Так же как и выше, если  $p < 1$ , то это уравнение является уравнением с большим запаздыванием, для исследования которого можно применять методы, описанные в §3.

**Теорема 4.4** Пусть уравнение (4.31) имеет решение  $\xi_*(\tau)$ . Тогда уравнение (4.17) имеет решение по невязке с точностью  $O(\varepsilon^p)$  вида

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p/2} \left( \xi_*(\varepsilon t) e^{i\omega_0(T)t} + \bar{\xi}_*(\varepsilon t) e^{-i\omega_0(T)t} \right) (1 + o(1))$$

**Упражнение 4.1.** Покажите, что если нелинейная функция  $f$  зависит не только от  $x(t)$ , но и от  $x(t - T)$  и от  $x(t - \varepsilon^{-1})$ , то нормализованная форма для уравнения (4.1) при условиях (4.3), (4.16) и (4.26) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} - A\xi = B\xi(\tau - 1) + \sigma_1 |\xi|^2 \xi + \sigma_2 |\xi|^2 \xi(\tau - 1) + \sigma_3 \xi^2 \bar{\xi}(\tau - 1) + \\ + \sigma_4 \xi |\xi(\tau - 1)|^2 + \sigma_5 \bar{\xi} \xi^2(\tau - 1) + \sigma_6 |\xi(\tau - 1)|^2 \xi(\tau - 1). \end{aligned}$$

**Упражнение 4.2.** Постройте в окрестности нуля нормализованную форму для уравнения

$$\dot{x} = \varepsilon b_1 x(t - \frac{1}{\varepsilon}) + ax^2(t) + bx^2(t - \frac{1}{\varepsilon}).$$

**Упражнение 4.3.** Постройте в окрестности нулевого состояния равновесия нормализованную форму для уравнения

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2}(1 + \varepsilon a_1)x(t-1) + \varepsilon b_1x(t - \frac{1}{\varepsilon}) + f(x, x(t-1), x(t - \frac{1}{\varepsilon})).$$

## §5. Динамика уравнения с двумя большими „близкими“ друг другу запаздываниями

**5.1.** Так же, как и в предыдущем параграфе, рассматривается уравнение

$$\dot{x} + x = ax(t - T_1) + bx(t - T_2) + f(x). \quad (5.1)$$

Здесь по-прежнему  $0 < T_1 < T_2$ , а достаточно гладкая функция  $f(\cdot)$  имеет в нуле порядок малости выше первого. Будем считать, что

$$f(x) = f_2x^2 + f_3x^3 + \dots$$

Основное предположение этого параграфа состоит в том, что оба значения  $T_1$  и  $T_2$  достаточно большие и относительно близкие друг другу величины, т.е.

$$T_1 = \varepsilon^{-1}, \quad T_2 = T_1(1 + \varepsilon c), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (5.2)$$

Сделаем в (5.1) стандартную замену времени  $t \rightarrow Tt$ . Полученное уравнение будет иметь вид

$$\varepsilon \dot{x} + x = ax(t-1) + bx(t-1-\varepsilon c) + f(x). \quad (5.3)$$

Построим характеристический квазимногочлен линеаризованного уравнения

$$\varepsilon \lambda + 1 = \exp(-\lambda)[a + b \exp(-c\varepsilon \lambda)]. \quad (5.4)$$

Для ограниченного на некоторой последовательности  $\varepsilon = \varepsilon_n \rightarrow 0$  корня  $\lambda(\varepsilon)$  этого уравнения выполняются равенства

$$\lambda(\varepsilon_n) \rightarrow \lambda_0, \quad 1 = \exp(-\lambda_0)[a + b].$$

Тем самым, критический случай, аналогичный рассматриваемому в §3, возникает при условии

$$a + b = 1 \quad (5.5)$$

или

$$a + b = -1. \quad (5.6)$$

Необходимо лишь исключить возможность существования неограниченных при  $\varepsilon \rightarrow 0$  корней (5.4) с положительной вещественной частью. Это условие состоит в выполнении неравенства

$$1 + abc^2 > 0. \quad (5.7)$$

**5.2.** Рассмотрим сначала динамику (5.3) в случае (5.5). Соответствующие построения повторяют приведенные в пункте 3 §3. Выпишем необходимые формулы. Пусть

$$a = a_0 + \varepsilon^2 a_1, \quad b = b_0 + \varepsilon^2 b_1, \quad a_0 + b_0 = 1, \quad 1 + a_0 b_0 c^2 > 0.$$

Подстановка, аналогичная (3.10), имеет вид

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{2\pi i k t_1} + \varepsilon^4 x_2(t_1, \tau) + \dots \quad (5.8)$$

Здесь  $\tau = \varepsilon^2 t$ ,  $t_1 = (1 - (1 + b_0 c)\varepsilon + (1 + b_0 c)^2 \varepsilon^2)t$ , а функция  $x_2(t_1, \tau)$  является периодической по первому аргументу с периодом 1. Производя такие же действия, как и в §3, получим, что  $\xi_k$  при всех  $k \in Z$  должны удовлетворять системе

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = (-2\pi^2 k^2 b_0 c(1 - b_0) + a_1 + b_1) \xi_k + f_2 \varphi_k(\xi), \quad (5.9)$$

где через  $\varphi_k(\xi)$  обозначен коэффициент при  $\exp(2\pi i k t)$  в разложении функции

$$\left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k e^{2\pi i k t} \right)^2$$

в ряд Фурье. Бесконечномерную систему (5.9) можно свернуть в одно уравнение в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1 + a_0 b_0 c^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (a_1 + b_1)u + f_2 u^2 \quad (5.10)$$

с краевыми условиями

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + 1). \quad (5.11)$$

Отметим, что выполнение условий  $1 + a_0 b_0 c^2 > 0$  гарантирует параболичность этой задачи. У краевой задачи (5.10)–(5.11) устойчивыми могут быть только пространственно-однородные состояния равновесия.

Приведем основной результат.

**Теорема 5.1** Если  $a_1 + b_1 < 0$ , то при малых  $\varepsilon$  нулевое решение уравнения (5.3) асимптотически устойчиво.

Если  $a_1 + b_1 > 0$ , то при малых  $\varepsilon$  нулевое решение уравнения (5.3) неустойчиво, а в его окрестности существует асимптотически устойчивое близкое к постоянному решение вида

$$x_* = -\varepsilon^2(a_1 + b_1)f_2^{-1}(1 + o(1)).$$

Аналогично, если

$$a = a_0 + \varepsilon^p a_1, \quad b = b_0 + \varepsilon^p b_1, \quad a_0 + b_0 = 1, \quad 1 + a_0 b_0 c^2 > 0, \quad 0 < p < 2,$$

сделаем замену

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^p \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{2\pi i k t_1} + \varepsilon^{2p} x_2(t_1, \tau) + \dots \quad (5.12)$$

Здесь  $\tau = \varepsilon^p t$ ,  $t_1 = (\omega \varepsilon^{-\gamma} + \theta(\varepsilon) - \varepsilon^{1-\gamma} \omega + o(\varepsilon^{1-\gamma}))t$ , а функция  $x_2(t_1, \tau)$  является периодической по первому аргументу с периодом  $2\pi/\omega$ . Как и в §3,  $\omega$  — это произвольное положительное число,  $\gamma = 1 - p/2$ , а  $\theta \in [0, 2\pi]$  дополняет  $\omega \varepsilon^{-\gamma}$  до целого кратного  $2\pi$ . Подставим (5.12) в (5.3) и начнем собирать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . В итоге придем к параболическому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1 + a_0 b_0 c^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + (a_1 + b_1)u + f_2 u^2 \quad (5.13)$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}). \quad (5.14)$$

Как и раньше, в качестве нормализованной формы для (5.3) мы получили семейство краевых задач (5.13)–(5.14), зависящее от непрерывного параметра  $\omega > 0$ . Однако, при каждом  $\omega$  у соответствующей задачи устойчивы могут быть только пространственно-однородные состояния

равновесия, которые не зависят от  $\omega$ . Поэтому в данном случае имеет место теорема 5.1.

**5.3.** Предположим теперь, что выполнено условие (5.6). Похожая ситуация рассматривалась в пункте 3.4 §3. Пусть сначала

$$a = a_0 + \varepsilon^2 a_1, \quad b = b_0 + \varepsilon^2 b_1, \quad a_0 + b_0 = -1, \quad 1 + a_0 b_0 c^2 > 0.$$

Тогда действуя по той же схеме, что и в пункте 3.4 §3, получим, что локальная динамика уравнения (5.3) определяется в главном поведением решений краевой задачи параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1 + a_0 b_0 c^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (a_1 + b_1)u + (f_2^2 + f_3)u^3 \quad (5.15)$$

$$u(\tau, r) = -u(\tau, r + 1). \quad (5.16)$$

Приведем основной результат в этом случае.

**Теорема 5.2** Пусть краевая задача (5.15)–(5.16) имеет решение  $u_*(\tau, r)$ . Тогда при достаточно малых  $\varepsilon$  уравнение (5.3) имеет асимптотическое по невязке решение  $x_*(t, \varepsilon)$ . Причем

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon u_*(\varepsilon^2(1 + o(1))t, (1 + o(1))t) + o(1).$$

Аналогично, если

$$a = a_0 + \varepsilon^p a_1, \quad b = b_0 + \varepsilon^p b_1, \quad a_0 + b_0 = -1, \quad 1 + a_0 b_0 c^2 > 0, \quad 0 < p < 2,$$

то нормальная форма имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1 + a_0 b_0 c^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (a_1 + b_1)u + (f_2^2 + f_3)u^3 \quad (5.17)$$

$$u(\tau, r) = -u\left(\tau, r + \frac{\pi}{\omega}\right). \quad (5.18)$$

Здесь  $\omega$  — это произвольное положительное число. Теорема, аналогичная теореме 5.2, имеет место.

**Теорема 5.3** Пусть при каком-то  $\omega > 0$  краевая задача (5.17)–(5.18) имеет решение  $u_*(\tau, r)$ . Тогда при достаточно малых  $\varepsilon$  уравнение (5.3) имеет решение по невязке  $x_*(t, \varepsilon)$ . Причем

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p/2} u_*(\varepsilon^p(1 + o(1))t, (1 + o(1))t) + o(1).$$

Таким образом, при выполнении условий (5.2), (5.5) или (5.6), (5.7) наличие двух больших запаздываний не приводит к принципиальному усложнению динамики уравнения (5.3), а значит, и уравнения (5.1).

**5.4.** Изучим теперь динамику (5.3) при условии

$$|a + b| < 1. \quad (5.19)$$

Анализируя корни характеристического квазимногочлена (5.4), можно выделить критический случай в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия. Введем несколько обозначений. Положим

$$\alpha = (a + b)^2, \quad \beta = ab \quad (5.20)$$

и при фиксированных значениях  $\alpha \in (0, 1)$  и  $c > 0$  рассмотрим систему двух уравнений

$$R(\omega) = \omega^2 + 1 - \alpha + 2\beta(1 - \cos(c\omega)) = 0 \quad (5.21)$$

и

$$R'(\omega) = 2[\omega + \beta c \sin(c\omega)] = 0 \quad (5.22)$$

относительно неизвестных вещественных  $\omega > 0$  и  $\beta$ . Обозначим через  $\omega_0$  и  $\beta_0$  корни этой системы, если они существуют. В случае если корней несколько, берем тот, где значение  $\beta_0$  наибольшее. Отметим, что для  $\beta_0$  выполнено неравенство  $\beta_0 < 0$ .

**Лемма 5.1** Пусть выполнено условие (5.19) и  $\beta > \beta_0$ . Тогда, при достаточно малых  $\varepsilon$  все корни характеристического квазиполинома (5.4) имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Лемма 5.2** Пусть выполнено (5.19) и  $\beta < \beta_0$ . Тогда при достаточно малых значениях  $\varepsilon$  квазиполином (5.4) имеет корень с вещественной частью, которая имеет положительный предел при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Обоснование этих утверждений стандартно, поэтому мы его опустим. Отметим, что в условиях леммы 5.1 все решения (5.3) из некоторой достаточно малой и не зависящей от  $\varepsilon$  окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Таким образом в рассмотрении нуждается „критический“ случай, когда в (5.3)  $\beta = \beta_0$ . Из (5.20) имеем

$$a, b = \frac{1}{2}(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\alpha - 4\beta}).$$

Положим сначала в (5.3)

$$a = a_0 + \varepsilon a_1, \quad b = b_0 + \varepsilon b_1, \quad a_0, b_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\alpha - 4\beta_0})$$

Из (5.21) вытекает, что

$$|(i\omega_0 + 1)(a_0 + b_0 \exp(-i\omega_0))^{-1}| = 1.$$

Вещественное значение  $\Omega \in [0, 2\pi)$  определим равенством

$$e^{-i\Omega} = (i\omega_0 + 1)(a_0 + b_0 \exp(-i\omega_0))^{-1}.$$

Наконец, через  $\theta_0(\varepsilon)$  обозначим такое значение из полуинтервала  $[0, 2\pi)$ , что выражение  $\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta_0(\varepsilon)$  является целым кратным  $2\pi$ .

Относительно корней характеристического квазиполинома (5.4) можно тогда утверждать следующее: имеется счетное множество таких корней  $\lambda_k(\varepsilon)$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), асимптотика которых имеет вид

$$\lambda_k(\varepsilon) = i \left( \frac{\omega_0}{\varepsilon} + \theta_0(\varepsilon) + 2k\pi + \Omega \right) + \varepsilon \lambda_{k1} + \varepsilon^2 \lambda_{k2} + \dots, \quad (5.23)$$

а все остальные корни (5.4) имеют отрицательные вещественные части, отделенные от мнимой оси при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При этом  $\operatorname{Re} \lambda_{k1} = 0$ ,  $\operatorname{Re} \lambda_{k2} = -4k^2\pi^2 d_1$ .

Похожая ситуация была исследована в пункте 4.2 §4. Опуская аналогичные построения, можно показать, что роль нормализованной формы в этом случае играет параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + d_2 \frac{\partial u}{\partial r} + d_3 u + du|u|^2 \quad (5.24)$$

с краевыми условиями

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + 1). \quad (5.25)$$

Здесь  $d_1, d_2 = d_2(\theta_0(\varepsilon)), d_3 = d_3(\theta_0(\varepsilon))$  и  $d$  — некоторые комплексные числа, причем  $\operatorname{Re} d_1 > 0$ . Формулы для их вычисления могут быть записаны явно, однако они являются весьма громоздкими, поэтому приводить их мы не будем.

**Теорема 5.4** Пусть (5.24)–(5.25) имеет решение  $u_*(\tau, r)$ . Тогда исходное уравнение имеет асимптотическое по невязке решение вида

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon (\exp((\omega_0\varepsilon^{-1} + \Omega + \theta_0(\varepsilon))it) u_*(\varepsilon^2 t, (1 + o(1))t) + \kappa.c.) (1 + o(1)).$$



Отметим, что точного решения с приведенной асимптотикой может и не существовать. Однако, если  $u_*(\tau, r)$  неустойчиво, то даже если точное решение и существует, то оно неустойчиво.

Аналогичным образом разбирается ситуация

$$a = a_0 + \varepsilon^p a_1, \quad b = b_0 + \varepsilon^p b_1, \quad a_0, b_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\alpha - 4\beta_0}), \quad 0 < p < 1.$$

В этом случае для корней характеристического квазиполинома (5.4) асимптотическую формулу удобно записать в следующем виде:

$$\lambda_k(\varepsilon) = i \left( \frac{\omega_0}{\varepsilon} + \frac{\omega k}{\varepsilon^{1-p/2}} + \theta(\varepsilon) + k\theta_0(\varepsilon) + \Omega \right) + \varepsilon^{p/2} \lambda_{k1} + \varepsilon^p \lambda_{k2} + \dots \quad (5.26)$$

Здесь  $\omega \geq 0$  — произвольное, фиксированное число, а  $\theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$  дополняет  $\omega \varepsilon^{1-p/2}$  до целого, кратного  $2\pi$ .

Производя те же действия, что и ранее, в качестве нормализованной формы мы получим набор краевых задач

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + d_2 \frac{\partial u}{\partial r} + d_3 u + du|u|^2, \quad (5.27)$$

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}). \quad (5.28)$$

Теорема, аналогичная теореме 5.4, имеет место.

**Теорема 5.5** Пусть при фиксированном  $\omega$  система (5.27)–(5.28) имеет решение  $u_*(\tau, r)$ . Тогда исходное уравнение имеет асимптотическое по невязке решение вида

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p/2} (\exp((\omega_0 \varepsilon^{-1} + \Omega + \theta(\varepsilon))it) u_*(\varepsilon^p t, (1 + o(1))t) + \text{к.с.}) (1 + o(1)).$$

**5.5.** В заключение параграфа рассмотрим следующую ситуацию. Пусть вместо (5.2) выполняется

$$T_1 = \varepsilon^{-1}, \quad T_2 = T_1(1 + \varepsilon^q c), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad q > 0. \quad (5.29)$$

Тогда, после стандартной замены времени исходное уравнение приводит к виду

$$\varepsilon \dot{x} + x = ax(t-1) + bx(t-1 - \varepsilon^q c) + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \dots \quad (5.30)$$

Характеристический квазимногочлен линеаризованного в нуле уравнения (5.30) принимает вид

$$\varepsilon\lambda + 1 = e^{-\lambda}(a + be^{-c\varepsilon\lambda}). \quad (5.31)$$

Если для параметра  $q$  выполняется условие  $q \geq 1$ , то для (5.29) верны все приведенные выше рассуждения. Будем далее считать, что  $0 < q < 1$ .

**Лемма 5.3** Пусть  $|a| + |b| > 1$ , тогда характеристический квазиполином (5.31) имеет корень с положительной вещественной частью, отделенный от мнимой оси. В этом случае нулевое решение (5.30) неустойчиво, и в некоторой достаточно малой (но не зависящей от  $\varepsilon$ ) его окрестности нет устойчивых режимов.

Пусть  $|a| + |b| < 1$ , тогда все корни характеристического квазиполинома (5.31) имеют отрицательные вещественные части и отделены от мнимой оси при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В этом случае нулевое решение (5.30) асимптотически устойчиво, все решения из некоторой достаточно малой (но не зависящей от  $\varepsilon$ ) окрестности нуля стремятся к нулю.

Если  $|a| + |b| = 1$ , то у характеристического уравнения (5.31) не существует корней в правой комплексной полуплоскости, отделенных от мнимой оси, и существует бесконечное количество корней, стремящихся к мнимой оси при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Асимптотика корней (5.31), стремящихся к мнимой оси, существенно зависит от точного значения параметра  $q$ . Справедливы следующие формулы:

$$\lambda = \frac{\omega}{\varepsilon^q}i + \lambda_0(\varepsilon)i + \varepsilon^{1-q}\lambda_1(\varepsilon)i + \varepsilon^{2-2q}\lambda_2(\varepsilon), \quad \frac{1}{2} \leq q < 1; \quad (5.32)$$

$$\lambda = \frac{\omega}{\varepsilon^q}i + \lambda_0(\varepsilon)i + \varepsilon^q\lambda_1(\varepsilon)i + \varepsilon^{2q}\lambda_2(\varepsilon), \quad 0 < q < \frac{1}{2}. \quad (5.33)$$

В этих формулах  $\omega$ ,  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — это действительные числа, причем  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  имеют порядок  $O(1)$ . Для определения  $\omega$  и  $\lambda_0$  в обоих случаях справедливы равенства

$$\omega = \frac{2\pi k}{c}, \quad \lambda_0(\varepsilon) = 2\pi k\theta(\varepsilon) + 2\pi n, \quad a > 0, b > 0; \quad (5.34)$$

$$\omega = \frac{\pi(2k+1)}{c}, \quad \lambda_0(\varepsilon) = 2\pi k\theta(\varepsilon) + \theta_1(\varepsilon) + 2\pi n, \quad a > 0, b < 0; \quad (5.35)$$

$$\omega = \frac{\pi(2k+1)}{c}, \quad \lambda_0(\varepsilon) = \pi(2k+1)\theta(\varepsilon) + 2\pi n, \quad a < 0, b > 0; \quad (5.36)$$

$$\omega = \frac{2\pi k}{c}, \quad \lambda_0(\varepsilon) = 2\pi k\theta(\varepsilon) + \pi(2n+1), \quad a < 0, b < 0. \quad (5.37)$$

Главные части  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  теперь определяются без труда. Введем в рассмотрение значение  $p_*$ , которое вычисляется по правилу

$$p_* = \begin{cases} 2 - 2q, & \frac{1}{2} \leq q < 1, \\ 2q, & 0 < q < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Будем далее считать, что параметры  $a$  и  $b$  таковы, что значение выражения  $|a| + |b|$  близко к единице. Положим

$$a = a_0 + \varepsilon^{p_*} a_1, \quad b = b_0 + \varepsilon^{p_*} b_1, \quad |a_0| + |b_0| = 1. \quad (5.38)$$

Первый случай. Пусть  $a_0 \geq 0$ ,  $b_0 \geq 0$ . Тогда сделаем в (5.30) замену

$$x = \varepsilon^{p_*} \sum \xi_k(\tau) e^{(\omega \varepsilon^{-q} + \lambda_0 + \varepsilon^{p_*/2} \lambda_1) i t} + \varepsilon^{2p_*} x_2(t, \tau) + \dots, \quad (5.39)$$

где  $\tau = \varepsilon^{p_*} t$ , а  $x_2$  предполагается периодической по первому аргументу с периодом 1. Производя стандартные операции, получим, что амплитуды  $\xi_k$  должны удовлетворять системе уравнений, которую можно представить в виде краевой задачи параболического типа. Эта краевая задача является нормализованной формой для (5.30) в этом случае.

При  $\frac{1}{2} \leq q < 1$  получается следующая система:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (a_1 + b_1)u + f_2 u^2, \quad (5.40)$$

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + 1). \quad (5.41)$$

Динамика этой задачи проста — устойчивы только пространственно-однородные состояния равновесия. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.6** Пусть краевая задача (5.40)–(5.41) имеет экспоненциально устойчивое пространственно-однородное состояние равновесия  $u_*$ . Тогда исходное уравнение (5.30) имеет асимптотически устойчивое решение с асимптотикой

$$x_* = \varepsilon^{2-2q} u_*(1 + o(1)).$$

Если  $0 < q < \frac{1}{2}$ , то нормализованная форма принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{a_0 b_0 c^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \theta^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) + (a_1 + b_1)u + f_2 u^2, \quad (5.42)$$

$$u(\tau, r, s) = u(\tau, r + 1, s) = u(\tau, r, s + 1). \quad (5.43)$$

Эта система является вырожденной. Однако, зная ее решения, мы можем находить асимптотические по невязке решения исходного уравнения (5.30).

**Теорема 5.7** Пусть система (5.42)–(5.43) имеет решение  $u_*(\tau, r, s)$ . Тогда исходное уравнение (5.30) имеет асимптотическое по невязке решение вида

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^{2q} u_* \left( \varepsilon^{2q} t, \left( \frac{1}{c\varepsilon^q} + \theta - \varepsilon^q b_0 c \theta + o(\varepsilon^q) \right) t, (1 - \varepsilon^q b_0 c + o(\varepsilon^q)) t \right) (1 + o(1)).$$

Второй случай. Пусть  $a_0 \geq 0$ ,  $b_0 < 0$ . Если  $\frac{1}{2} \leq q < 1$ , то роль нормализованной формы играет система

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (a_1 + b_1)u + \left( \frac{2f_2^2}{1 - a_0 - b_0} + f_3 \right) u^3, \quad (5.44)$$

$$u(\tau, r) = -u(\tau, r + 1). \quad (5.45)$$

Связь между решениями нормализованной формы и исходного уравнения (5.30) описывает следующая теорема.

**Теорема 5.8** Пусть (5.44)–(5.45) имеет решение  $u_*(\tau, r)$ . Тогда уравнение (5.30) имеет асимптотическое по невязке решение

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p_*/2} u_* \left( \varepsilon^{p_*} t, (c^{-1} \varepsilon^{-q} + \theta - \varepsilon^{p_*/2} c^{-1} + o(\varepsilon^{p_*/2})) t \right) (1 + o(1)).$$

Если  $0 < q < \frac{1}{2}$ , то нормализованной формой уравнения (5.30) является краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{|a_0||b_0|c^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \theta^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) + (a_1 + b_1)u + \left( \frac{2f_2^2}{1 - a_0 - b_0} + f_3 \right) u^3, \quad (5.46)$$

$$u(\tau, r, s) = -u(\tau, r + 1, s) = -u(\tau, r, s + 1). \quad (5.47)$$

**Теорема 5.9** Пусть краевая задача (5.46)–(5.47) имеет решение  $u_*(\tau, r, s)$ . Тогда уравнение (5.30) имеет асимптотическое по невязке решение вида

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^q u_* \left( \varepsilon^{2q} t, \left( \frac{1}{c\varepsilon^q} + \theta - \varepsilon^q b_0 c \theta + o(\varepsilon^q) \right) t, (1 - \varepsilon^q b_0 c + o(\varepsilon^q)) t \right) (1 + o(1)).$$

Третий случай. Пусть  $a_0 < 0$ ,  $b_0 > 0$ . Если  $\frac{1}{2} \leq q < 1$ , то в качестве нормализованной формы мы получим краевую задачу (5.44)–(5.45). Соответственно будет верна и теорема 5.8.

Если  $0 < q < \frac{1}{2}$ , то роль нормализованной формы будет играть уравнение (5.46) с краевыми условиями

$$u(\tau, r, s) = -u(\tau, r + 1, s), \quad u(\tau, r, s) = u(\tau, r, s + 1). \quad (5.48)$$

Теорема, аналогичная теореме 5.9, имеет место.

Четвертый случай. Пусть, наконец,  $a_0 < 0$ ,  $b_0 < 0$ . Тогда при  $\frac{1}{2} \leq q < 1$  нормализованная форма принимает вид параболической краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (a_1 + b_1)u + (f_2^2 + f_3)u^3, \quad (5.49)$$

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + 1). \quad (5.50)$$

В этом случае также верна теорема, аналогичная теореме 5.8.

Если же  $0 < q < \frac{1}{2}$ , то роль нормализованной формы играет уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{a_0 b_0 c^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \theta^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) + (a_1 + b_1)u + (f_2^2 + f_3)u^3 \quad (5.51)$$

с краевыми условиями

$$u(\tau, r, s) = u(\tau, r + 1, s), \quad u(\tau, r, s) = -u(\tau, r, s + 1). \quad (5.52)$$

### Упражнение 5.1.

Постройте нормализованную форму для уравнения (5.30) в случае, когда параметры  $a$  и  $b$  задаются формулами

$$a = a_0 + \varepsilon^p a_1, \quad b = b_0 + \varepsilon^p b_1 \quad |a_0| + |b_0| = 1, \quad p \neq p_*$$

## §6. Динамика уравнения с двумя большими пропорциональными запаздываниями

**6.1.** В этом параграфе будет изучена локальная динамика системы с двумя запаздываниями

$$\dot{x} + x = ax(t - T_1) + bx(t - T_2) + f(x) \quad (6.1)$$

в ситуации, когда параметры  $T_1$  и  $T_2$  пропорциональны и достаточно велики, т.е.

$$T_1 = T, \quad T_2 = kT,$$

где  $k > 1$ ,  $T \gg 1$ .

Заменой времени  $t \rightarrow tT$  перейдем к уравнению ( $\varepsilon = T^{-1} \ll 1$ )

$$\varepsilon \dot{x} + x = ax(t-1) + bx(t-k) + f(x). \quad (6.2)$$

Для исследования поведения решений в окрестности нулевого состояния равновесия уравнения (6.2) рассмотрим характеристический квазиполином

$$\varepsilon \lambda + 1 = a \exp(-\lambda) + b \exp(-\lambda k). \quad (6.3)$$

Сформулируем три простых утверждения о структуре корней этого квазиполинома.

**Лемма 6.1** Пусть  $|a| + |b| < 1$ . Тогда при достаточно малых значениях  $\varepsilon$  все корни (6.3) имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В этом случае все решения (6.2) с начальными условиями из некоторой (не зависящей от  $\varepsilon$ ) окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

**Лемма 6.2** Пусть  $|a| + |b| > 1$ . Тогда при всех достаточно малых значениях  $\varepsilon$  характеристический многочлен (6.3) имеет корень с положительной и отделенной от нуля вещественной частью. В этом случае задача о поведении решений (6.2) становится нелокальной: в любой, сколь угодно малой окрестности нулевого состояния равновесия найдется решение, покидающее некоторый фиксированный шар с центром в нуле и не зависящим от  $\varepsilon$  радиусом.

**Лемма 6.3** Пусть

$$|a| + |b| = 1. \quad (6.4)$$

Тогда характеристический многочлен (6.3) не имеет корней с положительной вещественной частью, отделенных от мнимой оси, и при каждом  $\varepsilon_0 > 0$  и натуральном  $n$  имеет при малых  $\varepsilon$  не менее  $n$  корней  $\lambda_j(\varepsilon)$  удовлетворяющих условию  $|\operatorname{Re} \lambda_j(\varepsilon)| < \varepsilon_0$ .

Тем самым возникает задача изучения локального (в окрестности нулевого состояния равновесия) поведения решений уравнения (6.1) при условии (6.4). В связи с этим положим

$$a = a_0 + \varepsilon a_1, \quad b = b_0 + \varepsilon b_1, \quad |a_0| + |b_0| = 1. \quad (6.5)$$

Как оказывается, построение аналога нормальной формы в этом случае во многом зависит от алгебраических свойств коэффициента  $k$ . Проиллюстрируем это.

Рассмотрим так называемое „вырожденное“ характеристическое уравнение

$$1 = a_0 \exp(-\lambda) + b_0 \exp(-k\lambda). \quad (6.6)$$

Положим  $\lambda = i\omega$  ( $\omega \geq 0$ ). Тогда получаем систему двух уравнений относительно  $\omega$

$$1 = a_0 \cos \omega + b_0 \cos(k\omega), \quad 0 = a_0 \sin(\omega) + b_0 \sin(k\omega). \quad (6.7)$$

Выделим отдельно несколько случаев.

Первый случай. Предположим, что число  $k$  иррациональное. Тогда найдется такая последовательность  $\omega_n \rightarrow \infty$ , для которой

$$|1 - a_0 \cos \omega_n + b_0 \cos(k\omega_n)| + |a_0 \sin(\omega) + b_0 \sin(k\omega)| \rightarrow 0, \quad (6.8)$$

но точные равенства (6.7) не выполняются. В этом случае получить аналог нормальной формы затруднительно.

Предположим далее, что число  $k$  рациональное, т.е. для некоторых целых, взаимно простых чисел  $m$  и  $n$  имеет место

$$k = \frac{m}{n}.$$

Второй случай.  $a_0 > 0$ ,  $b_0 > 0$ , т.е.  $a_0 + b_0 = 1$ . В этом случае уравнение (6.6) имеет бесконечно много корней  $\lambda_{j0} = i\omega_j$ , где  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega_j = 2\pi nj$ .

Здесь применимы все построения, приведенные в предыдущих параграфах. Повторяя соответствующие утверждения, получаем в качестве аналога нормальной формы уравнения (6.2) краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{(a_0 n^2 + b_0 m^2) n^3}{2(a_0 n + b_0 m)^3} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (a_1 + b_1)u + f_2 u^2, \quad (6.9)$$

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + 1). \quad (6.10)$$

Как уже отмечалось ранее, все устойчивые режимы (6.9)–(6.10) являются пространственно-однородными состояниями равновесия.

Третий случай. Пусть числа  $m$  и  $n$  нечетные и  $a_0 < 0$ ,  $b_0 < 0$ , т.е.  $a_0 + b_0 = -1$ . Квазиполином (6.6) имеет бесконечно много чисто мнимых корней  $\lambda_{j0} = i\omega_j$ ,  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , а  $\omega_j = \pi n(2j + 1)$ .

Используя построения, приведенные в §3, в качестве аналога нормальной формы получаем краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{(a_0 n^2 + b_0 m^2) n^3}{2(a_0 n + b_0 m)^3} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (a_1 + b_1)u + (f_2^2 + f_3)u^3, \quad (6.11)$$

$$u(\tau, r) = -u(\tau, r + 1). \quad (6.12)$$

У этой системы могут быть устойчивы не только состояния равновесия, но и более сложные режимы (например, периодические решения — циклы).

Четвертый случай. Пусть  $a_0 > 0$ ,  $b_0 < 0$ ,  $m$  нечетное,  $n$  четное. В этом случае роль нормализованной формы играет краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{(a_0 n^2 - b_0 m^2) n^3}{2(a_0 n - b_0 m)^3} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (a_1 + b_1)u + f_2 u^2, \quad (6.13)$$

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + 1). \quad (6.14)$$

Пятый случай.  $a_0 < 0$ ,  $b_0 > 0$ ,  $m$  четное,  $n$  нечетное. Тогда аналог нормальной формы принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{(-a_0 n^2 + b_0 m^2) n^3}{2(-a_0 n + b_0 m)^3} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (a_1 + b_1)u + (f_2^2 + f_3)u^3, \quad (6.15)$$

$$u(\tau, r) = -u(\tau, r + 1). \quad (6.16)$$

В остальных случаях корней системы (6.7) не существует.

Отметим, что во всех случаях нормализованные системы имеют вид уравнения параболического типа с периодическими или антипериодическими краевыми условиями. Динамика нормализованных форм во втором и четвертом случаях очень проста: у них могут быть устойчивы только однородные состояния равновесия. В третьем и пятом случаях нормализованные формы могут иметь более сложные, например периодические, устойчивые решения.

**Теорема 6.1** Пусть  $k$  таково, что реализуется второй или четвертый случай. Пусть соответствующая нормализованная форма имеет экспоненциально устойчивое состояние равновесия  $u_*$ . Тогда у исходного уравнения (6.2) существует решение

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 u_* + o(\varepsilon^2)$$

той же устойчивости.



**Теорема 6.2** Пусть  $k$  таково, что выполняется третий или пятый случай. Пусть соответствующая нормализованная форма имеет решение  $u_*(\tau, r)$ . Тогда исходное уравнение (6.2) имеет асимптотическое по невязке решение вида

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon u_*(\varepsilon^2 t, t(1 + o(1)))(1 + o(1)).$$

**6.2.** Пусть вместо (6.5) выполнено условие

$$a = a_0 + \varepsilon^p a_1, \quad b = b_0 + \varepsilon^p b_1, \quad |a_0| + |b_0| = 1, \quad 0 < p < 1.$$

В этом случае все приведенные рассуждения тоже имеют место. В качестве нормализованной формы (когда ее возможно будет построить) мы будем получать семейства краевых задач параболического типа. Во втором и четвертом случаях система будет состоять из уравнения (6.9) или (6.13) и краевых условий

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}),$$

где  $\omega$  — произвольное положительное число. А в третьем и пятом случаях нормализованная форма будет состоять из уравнения (6.11) или (6.15) и краевых условий

$$u(\tau, r) = -u(\tau, r + \frac{\pi}{\omega}).$$

Теоремы, аналогичные теоремам 6.1 и 6.2, также имеют место.

**Упражнение 6.1.** Рассмотрите уравнение (6.1) при условии

$$T_1 = \frac{1}{\varepsilon}, \quad T_2 = (k_0 + \varepsilon k_1) \frac{1}{\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

## §7. Динамика уравнения с большим и очень большим запаздыванием

**7.1.** Как и в предыдущих параграфах, рассматривается уравнение

$$\dot{x} + x = ax(t - T_1) + bx(t - T_2) + f(x, x(t - T_1), x(t - T_2)). \quad (7.1)$$

Здесь мы изучим случай, когда оба запаздывания являются большими, но, в отличие от предыдущего параграфа, разными по порядку, т.е.

$$T_1 \gg 1, \quad \frac{T_2}{T_1} \gg 1.$$

Положим

$$T_1 = \frac{1}{\varepsilon}, \quad T_2 = \frac{1}{c\varepsilon^2}, \quad c > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Стандартной заменой  $t \rightarrow t\varepsilon^{-1}$  перейдем к уравнению

$$\varepsilon \dot{x} + x = ax(t-1) + bx(t - (c\varepsilon)^{-1}) + f(x, x(t-1), x(t - (c\varepsilon)^{-1})). \quad (7.2)$$

Как и ранее, для упрощения вычислений будем считать, что функция  $f$  зависит только от первого аргумента, т.е.  $f(x, y, z) = f(x)$ . Положим в окрестности нуля  $f(x) = f_2x^2 + f_3x^3 + \dots$

Рассмотрим характеристический квазиполином линейной части уравнения (7.2)

$$\varepsilon\lambda + 1 = a \exp(-\lambda) + b \exp(-\lambda(c\varepsilon)^{-1}). \quad (7.3)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 7.1** Если  $|a| + |b| < 1$ , то нулевое решение уравнения (7.2) асимптотически устойчиво, все решения из некоторой малой (но не зависящей от  $\varepsilon$ ) его окрестности стремятся к нулю.

Если  $|a| + |b| > 1$ , то нулевое решение уравнения (7.2) неустойчиво, кроме того, в некоторой его не зависящей от  $\varepsilon$  окрестности нет устойчивых режимов.

В оставшемся случае, когда  $|a| + |b| = 1$  возникает критический случай: у уравнения (7.3) не существует корней с положительной вещественной частью, и существуют корни, вещественная часть которых стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Рассмотрим отдельно случаи положительных и отрицательных значений параметров  $a$  и  $b$ .

Положим

$$a = a_0 + \varepsilon^2 b_0 a_1, \quad b = b_0 + \varepsilon^2 b_0 b_1, \quad |a_0| + |b_0| = 1.$$

Первый случай. Пусть  $a_0 \geq 0$ ,  $b_0 > 0$ . Тогда уравнение (7.3) имеет бесконечное количество корней ( $k, n \in \mathbb{Z}$ )

$$\begin{aligned} \lambda_{nk} = & 2\pi i k + \varepsilon(2\pi n + k\theta) i c - \varepsilon^2 \frac{c}{b_0} (2\pi k + a_0 c(2\pi n + k\theta)) i - \\ & - \varepsilon^3 \left( \frac{a_0 c^3}{2b_0^2} (2\pi n + k\theta)^2 + 2 \frac{c}{b_0^2} \pi^2 k^2 + 2\pi k \frac{a_0 c^2}{b_0^2} (2\pi n + k\theta) - c(a_1 + b_1) \right) + \\ & + \varepsilon^3 \left( (2\pi n + k\theta) \left( \frac{a_0^2 c^3 - b_0 c^2}{b_0^2} \right) + 2 \frac{a_0 c}{b_0} \pi k \right) i + \dots, \end{aligned}$$

где  $\theta = \theta(\varepsilon) = 2\pi\theta_1(\varepsilon)$ , а  $\theta_1(\varepsilon) \in [0, 1)$  дополняет  $(c\varepsilon)^{-1}$  до целого числа.

Рассмотрим асимптотический ряд

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}(\tau) e^{2\pi i k t_1} e^{2\pi i n t_2} + \varepsilon^4 x_2(t_1, t_2, \tau) + \dots, \quad (7.4)$$

где  $\tau = c\varepsilon^3 t$ ,

$$\begin{aligned} t_1 &= \left(1 + \varepsilon c \theta_1(\varepsilon) - \varepsilon^2 \frac{c}{b_0} (1 + a_0 c \theta_1(\varepsilon)) + \varepsilon^3 \frac{c}{b_0} (a_0 - c \theta_1(\varepsilon) + \frac{a_0^2 c^2}{b_0} \theta_1(\varepsilon))\right) t, \\ t_2 &= \varepsilon \left(c - \varepsilon a_0 c^2 b_0^{-1} + \varepsilon^2 (a_0^2 c^3 b_0^{-2} - c^2 b_0^{-1})\right) t, \end{aligned}$$

а  $x_2(t_1, t_2, \tau)$  периодична по первым двум аргументам с периодом 1.

Подставим (7.4) в (7.2) и будем последовательно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . На третьем шаге (при  $\varepsilon^4$ ) получим уравнение относительно  $x_2$ , необходимым и достаточным условием разрешимости которого в пространстве периодических функций будет выполнение для всех целых  $k$  и  $n$  равенств

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{kn}}{d\tau} = & -\frac{a_0}{b_0^2} \left( 2\pi^2 n^2 c^2 + 2\pi^2 k^2 \left( \frac{1}{a_0} + 2c\theta_1 + c^2 \theta_1^2 \right) + \right. \\ & \left. + 4\pi^2 k n c (1 + c\theta_1) \right) \xi_{kn} + (a_1 + b_1) \xi_{kn} + f_2 \varphi_{kn}(\xi), \end{aligned} \quad (7.5)$$

где  $\varphi_{kn}$  — это коэффициент при  $\exp(2\pi i k t_1 + 2\pi i n t_2)$  в разложении

$$\left( \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}(\tau) e^{2\pi i k t_1} e^{2\pi i n t_2} \right)^2$$

в ряд Фурье.

Систему (7.5) можно записать в виде одного параболического уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} = & \frac{a_0 c^2}{2b_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{2b_0^2} (1 + 2a_0 c \theta_1 + a_0 c^2 \theta_1^2) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{a_0 c}{b_0^2} (1 + c\theta_1) \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} + \\ & + (a_1 + b_1) u + f_2 u^2 \end{aligned} \quad (7.6)$$

с краевыми условиями

$$u(\tau, r, s) = u(\tau, r + 1, s) = u(\tau, r, s + 1). \quad (7.7)$$

Краевая задача (7.6)–(7.7) является нормализованной формой для исходного уравнения (7.2).

**Теорема 7.1** Пусть уравнение (7.6)–(7.7) имеет решение  $u_*(\tau, r, s)$ . Тогда при достаточно малых  $\varepsilon$  уравнение (7.2) имеет асимптотическое по невязке решение  $x_*(t, \varepsilon)$ . Причем

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 u_* (\varepsilon^2(1 + o(1))t, (1 + o(1))t, \varepsilon(1 + o(1))t) (1 + o(1)).$$

Второй случай. Пусть  $a_0 < 0$ ,  $b_0 > 0$ . Тогда аналог нормальной формы уравнения (7.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} = & \frac{|a_0|c^2}{2b_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{2b_0^2} (1 + |a_0|c\theta_1 + 2|a_0|c^2\theta_1^2) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \\ & + \frac{|a_0|c}{b_0^2} (1 + c\theta_1) \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} + (a_1 + b_1)u + \left( \frac{2}{1 - a_0 - b_0} f_2^2 + f_3 \right) u^3 \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$u(\tau, r, s) = -u(\tau, r + 1, s), \quad u(\tau, r, s) = u(\tau, r, s + 1). \quad (7.9)$$

Для системы (7.8)–(7.9) справедлив аналог теоремы 7.1.

**Теорема 7.2** Пусть уравнение (7.8)–(7.9) имеет решение  $u_*(\tau, r, s)$ . Тогда при достаточно малых  $\varepsilon$  уравнение (7.2) имеет асимптотическое по невязке решение  $x_*(t, \varepsilon)$ . Причем

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon u_* (\varepsilon^2(1 + o(1))t, (1 + o(1))t, \varepsilon(1 + o(1))t) (1 + o(1)).$$

Третий случай. Пусть  $a_0 > 0$ ,  $b_0 < 0$ . Тогда роль нормализованной формы уравнения (7.2) играет уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} = & \frac{a_0 c^2}{2b_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{2b_0^2} (1 + 2a_0 c\theta_1 + a_0 c^2\theta_1^2) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{a_0 c}{b_0^2} (1 + c\theta_1) \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} + \\ & + (a_1 + b_1)u + \left( \frac{2}{1 - a_0 - b_0} f_2^2 + f_3 \right) u^3 \end{aligned} \quad (7.10)$$

с краевыми условиями

$$u(\tau, r, s) = u(\tau, r + 1, s), \quad u(\tau, r, s) = -u(\tau, r, s + 1). \quad (7.11)$$

В этом случае аналог теорем 7.1 и 7.2 также имеет место.

**Теорема 7.3** Пусть уравнение (7.10)–(7.11) имеет решение  $u_*(\tau, r, s)$ . Тогда при достаточно малых  $\varepsilon$  уравнение (7.2) имеет асимптотическое по невязке решение  $x_*(t, \varepsilon)$ . Причем

$$x_0(t, \varepsilon) = \varepsilon u_0 (\varepsilon^2(1 + o(1))t, (1 + o(1))t, \varepsilon(1 + o(1))t) (1 + o(1)).$$

Четвертый случай. Если  $a_0 < 0$ ,  $b_0 < 0$ , то аналог нормальной формы уравнения (7.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} = & \frac{|a_0|c^2}{2b_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{2b_0^2} (1 + 2|a_0|c\theta_1 + |a_0|c^2\theta_1^2) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \\ & + \frac{|a_0|c}{b_0^2} (1 + c\theta_1) \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} + (a_1 + b_1)u + (f_2^2 + f_3)u^3 \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$u(\tau, r, s) = -u(\tau, r + 1, s), \quad u(\tau, r, s) = -u(\tau, r, s + 1). \quad (7.13)$$

Для этой системы также верна теорема, аналогичная теоремам 7.1, 7.2 и 7.3.

**Теорема 7.4** Пусть уравнение (7.12)–(7.13) имеет решение  $u_*(\tau, r, s)$ . Тогда при достаточно малых  $\varepsilon$  уравнение (7.2) имеет асимптотическое по невязке решение  $x_*(t, \varepsilon)$ . Причем

$$x_0(t, \varepsilon) = \varepsilon u_0(\varepsilon^2(1 + o(1))t, (1 + o(1))t, \varepsilon(1 + o(1))t) (1 + o(1)).$$

Аналогичные построения можно провести и в более общих случаях. Пусть

$$T_1 = \frac{1}{\varepsilon}, \quad T_2 = T_1 \frac{1}{c\varepsilon^q}, \quad c > 0, \quad q > 0.$$

$$a = a_0 + \varepsilon^p b_0 a_1, \quad b = b_0 + \varepsilon^p b_0 b_1, \quad |a_0| + |b_0| = 1, \quad 0 < p \leq 2q, \quad p \leq 2.$$

Мы приведем результаты для ситуации  $a_0 \geq 0$ ,  $b_0 > 0$ . Остальные ситуации разбираются точно так же. Предположим сначала, что  $0 < q < 1$ ,  $p = 2q$ . Тогда нормализованная форма имеет вид уравнения, такого же как и (7.6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} = & \frac{a_0 c^2}{2b_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{2b_0^2} (1 + 2a_0 c\theta_1 + a_0 c^2\theta_1^2) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{a_0 c}{b_0^2} (1 + c\theta_1) \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} + \\ & + (a_1 + b_1)u + f_2 u^2 \end{aligned} \quad (7.14)$$

с краевыми условиями

$$u(\tau, r, s) = u(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}, s) = u(\tau, r, s + 1). \quad (7.15)$$

Здесь, как и ранее,  $\omega > 0$  — произвольное число.

Если выполнено  $0 < q < 1$ ,  $0 < p < 2q$ , то нормализованная форма для уравнения (7.2) принимает вид системы

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{a_0 c^2}{2b_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{2b_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{a_0 c}{b_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} + (a_1 + b_1)u + f_2 u^2, \quad (7.16)$$

$$u(\tau, r, s) = u(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega_1}, s) = u(\tau, r, s + \frac{2\pi}{\omega_2}). \quad (7.17)$$

Здесь  $\omega_1 > 0$  и  $\omega_2 > 0$  — произвольные числа. Таким образом нормализованная форма представляет собой семейство краевых задач, зависящее сразу от двух непрерывных параметров.

При условии  $q > 1$ ,  $p = 2$  роль нормализованной формы будет играть система ( $\omega > 0$  — произвольное)

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{a_0 c^2}{2b_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{2b_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{a_0 c}{b_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} + (a_1 + b_1)u + f_2 u^2, \quad (7.18)$$

$$u(\tau, r, s) = u(\tau, r + 1, s) = u(\tau, r, s + \frac{2\pi}{\omega}). \quad (7.19)$$

Наконец, если  $q > 1$ ,  $0 < p < 2$ , то получим двухпараметрическое семейство краевых задач.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{a_0 c^2}{2b_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{2b_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{a_0 c}{b_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} + (a_1 + b_1)u + f_2 u^2, \quad (7.20)$$

$$u(\tau, r, s) = u(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega_1}, s) = u(\tau, r, s + \frac{2\pi}{\omega_2}). \quad (7.21)$$

**7.2.** Рассмотрим уравнение (7.1) в случае, когда параметр  $b$  близок к нулю. Пусть

$$b = \varepsilon^2 b_0, \quad T_1 = \frac{1}{\varepsilon}, \quad T_2 = \frac{c}{\varepsilon^3}, \quad c > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

После замены времени  $t \rightarrow t\varepsilon^{-1}$  получим

$$\varepsilon \dot{x} + x = ax(t-1) + \varepsilon^2 b_0 x \left( t - \frac{c}{\varepsilon^2} \right) + f(x). \quad (7.22)$$

Анализируя расположение корней характеристического квазимногочлена

$$\varepsilon \lambda + 1 = a \exp(-\lambda) + \varepsilon^2 b \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^2}\right)$$

получаем, что справедливы следующие утверждения.

**Лемма 7.2** Пусть  $|a| > 1$ . Тогда нулевое решение (7.22) неустойчиво, и в его некоторой фиксированной (не зависящей от  $\varepsilon$ ) окрестности нет устойчивых решений.

**Лемма 7.3** Пусть  $|a| < 1$ . Тогда нулевое решение (7.22) асимптотически устойчиво, все решения из некоторой малой, но не зависящей от  $\varepsilon$  окрестности стремятся к нулю.

Как видно, в дополнительном исследовании нуждается ситуация  $|a| = 1$ . Разберем отдельно случаи  $a = 1$  и  $a = -1$ .

Первый случай. Пусть  $a = 1 + \varepsilon^2 a_1$ . Тогда характеристический квази-полином уравнения (7.22)

$$\varepsilon\lambda + 1 = (1 + \varepsilon^2 a_1) \exp(-\lambda) + \varepsilon^2 b_0 \exp\left(-\frac{c\lambda}{\varepsilon^2}\right)$$

не имеет корней в правой комплексной полуплоскости, отделенных от мнимой оси, и имеет корни вида

$$\lambda_k = 2\pi k(1 - \varepsilon + \varepsilon^2)i + \varepsilon^2 \lambda_{2k} + O(\varepsilon^3).$$

Где  $\lambda_{2k}$  определяется уравнением

$$\lambda_{2k} = -2\pi^2 k^2 + a_1 + b_0 \exp(-c\lambda_{2k} + 2\pi i k \theta_1). \quad (7.23)$$

Здесь  $\theta_1 = \theta_1(\varepsilon) \in [0, 1)$  дополняет  $c(\varepsilon^{-2} - \varepsilon^{-1} + 1)$  до целого числа. Отметим, что (7.23) является характеристическим квазиполиномом для уравнения с запаздыванием

$$\dot{y} = (-2\pi^2 k^2 + a_1)y + b_0 \exp(2\pi i k \theta_1)y(t - c).$$

Сделаем в (7.22) подстановку

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{2\pi i k t_1} + \varepsilon^4 x_2(t_1, \tau) + \dots, \quad (7.24)$$

где  $\tau = \varepsilon^2 t$ ,  $t_1 = (1 - \varepsilon + \varepsilon^2)t$ , а  $x_2$  периодична по первому аргументу с периодом 1. Собирая последовательно коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  получим, что должны выполняться при всех целых  $k$  равенства

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = (-2\pi^2 k^2 + a_1)\xi_k + b_0 \exp(2\pi i k \theta_1)\xi_k(t - c) + f_2 \varphi_k(\xi). \quad (7.25)$$

Здесь через  $\varphi_k(\xi)$  обозначен коэффициент при  $\exp(2\pi i k t)$  в разложении  $\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{2\pi i k t}\right)^2$  в ряд Фурье.

Систему (7.25) можно свернуть в одно уравнение параболического типа с запаздыванием

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + b_0 u(\tau - c, r + \theta_1) + f_2 u^2 \quad (7.26)$$

с краевыми условиями

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + 1). \quad (7.27)$$

Эта краевая задача является нормализованной формой для уравнения (7.22). Справедлива следующая теорема.

**Теорема 7.5** Пусть краевая задача (7.26)–(7.27) имеет экспоненциально устойчивое периодическое решение  $u_*(\tau, r)$ . Тогда уравнение (7.22) имеет асимптотически устойчивое решение вида

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 u_* (\varepsilon^2 t(1 + o(1)), t(1 - \varepsilon + \varepsilon^2)(1 + o(1))) (1 + o(1)).$$

Второй случай. Пусть  $a = -1 + \varepsilon^2 a_1$ . В этом случае характеристический квазиполином

$$\varepsilon \lambda + 1 = (-1 + \varepsilon^2 a_1) \exp(-\lambda) + \varepsilon^2 b_0 \exp(-\frac{c\lambda}{\varepsilon^2}) \quad (7.28)$$

имеет набор корней

$$\lambda_k = \pi(2k + 1)i(1 - \varepsilon + \varepsilon^2) + \varepsilon^2 \lambda_{k2} + O(\varepsilon^3),$$

где  $\lambda_{k2}$  определяется уравнением

$$\lambda_{2k} = -\frac{1}{2} \pi^2 (2k + 1)^2 + a_1 + b_0 \exp(-c\lambda_{2k} + \pi i(2k + 1)\theta_1),$$

в котором  $\theta_1 = \theta_1(\varepsilon) \in [0, 1)$ , так же как и выше, дополняет  $c(\varepsilon^{-2} - \varepsilon^{-1} + 1)$  до целого числа. Все остальные корни (7.28) имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Рассмотрим асимптотический ряд

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{\pi(2k+1)it_1} + \varepsilon^2 x_2(t_1, \tau) + \varepsilon^3 x_3(t_1, \tau) + \dots, \quad (7.29)$$

где  $\tau = \varepsilon^2 t$ ,  $t_2 = (1 - \varepsilon + \varepsilon^2)t$ , а  $x_2$  и  $x_3$  периодичны по первому аргументу с периодом 1. Подставляя (7.29) в (7.22) и последовательно приравнявая



коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим, что при всех целых  $k$  должны выполняться равенства

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = (a_1 - \frac{1}{2}\pi^2(2k+1)^2)\xi_k + b_0 e^{\pi i(2k+1)\theta_1} \xi_k(t-c) + (f_2^2 + f_3)\varphi_k(\xi).$$

Здесь через  $\varphi_k(\xi)$  обозначен коэффициент при  $\exp(\pi i(2k+1)t)$  в разложении  $\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{\pi i(2k+1)t}\right)^3$  в ряд Фурье.

Последняя система может быть записана в виде одной краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + b_0 u(\tau - c, \tau + \theta_1) + (f_2^2 + f_3)u^3, \quad (7.30)$$

$$u(\tau, r) = -u(\tau, r+1), \quad (7.31)$$

которая играет роль нормальной формы в этом случае.

**Теорема 7.6** Пусть (7.30)–(7.31) имеет решение  $u_*(\tau, r)$ . Тогда уравнение (7.22) имеет асимптотическое по невязке решение вида

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon u_*(\varepsilon^2 t(1 + o(1)), t(1 - \varepsilon + \varepsilon^2)(1 + o(1))) (1 + o(1)).$$

Аналогичным образом можно рассматривать и ситуации, когда  $T_2$  по порядку больше чем  $\varepsilon^{-2}$  либо меньше чем  $\varepsilon^{-2}$ . Пусть

$$b = \varepsilon^p b_0, \quad T_1 = \frac{1}{\varepsilon}, \quad T_2 = T_1 \frac{c}{\varepsilon^q}, \quad c > 0, \quad q > 0, \quad 0 < p \leq q, \quad p \leq 2.$$

Если

$$a = 1 + \varepsilon^p a_1,$$

то нормализованная форма исходного уравнения (7.22) представляет собой однопараметрическое семейство краевых задач с запаздыванием следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + b_0 u(\tau - c\varepsilon^{p-q}, r + \theta_1) + f_2 u^2,$$

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}).$$

Здесь  $\omega > 0$  — произвольное число, а  $\theta_1 = \theta_1(\varepsilon, \omega) \in [0, 2\pi)$  дополняет до целого кратного  $2\pi$  значение некоторого выражения, явный вид которого существенно зависит от  $p$  и  $q$ .

Аналогично, если

$$a = -1 + \varepsilon^p a_1,$$

то в качестве нормализованной формы получим систему вида

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + b_0 u(\tau - c\varepsilon^{p-q}, r + \theta_1) + (f_2^2 + f_3)u^3,$$

$$u(\tau, r) = -u(\tau, r + \frac{\pi}{\omega}),$$

зависящую от непрерывного положительно параметра  $\omega$ .

## §8. Динамика системы с линейно распределенным запаздыванием

**8.1.** В предыдущих параграфах изучалась динамика уравнений с одним или двумя запаздываниями. Логичным обобщением таких случаев является случай, когда в уравнение входят значения неизвестной функции, не в отдельных точках, а на некотором промежутке. Общий вид уравнений такого типа

$$\dot{x} + x = \int_{-T}^0 x(t+s)dr(s) + f(x).$$

Такие уравнения называются уравнениями с распределенным запаздыванием.

В этом параграфе изучается вопрос о поведении в окрестности нуля решений интегро-дифференциального уравнения с линейно распределенным запаздыванием

$$\dot{x} + x = \int_{-T}^0 \left(a + b \frac{s}{T}\right) x(t+s)ds + f(x) \quad (8.1)$$

в предположении, что

$$T \gg 1. \quad (8.2)$$

Функция  $f$ , как обычно, имеет в нуле порядок малости выше первого. Поэтому в окрестности нуля мы представим ее в виде

$$f(x) = f_2 x^2 + f_3 x^3 + \dots$$

При условии (8.2) удобно произвести замену времени  $t \rightarrow tT$  и замену  $x(tT) \rightarrow x(t)$ . В итоге приходим к уравнению

$$\varepsilon^2 \dot{x} + \varepsilon x = \int_{-1}^0 (a + bs)x(t+s)ds + \varepsilon f(x), \quad (8.3)$$

где  $\varepsilon = T^{-1} \ll 1$ . Это уравнение является сингулярно возмущенным.

Рассмотрим уравнение, которое получается из (8.3) путем отбрасывания нелинейности

$$\varepsilon^2 \dot{x} + \varepsilon x = \int_{-1}^0 (a + bs)x(t+s)ds.$$

Подставим  $x = \exp(\lambda t)$ . Если  $\lambda \neq 0$ , то получим следующее уравнение:

$$\varepsilon^2 \lambda^3 + \varepsilon \lambda^2 = a\lambda[1 - e^{-\lambda}] + b\lambda e^{-\lambda} - b[1 - e^{-\lambda}], \quad \lambda \neq 0. \quad (8.4)$$

Для  $\lambda = 0$  получим

$$b = 2a - 2\varepsilon.$$

Уравнение (8.4) является характеристическим уравнением для задачи (8.3). Это значит, что динамика исходной задачи вблизи нулевого состояния равновесия описывается расположением корней характеристического уравнения. Возможны три случая:

1. Существует такое  $M > 0$ , что при любом сколь угодно малом  $\varepsilon > 0$  найдется корень  $\lambda(\varepsilon)$  такой, что  $\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon) > M$ . В этом случае нулевое решение исходной задачи заведомо неустойчиво, более того, в его окрестности также нет устойчивых режимов. Назовем этот случай случаем неустойчивости.
2. Существует такое  $M > 0$ , что при каждом достаточно малом  $\varepsilon > 0$  все корни уравнения (8.4) удовлетворяют  $\operatorname{Re} \lambda < -M$ . В этом случае нулевое решение исходной задачи асимптотически устойчиво. Будем называть этот случай случаем устойчивости.
3. Для каждого  $M > 0$  найдется такое  $\varepsilon(M) > 0$ , что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon(M))$  все корни (8.4) лежат в полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda < M$ , при этом существуют корни  $\lambda(\varepsilon)$ , такие что  $\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В этом случае для изучения динамики исходного уравнения нужно проводить дополнительные исследования. Этот случай будем называть критическим.

**8.2.** Исследуем возможное расположение корней (8.4). Сразу отметим, что всегда существует корень  $\lambda = 0$ . Нам он не интересен, кроме случая  $b = 2a - 2\varepsilon$ , который разберем отдельно. Поэтому далее из рассмотрения мы его исключаем.

Сразу отметим, что если  $a > 0$ , то при достаточно малых  $\varepsilon$  существуют корни в правой комплексной полуплоскости вида

$$\lambda = \frac{\alpha + i\beta}{\varepsilon} + O(e^{-1/\varepsilon}), \quad \alpha > 0,$$

т.е. реализуется случай неустойчивости.

Далее будем считать, что  $a \leq 0$ .

Изучим, при каких значениях параметров у (8.4) есть корень, такой что  $\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Такое  $\lambda$  представимо в виде:

$$\lambda(\varepsilon) = i\omega_-(\varepsilon) + i\omega_0(\varepsilon) + O(\varepsilon), \quad (8.5)$$

где  $\omega_0(\varepsilon) = O(1)$ , а  $\omega_-(\varepsilon) \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  либо  $\omega_- \equiv 0$ .

Рассмотрим сначала вариант  $\omega_- \neq 0$ . Подставим (8.5) в (8.4).

$$-\varepsilon^2 \omega_-^3 i - \varepsilon \omega_-^2 = a \omega_- [1 - e^{-i\omega_- + i\omega_0}] i + b \omega_- e^{-i\omega_- + i\omega_0} i + O(1).$$

Отсюда следует, что либо  $\omega_-$  имеет порядок  $\varepsilon^{-1}$  и

$$(b - a) \exp(-i\omega_- + i\omega_0) = -\varepsilon^2 \omega_-^2 + \varepsilon \omega_- i - a, \quad (8.6)$$

либо  $\omega_-$  меньше по порядку, чем  $\varepsilon^{-1}$  и выполняется

$$(a - b) \exp(-i\omega_- + i\omega_0) = a. \quad (8.7)$$

Для того чтобы уравнение (8.6) имело решение, необходимо, чтобы модули правой и левой частей были равны. Следовательно, если сделать в этом уравнении замену  $\omega_- = \omega_{-1}/\varepsilon$ , получим

$$\omega_{-1}^2 + (a + \omega_{-1}^2)^2 = (b - a)^2. \quad (8.8)$$

Это уравнение будет иметь действительное ненулевое решение, только если выполняются следующие условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a + 1 > 0 \\ b > 0 \\ b < 2a \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2a + 1 < 0 \\ b \geq b_+ = a + \frac{1}{2} \sqrt{-(1 + 4a)} \\ b \leq b_- = a - \frac{1}{2} \sqrt{-(1 + 4a)} \end{array} \right. \quad (8.9)$$

Уравнение (8.7) будет иметь решение, только если  $|b - a| = |a|$ .

Теперь разберем ситуацию  $\omega_- = 0$ . Тогда  $\lambda = i\omega_0 + \varepsilon\lambda_1 + \dots$ . Главная часть уравнения (8.4) будет иметь вид

$$(b + (b - a)\omega_0 i)e^{-i\omega_0} = b - a\omega_0 i.$$

Чтобы решение последнего уравнения существовало, необходимо, чтобы выполнялось равенство модулей правой и левой частей.

$$b^2 + a^2\omega_0^2 = b^2 + (b - a)^2\omega_0^2.$$

Решение  $\omega_0 = 0$  породит отличное от нуля решение (8.4) только при  $b = 2a$ . Таким образом, необходимое условие существования ненулевого корня последнего уравнения

$$b = 0 \quad \text{или} \quad b = 2a. \quad (8.10)$$

Итак, корень характеристического квазиполинома (8.4) вида (8.5) при  $\omega_- = 0$  может существовать только при выполнении условий (8.10).

Введем в рассмотрение промежутки значений  $b$

$$I = \begin{cases} (2a, 0), & 2a + 1 \geq 0 \\ (b_-, b_+), & 2a + 1 < 0 \end{cases}$$

Назовем этот промежуток „внутренним“. Как было показано, если  $b \in I$ , то не может выполняться никакой из критических случаев. Изучим подробнее расположение корней (8.4) при таких  $b$ .

Пусть выполняется  $b \in I$ , где  $I$  — внутренний промежуток. Как было показано ранее, при таком  $b$  критический случай не может иметь места. Следовательно, если при каком-то  $b_0 \in I$  имеет место случай устойчивости (неустойчивости), то случай устойчивости (неустойчивости) будет иметь место при всех  $b \in I$ .

Рассмотрим значение  $b = a$ . Очевидно, что такое  $b$  принадлежит  $I$ . Тогда уравнение (8.4) принимает вид

$$\varepsilon^2\lambda^3 + \varepsilon\lambda^2 = a\lambda + a(e^{-\lambda} - 1).$$

Представим  $\lambda$  в виде

$$\lambda = \lambda_-(\varepsilon) + \lambda_0(\varepsilon) + \dots,$$

где  $|\lambda_-(\varepsilon)|$  стремится к бесконечности при  $\varepsilon$ , стремящемся к нулю, либо  $\lambda_- \equiv 0$ ,  $\lambda_0 = O(1)$ , а в многоточии собраны слагаемые более высоких порядков малости.

Отметим, что  $\operatorname{Re} \lambda_- \leq 0$ . Действительно, если выполнено обратное, то с необходимостью должно выполняться  $a > 0$ , что неверно. Если  $\operatorname{Re} \lambda_- < 0$ , то при достаточно малых  $\varepsilon$   $\operatorname{Re} \lambda < 0$ . Рассмотрим случай  $\operatorname{Re} \lambda_- = 0$ . Т.к. критический случай места иметь не может, то и  $\operatorname{Im} \lambda_- = 0$ .

Подставим  $\lambda = \lambda_0 + o(1)$  в уравнение. Главная часть тогда примет вид

$$a\lambda_0 + ae^{-\lambda_0} - a = 0,$$

откуда следует

$$e^{-\lambda_0} = 1 + \lambda_0.$$

Если  $\operatorname{Re} \lambda_0 > 0$ , то модуль правой части больше 1, а модуль левой — меньше. Выполняться это не может. Следовательно,  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  (случай  $\operatorname{Re} \lambda_0 = 0$  невозможен, т.к. невозможен критический случай).

Итак, мы показали, что при  $b = a$  у уравнения (8.4) не может быть корней с положительной вещественной частью при малых  $\varepsilon$ , т.е. выполняется случай устойчивости. Следовательно, при всех  $b \in I$  имеет место случай устойчивости.

Построим асимптотику собственных значений в критических случаях. Пусть выполнено одно из условий (8.10). Построим асимптотику стремящихся к мнимой оси решений характеристического уравнения (8.4) в этом случае. Такие  $\lambda$ , как было показано выше, представимы в виде

$$\lambda = \omega i + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots$$

Если  $b = 0$ , то уравнение (8.4) принимает вид

$$\varepsilon^2 \lambda^2 + \varepsilon \lambda = a[1 - e^{-\lambda}].$$

У него есть цепочка корней вида ( $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ )

$$\lambda_k(\varepsilon) = 2\pi i k \left(1 + \varepsilon \frac{1}{a}\right) + \varepsilon^2 \left(-2\pi^2 k^2 \frac{2a+1}{a^2} + \frac{2\pi k}{a^2} i\right) + \dots$$

Кроме того, для каждого  $0 < \gamma < 1$  и  $\omega > 0$  можно построить асимптотику корней вида

$$\lambda_k(\varepsilon) = \frac{\omega k}{\varepsilon^\gamma} i + \theta(\varepsilon) k i + \varepsilon^{1-\gamma} \left(\frac{1}{a} + o(1)\right) i + \varepsilon^{2-2\gamma} \left(-\omega^2 \frac{2a+1}{a^2} + o(1)\right).$$

Здесь  $\theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$  таково, что  $\theta(\varepsilon) + \omega \varepsilon^{-\gamma}$  является целым кратным  $2\pi$ . Отметим, что если  $2a+1 < 0$ , то при любом сколь угодно малом  $\varepsilon$  и

для любого положительного  $M$  найдется номер  $k$  такой, что  $\operatorname{Re} \lambda_k > M$ , следовательно, будет реализовываться случай неустойчивости.

Если  $b = 2a$ , то уравнение (8.4) принимает вид

$$\varepsilon^2 \lambda^3 + \varepsilon \lambda^2 = a \lambda [1 + e^{-\lambda}] - 2a [1 - e^{-\lambda}].$$

Для определения  $\omega$  получаем уравнение

$$e^{-i\omega} = \frac{2 - i\omega}{2 + i\omega}.$$

Это уравнение имеет счетное число решений  $\omega_k = \pi(2k+1) + \nu_k$  ( $k \in Z$ ). Причем выполняется  $\nu_k \in (0, \pi/2)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \nu_k = 0$ . Цепочка  $\lambda_k(\varepsilon)$  в этом случае принимает вид:

$$\lambda_k(\varepsilon) = i\omega_k + \varepsilon \frac{2 + i\omega_k}{a} - \varepsilon^2 \left( \frac{\omega_k^2(1 + 2a) + 20}{2a^2} - \frac{2\omega_k^2 a - \omega_k^2 + 12}{a^2 \omega_k} i \right) + \dots$$

Отметим, что если  $2a + 1 < 0$ , то т.к.  $\omega_k \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$  для любого положительного  $M$  найдется номер  $k$  такой что  $\operatorname{Re} \lambda_k > M$ , следовательно, будет реализовываться случай неустойчивости.

Построим теперь асимптотику собственных значений в случае выполнения одного из условий (8.9). В этом случае существует действительное решение уравнения (8.8). Не ограничивая общности, будем рассматривать только положительное решение

$$\omega_{-1} = \sqrt{\frac{-(2a+1) + \sqrt{(2a+1)^2 - 4a^2 + 4(b-a)^2}}{2}}.$$

Решение (8.4), стремящееся к мнимой оси, в этом случае представимо в форме

$$\lambda = \frac{\omega_{-1}}{\varepsilon} i + \omega_0(\varepsilon) i + \varepsilon \lambda_1 + \dots$$

Рассмотрим равенство (8.6), как уравнение относительно  $\omega_0$ . Все его решения можно представить в виде

$$\omega_{0k}(\varepsilon) = \theta(\varepsilon) + \Omega + 2\pi k, \quad k \in Z,$$

где  $\theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$  дополняет  $\omega_{-1}\varepsilon^{-1}$  до целого кратного  $2\pi$ , а  $\Omega \in [0, 2\pi)$  — это решение уравнения

$$e^{-i\Omega} = \frac{-\omega_{-1}^2 + \omega_{-1}i - a}{b - a}.$$

Таким образом,

$$\lambda_k(\varepsilon) = \left( \frac{\omega_- - 1}{\varepsilon} + \theta(\varepsilon) + \Omega + 2\pi k \right) i + \varepsilon \lambda_{k1} + \varepsilon^2 \lambda_{k2} + \dots, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Подставим это выражение в (8.4) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Получим

$$\lambda_{k1} = c_1 \omega_{0k} + c_2 + c_3 i + 2\pi k c_4 i,$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{\omega_- (2a + 2\omega_-^2 + 1)}{(b - a)^2} \\ c_2 &= \frac{b}{(b - a)^2} \\ c_3 &= -\frac{b(b + \omega_-^2) - \omega_- (\omega_-^2 - a)(\theta(\varepsilon) + \Omega)}{(b - a)^2 \omega_-} \\ c_4 &= \frac{a - \omega_-^2}{(b - a)^2} \end{aligned}$$

Заметим, что  $\omega_{0k}$  может принимать положительные и отрицательные значения, сколь угодно большие по модулю. Следовательно, если  $c_1 \neq 0$ , то при любом, сколь угодно малом  $\varepsilon$  найдется такое  $k$ , что  $\operatorname{Re} \lambda_1 > M > 0$ , где  $M$  — произвольное положительное число. Значит, при  $c_1 \neq 0$  реализуется случай неустойчивости. Поэтому интерес будет представлять только случай  $c_1 = 0$ . Это условие можно записать в виде

$$1 + 2a + 2\omega_{-1}^2 = 0.$$

Подставляя сюда значение для  $\omega_{-1}^2$ , получим

$$(2a + 1) - 4a^2 + 4(b - a)^2 = 0, \quad 1 + 2a < 0.$$

Откуда следует

$$b = b_{\pm} = a \pm \frac{1}{2} \sqrt{-(1 + 4a)}.$$

При таких значениях параметра  $b$

$$\begin{aligned} \lambda_k(\varepsilon) &= \frac{\sqrt{-(4a + 2)}}{2\varepsilon} i + i\theta(\varepsilon) + i\Omega + 2\pi i k + \\ &+ \varepsilon \left( \frac{4a \pm 2\sqrt{-(1 + 4a)}}{1 + 4a} + i c_3 - 4\pi i k \right) + \dots \end{aligned}$$



Также, асимптотика корней характеристического квазиполинома в этом случае может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}\lambda_k(\varepsilon) = & \frac{\sqrt{-(4a+2)}}{2\varepsilon}i + i\theta(\varepsilon) + i\Omega + 2\pi ik + \\ & + \varepsilon\left(\frac{4a \pm 2\sqrt{-(1+4a)}}{1+4a} + ic_3 - 4\pi ik\right) + \dots\end{aligned}$$

Суммируя все сказанное в этом пункте, можно сформулировать следующие утверждения.

**Теорема 8.1** Пусть выполнено одно из условий:

$$a > 0,$$

$$2a + 1 > 0, |b - a| > a,$$

$$2a + 1 < 0, |b - a| > \frac{1}{2}\sqrt{-(1+4a)}.$$

Тогда при достаточно малых  $\varepsilon$  нулевое решение задачи (8.3) неустойчиво, и в его окрестности нет устойчивых режимов при любой функции  $f(x)$ .

**Теорема 8.2** Пусть выполнено одно из условий:

$$a < 0, 2a + 1 > 0, |b - a| < a;$$

$$a < 0, 2a + 1 < 0, |b - a| < \frac{1}{2}\sqrt{-1(1+4a)}.$$

Тогда при достаточно малых  $\varepsilon$  нулевое решение задачи (8.3) асимптотически устойчиво при любой функции  $f(x)$ .

Если параметры  $a$  и  $b$  таковы, что условия ни одной из теорем не выполняются, то необходимо проводить дополнительные исследования. При этом, как было показано выше, нет собственных значений, отделенных от мнимой оси при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , с положительной вещественной частью, и есть бесконечное количество корней  $\lambda_k(\varepsilon)$ , действительная часть которых стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Разберем отдельно все варианты значений параметров, при которых имеет место критический случай.

**8.3.** Исследуем динамику (8.3) в случае  $b$  близкого к нулю. Пусть сначала

$$a < 0, \quad 2a + 1 > 0, \quad b = \varepsilon^2 b_1.$$

В этом случае исходное уравнение (8.3) принимает вид

$$\varepsilon^2 \dot{x} + \varepsilon x = \int_{-1}^0 (a + \varepsilon^2 b_1 s) x(t+s) ds + \varepsilon f(x). \quad (8.11)$$

У характеристического уравнения (8.4) имеется бесконечно много корней  $\lambda_k(\varepsilon)$ ,  $k \in Z$ ,  $k \neq 0$ , таких что  $\operatorname{Re} \lambda_k \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а все остальные корни этого уравнения лежат слева и отделены при  $\varepsilon \rightarrow 0$  от мнимой оси. Как было найдено выше, корни, стремящиеся к мнимой оси, можно представить в виде

$$\lambda_k(\varepsilon) = 2k\pi \left(1 + \frac{1}{a}\right) i + \varepsilon^2 \left(-2\pi^2 k^2 \frac{2a+1}{a^2} + \frac{2\pi k}{a^2} i + b_1\right) + \dots$$

Согласно общей идеологии бифуркационных методов, установившиеся режимы уравнения (8.11) могут формироваться в „окрестности“ критических частот  $2\pi i k$ ,  $k \in Z$ ,  $k \neq 0$ . Представим  $x$  в виде формального ряда

$$x = \varepsilon \sum_{k \in Z, k \neq 0} \xi_k(\tau) e^{2\pi i k t_1} + \varepsilon^2 x_2(t_1, \tau) + \varepsilon^3 x_3(t_1, \tau) + \dots,$$

где  $\tau = \varepsilon^2 t$ ,  $t_1 = (1 + \varepsilon a^{-1} + \varepsilon^2 a^{-2})t$ , а  $x_i(t_1, \tau)$  периодичны по первому аргументу с периодом 1.

Подставим этот ряд в (8.3) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon^2$  получим равенство

$$\sum_{k \in Z, k \neq 0} \xi_k(\tau) e^{2\pi i k t} = a \sum_{k \in Z, k \neq 0} \frac{1}{a} \xi_k(\tau) e^{2\pi i k t} + \int_{-1}^0 x_2(t+s, \tau) ds.$$

Откуда следует, что

$$\int_{-1}^0 x_2(t+s, \tau) ds = 0.$$

Положим  $x_2 \equiv 0$ . При  $\varepsilon^3$  получим:

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{k \in Z, k \neq 0} k \xi_k e^{2\pi i k t} &= a \sum_{k \in Z, k \neq 0} \left( \frac{1}{2\pi i k} \frac{d\xi_k}{d\tau} + b_1 \xi_k \right) e^{2\pi i k t} + \\ &+ \int_{-1}^0 x_3(t+s, \tau) ds + f_2 \left( \sum_{k \in Z, k \neq 0} \xi_k e^{2\pi i k t} \right)^2 \end{aligned}$$

Так как  $x_3$  — периодичная функция, то ее можно разложить в ряд Фурье. Собирая коэффициенты при  $\exp(2\pi i k t)$ , получим, что для существования

такой  $x_3$  должны выполняться следующие равенства:

$$\frac{d}{d\tau}\xi_k = (-2\pi^2 k^2 \frac{2a+1}{a^2} + b_1)\xi_k - 2\pi i k f_2 \varphi_k(\xi), \quad k \neq 0, \quad (8.12)$$

где  $\varphi_k(\xi)$  — это коэффициент при  $\exp(2\pi i k t)$  в разложении

$$\left( \sum_{k \in Z, k \neq 0} \xi_k e^{2\pi i k t} \right)^2$$

в ряд Фурье.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{2a+1}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + b_1 u - f_2 \frac{\partial}{\partial r} u^2 \quad (8.13)$$

с граничными условиями

$$u(\tau, r) = u(\tau, r+1), \quad \int_0^1 u(\tau, r) dr = 0. \quad (8.14)$$

Условие  $2a+1 > 0$  обеспечивает параболичность этой задачи. Разложим решение этого уравнения в ряд по собственным функциям линейаризованной правой части, который совпадет с рядом Фурье:

$$u(\tau, r) = \sum_{k \in Z, k \neq 0} \xi_k(\tau) e^{2\pi i k r}.$$

Подставляя последнее равенство в (8.13), получим систему (8.12). Поэтому уравнение (8.13) можно считать нормализованной формой для исходного уравнения (8.3). Справедлива следующая теорема.

**Теорема 8.3** Пусть задача (8.13)–(8.14) имеет решение  $u_0(\tau, r)$ . Тогда у уравнения (8.11) существует асимптотическое по невязке решение

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon u_0(\varepsilon^2 t, t(1 + \varepsilon a^{-1} + \varepsilon^2 a^{-2} + o(1)))(1 + o(1)).$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда

$$a < 0, \quad 2a+1 > 0, \quad b = \varepsilon^p b_1, \quad 0 < p < 2.$$

Как было показано выше, характеристический квазиполином (8.4) имеет корни с асимптотикой

$$\lambda_k(\varepsilon) = \frac{\omega k}{\varepsilon^\gamma} i + \theta(\varepsilon) k i + \varepsilon^{1-\gamma} \left( \frac{1}{a} + o(1) \right) i + \varepsilon^{2-2\gamma} \left( b_1 - \omega^2 \frac{2a+1}{a^2} + o(1) \right).$$

Здесь мы полагаем  $\gamma = 1 - p/2$ , а  $\omega > 0$  берем произвольным. Выполним в (8.11) замену

$$x = \varepsilon^p \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \xi_k(\tau) e^{ikt_1} + \varepsilon^{2p} x_2(t_1, \tau) + \varepsilon^{3p} x_3(t_1, \tau) + \dots,$$

где  $\tau = \varepsilon^{2p} t$ ,  $t_1 = (\omega \varepsilon^{-\gamma} + \theta(\varepsilon) + \varepsilon^{p/2} a^{-1} + o(\varepsilon^{p/2})) t$ , а  $x_i(t_1, \tau)$   $2\pi$ -периодичны по первому аргументу. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , мы, как и выше, получим, что амплитуды  $\xi_k$  должны удовлетворять системе

$$\frac{d}{d\tau} \xi_k = \left( b_1 - \frac{\omega^2}{2} \frac{2a+1}{a^2} \right) \xi_k - \omega i k f_2 \varphi_k(\xi), \quad k \neq 0,$$

которая может быть свернута в одно параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{2a+1}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + b_1 u - f_2 \frac{\partial}{\partial r} u^2$$

с краевыми условиями

$$u(\tau, r) = u\left(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}\right), \quad \int_0^{2\pi\omega^{-1}} u(\tau, r) dr = 0.$$

Эта краевая задача играет роль нормализованной формы в рассматриваемом случае. Справедлив аналог теоремы 8.3.

**8.4.** Рассмотрим случай, когда параметр  $b$  близок к  $2a$ . Пусть

$$a < 0, \quad 2a+1 > 0, \quad b = 2a + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2.$$

Тогда исходное уравнение (8.3) принимает вид

$$\varepsilon^2 \dot{x} + \varepsilon x = \int_{-1}^0 \left( a + (2a + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)s \right) x(t+s) ds + \varepsilon f(x). \quad (8.15)$$

Характеристическое уравнение имеет набор корней, стремящихся к мнимой оси. В случае  $b_1 \neq -2$ , их асимптотика записывается как

$$\lambda_k(\varepsilon) = i\omega_k + \varepsilon \frac{1}{a}(2 + i\omega_k + b_1) + \dots, \quad k \in Z, \quad k \neq 0,$$

$$\lambda_0 = \frac{6 + 3b_1}{a}\varepsilon + \dots,$$

где  $\omega_k$  такие, как были определены в пункте 2. Если  $b_1 = -2$ , то корни, вещественная часть которых стремится к нулю, имеют вид

$$\lambda_k(\varepsilon) = i\omega_k \left( 1 + \varepsilon \frac{1}{a} + \varepsilon^2 \frac{2a + 3}{a^2} \right) - \varepsilon^2 \frac{1}{a} \left( \frac{(2a + 1)\omega_k^2}{2a} + b_2 \right) + O(\varepsilon^3),$$

$$\lambda_0(\varepsilon) = \varepsilon^2 \frac{3b_2}{a} + O(\varepsilon^3).$$

Все остальные корни находятся в левой комплексной полуплоскости и отделены при  $\varepsilon \rightarrow 0$  от мнимой оси. Положим  $\omega_0 = 0$ .

Первый случай. Пусть сначала  $b_1 \neq -2$ . Тогда представим  $x$  в виде

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{k \in Z} \xi_k(\tau) e^{\omega_k i t} + \varepsilon^2 x_2(t, \tau) + \dots,$$

где  $\tau = \varepsilon t$  — медленное время, а  $x_i(t, \tau)$  почти периодичны по первому аргументу. Подставим этот ряд в исходное уравнение и соберем коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon^2$  получим:

$$\sum_{k \in Z} \xi_k(\tau) e^{\omega_k i t} = a \sum_{k \in Z} \left( \frac{1}{2 + i\omega_k + b_1} \frac{d\xi_k}{d\tau} \right) e^{\omega_k i t} + \int_{-1}^0 a(1 + 2s)x_2(t + s, \tau) ds.$$

Необходимое условие существования  $x_2$ , удовлетворяющего такому уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_k}{d\tau} &= \frac{2 + i\omega_k + b_1}{a} \xi_k, \quad k \in Z, \quad k \neq 0; \\ \frac{d\xi_0}{d\tau} &= \frac{6 + 3b_1}{a} \xi_0. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Это линейная система, все ее решения либо стремятся к нулю, либо неограниченно возрастают. Исходя из этого, получаем теорему.

**Теорема 8.4** Пусть  $b_1 < -2$ . Тогда нулевое решение (8.15) неустойчиво. В его некоторой не зависящей от  $\varepsilon$  окрестности нет устойчивых решений.

Пусть  $b_1 > -2$ . Тогда нулевое решение уравнения (8.15) асимптотически устойчиво, все решения из его некоторой достаточно малой, но не зависящей от  $\varepsilon$ , окрестности стремятся к нулю.

Отметим, что если  $b_1 = -2$ , то все приведенные построения также имеют место. Однако в этом случае система (8.16) становится негрубой, т.е. у нее нет экспоненциально устойчивых решений. Поэтому по поведению ее решений мы не можем судить о динамике исходного уравнения (8.15).

Второй случай. Пусть теперь  $b_1 = -2$ . Положим в (8.15)

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k(\tau) e^{i\omega_k t} + \varepsilon^2 x_2(t_1, \tau) + \dots,$$

где  $\tau = \varepsilon^2 t$ ,  $t_1 = (1 + \varepsilon a^{-1} + \varepsilon^2(2a + 3)a^{-2})t$ , а  $x_2$  является квадратичной формой от  $\xi_k \exp(i\omega_k \tau)$ . В результате для определения медленно меняющихся амплитуд  $\xi_k(\tau)$  получим систему уравнений ( $k \neq 0$ )

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = \left( -\frac{(2a+1)\omega_k^2}{2a^2} + \frac{b_2}{a} \right) \xi_k - \varepsilon \frac{2(2+i\omega_k)}{a} f_2 \xi_k \xi_0 \quad (8.17)$$

$$\frac{d\xi_0}{d\tau} = \frac{3b_2}{a} \xi_0 - \frac{2f_2}{a} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \xi_m \xi_{-m} \quad (8.18)$$

Систему (8.17)–(8.18) можно записать в виде уравнения в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} = & \frac{2a+1}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{b_2}{a} u + \frac{2b_2}{a} M(u) - \\ & - \frac{2f_2}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial r} M(u) - 2uM(u) - \|u\|^2 + 2(M(u))^2 \right) \end{aligned} \quad (8.19)$$

с дополнительными краевыми условиями:  $u$  принадлежит замыканию линейного пространства, натянутого на функции  $\exp(i\omega_k \tau)$

$$u \in \overline{\text{Lin}\{\exp(i\omega_k \tau)\}_{k=-\infty}^{\infty}}. \quad (8.20)$$

Здесь  $M(u)$  — это среднее функции  $u$ , т.е.

$$M(u) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \int_0^h u(\tau, r) dr,$$

а через  $\|u\|^2$  обозначено

$$\|u\|^2 = \int_{-1}^0 u^2(\tau, r) d\tau.$$

Отметим, что если в (8.19) подставить

$$u(\tau, r) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k(\tau) e^{i\omega_k \tau},$$

то получим систему (8.17)–(8.18). Поэтому задача (8.19)–(8.20) является в данном случае нормализованной формой для (8.15).

**Теорема 8.5** Пусть (8.19)–(8.20) имеет решение  $u_*(\tau, r)$ . Тогда уравнение (8.15) имеет асимптотическое по невязке решение вида

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon u(\varepsilon^2 t, (1 + o(1))t)(1 + o(1)).$$

**8.5.** Изучим динамику (8.3) в критическом случае на больших модах. Пусть

$$a < 0, \quad 2a + 1 < 0, \quad b = b_{\pm} = a \pm \frac{1}{2} \sqrt{-(1 + 4a)} + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2.$$

Тогда уравнение (8.3) имеет вид

$$\varepsilon^2 \dot{x} + \varepsilon x = a \int_{-1}^0 (a + (b_{\pm} + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2)s) x(t+s) ds + \varepsilon f(x). \quad (8.21)$$

Характеристическое уравнение (8.4) имеет в этом случае счетное множество корней  $\lambda_k(\varepsilon)$ , стремящихся к мнимой оси. Если  $b_1 \neq -1 \mp 2a\sqrt{-(1+4a)^{-1}}$ , то

$$\begin{aligned} \lambda_k(\varepsilon) = & \left( \frac{\sqrt{-(4a+2)}}{2\varepsilon} + \theta(\varepsilon) + \Omega + 2\pi k \right) i + \\ & + \varepsilon \left( \frac{4a \pm 2(1+b_1)\sqrt{-(1+4a)}}{1+4a} + ic_3 - 4\pi ik \right) + \dots \end{aligned}$$

В случае  $b_1 = -1 \mp 2a\sqrt{-(1+4a)^{-1}}$

$$\lambda_k(\varepsilon) = \left( \frac{\sqrt{-(4a+2)}}{2\varepsilon} + \theta(\varepsilon) + \Omega + 2\pi k \right) i + \varepsilon(ic_3 - 4\pi ik) + \\ + \varepsilon^2(-4\pi^2 k^2(d_1 + id_2) + 2\pi ik(d_3 + id_4) + d_5 + id_6) \dots,$$

где действительные числа  $d_1 > 0$ ,  $d_2, d_3 = d_3(\theta(\varepsilon))$ ,  $d_4 = d_4(\theta(\varepsilon))$ ,  $d_5 = d_5(\theta(\varepsilon))$  и  $d_6 = d_6(\theta(\varepsilon))$  однозначно определяются через параметры  $a$  и  $b_2$ .

Первый случай. Пусть  $b_1 \neq -1 \mp 2a\sqrt{-(1+4a)^{-1}}$ . Представим  $x$  в виде ряда

$$x = \sqrt{\varepsilon}x_1(t_0, t_1, \tau) + \varepsilon x_2(t_0, t_1, \tau) + \sqrt{\varepsilon^3}x_3(t_0, t_1, \tau) + \dots,$$

где  $t_0 = (\omega_{-1}\sqrt{-(4a+2)}(2\varepsilon)^{-1} + \theta(\varepsilon) + \Omega + \varepsilon c_3)t$ ,  $t_1 = (1 - 2\varepsilon)t$ ,  $\tau = \varepsilon t$ , а

$$x_1 = e^{it_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k(\tau) e^{2\pi i k t_1} + e^{-it_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\xi}_k(\tau) e^{-2\pi i k t_1}.$$

Подставим выражение для  $x$  в (8.21) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon^{3/2}$  получим верное тождество. Из уравнений при  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^2$  найдем  $x_2$

$$x_2(t_0, t_1, \tau) = y_1 e^{2it_0} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k(\tau) e^{2\pi i k t_1} \right)^2 + \bar{y}_1 e^{-2it_0} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\xi}_k(\tau) e^{-2\pi i k t_1} \right)^2,$$

где

$$y_1 = f_2 \left( 2i\omega_- + 1 - \frac{a(1 - e^{-2i\Omega}) + b_0}{2i\omega_-} \right)^{-1}.$$

Из равенства коэффициентов при  $\varepsilon^{5/2}$  получим уравнение относительно  $x_3$ . Условие существования его решения примет вид

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = -\frac{4a \pm 2(1 + b_1)\sqrt{-(1+4a)}}{1+4a} \xi_k + \frac{\omega_- i e^{i\Omega}}{b_{\pm} - a} (2f_2 y_1 + 3f_3) \varphi_k(\xi), \quad (8.22)$$

где  $\phi_k(\xi)$  коэффициент при  $\exp(2\pi i k t)$  в разложении

$$\left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} \bar{\xi}_m e^{-2\pi i m t_1} \right) \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} \xi_m e^{2\pi i m t_1} \right)^2$$



в ряд Фурье. Систему (8.22) можно представить в виде уравнения

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{4a \pm 2(1+b_1)\sqrt{-(1+4a)}}{1+4a}u + \frac{\omega_- i e^{i\Omega}}{b_{\pm} - a}(2f_2 y_1 + 3f_3)u|u|^2. \quad (8.23)$$

Здесь  $u = u(\tau, r)$  при каждом  $\tau$  является комплексной периодической функцией параметра  $r$  с периодом 1. Это уравнение представляет собой нормализованную форму для уравнения (8.21). Т.е. справедлива следующая теорема.

**Теорема 8.6** Пусть уравнение (8.23) имеет решение  $u_*(\tau, r)$ , тогда исходное уравнение (8.21) имеет решение по невязке

$$x_*(t, \varepsilon) = \left( e^{(\omega_{-1}/\varepsilon + \Theta(\varepsilon) + \Omega + \varepsilon c_1 + o(\varepsilon))it} u_*(\varepsilon t, (1 - 2\varepsilon + o(\varepsilon))t) + \right. \\ \left. + e^{-(\omega_{-1}/\varepsilon + \Theta(\varepsilon) + \Omega + \varepsilon c_1 + o(\varepsilon))it} \bar{u}_*(\varepsilon t, (1 - 2\varepsilon + o(\varepsilon))t) \right) (1 + o(1)).$$

Второй случай. Пусть теперь  $b_1 = -1 \mp 2a\sqrt{-(1+4a)^{-1}}$ . Положим в (8.21)

$$x = \varepsilon x_1(t_0, t_1, \tau) + \varepsilon^2 x_2(t_0, t_1, \tau) + \varepsilon^3 x_3(t_0, t_1, \tau) + \dots, \quad (8.24)$$

где  $t_0 = (\omega_{-1}\sqrt{-(4a+2)}(2\varepsilon)^{-1} + \theta(\varepsilon) + \Omega + \varepsilon c_3)t$ ,  $t_1 = (1 - 2\varepsilon)t$ ,  $\tau = \varepsilon^2 t$ , а

$$x_1 = e^{it_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k(\tau) e^{2\pi i k t_1} + e^{-it_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\xi}_k(\tau) e^{-2\pi i k t_1}.$$

Производя такие же, как и выше, действия, получим, что роль нормальной формы в этом случае играет уравнение ( $y_1$  такое же как и выше)

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = (d_1 + id_2) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + (d_3 + id_4) \frac{\partial u}{\partial \tau} + (d_5 + id_6)u + \frac{\omega_- i e^{i\Omega}}{b_{\pm} - a}(2f_2 y_1 + 3f_3)u|u|^2. \quad (8.25)$$

с краевыми условиями

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + 1). \quad (8.26)$$

Динамика задачи (8.25)–(8.26) описывает поведение решений уравнения (8.21) в окрестности нулевого состояния равновесия. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 8.7** Пусть краевая задача (8.25)–(8.26) имеет решение  $u_*(\tau, r)$ , тогда исходное уравнение (8.21) имеет решение по невязке вида

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon \left( e^{(\omega_{-1}/\varepsilon + \Theta(\varepsilon) + \Omega + \varepsilon c_1 + o(\varepsilon))it} u_*(\varepsilon^2 t, (1 - 2\varepsilon + o(\varepsilon))t) + \right. \\ \left. + e^{-(\omega_{-1}/\varepsilon + \Theta(\varepsilon) + \Omega + \varepsilon c_1 + o(\varepsilon))it} \bar{u}_*(\varepsilon^2 t, (1 - 2\varepsilon + o(\varepsilon))t) \right) (1 + o(1)).$$

## §9. Нормализация в системе с периодически распределенным запаздыванием

**9.1.** Рассматривается вопрос о динамике интегро-дифференциального уравнения

$$\dot{x} + x = a \int_{-T}^0 \cos\left(\frac{\sigma s}{T}\right) x(t+s) ds + f(x), \quad (9.1)$$

где  $a \neq 0$  и  $\sigma$  некоторые параметры (не ограничивая общности, будем считать, что  $\sigma \geq 0$ ). Так же как и ранее, будем считать, что  $f(x)$  — достаточно гладкая функция, имеющая в нуле порядок малости выше первого, т.е. в окрестности нуля  $f(x)$  можно представить в виде

$$f(x) = f_2 x^2 + f_3 x^3 + \dots$$

Наибольший интерес динамика уравнения (9.1) представляет при достаточно большом запаздывании. Поэтому будем считать, что  $T \gg 1$ . При таком условии удобно произвести замену следующего вида:

$$t \rightarrow tT, \quad x(tT) \rightarrow x(t), \quad \varepsilon = T^{-1} \ll 1.$$

В итоге получим уравнение

$$\varepsilon^2 \dot{x} + \varepsilon x = a \int_{-1}^0 \cos(\sigma s) x(t+s) ds + \varepsilon f(x). \quad (9.2)$$

Изучение динамики системы (9.2) начнем с исследования линеаризованного уравнения. Стандартным образом построим характеристическое уравнение для его линейной части

$$\varepsilon^2 \lambda^3 + \varepsilon \lambda^2 + \varepsilon^2 \sigma^2 \lambda + \varepsilon \sigma^2 = a [\lambda - \lambda e^{-\lambda} \cos(\sigma) + \sigma e^{-\lambda} \sin(\sigma)], \quad \lambda^2 + \sigma^2 \neq 0. \quad (9.3)$$

Для корней этого квазиполинома справедливы следующие утверждения.

**Лемма 9.1** Пусть  $a < 0$ ,  $2a + 1 > 0$ ,  $0 < \sigma < \pi$ . Тогда существует  $c < 0$  такое, что при достаточно малых  $\varepsilon$  все решения  $\lambda$  характеристического уравнения (9.3) удовлетворяют условию  $\operatorname{Re} \lambda < c$ .

**Лемма 9.2** Пусть выполнено одно из условий

$$a > 0$$

$$2a + 1 < 0$$

$$a < 0, 2a + 1 > 0, \pi n < \sigma < \pi(n + 1), n - \text{натуральное.}$$

Тогда существует такое  $c > 0$ , что при любом, сколь угодно малом,  $\varepsilon$  характеристическое уравнение (9.3) имеет корень  $\lambda_+$  такой, что  $\operatorname{Re} \lambda_+ > c$ .

**Лемма 9.3** Пусть  $a < 0$ ,  $2a + 1 > 0$ ,  $\sigma = \pi n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Тогда при достаточно малых  $\varepsilon$  характеристическое уравнение (9.3) не имеет корней в правой комплексной полуплоскости, отделенных от мнимой оси, и существует корень  $\lambda(\varepsilon)$ , такой что  $\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

В силу лемм 9.1–9.2 и [30], справедлива следующая теорема

**Теорема 9.1** Пусть выполнены условия леммы 9.1, тогда нулевое решение уравнения (9.2) асимптотически устойчиво при любой функции  $f(x)$ .

Пусть выполнены условия леммы 9.2, тогда нулевое решение уравнения (9.2) неустойчиво, и в некоторой его окрестности нет устойчивых режимов при любой функции  $f(x)$ .

Таким образом, дополнительные исследования локальной динамики необходимо проводить, если параметры  $a$ ,  $\sigma$  таковы, что выполняются условия леммы 9.3. Как уже отмечалось, в этом случае нет собственных значений  $s$  отдаленной от мнимой оси положительной вещественной частью, и есть корень, действительная часть которого стремится к нулю. Отметим, что в этом случае одновременно существует бесконечное количество корней характеристического квазиполинома (9.3), стремящихся к мнимой оси при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Таким образом реализуется критический случай бесконечной размерности.

Если  $a < 0$ ,  $2a + 1 > 0$ ,  $\sigma = 0$ , то уравнение (9.2) принимает вид

$$\varepsilon^2 \dot{x} + \varepsilon x = a \int_{-1}^0 x(t+s) ds + \varepsilon F(x). \quad (9.4)$$

Исследование динамики такого уравнения описано выше (§8 пункт 3)

**9.2.** Пусть  $a < 0$ ,  $2a + 1 > 0$ ,  $\sigma = 2\pi n$ ,  $n$  – натуральное. В этом случае характеристическое уравнение (9.3) имеет набор корней, стремящихся при  $\varepsilon \rightarrow 0$  к мнимой оси

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \pi N \sqrt{-\frac{1}{a} i \varepsilon^{1/2} + \frac{\pi^2 N^2}{4a} \varepsilon} + \dots, \\ \bar{\lambda}_0 &= -\pi N \sqrt{-\frac{1}{a} i \varepsilon^{1/2} + \frac{\pi^2 N^2}{4a} \varepsilon} + \dots, \\ \lambda_k &= \pi i K + \varepsilon \lambda_{k1} + \varepsilon^2 \lambda_{k2} + \dots \end{aligned}$$

Здесь  $k$  целое ( $k \neq 0, \pm n$ ),  $K = 2k$ ,  $N = 2n$ ,

$$\begin{aligned} \lambda_{k1} &= \frac{\pi(K^2 - N^2)}{aK} i, \\ \lambda_{k2} &= \frac{\pi^2}{2a^2 K^2} (N^2 - K^2) ((2a + 1)K^2 - N^2) + \frac{\pi}{a^2 K^3} (K^4 - N^4) i. \end{aligned}$$

Все остальные решения (9.3) находятся в левой комплексной полуплоскости и отделены при  $\varepsilon \rightarrow 0$  от мнимой оси.

Согласно общей идеологии бифуркационных методов установившиеся режимы уравнения (9.2) могут формироваться в „окрестности“ критических частот  $2\pi i k$ ,  $k \neq \pm n$ . Представим  $x$  в виде формального ряда

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{\varepsilon} \sum_{k \neq 0, \pm n} \xi_k(\tau) e^{\lambda_k \theta} e^{\pi i K t} + \varepsilon u_1 + \varepsilon^{3/2} u_2 + \varepsilon^2 u_3 + \varepsilon^{5/2} u_4 + \\ &+ \sqrt{\varepsilon} \left( \xi_0(\theta) e^{\pi N \sqrt{-a^{-1}} i t_1} + \bar{\xi}_0(\theta) e^{-\pi N \sqrt{-a^{-1}} i t_1} \right) \dots, \end{aligned} \quad (9.5)$$

где  $\tau = \varepsilon^2 t$ ,  $\theta = \varepsilon t$ ,  $t_1 = \sqrt{\varepsilon} t$ , а функции  $u_k = u_k(t, t_1, \theta, \tau)$  предполагаются периодичными по первому аргументу и ограниченными по второму и третьему аргументам. Подставим (9.5) в (9.2) и будем последовательно собирать слагаемые при одинаковых степенях  $\varepsilon$ .

Из уравнения при  $\varepsilon^1$  следует

$$u_1 = \sum_{k \neq \pm n} u_{1k}(t_1, \theta, \tau) e^{\pi i K t}.$$

При  $\varepsilon^{3/2}$  получаем равенство

$$0 = \sum_{k \neq \pm n} \frac{K}{\pi(K^2 - N^2)i} \frac{\partial u_{1k}}{\partial t_1} e^{\pi i K t} + \int_{-1}^0 \cos(\pi N s) u_2(t + s, t_1, \theta, \tau) ds.$$

Для существования периодического  $u_2$ , удовлетворяющего этому уравнению, необходимо, чтобы для всех  $k \neq 0, \pm n$  выполнялось

$$\frac{\partial u_{1k}}{\partial t_1} = 0.$$

При этом

$$u_2 = \sum_{k \neq \pm n} u_{2k}(t_1, \theta, \tau) e^{\pi i K t}.$$

Приравнявая коэффициенты при  $\varepsilon^2$ , получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq \pm n} u_{1k} e^{\pi i K t} &= a \sum_{k \neq \pm n} \frac{K}{\pi(K^2 - N^2)i} \frac{\partial u_{1k}}{\partial \theta} e^{\pi i K t} + \frac{a}{\pi^2 N^2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial t_1^2} + \\ &+ a \sum_{k \neq \pm n} \frac{K}{\pi(K^2 - N^2)i} \frac{\partial u_{2k}}{\partial t_1} e^{\pi i K t} + a \int_{-1}^0 \cos(\pi N s) u_3(t + s, t_1, \theta, \tau) ds + \\ &+ f_2 \left( \sum_{k \neq 0, \pm n} \xi_k(\tau) e^{\lambda_{k1} \theta} e^{\pi i K t} + \xi_0(\theta) e^{\pi N \sqrt{-a^{-1}} i t_1} + \bar{\xi}_0(\theta) e^{-\pi N \sqrt{-a^{-1}} i t_1} \right)^2 + \\ &+ a \frac{1}{\pi N \sqrt{-a}} \left( \left( -2 \frac{d\xi_0}{d\theta} + \frac{\pi^2 N^2}{2a} \xi_0 \right) e^{\pi N \sqrt{-a^{-1}} i t_1} + \text{к.с.} \right). \end{aligned}$$

Для существования периодического  $u_3$  необходимо, чтобы были равны коэффициенты при всех  $\exp(\pi i K t)$ . Значит, должны выполняться следующие равенства.

$$\begin{aligned} u_{10} &= \frac{a}{\pi^2 N^2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial t_1^2} + f_2 \sum_{m \neq 0, \pm n} \xi_m \xi_{-m} + (\xi_0 e^{\pi N \sqrt{-a^{-1}} i t_1} + \text{к.с.})^2 + \\ &+ \frac{2a}{\pi N \sqrt{-a}} \left( \left( \frac{\pi^2 N^2}{4a} \xi_0 - \frac{d\xi_0}{d\theta} \right) e^{\pi N \sqrt{-a^{-1}} i t_1} + \text{к.с.} \right) \end{aligned} \quad (9.6)$$

и при всех  $k \neq 0, \pm n$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{1k}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{2k}}{\partial t_1} = \lambda_{k1} u_{1k} - \\ \frac{\pi i(K^2 - N^2)f_2}{aK} \sum_{m \neq 0, k, \pm n, k \pm n} \xi_m \xi_{k-m} e^{(\lambda_{m1} + \lambda_{k-m,1})\theta} - \\ - \frac{2\pi i(K^2 - N^2)f_2}{aK} \xi_k \left( \xi_0 e^{\pi N \sqrt{-a^{-1}} i t_1} + \bar{\xi}_0 e^{-\pi N \sqrt{-a^{-1}} i t_1} \right) e^{\lambda_{k1}\theta}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Для того, чтобы существовало ограниченное  $u_{10}$ , удовлетворяющее (9.6), необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при  $\exp(\pm \pi N \sqrt{-a^{-1}} i t_1)$  были равны нулю, т.е.

$$\frac{d\xi_0}{d\theta} = \frac{\pi^2 N^2}{4a} \xi_0, \quad \frac{d\bar{\xi}_0}{d\theta} = \frac{\pi^2 N^2}{4a} \bar{\xi}_0.$$

Значит,  $\xi_0$  и  $\bar{\xi}_0$  экспоненциально стремятся к нулю и никакого влияния на динамику системы не оказывают. Будем далее считать  $\xi_0 \equiv \bar{\xi}_0 \equiv 0$ . Тогда из (9.7) и из ограниченности  $u_2$  следует, что

$$\frac{\partial u_{2k}}{\partial t_1} = 0,$$

а  $u_{1k}$  выражается как ( $k \neq 0, \pm n$ )

$$\begin{aligned} u_{1k} = f_2 \lambda_{k1} \sum_{m \neq 0, k, \pm n, k \pm n} \frac{\xi_m \xi_{k-m}}{\lambda_{k1} - \lambda_{m1} - \lambda_{k-m,1}} e^{(\lambda_{m1} + \lambda_{k-m,1})\theta}, \\ u_{10} = f_2 \sum_{m \neq 0, \pm n} \xi_m \xi_{-m}. \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при  $\varepsilon^{5/2}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq 0, \pm n} \pi K i \xi_k e^{\lambda_k \theta} e^{\pi K i t} + u_2 = a \int_{-1}^0 \cos(2\pi n s) u_4(t + s, t_1, \theta, \tau) ds + \\ + a \sum_{k \neq 0, \pm n} \frac{\pi}{a^2 K} \left( \frac{\pi(K^2 + N^2)}{K} - 2(K^2 - N^2)i \right) \xi_k e^{\lambda_{k1}\theta} e^{\pi i K t} + \\ + a \sum_{k \neq 0, \pm n} \frac{aK}{\pi i(K^2 - N^2)} \frac{d\xi_k}{d\tau} + a \sum_{k \neq \pm n} \frac{K}{\pi(K^2 - N^2)i} \frac{\partial u_{2k}}{\partial \theta} e^{\pi i K t} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{a}{\pi^2 N^2} \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial t_1^2} + 2f_2 u_1 \sum_{k \neq 0, \pm n} \xi_k e^{\lambda_{k1} \theta} e^{\pi i K t} + f_3 \left( \sum_{k \neq 0, \pm n} \xi_k e^{\lambda_{k1} \theta} e^{\pi i K t} \right)^3.$$

Для существования периодического  $u_4$  необходимо и достаточно, чтобы сумма всех коэффициентов при  $e^{2\pi i k t}$  ( $k \neq \pm n$ ) была равна нулю. Таким образом, получаем набор дифференциальных уравнений относительно  $u_{2k}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{2k}}{\partial \theta} + \frac{d\xi_k}{d\tau} e^{\lambda_{k1} \theta} &= \lambda_{k2} \xi_k e^{\lambda_{k1} \theta} + \lambda_{k1} u_{2k} - \\ &- \frac{2f_2 \pi i (K^2 - N^2)}{aK} \sum_{m \neq 0, \pm n, k \pm n} \xi_m u_{1, k-m} e^{\lambda_{m1} \theta} - \frac{f_3 \pi i (K^2 - N^2)}{aK} \varphi_k, \end{aligned}$$

где  $\varphi_k$  — это коэффициент при  $e^{2\pi i k t}$  в разложении в ряд Фурье функции

$$\left( \sum_{k \neq 0, \pm n} \xi_k e^{\lambda_{k1} \theta} e^{\pi i K t} \right)^3.$$

Для того, чтобы у этого уравнения существовало ограниченное решение, необходимо, чтобы коэффициенты при резонансной экспоненте были равны, т.е. сумма коэффициентов при  $e^{\lambda_{k1} \theta}$  должна быть равна нулю. Получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_k}{d\tau} &= \lambda_{k2} \xi_k - 2f_2^2 \lambda_{k1} \xi_k \sum_{m \neq 0, \pm n} \xi_m \xi_{-m} \frac{3\lambda_{k+m,1} - \lambda_{k1} - \lambda_{m1}}{\lambda_{k+m,1} - \lambda_{k1} - \lambda_{m1}} - \\ &- 3f_3 \lambda_{k1} \xi_k \sum_{m \neq 0, \pm n} \xi_m \xi_{-m}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Система (9.8) является нормализованной формой для исходного уравнения (9.2). Справедлива следующая теорема

**Теорема 9.2** Пусть система (9.8) имеет грубое состояние равновесия  $\{\xi_k^*\}_{k \neq \pm n}$ . Тогда уравнение (9.2) имеет решение

$$x(t) = \sqrt{\varepsilon} \sum_{k \neq 0, \pm n} \xi_k^* e^{\lambda_{k1} t} e^{\pi i K t} (1 + o(1))$$

той же устойчивости.

**9.3.** Пусть  $a < 0$ ,  $2a + 1 > 0$ ,  $\sigma = \pi(2n - 1)$ ,  $n$  — натуральное. В этом случае уравнение (9.3) имеет набор корней стремящихся при  $\varepsilon \rightarrow 0$  к мнимой оси

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \varepsilon \frac{N^2 \pi^2}{2a} + \dots, \\ \lambda_k &= \pi i K + \varepsilon \lambda_{k1} + \varepsilon^2 \lambda_{k2} + \dots\end{aligned}$$

Здесь  $k$  целое ( $k \neq 0, \pm n$ ),  $K = 2k - \text{sign}(k)$ ,  $N = 2n - 1$ ,

$$\begin{aligned}\lambda_{k1} &= \frac{\pi(K^2 - N^2)}{aK} i, \\ \lambda_{k2} &= \frac{\pi^2}{2a^2 K^2} (N^2 - K^2)((2a + 1)(K^2 - N^2) + \frac{\pi(K^4 - N^4)}{a^2 K^3}) i.\end{aligned}$$

Все остальные решения (9.3) находятся в левой комплексной полуплоскости и отделены при  $\varepsilon \rightarrow 0$  от мнимой оси.

Так же как и в предыдущем пункте, сделаем подстановку

$$\begin{aligned}x(t) &= \sqrt{\varepsilon} \sum_{k \neq 0, \pm n} \xi_k(\tau) e^{\lambda_{k1} \theta} e^{\pi i K t} + \sqrt{\varepsilon} \xi_0(\theta) + \varepsilon u_1(t, \theta, \tau) + \\ &+ \varepsilon^{3/2} u_2(t, \theta, \tau) + \varepsilon^2 u_3(t, \theta, \tau) + \varepsilon^{5/2} u_4(t, \theta, \tau) + \dots,\end{aligned}\quad (9.9)$$

где  $\tau = \varepsilon^2 t$ , а  $\theta = \varepsilon t$ , функции  $u_k(t, \theta, \tau)$  предполагаются ограниченными, а в многоточиях собраны слагаемые более высокого порядка малости.

Действуя таким же образом, как и выше, будем собирать слагаемые при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . В конечном итоге получим, что для амплитуд  $\xi_k$  ( $k \neq \pm n$ ) должны выполняться равенства

$$\frac{d\xi_0}{d\theta} = \frac{N^2 \pi^2}{2a} \xi_0. \quad (9.10)$$

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = \lambda_{k2} \xi_k - \lambda_{k1} (2f_2^2 + 3f_3) \xi_k \sum_{m \neq 0, \pm n} \xi_m \xi_{-m} \quad (9.11)$$

Из (9.10) следует, что  $\xi_0$  экспоненциально стремится к нулю, а следовательно, никакого влияния на динамику системы не оказывает.

Пусть функция  $u(y)$  такова, что  $u(y) = -u(y + 1)$ . Тогда у нее существует первообразная, удовлетворяющая этому же условию. Будем обозначать такую первообразную через  $J(u)$ .



Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} = & \frac{2a+1}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\pi^2 N^2}{a^2} (a+1)u - \frac{2f_2^2 + 3f_3}{a} \frac{d}{dy} u ||u||^2 + \\ & + \frac{\pi^4 N^4}{2a^2} J^2(u) - \frac{\pi^4 N^4}{a^2} J^3(u) - \frac{\pi^2 N^2 (2f_2^2 + 3f_3)}{a} J(u ||u||^2) \end{aligned} \quad (9.12)$$

с граничными условиями

$$u(\tau, y) = -u(\tau, y+1), \quad \int_0^1 \cos(\pi N y) u(\tau, y) dy = 0. \quad (9.13)$$

Здесь обозначено

$$||u||^2 = \int_0^1 u^2(\tau, y) dy.$$

Если разложить решение этой задачи в ряд по собственным функциям линейной части (9.12), который совпадает с рядом Фурье

$$u(\tau, y) = \sum_{k \neq 0, \pm n} \xi_k(\tau) e^{\pi i k y},$$

то получим, что для  $\xi_k(\tau)$  должны выполняться равенства (9.11).

Поэтому задачу (9.12)-(9.13) можно считать нормализованной формой для исходного уравнения (9.2). Справедлива следующая теорема.

**Теорема 9.3** Пусть задача (9.12)-(9.13) имеет решение  $u_0(\tau, y)$ . Тогда у уравнения (9.2) существует решение по невязке с асимптотикой

$$x(t) = \varepsilon u_0(\varepsilon^2 t, t(1 + o(1))) (1 + o(1)).$$

## §10. Заключение

В отличие от уравнения с постоянным запаздыванием, уравнение с большим запаздыванием имеет более богатую динамику. Во-первых, возникающие здесь критические случаи имеют бесконечную размерность (сразу бесконечное число корней характеристического квазиполинома

стремится к мнимой оси). Во-вторых, нормализованная форма, которая описывает локальную динамику исходной задачи, является уравнением в частных производных, а не обыкновенным дифференциальным уравнением. В-третьих, часто в качестве нормализованной формы мы получаем не одно уравнение, а целое семейство краевых задач, зависящее от непрерывного положительного параметра.

Добавление второго запаздывания также вносит свою специфику. Как было показано в §4, нормализованная форма становится комплексной, следовательно, ее динамика усложняется. Кроме того, исходя из формулы (4.12), связывающей решение исходной системы (4.4) и нормализованной формы (4.11) видно, что возможны высокочастотные колебания.

Малый множитель перед линейным членом с большим запаздыванием, как оказывается, сильно меняет структуру нормализованного уравнения. Вместо параболической краевой задачи мы получаем уравнение с запаздыванием. Причем в зависимости от соотношения порядков большого запаздывания и малого множителя запаздывание может быть малым, большим или постоянным.

Если в уравнении оба запаздывания — большие пропорциональные величины, то интересно, что результат существенно зависит от алгебраических свойств коэффициента. Построение нормализованного уравнения возможно только при рациональном коэффициенте пропорциональности.

В ситуации, когда оба запаздывания большие, разные по порядку величины, нормализованная форма еще усложняется, принимая вид параболической задачи уже с двумя пространственными переменными. А если при самом большом запаздывании стоит малый множитель, то мы получаем опять краевую задачу с одним пространственным переменным, но в отличие от всех остальных случаев, это уравнение содержит запаздывание по времени и отклонение по пространственной переменной.

Введение распределенного запаздывания так же существенно усложняет задачу даже в простейшем случае, когда распределение линейно. Ситуация изменяется уже на этапе построения характеристического квазиполинома: его вид больше похож на характеристический квазиполином уравнения второго порядка с запаздыванием (см. [18]).

В случае периодически распределенного запаздывания ситуация усложняется еще больше. В некоторых ситуациях нормализованную форму вообще не получается свернуть к уравнению в частных производных. А когда это удастся, то полученная система содержит кроме неизвестной функции и ее производных еще и первообразные.

Отметим, что основная часть приведенных теорем гарантировала су-

существование у исходной системы только решения по невязке. При этом мы не можем сделать вывод, существует ли у исходной системы точное решение с приведенной асимптотикой. Можно лишь сказать, что если решение нормализованной формы  $u_*$  неустойчиво, то даже если точное решение и существует, то оно заведомо неустойчиво. Поэтому рассматривать нужно только устойчивые решения нормализованных форм.

В некоторых ситуациях (например, в случае, когда  $u_*$  является грубым состоянием равновесия или периодическим решением (циклом)), однако, возможно утверждать, что исходная система имеет точное решение с приведенной асимптотикой. Доказательство соответствующих утверждений проводится по известной схеме Стокеса [44]. Примеры применения этой схемы для уравнений такого вида см. [4, 20].

## Часть II.

# Нелокальный анализ

В настоящей главе продолжим изучение того же самого дифференциально-разностного уравнения первого порядка с запаздывающей обратной связью вида

$$\dot{x} + x = f(x(t - T)), \quad (0.1)$$

где  $T > 0$  — время запаздывания. В отличие от части I будут рассматриваться поведения решений из некоторой области фазового пространства, а не из окрестности нуля.

Наиболее распространенными нелинейными функциями являются функции вида:

$$f(s) = as(1 + s^n)^{-1}, \quad (0.2)$$

$$f(s) = Ms \exp(-(s - \gamma)^2), \quad (0.3)$$

$$f(s) = \begin{cases} 1, & a \leq s \leq b, \\ 0, & s < a \text{ или } s > b, \end{cases} \quad 0 \leq a < b \leq 1. \quad (0.4)$$

Для нелинейностей первых двух типов были проведены достаточно полные численные и экспериментальные (на физическом уровне) исследования динамики при различных значениях фигурирующих в них параметров, и получены достаточно полные представления об изменении динамических свойств при варьировании тех или иных параметров задачи. Нелинейность последнего из приведенных типов (см. рис. 3) довольно просто реализуется в задачах электротехники [39, 40, 10].

Следует сразу оговорить, что одним из центральных вопросов является исследование динамики уравнения (0.1) при достаточно больших значениях запаздывания  $T$ . С одной стороны, большие (порядка  $10^2 - 10^5$ )

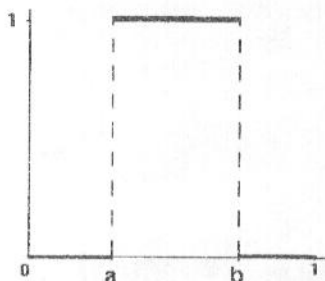


Рис. 3.

значения  $T$  относительно просто реализуются в физическом эксперименте, однако, с другой стороны, при этом резко возрастают трудности численного анализа уравнения. Это связано с тем, что после нормирующей замены времени  $t \rightarrow Tt$  уравнение (0.1) становится сингулярно возмущенным

$$\varepsilon \dot{x} + x = f(x(t-1)), \quad (0.5)$$

где  $\varepsilon = T^{-1}$ . Для изучения асимптотики при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решений этого уравнения с заданными начальными условиями на конечном отрезке изменения времени применимы методы теории сингулярных возмущений [3]. В задачах о динамике, т.е. при изучении решений для  $t \rightarrow \infty$ , редко удается получить „близкие“ результаты для решений (0.5) и решений вырожденного уравнения

$$x = f(x(t-1)).$$

Некоторые выводы о причинах этого несоответствия и об условиях, когда такое соответствие имеет место, приведены в [31, 14].

Настоящая глава посвящена изучению уравнения (0.1) в случае ступенчатой нелинейности (0.4). При этом особое внимание будет уделено аналитическому изучению динамических свойств решений при условии, когда параметр  $T$  достаточно велик. Сразу отметим, что в этом случае удалось получить ряд результатов, не имеющих аналогов для уравнения с нелинейностями (0.2) и (0.3).

Структура главы такова. В первом разделе изучена динамика уравнения (0.1) с релейной функцией  $f$ , т.е. сначала при  $a = 0$ , а затем при  $b = 1$ . Второй раздел является основным и посвящен асимптотическому анализу уравнения с нелинейностью ступенчатого типа и изучению как устойчивых, так и „долгоживущих“ структур. В третьем разделе

исследована динамика уравнения с нелинейностью импульсного типа в сравнении с результатами из второго раздела. И в последнем, четвертом разделе изучены числовые характеристики аттракторов уравнения со ступенчатой нелинейностью.

## §1. Динамика уравнения с релейной запаздывающей обратной связью

**1.1.** Рассмотрим наиболее простой случай, когда нелинейная функция является релейной, т.е. считаем, что  $a = 0$  (см. рис. 4):

$$f_b(s) = \begin{cases} 1, & s < b, \\ 0, & s \geq b. \end{cases} \quad (1.1)$$

Содержание этого раздела базируется на результатах работ [11, 12]. Отметим сразу, что уравнение

$$\dot{x} + x = f_b(x(t - T)), \quad (1.2)$$

не имеет состояний равновесия.

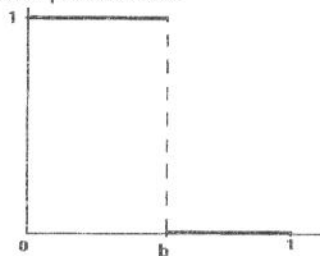


Рис. 4.

**1.2.** Построение простейшего цикла. Назовем цикл  $x_b(t, T)$  уравнения (1.2) медленно осциллирующим, если расстояние между соседними корнями уравнения  $x_b(t, T) = b$  больше, чем  $T$ .

Методика исследования такова: в фазовом пространстве  $C_{[-T, 0]}$  уравнения (1.2) выделяем некоторое множество  $C$  начальных функций. Затем последовательно при  $t \in [0, T]$ ,  $t \in [T, 2T]$ , ... строим решения уравнения (1.2) с начальными условиями из  $C$ . Далее с помощью некоторого оператора Пуанкаре  $P$  удастся показать, что  $PC \subset C$ . Следовательно,

оператор  $\Pi$  имеет неподвижную точку, которой отвечает периодическое решение уравнения (1.2).

Итак, введем в рассмотрение множество  $C$  начальных функций  $\phi(s)$ . Удобно начальный момент времени фиксировать так, чтобы  $x_b(0, T) = b$  и  $\dot{x}_b(0, T) < 0$ , следовательно,  $\phi(0) = b$ . Тогда из условия медленной осцилляции следует неравенство  $\phi(s) > b$  при  $s \in [-T, 0]$ . Важно, что решение  $x_b(t, T)$  с начальным условием  $\phi(s) \in C$  не зависит от выбора конкретного элемента множества  $C$ .

На интервале времени  $(0, T)$  имеем равенство  $x_b(t, T) = b \exp(-t)$ . На некотором отрезке, примыкающем справа к точке  $t = T$ , справедливо соотношение

$$x_b(t, T) = x_b(T, T) \exp(-(t - T)) + 1 - \exp(-(t - T)). \quad (1.3)$$

Пусть  $t_1$  и  $t_2$  соответственно первый и второй положительные корни уравнения  $x_b(t, T) = b$ . Тогда из (1.3) получаем, что

$$t_1 = T + \ln \frac{1 - b \exp(-T)}{1 - b}. \quad (1.4)$$

Формула (1.3) остается в силе при  $t \in (T, t_1 + T]$ . На отрезке  $[t_1 + T, t_2]$  имеем равенство

$$x_b(t, T) = x_b(t_1 + T, T) \exp(-(t - (t_1 + T))),$$

а для  $t_2$  верна формула

$$t_2 = t_1 + T + \ln \frac{x_b(t_1 + T, T)}{b}. \quad (1.5)$$

Важный вывод заключается в том, что функция  $x_b(t_2 + s, T)$  принадлежит множеству  $C$  при  $s \in [-T, 0]$ . Следовательно, оператор Пуанкаре  $\Pi(\phi(s)) = x_b(t_2 + s, T)$  имеет неподвижную точку, которой отвечает периодическое решение  $x_b(t, T)$ .

В итоге получаем следующий результат:

**Теорема 1.1** Уравнение (1.2) имеет экспоненциально орбитально устойчивое  $t_2$ -периодическое решение  $x_b(t, T)$ . Его период определяется формулами (1.4), (1.5).

На рис. 5(а) изображен график решения  $x_b(t, T)$  при  $T = 1$  и  $b = 0.3$ .

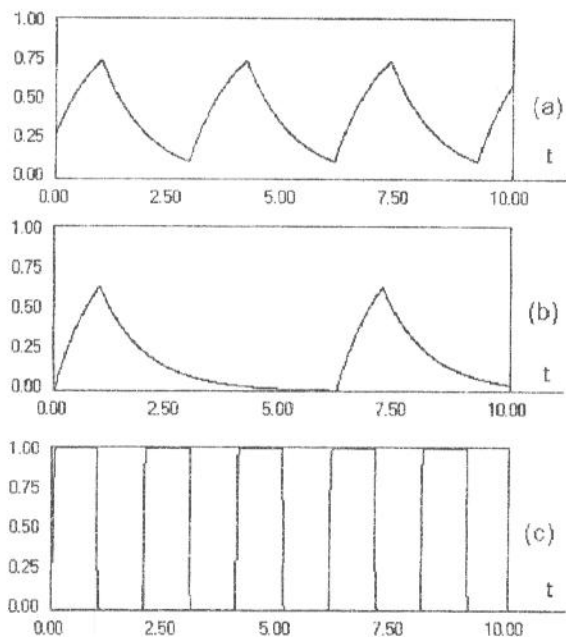


Рис. 5.

Приведем асимптотические формулы для периодического решения. Сначала рассмотрим случай

$$0 < b \ll 1. \quad (1.6)$$

Тогда формулы (1.4) и (1.5) принимают вид:

$$t_1 = T + o(1), \quad t_2 = O(|\ln b|).$$

Вид решения  $x(t)$  при  $T = 1$  и  $b = 0.01$  приведен на рис. 5(b).

Отметим, что случай, когда параметр  $b$  близок к 1, сводится к случаю (1.6), если в уравнении (1.2) произвести замену  $x \rightarrow 1 - x$ .

В дальнейшем нам понадобятся асимптотики периодического решения при  $T \rightarrow \infty$ . В уравнении (1.2) удобно произвести замену

$$t \rightarrow Tt. \quad (1.7)$$



В результате приходим к уравнению

$$\varepsilon \dot{x} + x = f(x(t-1)), \quad (1.8)$$

где  $\varepsilon = T^{-1}$ . Используя формулы (1.3)-(1.5), получаем, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  простейший цикл уравнения (1.8) близок к ступенчатой функции, принимающей два значения 0 и 1 поочередно на интервалах времени длины  $1 + o(1)$  и имеет период  $2 + o(1)$ . Вид решения при  $\varepsilon = 0.02$  и  $b = 0.3$  приведен на рис. 5(с).

**1.3.** Быстро осциллирующие периодические решения. Выше было установлено существование устойчивого периодического решения  $x_b(t, T)$ , медленно осциллирующего около прямой  $x = b$ . В этом пункте будет показано, что имеется счетное число быстро осциллирующих около этой же прямой неустойчивых периодических решений.

Рассмотрим сначала множество начальных функций

$$C(\tau_1, \tau_2) = \left\{ \varphi(s, \tau) \in C_{[-T, 0]}, \quad 0 < \tau_1, \tau_2 < 1, \quad \tau_1 + \tau_2 < 1, \right. \\ \varphi(-T + T\tau_1) = \varphi(-T + T(\tau_1 + \tau_2)) = \varphi(0) = b, \\ \varphi(s) > b \text{ при } s \in [-T, -T + T\tau_1) \cup (-T + T(\tau_1 + \tau_2), 0), \\ \left. \varphi(s) < b \text{ при } s \in (-T + T\tau_1, -T + T(\tau_1 + \tau_2)) \right\}.$$

Важно, что решение  $x(t, \tau)$  уравнения (1.2) с начальными условиями  $x(s, \tau) \in C(\tau_1, \tau_2)$  зависит только от  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$  и не зависит от выбора конкретного элемента множества  $C(\tau_1, \tau_2)$ . Вид функции  $\varphi(s, \tau)$  изображен на рис. 6.

Для  $x(t, \tau)$  имеем

$$x(t, \tau) = b \exp(-t), \quad t \in [0, T\tau_1], \\ x(t, \tau) = (x(T\tau_1, \tau) - 1) \exp(-(t - T\tau_1) + 1), \quad t \in (T\tau_1, T(\tau_1 + \tau_2)], \\ x(t, \tau) = x(T(\tau_1 + \tau_2), \tau) \exp(-(t - T(\tau_1 + \tau_2))), \quad t \in (T(\tau_1 + \tau_2), T].$$

При условии  $x(T(\tau_1 + \tau_2), \tau) < b$  решение  $x(t, \tau)$  стремится к медленно осциллирующему периодическому решению  $x_b(t + \text{const}, T)$ . Пусть

$$x(T(\tau_1 + \tau_2), \tau) > b. \quad (1.9)$$

Обозначим, как и раньше, через  $t_1(\tau)$ ,  $t_2(\tau)$  – первый и второй положительные корни уравнения  $x(t, \tau) = b$ . Тогда получаем равенства

$$t_1(\tau) = T\tau_1 + \ln(1 - b \exp(-T\tau_1)) - \ln(1 - b), \\ t_2(\tau) = T(\tau_1 + \tau_2) + \ln x(T(\tau_1 + \tau_2), \tau) - \ln b.$$

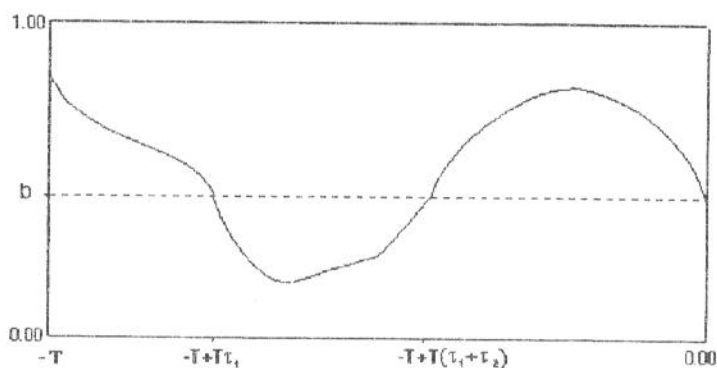


Рис. 6.

Если  $t_2(\tau) \geq T$ , то  $x(t, \tau)$  стремится к  $x_b(t + \text{const}, T)$ . Пусть

$$t_2(\tau) < T. \quad (1.10)$$

Рассмотрим оператор Пуанкаре

$$\Pi(\varphi(s, \tau)) = x(t_2(\tau) + s, \tau).$$

При условиях (1.9), (1.10) этот оператор преобразует множество  $C(\tau_1, \tau_2)$  в  $C(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ , где

$$\bar{\tau}_1 = (1 - t_2(\tau))T^{-1}, \quad \bar{\tau}_2 = t_1(\tau)T^{-1}. \quad (1.11)$$

Тем самым двумерное отображение (1.11) определяет динамику решений уравнения (1.2).

Аналогичным способом строятся  $2m$ -мерные ( $m = 2, 3, \dots$ ) отображения, описывающие поведение решений с  $2m$  пересечениями прямой  $x = b$  на некоторых отрезках времени длины  $T$ . Динамика таких отображений определяет поведение решений уравнения (1.2) при  $t \rightarrow \infty$  с начальными условиями из выбранных специальных множеств.

Покажем, что каждое из таких отображений имеет неподвижную точку. Отметим, что неподвижной точке отвечает периодическое решение уравнения (1.2).

Зафиксируем произвольное  $z > 0$  и рассмотрим функцию  $x_b(t, z)$ . Через  $P(z)$  обозначим период этой функции. Для каждого целого  $m = 1, 2, \dots$  функция  $x_b(t, z)$  является периодическим решением уравнения

$$\dot{x} + x = f(x(t - z - mP(z))).$$

Рассмотрим уравнение относительно  $z$ :

$$T = z + mP(z).$$

Поскольку функция  $P(z)$  монотонно возрастает, и  $P(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow +0$ , то это уравнение для каждого  $m$  имеет единственное решение  $z_m$ . Отсюда следует, что каждая из функций  $x_b(t, z_m)$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) является периодическим решением уравнения (1.2). На интервале  $(-T, 0)$  количество корней уравнения  $x_b(t, z_m) = b$  равно  $2m$ .

Неподвижная точка отображения (1.11), которой отвечает решение  $x_b(t, z_1)$ , легко находится из приведенных выше формул для  $x_b(t, z)$ . Отметим, что периодические решения  $x_b(t, z_m)$  при  $m \geq 1$  неустойчивы. Численный анализ показывает, что все решения (1.2) стремятся к  $x_b(t + \text{const}, T)$ .

Проиллюстрируем явление. На „фазовой плоскости“  $(\tau_1; \tau_2)$  отображения (1.11), зафиксируем произвольно точку  $(\tau_1, \tau_2)$  ( $0 < \tau_1, \tau_2 < 1$ ,  $\tau_1 + \tau_2 < 1$ ), и производим, согласно (1.11), итерации при  $T = 20$  (рис. 7(a)) и при  $T = 30$  (рис. 7(b)). Различные цвета на этой плоскости определяют число итераций, после которого неравенства (1.9) и (1.10) перестают быть верными, т.е. соответствующее решение потеряло начальную структуру и стало медленно осциллирующим.

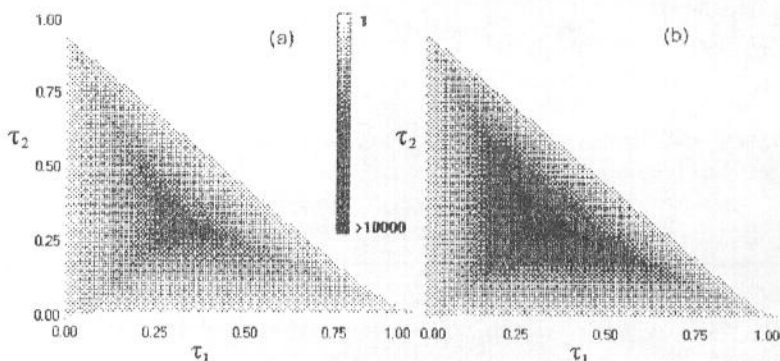


Рис. 7.

График поведения траектории отображения (1.11) приведен на рис. 8(a), 8(b).

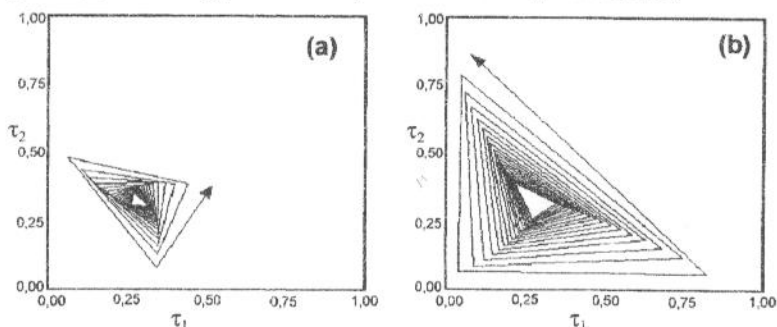


Рис. 8.

Отметим, что при увеличении  $T$  количество итераций, необходимых для того, чтобы все точки закрасились в темный цвет, резко возрастает.

**1.4.** Оценка времени сходимости к простейшему циклу. Уравнение (1.2) не имеет устойчивых решений, кроме простейшего медленно осциллирующего цикла  $x_b(t, T)$ . Результаты численных экспериментов показывают, что все решения стремятся к  $x_b(t + \text{const}, T)$ . Обозначим через  $L$  ближайший к нулю момент времени, для которого выполнено условие  $|x_b(t + \text{const}, T) - x(t)| \leq \mu$  при всех  $t > L$ , где  $\mu$  — достаточно малый произвольный фиксированный параметр. В связи с этим интересно исследовать зависимость величины  $L$  от параметра  $T$  и от начальных условий.

На рис. 9 представлены зависимости времени  $L$  от  $T = \varepsilon^{-1}$  для решений с начальными функциями из  $C(\tau_1, \tau_2)$ . Стандартные численные методы показывают, что зависимость является экспоненциальной.

Наглядное представление о зависимости  $L$  от начальных условий можно получить из рис. 7. Отметим, что при увеличении степени сложности начального условия (т.е. при увеличении числа осцилляций вокруг прямой  $x = b$ ) время выхода на устойчивый медленно осциллирующий цикл существенно возрастает.

**1.5.** Неустойчивый цикл, осциллирующий около значения  $x = a$ . Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} + x = f_a(x(t - T)) \quad (1.12)$$

с релейной нелинейностью при  $b = 1$  (см. рис. 10)

$$f_a(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq a, \\ 1, & a < s \leq 1. \end{cases}$$

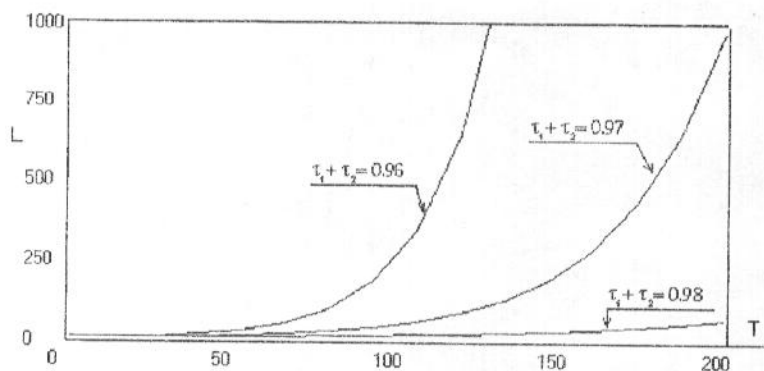


Рис. 9.

Отметим, что уравнение (1.12) имеет два устойчивых состояния равновесия  $x(t) \equiv 0$  и  $x(t) \equiv 1$ .

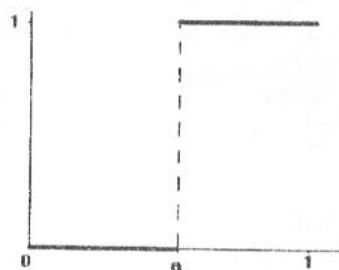


Рис. 10.

Изучим вопрос о существовании в уравнении (1.12) цикла  $x_a(t)$ . Положим  $x_a(0) = a$  и  $\dot{x}_a(0) > 0$ . Тогда  $x_a(-T) > a$ , а следовательно, на каждом отрезке длины  $T$  функция  $x_a(t)$  хотя бы один раз принимает значение  $a$ . Рассмотрим вопрос о существовании простейшей из таких функций, которая имеет не более двух пересечений с осью  $x = a$  на каждом отрезке времени длины  $T$ .

Рассмотрим множество  $C(\tau)$  начальных функций  $\phi(s)$ , зависящее от

параметра  $\tau$ :

$$C(\tau) = \left\{ \begin{array}{l} \phi(s) \in C_{[-T, 0]}: \\ 1. \phi(0) = a, \quad \phi(-T(1 - \tau)) = a \quad (0 < \tau < 1); \\ 2. \phi(s) > a \text{ при } s \in [-T, -T(1 - \tau)), \\ \quad \phi(s) < a \text{ при } s \in [-T(1 - \tau), 0) \end{array} \right\}.$$

Решение уравнения (1.12) с начальным условием из  $C(\tau)$  обозначим через  $x(t, \tau)$ . Функция  $x(t, \tau)$  зависит от  $\tau$  и не зависит от выбора конкретной функции  $\phi(s)$ . Будем искать периодическое решение  $x_a(t)$  в классе решений  $x(t, \tau)$ . При  $t \in (0, T\tau]$  имеем равенство

$$x(t, \tau) = (a - 1) \exp(-t) + 1,$$

а при  $t \in (T\tau, T]$

$$x(t, \tau) = x(T\tau, \tau) \exp(-(t - T\tau)). \quad (1.13)$$

Нам потребуются первый и второй (если они существуют) положительные корни  $t_1(\tau)$  и  $t_2(\tau)$  уравнения  $x(t, \tau) = a$ . Для  $t_1(\tau)$  из (1.13) получаем

$$t_1(\tau) = T\tau + \ln \frac{1 + (a - 1) \exp(-T\tau)}{a}.$$

Отметим, что в случае, когда  $x(T, \tau) > a$ , значения  $t_j(\tau)$  не существуют, а функция  $x(t, \tau)$ , как решение уравнения (1.12), стремится к 1 при  $t \rightarrow \infty$ .

Далее, при  $t > T$  в течение отрезка времени длины  $t_1(\tau)$  верна формула

$$x(t, \tau) = (x(T, \tau) - 1) \exp(-(t - T)) + 1.$$

Если  $x(T + t_1(\tau), \tau) < a$ , то  $x(t, \tau) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Если  $x(T + t_1(\tau), \tau) > 0$ , то для  $t_2(\tau)$  получаем выражение

$$t_2(\tau) = T + \ln \frac{1 - x(T, \tau)}{1 - a}.$$

Важный вывод заключается в том, что функция  $x(t_2(\tau) + s, \tau)$  обладает свойствами функции  $\phi(s)$ , а следовательно, принадлежит множеству  $C(\bar{\tau})$ , где

$$\bar{\tau} = 1 + (t_1(\tau) - t_2(\tau))T^{-1}. \quad (1.14)$$

Таким образом, поведение решений  $x(t, \tau)$  при  $t \rightarrow \infty$  тесно связано с динамикой одномерного отображения (1.14) отрезка  $[0, 1]$  в себя.

Как оказалось, отображение (1.14) является монотонно возрастающей функцией. Оно имеет одну неподвижную точку  $\tau_0$ , производная (по  $\tau$ ) в которой больше 1. Тем самым в рассматриваемом классе существует единственное (с точностью до сдвига по времени) периодическое решение  $x_a(t) = x(t, \tau_0)$ . Это решение неустойчиво, причем все решения из его окрестности стремятся к 1 или к 0 при  $t \rightarrow \infty$ .

Подведем итог сказанному.

**Теорема 1.2** Пусть

$$(a - 1) \exp(-\tau_0) + 1 < b.$$

Тогда существует единственное (с точностью до сдвига по времени) отличное от константы периодическое решение  $x_a(t)$ , имеющее на каждом интервале длины  $T$  не более двух пересечений с прямой  $x = a$ . Это решение неустойчиво.

Аналогично строятся быстро осциллирующие решения уравнения (1.12).

## §2. Динамика уравнения со ступенчатой нелинейной обратной связью. Асимптотический анализ

**2.1.** В этом разделе асимптотическими методами исследуются динамические свойства решений уравнения (0.1) в случае, когда нелинейность  $f(x)$  имеет ступенчатый вид (0.4). В первых двух пунктах приведены базирующиеся на результатах работ [16]-[17] утверждения о существовании устойчивого цикла при условии, когда либо параметры  $a$  и  $b$  достаточно малы, либо параметр  $b$  близок к 1. Основное содержание настоящего раздела заключено в третьем пункте, где рассмотрен вопрос о динамике уравнения (0.1) при условии, когда запаздывание  $T$  достаточно велико. В четвертом пункте, имеющем важное прикладное значение, эти результаты обобщаются на более сложные случаи. Сформулированы выводы о существовании широкого множества „долгоживущих“ структурных образований из решений рассматриваемого уравнения. Соответствующие результаты базируются на предложенных в [13]-[7] специальных методах большого параметра для сингулярно возмущенных уравнений с запаздыванием.

**2.2.** Асимптотика релаксационного цикла уравнения первого порядка при малых значениях параметров  $a$  и  $b$ .

Пусть в формуле (0.4) параметры  $a$  и  $b$  являются достаточно малыми:

$$b = \varepsilon b_1, \quad a = \varepsilon a_1,$$

где  $b_1 > a_1 \geq 0$  и  $0 < \varepsilon \ll 0$ .

При этих условиях рассмотрим вопрос о существовании, асимптотике (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) и устойчивости периодических решений уравнения (0.1).

В уравнении (0.1) удобно произвести замену  $x = \varepsilon y$ , в результате которой приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \dot{y} + y &= \varepsilon^{-1} \Phi(y(t-T)), \\ \Phi(s) &= \begin{cases} 1, & \text{при } a_1 \leq s \leq b_1, \\ 0, & \text{при } 0 \leq s < a_1 \text{ или } b_1 < s \leq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Обозначим через  $C$  множество начальных функций

$$C = \left\{ \varphi(s) \in C_{[-T,0]}, \quad \varphi(0) = b_1, \quad b_1 < \varphi(s) \text{ при } s \in [-T, 0) \right\}.$$

Пусть  $y(t)$  – решение (2.1) с начальной функцией из  $C$  (это решение не зависит от выбора конкретного элемента из  $C$ ). При  $t \in [0, T]$  имеем равенство  $y(t) = b_1 \exp(-t)$ , а при  $t \in (T, 2T]$

$$\begin{aligned} y(t) &= b_1 \exp(-t) + \varepsilon^{-1} \alpha(t), \text{ где} \\ \alpha(t) &= \int_0^{t-T} \exp(-(t-s-T)) \Phi(b_1 \exp(-s)) ds. \end{aligned}$$

Пусть  $t_0(\varepsilon)$  – первый при  $t > 2T$  корень уравнения  $y(t) = b_1$ . Легко видеть, что при  $t \in (2T, t_0(\varepsilon))$  верна формула

$$y(t) = \varepsilon^{-1} \left[ \alpha(2T) \exp(-(t-2T)) + O(\varepsilon) \right],$$

следовательно, имеет место равенство

$$t_0(\varepsilon) = -\ln(\varepsilon) \left[ 1 + O(|\ln \varepsilon|^{-1}) \right].$$

В силу того, что  $y(t_0(\varepsilon) + s) \in C$  ( $s \in [-T, 0]$ ), приходим к выводу, что оператор Пуанкаре  $\Pi(\varphi(s)) = y(t_0(\varepsilon) + s)$  имеет неподвижную точку  $\varphi_0(s) = b_1 \exp(-s)$ , которой отвечает периодическое решение  $y(t)$ .



Используя полученные для  $y(t)$  формулы, можно исследовать устойчивость этого решения. Анализируя линеаризованное на  $y(t)$  уравнение, удастся показать, что все, кроме одного — единичного, мультипликаторы по модулю меньше, чем 1. Это означает, что  $y(t)$  экспоненциально орбитально устойчиво. Отметим, что параметр  $a_1$  влияет только на амплитуду  $\alpha(2T)$  периодического решения. Итак, установлено, что имеет место

**Теорема 2.1** При всех достаточно малых значениях параметра  $\varepsilon$  уравнение (0.1) имеет устойчивое периодическое решение  $x_0(t) = \varepsilon y(t)$ .

Напомним, что  $y(t)$  имеет порядок  $\varepsilon^{-1}$ , тем самым решение  $x(t)$  отнюдь не мало.

По-видимому, других устойчивых (непостоянных) решений при малых  $\varepsilon$  уравнение (0.1) не имеет.

Вид функции  $y(t)$  совпадает с указанным на рис.5(b).

**2.3.** Периодические решения при условии близости параметра  $b$  к 1.

Здесь предполагаем, что в формуле (0.4)

$$b = 1 - \varepsilon, \quad \text{где } 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (2.2)$$

Обозначим через  $x(t, \varepsilon)$  решение уравнения (0.1) с начальным условием из введенного выше множества  $C$ , в котором лишь параметр  $b_1$  следует заменить на  $b$ . Изучим поведение  $x(t, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При  $t \in [0, T]$  имеем равенство  $x(t, \varepsilon) = (1 - \varepsilon) \exp(-t)$ . Если выполнено условие

$$\exp(-T) > a, \quad (2.3)$$

то  $x(t, \varepsilon)$  является устойчивым периодическим решением уравнений (0.1) и (1.1) ( $x(t, \varepsilon) = x_b(t, T)$ ). Его период  $P = -\ln \varepsilon + O(\varepsilon)$ .

При увеличении параметра  $a$  и при нарушении условия (2.3) структура периодического решения усложняется. Соответствующие численные исследования приведены в параграфе 4.

**2.4.** Асимптотика простейших аттракторов уравнения первого порядка при больших значениях запаздывания  $T$ .

Основное условие, при котором ниже будет исследоваться уравнение (0.1), заключается в том, что параметр  $T$  предполагается достаточно большим:

$$T \gg 1. \quad (2.4)$$

Поэтому в уравнении (0.1) удобно сделать нормировку времени  $t \rightarrow Tt$ , в результате которой приходим к уравнению

$$\varepsilon \dot{x} + x = f(x(t-1)), \quad (2.5)$$

где  $\varepsilon = T^{-1} \ll 1$ . Обратим внимание, что разностное уравнение

$$x(t) = f(x(t-1)), \quad (2.6)$$

в которое вырождается (2.5) при  $\varepsilon = 0$ , имеет при

$$0 < a < b < 1 \quad (2.7)$$

глобально суперустойчивое нулевое состояние равновесия. Поставим задачу изучения динамики уравнения (2.5) при условиях (2.4) и (2.7). Будет показано, что это уравнение обладает богатой динамикой, а его решения имеют сложную структуру. Отметим еще, что каждое решение уравнения (2.5) при достаточно больших  $t$  лежит на отрезке  $[0, 1]$ .

Условимся о терминологии. Соседние моменты времени, когда решение уравнения (2.5) принимает значение  $x = a$  с положительной и отрицательной производной, назовем соответственно началом и концом всплеска.

В этом пункте изучим аттракторы уравнения (2.5), состоящие из решений с одним всплеском на некоторых отрезках времени длины 1.

Напомним методику исследования. В фазовом пространстве  $C_{[-1,0]}$  уравнения (2.5) выделяем некоторое множество  $C(z)$ , зависящее от параметра  $z$ . Затем строим асимптотику при  $\varepsilon \rightarrow 0$  всех решений с начальными условиями из  $C(z)$ . Далее с помощью некоторого оператора Пуанкаре  $\Pi$  удастся показать, что  $\Pi C(z) \subset C(\bar{z})$ , где  $\bar{z}$  зависит только от  $z$ :  $\bar{z} = \Phi(z)$ . Таким образом, динамика решений из  $C(z)$  определяется итерациями одномерного отображения  $\bar{z} = \Phi(z)$ .

Итак, введем в рассмотрение множество  $C(z)$ :

$$C(z) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(s, z) \in C_{[-1,0]} \quad (s \in [-1, 0], \quad z > 0) : \\ \begin{array}{l} 1. \ a \leq \varphi(s, z) \leq b \quad \text{при} \quad s \in [-1, -1 + \varepsilon z]; \\ 2. \ a > \varphi(s, z) > 0 \quad \text{при} \quad s \in (-1 + \varepsilon z, 0]; \\ 3. \ \varphi(-1 + \varepsilon z, z) = \varphi(0, z) = a. \end{array} \end{array} \right\}$$

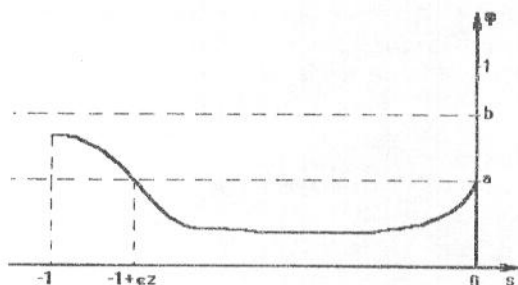


Рис. 11.

Вид функции  $\varphi(s, z)$  приведен на рис. 11.

Через  $x(t, z)$  обозначим решение с начальным условием  $\varphi(s, z) \in C(z)$ . Тем самым при  $t = 0$  начинается всплеск функции  $x(t, z)$ . Легко видеть, что  $x(t, z)$  не зависит от выбора конкретной функции из  $C(z)$ .

Будем последовательно интегрировать уравнение (2.5) для построения решения  $x(t, z)$ .

При  $t \in [0, \varepsilon z]$  получаем, что  $x(t, z) = (a - 1) \exp(-\varepsilon^{-1}t) + 1$  и  $x(\varepsilon z, z) = g(z)$ , где  $g(z) = (a - 1) \exp(-z) + 1$ . На отрезке  $[\varepsilon z, 1]$  функция  $x(t, z)$  монотонно убывает:

$$x(t, z) = g(z) \exp(-(t - \varepsilon z)\varepsilon^{-1}). \quad (2.8)$$

Возможны два случая:

$$1^0. \quad g(z) \leq b \quad (2.9)$$

и

$$2^0. \quad g(z) > b. \quad (2.10)$$

Рассмотрим отдельно каждый из них. Пусть сначала выполнено неравенство (2.9). Через  $\varepsilon t_1$  обозначим первый положительный корень уравнения (момент окончания первого при  $t \geq 0$  всплеска)

$$x(t, z) = a. \quad (2.11)$$

Тогда  $t_1 = z + \ln g(z) - \ln a$ . На отрезке  $[1, 1 + \varepsilon t_1]$  функция  $x(t, z)$  монотонно растёт:

$$x(t, z) = 1 - \exp(-(t - 1)\varepsilon^{-1}) + O(\exp(-\varepsilon^{-1})). \quad (2.12)$$

Если  $x(1 + \varepsilon t_1, z) < a$ , то  $x(t, z) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Пусть  $z_0$  - корень уравнения  $x(1 + \varepsilon t_1, z) = a$ . Тогда

$$z_0 = \ln((1 - a + a^2)(1 - a)^{-1}).$$

Ниже предполагаем, что

$$z > z_0. \quad (2.13)$$

Тогда  $x(1 + \varepsilon t_1, z) > a$ , а следовательно, существует первый при  $t > 1$  момент  $1 + \varepsilon t_0$  начала всплеска функции  $x(t, z)$ :  $x(1 + \varepsilon t_0, z) = a$ . Отсюда  $t_0 < t_1$  и  $t_0 = -\ln(1 - a)$ .

Вид функции  $x(t, z)$  изображен на рис. 12.

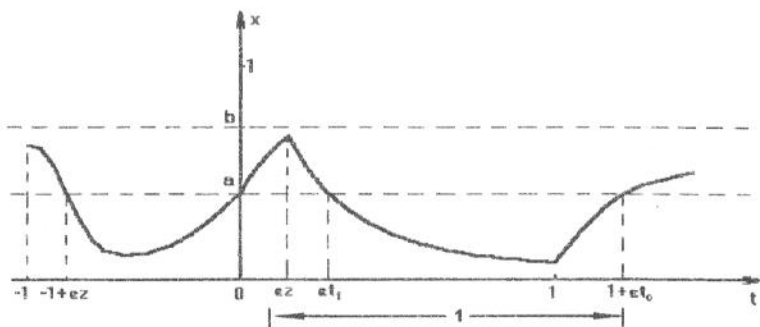


Рис. 12.

Как и выше, введем оператор Пуанкаре  $\Pi$ :

$$\Pi(\varphi(s, z)) = x(1 + \varepsilon t_0 + s, z) \quad (s \in [-1, 0]). \quad (2.14)$$

Тогда при условиях (2.9) и (2.13) - т.е. при

$$z_0 < z \leq \ln \frac{1-a}{1-b} \quad (2.15)$$

выполнено включение

$$PC(z) \subset C(\bar{z}),$$

при этом с точностью до  $O(\exp(-\varepsilon^{-1}))$

$$\bar{z} = t_1 - t_0 = z + \ln \frac{1-a}{a} + \ln g(z). \quad (2.16)$$

Пусть теперь выполнено условие (2.10), т.е.

$$z > \ln \frac{1-a}{1-b}. \quad (2.17)$$

Тогда  $x(\varepsilon z, z) > b$ , а следовательно, существуют два последовательных при  $t > 0$  корни  $\varepsilon t_1$  и  $\varepsilon t_2$  ( $t_1 < t_2$ ) уравнения  $x(\varepsilon t, z) = b$ . Из приведенных выше формул получаем равенства

$$t_1 = \ln \frac{1-a}{1-b}, \quad t_2 = z + \ln \frac{g(z)}{b}.$$

Пусть  $\varepsilon t_3$  - конец всплеска, т.е. первый при  $t > \varepsilon t_2$  корень уравнения (2.11). Для  $t_3$  верно равенство

$$t_3 = z + \ln \frac{g(z)}{a}.$$

Далее, при  $t \in [\varepsilon t_3, 1]$  верна формула (2.8), а при  $t \in [1, 1 + \varepsilon t_1]$  - формула (2.12).

В том случае, когда существует такое  $t_0 > 0$ , что  $x(1 + \varepsilon t_0, z) = a$  и  $t_0 < t_2$ , оператор  $\Pi$ , задаваемый равенством (2.14), выводит функцию  $\varphi(s, z)$  из множества  $C(z)$  (поскольку для некоторых  $s$  имеем  $\varphi(s, z) > b$ ). Поэтому ниже считаем, что  $x(1 + \varepsilon t_0, z) < a$  - всплеск при  $t \in [1, 1 + \varepsilon t_1]$  не начинается. Это неравенство имеет вид  $(1 - \exp(-t_1)) < a$ , а следовательно,

$$b < 2a - a^2. \quad (2.18)$$

Тогда  $x(1 + \varepsilon t_1, z) = (b - a)(1 - a)^{-1} + O(\exp(-\varepsilon^{-1})) < a$ . Далее, при  $t \in [1 + \varepsilon t_1, 1 + \varepsilon t_2]$  функция  $x(t, z)$  убывает и

$$x(1 + \varepsilon t_2, z) = b(b - a)[(1 - b)g(z)\exp z]^{-1} + O(\exp(-\varepsilon^{-1})).$$

При  $t \in [1 + \varepsilon t_2, 1 + \varepsilon t_3]$  эта функция возрастает. Если  $x(1 + \varepsilon t_3, z) < a$ , то  $x(t, z) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Поэтому считаем, что  $x(1 + \varepsilon t_3, z) > a$ , т.е.

$$z < z_1, \quad (2.19)$$

где

$$z_1 = \ln \left( 1 - a + ab(b - a)[(1 - b)(a - b + ab)]^{-1} \right).$$

Отметим, что  $z_1 > z_0$ . Вид функции  $x(t, z)$  изображен на рис. 13.

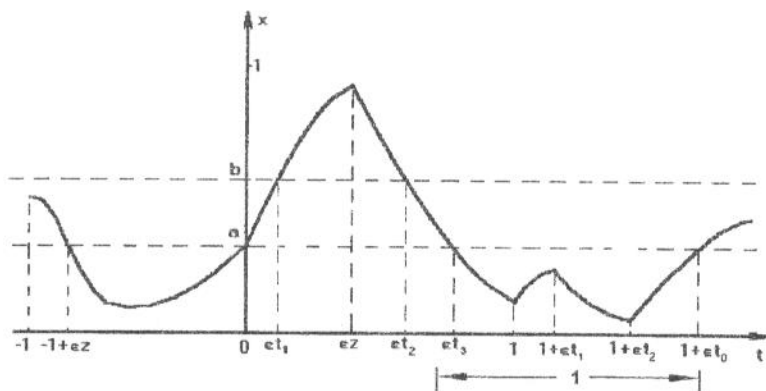


Рис. 13.

При условии (2.19) существует первый при  $t > 1$  корень  $1 + \varepsilon t_0$  уравнения  $x(1 + \varepsilon t, z) = a$  (момент начала всплеска) и

$$t_0 = t_2 + \ln \left[ 1 - x(1 + \varepsilon t_2, z) \right] - \ln(1 - a).$$

Тем самым, при условиях (2.10), (2.18) и (2.19), т.е. при

$$z_0 < z < z_1,$$

оператор  $\Pi$  переводит  $C(z)$  в  $C(\bar{z})$ :  $\Pi C(z) \subset C(\bar{z})$ , причем  $\bar{z} = t_3 - t_0$ . С точностью до  $O(\exp(-\varepsilon^{-1}))$  получаем зависимость  $\bar{z}$  от  $z$

$$\bar{z} = \ln \left( b(1 - a)a^{-1} \right) - \ln \left[ 1 - b(b - a)((1 - b)(a - 1 + \exp z))^{-1} \right]. \quad (2.20)$$

Объединяя формулы (2.16) и (2.20), получаем отображение

$$\bar{z} = \Phi(z), \quad (2.21)$$

где с точностью до  $o(1)$

$$\Phi(z) = \begin{cases} z + \ln \frac{1-a}{a} + \ln g(z), & \text{при } z_0 < z \leq \ln \frac{1-a}{1-b} \\ \ln \left( \frac{b(1-a)}{a} \right) - \\ - \ln \left[ 1 - \frac{b(b-a)}{(1-b)(a-1+\exp z)} \right], & \text{при } \ln \frac{1-a}{1-b} < z < z_1 \end{cases}$$

Отметим, что в плоскости параметров  $a$  и  $b$  существует область (на рис. 14 она выделена черным цветом), в которой отображение (2.21)

имеет аттрактор — устойчивое ненулевое состояние равновесия. Аналитически эта область описывается системой неравенств:

$$\begin{cases} 1 - a + ab(b - a)[(1 - b)(a - b + ab)]^{-1} < 0, \\ b < 2a - a^2. \end{cases} \quad (2.22)$$

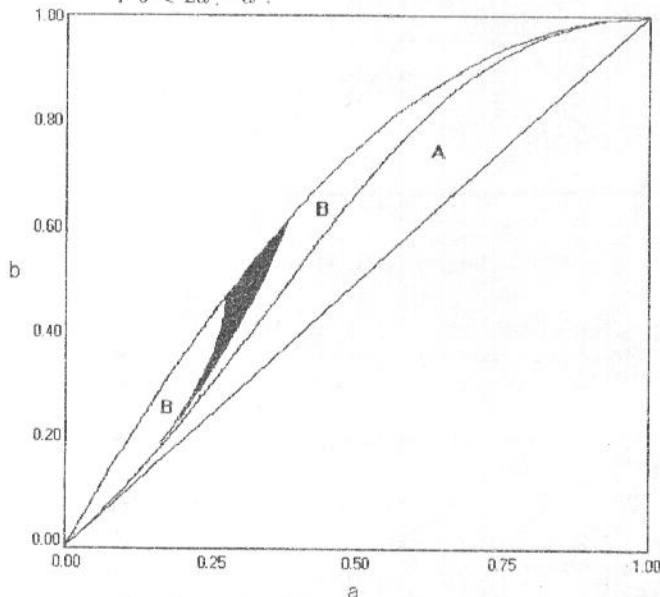


Рис. 14.

В этой области уравнение (2.5) имеет аттрактор, динамика которого описывается одномерным отображением (2.21). На рис. 15(а) приведен характерный график функции  $\Phi(z)$  для  $a = 0.3$ ,  $b = 0.48$ , а на рис. 15(б) — график решения  $x(t)$  при  $T = 1000$ .

В областях **А** и **В** (см. рис. 14), границей которых является кривая  $b = a(1 - a + a^2)^{-1}$ , отображение аттрактора не имеет. В области **А** выполнено неравенство  $z_0 > \ln \frac{1-a}{1-b}$ , следовательно, функция  $\Phi(z)$  состоит только из одной части, в то время как в области **В** верно неравенство  $z_0 < \ln \frac{1-a}{1-b}$ , и  $\Phi(z)$  состоит из двух частей.

## 2.5. Долгоживущие структуры.

Обобщим конструкцию решений из пункта 2.4. Рассмотрим решения, имеющие произвольное число  $k > 0$  всплесков на некоторых отрезках

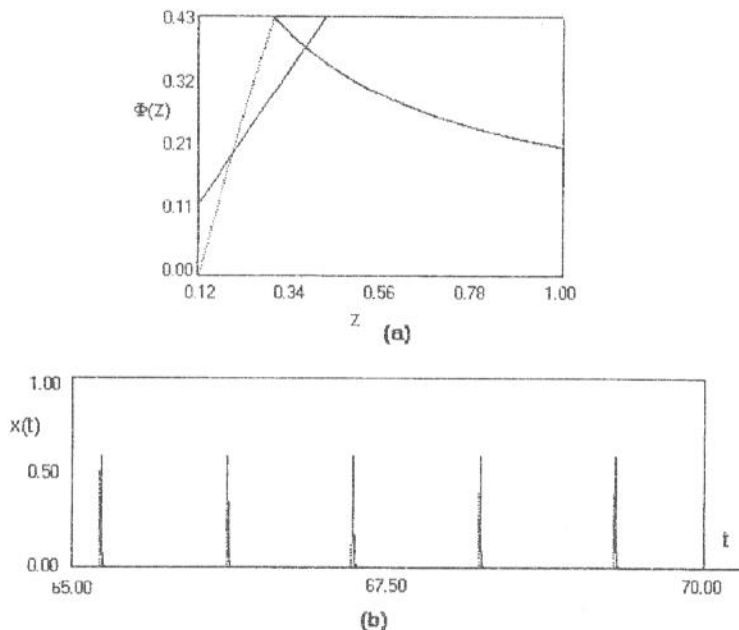


Рис. 15.

длины 1 и обладающие тем свойством, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  расстояние между всплесками имеет порядок  $O(1)$ .

Начнем со случая  $k = 2$ . Сначала фиксируем произвольно значение  $\tau \in (-1, 0)$  и два положительных числа  $z_1$  и  $z_2$ . Рассмотрим множество  $C(\tau, z)$  начальных функций  $\varphi(s, \tau, z) \in C_{[-1, 0]}$ , для которых

- 1)  $\varphi(s, \tau, z) = \varphi(-1 + \varepsilon z_1, \tau, z) = \varphi(\tau + \varepsilon z_2, \tau, z) = \varphi(0) = a$ ,
- 2)  $\varphi(s, \tau, z) < a$  при  $s \in (-1 + \varepsilon z_1, \tau) \cup (\tau + \varepsilon z_2, 0)$ ,
- 3)  $\varphi(s, \tau, z) > a$  при  $s \in [-1, -1 + \varepsilon z_1) \cup (\tau, \tau + \varepsilon z_2)$ .

При  $t > 0$  изучим асимптотику при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решения  $x(t, \tau, z)$  уравнения (2.5) с начальным условием  $x(t, \tau, z) = \varphi(s, \tau, z)$  ( $s \in [-1, 0]$ ). Через  $t_1, t_2, \dots$  обозначим последовательные положительные корни уравнения  $x(t, \tau, z) = a$ . При тех же ограничениях на числа  $z_1$  и  $z_2$ , что и на число  $z$  из пункта 2.4 удастся показать, что оператор Пуанкаре

$$\Pi(\varphi(s, \tau, z)) = x(t_4 + s, \tau, z)$$



действует из  $C(\tau, z)$  в  $C(\bar{\tau}, \bar{z})$ . Значения  $\bar{\tau}$  и  $\bar{z}$  с точностью до величин порядка  $O(\varepsilon)$  задаются формулами

$$\bar{\tau} = \tau, \quad \bar{z}_1 = \Phi(z_1), \quad \bar{z}_2 = \Phi(z_2), \quad (2.23)$$

где функция  $\Phi(z)$  та же, что и в формуле (2.21). Важно отметить, что отображение (2.23) не является грубым. Таким образом, нельзя сделать вывод о существовании у уравнения (2.5) аттрактора, структура решений из которого при всех достаточно больших  $t$  определяется этим отображением. Тем не менее, можно утверждать, что в течение асимптотически большого при  $(\varepsilon \rightarrow 0)$  промежутка времени соответствующие характеристики решений из  $C(\tau, z)$ , где значения  $z_1$  и  $z_2$  принадлежат аттрактору отображения (2.21), изменяются согласно формулам (2.23).

Ясно, что те же самые рассуждения можно повторить и в более общем случае. Для этого фиксируем произвольно два набора чисел  $\tau_j: -1 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < \tau_{k+1} = 0$  и  $z_j > 0$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ ). Рассмотрим множество  $C(\tau, z)$  начальных функций  $\varphi(s, \tau, z) \in C_{[-1, 0]}$ , для которых ( $j = 0, 1, \dots, k$ )

- 1)  $\varphi(\tau_j, \tau, z) = a, \quad \varphi(\tau_j + \varepsilon z_j, \tau, z) = a,$
- 2)  $\varphi(s, \tau, z) < a$  при  $s \in (\tau_j + \varepsilon z_j, \tau_{j+1}),$
- 3)  $\varphi(s, \tau, z) > a$  при  $s \in (\tau_j, \tau_j + \varepsilon z_j).$

Здесь при каждой итерации соответствующего оператора Пуанкаре с точностью до  $O(\varepsilon)$  величины  $z_j$  при ограничениях пункта 2.4 меняются независимо друг от друга, а величины  $\tau_j$  не меняются. Негрубость возникающего здесь отображения не дает возможности установить наличие аттрактора, поскольку погрешности из-за отбрасывания асимптотически малых величин могут накапливаться. Но можно, конечно, сделать вывод о существовании соответствующих „долгоживущих“ структур, время „жизни“ которых тем больше, чем меньше  $\varepsilon$ .

### §3. Динамика уравнения с нелинейностью импульсного типа

**3.1.** Основное предположение относительно нелинейной функции  $f(s)$  в настоящем разделе заключается в том, что ее „действие“ сосредоточено в изолированных точках. Поясним это высказывание. Предполагаем, что

функция  $f(s)$  имеет импульсный тип – является  $\delta$ -функцией, сосредоточенной в некоторой точке  $\gamma > 0$ :

$$\begin{aligned} f(s) &= 0, \text{ если } s \neq \gamma, \text{ и} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) ds &= \alpha \quad (0 < \alpha \leq 1). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Сразу отметим, что задачи исследования динамики уравнения (0.1) при условиях (0.4) и (3.1) в некотором смысле довольно близки друг к другу. Так, параметр  $\alpha$  в (3.1) является аналогом разности  $b - a$  (длины „ступеньки“), а параметр  $\gamma$  по смыслу принадлежит отрезку  $[a, b]$ . Конечно, поставленная задача в случае (3.1) существенно проще, по сравнению с (0.4). При условии (3.1) решения (0.1) являются кусочно-непрерывными и формируются из скачков (импульсов) и убывающих функций вида  $\exp(-t)$  ( $c > 0$ ). Главное преимущество условия (3.1) состоит в том, что здесь возможно полное аналитическое изучение динамических свойств решений (0.1).

Итак, ниже исследуется динамика уравнения (0.1) при условии, когда  $f(s)$  имеет импульсный тип. Соответствующие исследования базируются на результатах работы [38]. В этой связи отметим еще работы [28, 29], посвященные исследованию решений систем уравнений при внешнем воздействии в виде импульсов.

Прежде чем перейти к описанию основных результатов, сделаем замечание об определении понятия решения (0.1) и понятия устойчивости.

Решением при  $t \in [0, \infty]$  уравнения (0.1) с кусочно-непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой начальной функцией  $\phi(s)$ , заданной на отрезке  $[-T, 0]$  и удовлетворяющей условию  $\phi(-T) \neq \gamma$ , естественно назвать функцию  $x(t)$ , определяемую из интегрального уравнения

$$x(t) = \phi(0) \exp(-t) + \int_0^t f(x(s-T)) \exp[-(t-s)] ds. \quad (3.2)$$

Заметим, что для каждого из рассматриваемых решений  $x(t)$  уравнения (0.1) определены величины  $x(t-0)$ ,  $x(t+0)$  и  $\dot{x}(t-0)$ ,  $\dot{x}(t+0)$ . Поэтому ниже для решений  $x(t)$  и  $y(t)$  полагаем по определению

$$|x(t) - y(t)| = \max(|x(t-0) - y(t-0)|, |x(t+0) - y(t+0)|),$$

$$|\dot{x}(t) - \dot{y}(t)| = \max(|\dot{x}(t-0) - \dot{y}(t-0)|, |\dot{x}(t+0) - \dot{y}(t+0)|).$$

Решение  $x_0(t)$  будем называть  $L$ -устойчивым, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что из условия  $\int_{-T}^0 [|x_0(s) - x(s)| + |\dot{x}_0(s) - \dot{x}(s)|] ds < \delta$  следует неравенство  $\int_{-T}^0 [|x_0(t+s) - x(t+s)| + |\dot{x}_0(t+s) - \dot{x}(t+s)|] ds < \varepsilon$  для каждого  $t > 0$ .

Исследование начнем с наиболее простых по структуре решений.

**3.2. Медленно осциллирующее решение.** Сначала условимся, что корнем уравнения

$$x(t) = \gamma \quad (3.3)$$

будем называть такое значение  $t_0$ , для которого либо  $x(t_0 - 0) = \gamma$ , либо  $x(t_0 + 0) = \gamma$ . Медленно осциллирующим (МО) решением естественно называть такое определенное при  $t > 0$  решение уравнения (0.1), у которого бесконечно много корней уравнения (3.3) и расстояние между соседними корнями этого уравнения больше времени запаздывания  $T$ . Сформулируем основной результат этого пункта.

**Теорема 3.1** Пусть выполнено условие

$$\exp(-T) + \alpha\gamma^{-1} > 1. \quad (3.4)$$

Тогда уравнение (0.1) имеет единственное с точностью до сдвига по времени МО периодическое решение  $x_0(t)$ . Это решение  $L$ -устойчиво. Если же

$$\exp(-T) + \alpha\gamma^{-1} < 1, \quad (3.5)$$

то уравнение (0.1) не имеет МО решений.

Для доказательства этой теоремы сначала отметим, что, во-первых, для каждого решения уравнения (0.1) найдется такое  $t > 0$ , что  $x(t) < \gamma$ . Во-вторых, если для некоторого  $t_0$  выполнено условие  $x(t_0) < \gamma$  при всех  $t > t_0$ , то  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Поэтому имеет смысл ограничиться ниже рассмотрением лишь таких решений  $x(t)$ , начальные функции  $\phi(s)$  ( $s \in [-T, 0]$ ) которых непрерывны в нуле и  $\phi(0) = \gamma$ . Поскольку здесь изучаются только медленно осциллирующие решения, для  $\phi(s)$  считается выполненным условие: уравнение  $\phi(s) = \gamma$  не имеет корней на полуинтервале  $[-T, 0)$ . Еще одно упрощение связано с тем, что, как уже отмечалось, решение уравнения (0.1) в случае (3.1) состоит из „кусков“ убывающих функций вида  $c \exp(-t)$  ( $c > 0$ ), а следовательно, начальные функции  $\phi(s)$  тоже достаточно брать из этого же класса функций. Отсюда и из отмеченных выше свойств  $\phi(s)$  следует, что  $\phi(-0) = -\gamma$ .

Исследуем при  $t > 0$  решения  $x(t)$  с указанными начальными функциями  $\phi(s)$ . При  $t \in [0, T]$  имеем равенства  $x(t) = \gamma \exp(-t)$  и  $x(T + 0) = \gamma \exp(-T) + \alpha$ . При условии (3.5) тогда получаем, что  $x(t) = x(T + 0) \exp[-(t - T)]$  при  $t > T$ , т.е.  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Пусть выполнено условие (3.4). Положим

$$t_0 = \ln[\exp(-T) + \alpha\gamma^{-1}].$$

При  $t \in [T, T + t_0]$  для функции  $x(t)$  имеет место формула

$$x(t) = [\gamma \exp(-T) + \alpha] \exp[-(t - T)].$$

Важно заметить, что на отрезке  $[t_0, T + t_0]$  заданная этой формулой функция  $x(t)$  обладает всеми указанными свойствами рассматриваемых начальных функций  $\phi(s)$ . Тем самым при  $t > T + t_0$  ситуация повторяется. Это означает, что при  $t > 0$  все рассматриваемые решения сливаются в одно. Это решение  $x(t)$  (при  $t > T + t_0$ ) является медленно осциллирующим периодическим решением с периодом  $T + t_0$ .

Сравним полученный результат с результатами предыдущего раздела (для уравнения (0.1) с нелинейностью, заданной формулой (0.4)). Предположим, что  $T$  достаточно велико, тогда условие (3.4) существования МО цикла (с одним всплеском на некотором отрезке длины периода) имеет вид

$$\alpha > \gamma. \quad (3.6)$$

В случае (0.4) множество параметров на плоскости  $(a, b)$ , для которых существует устойчивое периодическое решение с одним всплеском на некотором отрезке длины периода описывается системой (2.22). Легко видеть, что в случае функции (3.1) область (в пространстве параметров  $\alpha$  и  $\gamma$ ) существования устойчивых периодических решений значительно шире, чем в случае (0.4).

**3.3.** О быстро осциллирующих решениях. Сначала остановимся на изучении решений с двумя всплесками на некоторых отрезках длины  $T$ . Каждый всплеск решений, а величина его постоянна и равна  $\alpha$ , происходит ровно через отрезок времени  $T$  после пересечения этим решением прямой  $x \equiv \gamma$ . На основании этого опишем класс начальных функций  $\phi(s)$ , которые могут задавать решения указанного типа. Фиксируем произвольно  $\tau \in (0, T)$  и рассмотрим множество  $S(\tau)$  начальных функций  $\phi(s)$ , обладающих следующими свойствами. Во-первых,  $\phi(-T + \tau) = \phi(0) = \gamma$  и  $\phi(s) \neq \gamma$  при  $s \neq -T + \tau, 0$ . Во-вторых, поскольку

Как и выше, следует предположить, что

$$\gamma \exp[-(T - \tau_1)] + \alpha > \gamma. \quad (3.14)$$

Положим  $t_0(\tau_1) = \ln[\alpha\gamma^{-1} + \exp[-(T - \tau_1)]]$ . Тогда при условии

$$\tau_1 - \tau_2 > t_0(\tau_1) \quad (3.15)$$

на отрезке  $(T - \tau_1, T - \tau_1 + t_0(\tau_1))$  для  $x(t, \tau)$  имеет место формула

$$x(t, \tau) = [\gamma \exp[-(T - \tau_1)] + \alpha] \exp[-(t - (T - \tau_1))],$$

причем  $x(T - \tau_1 + t_0(\tau_1), \tau) = \gamma$ . Рассмотрим оператор последования  $\Pi$ :

$$\Pi(\phi(s)) = x(T - \tau_1 + t_0(\tau_1) + s, \tau).$$

Тогда  $\Pi(\phi(s)) \in S(\bar{\tau})$  и  $\Pi S(\tau) \subset S(\bar{\tau})$ , где  $\bar{\tau} = (\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_m)$  и

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_1 &= \tau_2 + T - \tau_1 + t_0(\tau_1), \\ \bar{\tau}_2 &= \tau_3 + T - \tau_1 + t_0(\tau_1), \\ &\dots \\ \bar{\tau}_{m-1} &= \tau_m + T - \tau_1 + t_0(\tau_1), \\ \bar{\tau}_m &= T - \tau_1 + t_0(\tau_1). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Основной результат состоит в том, что поведение при  $t \rightarrow \infty$  рассматриваемых решений (0.1) определяется (при условиях типа (3.14), (3.15)) итерациями оператора  $\Pi$ , а значит, динамикой  $m$ -мерного отображения (3.16). Относительно этого отображения можно сделать вывод о том, что найдутся такие  $c_m$  и  $C_m$  ( $0 < c_m < C_m$ ), что при условии

$$c_m < \alpha\gamma^{-1} < C_m$$

существует устойчивая неподвижная точка (3.16) (которой отвечает  $L$ -устойчивое периодическое решение (0.1)). Отметим еще, что  $c_{m+1} < c_m$ ,  $C_{m+1} < C_m$  и  $C_m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ .

## §4. Числовые характеристики аттракторов уравнения первого порядка со ступенчатой нелинейностью

**4.1.** Настоящий раздел посвящен численному исследованию уравнения (0.1) с нелинейностью (0.4). Это уравнение, как было показано выше,

обладает богатой динамикой. При одних и тех же значениях параметров  $a$  и  $b$  может существовать, в зависимости от времени запаздывания, как устойчивый цикл, так и хаотический аттрактор (см. рис. 16).

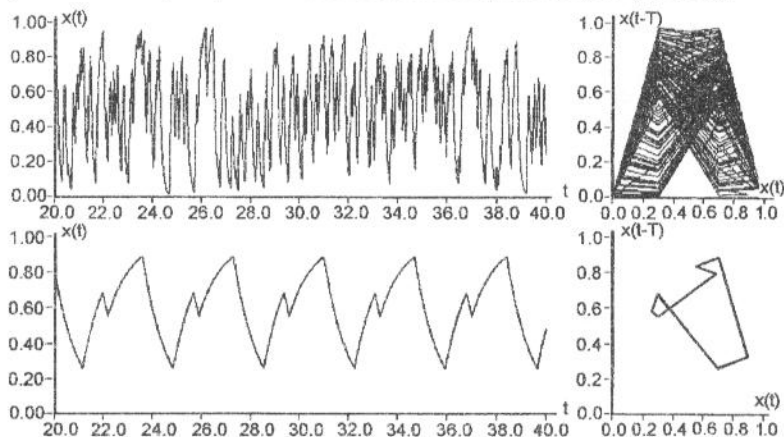


Рис. 16.

Изучение последнего представляет особый интерес. В пунктах 4.2–4.4 приведены результаты расчета основных числовых характеристик решений уравнения (0.1), а также прослежена их зависимость от времени запаздывания. В пункте 4.5 получены асимптотические при  $\varepsilon \rightarrow 0$  оценки старшего ляпуновского показателя.

Числовая характеристика, исследуемая в первом пункте этого раздела, весьма специфична и, как оказалось, информативна именно для рассматриваемой ступенчатой нелинейности. Возможно, она представляет наибольший интерес для анализа колебательных свойств решений уравнения (0.1).

**4.2.** Распределение точек пересечения решением прямых  $x = a$  и  $x = b$ . Фиксируем произвольно неотрицательную начальную функцию  $\varphi(s) \in C_{[-1,0]}$  и рассмотрим при  $t > 0$  такое решение  $x(t)$  уравнения (2.5) с нелинейностью (0.4), что  $x(s) = \varphi(s)$  при  $s \in [-1, 0]$ . В том случае, когда количество положительных корней уравнения

$$x(t) = a \quad (4.1)$$

при  $t > 1$  конечно, функция  $x(t)$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Этот случай интереса не представляет. Поэтому будем изучать лишь те решения

(2.5), у которых количество корней при  $t > 1$  уравнения (4.1) не ограничено. В силу автономности уравнения (2.5) удобно считать, что для таких решений  $\varphi(0) = x(0) = a$ . Относительно начальной функции  $\varphi(s)$  нужно знать лишь то, на каких участках значения ее лежат в промежутке от  $a$  до  $b$ . Тем самым вся необходимая для построения решения  $x(t)$  информация о  $\varphi(s)$  заключена в корнях уравнений  $\varphi(s) = a$  и  $\varphi(s) = b$  ( $s \in [-1, 0]$ ). Это обстоятельство позволяет ввести важную числовую характеристику  $S = S(T, a, b)$  ( $T = \varepsilon^{-1}$ ). Для ее определения рассмотрим занумерованные в порядке возрастания корни уравнения (4.1) и уравнения

$$x(t) = b, \quad (4.2)$$

начиная от корня  $t_0$  уравнения (4.1):  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ . Количество этих корней на каждом из отрезков  $\Delta_k = [t_k - 1, t_k]$ , ( $k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots$ ;  $t_{k_0} - 1 > 0$ ) длины 1 обозначим через  $S_k$ . Отметим, что совокупность таких корней на любом из отрезков  $\Delta_k$  дает полную информацию о поведении решения  $x(t)$  при  $t > t_k$ . В связи с этим естественно в качестве числовой характеристики  $x(t)$  принять значение

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \geq n} S_k. \quad (4.3)$$

Кроме этого, введем еще два числа  $S_{\min}$  и  $S_{\text{med}}$ , близкие по смыслу к  $S$ :

$$S_{\min} = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{k \geq n} S_k, \quad S_{\text{med}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{t_n}. \quad (4.4)$$

Отметим, что

$$S_{\min} \leq S_{\text{med}} \leq S.$$

Покажем сначала, что  $S$  (если она конечна) можно интерпретировать как размерность вложения. Для этого фиксируем отрезок  $\Delta_k$ , и пусть  $t_{k-j}$  ( $j = 0, 1, \dots, p_k$ ) – все корни уравнений (4.1) и (4.2), лежащие на промежутке  $\Delta_k$ . Через  $\delta_k = (\delta_{k1}, \dots, \delta_{kp_k})$  обозначим  $p_k$ -мерный вектор, координаты которого определяются формулой  $\delta_{kj} = t_{k-j+1} - t_{k-j}$ . Тем самым задание  $p_k$ -мерного вектора  $\delta_k$  ( $\delta_{kj} \in [0, 1]$ ,  $\sum_{k=-p_k}^1 \delta_{kj} < 1$ ) однозначно определяют решение  $x(t)$  при  $t > t_k$ , а значит, и саму последовательность  $t_n$  ( $n = k + 1, k + 2, \dots$ ). Все числа  $p_k$  при достаточно больших номерах  $k$  мажорируются числом  $S$ . Тем самым любой набор  $\delta_k = (\delta_{k1}, \dots, \delta_{kS})$  из  $S$  чисел  $\delta_{kj}$  определяет структуру решения  $x(t)$ . Можно показать, что для некоторой вектор-функции  $\Phi(\delta)$

$$\delta_{k+1} = \Phi(\delta_k). \quad (4.5)$$

Выше было показано, что уравнение (2.5) может иметь аттракторы различной структуры. Характеристику  $S$  можно еще интерпретировать как меру структурной сложности решений. Чем больше  $S$ , тем более сложный вид имеет соответствующее решение.

Из результатов второго раздела следует, что при малых  $\varepsilon$  уравнение (2.5) может иметь большое число аттракторов (явление мультистабильности). Важно, однако, отметить, что из результатов численного анализа вытекает, что область притяжения того аттрактора выше, у которого больше значение  $S$ . Графики зависимости величин  $S_{\min}$  и  $S$  от времени запаздывания  $T$  при  $a = 0.3$ ,  $b = 0.48$  приведены на рис. 17 для произвольной начальной функции. Стандартные численные методы позволили сделать вывод о том, что эти зависимости (при достаточно больших  $T$ ) являются линейными. На рис. 18 представлены графики зависимости  $S_{\min}$  и  $S$  от времени запаздывания  $T$  при специальным образом выбранных (см. пункты 2.4–2.5) начальных условиях:

**сплошная линия** – начальная функция равна  $b - a$  на отрезке длины  $10^{-5}T$ , а в остальных точках полуинтервала  $[-T, 0)$  равна нулю (верхний график соответствует  $S$ , а нижний  $S_{\min}$ );

**штриховая линия** – начальная функция равна  $b - a$  на двух отрезках длины  $10^{-5}T$ , а в остальных точках полуинтервала  $[-T, 0)$  равна нулю;

**пунктирная линия** – начальная функция равна  $b - a$  на трех отрезках длины  $10^{-5}T$ , а в остальных точках полуинтервала  $[-T, 0)$  равна нулю.

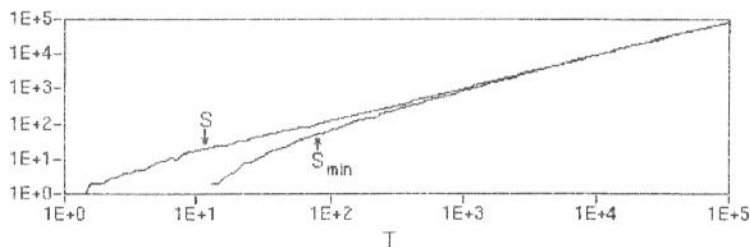


Рис. 17.



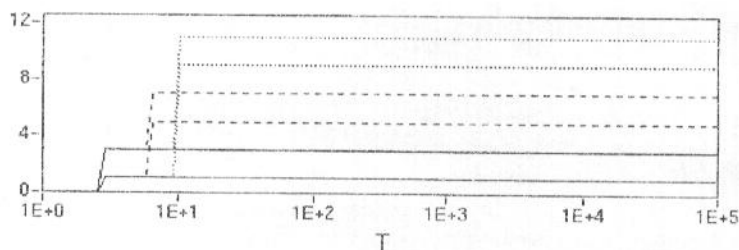


Рис. 18.

**4.3.** О сценарии перехода к хаосу. В работе [10] исследовалась аналогичная (0.1) система с нелинейностью

$$F(s) = Ms \exp(-(s - \gamma)^2),$$

где  $M$  – коэффициент усиления,  $\gamma$  – параметр асимметрии. Авторы установили, что при малых  $T$  наблюдалось несколько режимов регулярных колебаний с периодом, несколько превышающим  $2T$ . Характер изменения этих режимов с увеличением  $T$  был сходным и отличался лишь механизмами потери устойчивости регулярных колебаний. Наблюдались три последовательности бифуркаций, приводящие систему к хаотическому режиму: последовательность, включающая как минимум одну-две бифуркации удвоения периода колебаний; последовательность бифуркаций, приводящая к топологическим изменениям в структуре регулярных колебаний и заканчивающаяся переходом к хаосу через перемежаемость „регулярный режим – хаос“; жесткий переход к хаосу в результате единственной бифуркации.

Рассмотрим здесь вопрос о том, как изменяется структура решения уравнения при увеличении времени запаздывания  $T$  (при фиксированных значениях  $a$  и  $b$ ). На рис. 19 приведен график зависимости периода решения от  $T$  при  $a = 0.3$ ,  $b = 0.7$ . (Хаотические режимы отмечались на графике сплошной вертикальной линией.) Данный рисунок дает весьма наглядное представление о том, что сценарий перехода от регулярного поведения к хаосу достаточно сложен. Действительно, в начале при малых  $T$  происходит ряд как прямых, так и обратных бифуркаций добавления периода. Далее же, учитывая, что сплошные вертикальные линии соответствуют непериодическим решениям, можно сделать вывод о том, что при увеличении  $T$  имеет место явление перемежаемости типа „цикл-хаос“. Все эти заключения находят подтверждение при исследовании корреляционной размерности и старшего ляпуновского показателя.

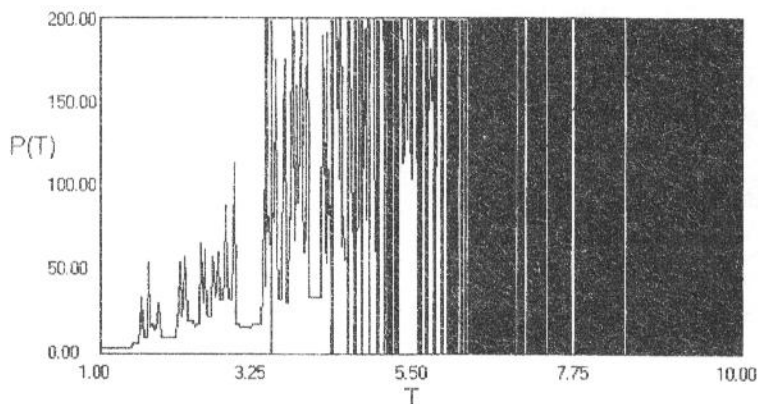


Рис. 19.

**4.4.** Корреляционная размерность. Оценка корреляционной размерности системы производилась по корреляционному показателю  $\nu$ , который вычислялся стандартными методами [27]. На рис. 20 представлен график зависимости  $\nu$  от времени запаздывания  $T$  с шагом 0.2 при выборке  $N = 40000$ ,  $a = 0.3$ ,  $b = 0.7$ . (Были проведены контрольные расчеты корреляционного показателя при  $N = 80000$ , однако результаты оказались достаточно близкими к случаю  $N = 40000$ , что позволяет считать результаты достоверными.)

При небольших значениях  $T$  уравнение (0.1) имеет устойчивый цикл, здесь корреляционный показатель  $\nu$  близок к 1. С увеличением запаздывания в системе возникает хаотический аттрактор, и наблюдается почти линейный рост  $\nu$ . При достижении величиной  $\nu$  значения приблизительно равного 6 происходит „насыщение“, и рост корреляционного показателя прекращается при дальнейшем увеличении  $T$ . Однако методика расчетов такова, что если получается оценка, превышающая 4–5, то к такому результату следует относиться осторожно и не считать его истиной в последней инстанции.

**4.5.** Старший ляпуновский показатель. Вычисления производились по следующей схеме. Решение возмущалось в одной точке на достаточно малую величину, после чего производилось вычисление исходного и возмущенного решений на некотором отрезке времени (определяемом стандартными критериями). Данная процедура повторялась несколько раз с целью достижения стабилизации результатов. График зависимости стар-

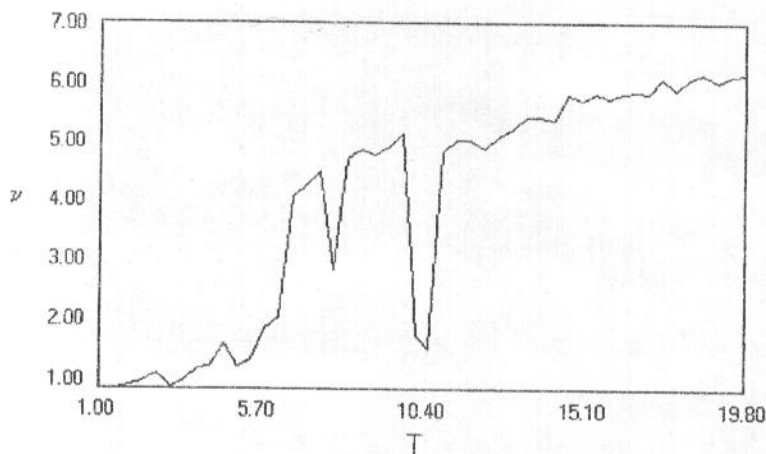


Рис. 20.

шего ляпуновского показателя  $l_0$  от  $T$  представлен на рис. 21 при  $a = 0.3$ ,  $b = 0.7$ . При малых значениях  $T$  в системе (0.1) устойчив предельный цикл, и, как следствие, величина  $l_0$  близка к нулю. При увеличении запаздывания до 10 величина  $l_0$  растет до приблизительно 0.4, и при  $T$ , больших 10, прекращает рост.

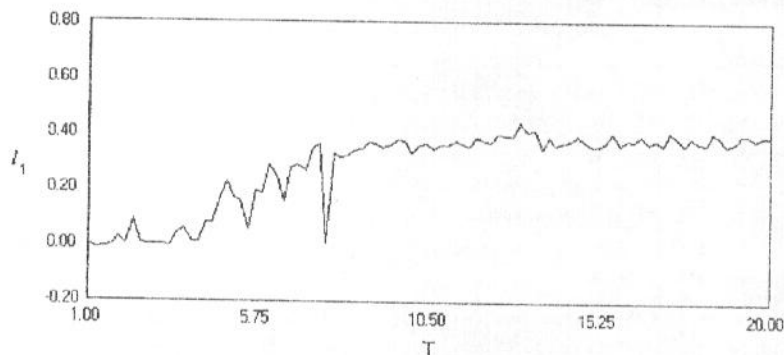


Рис. 21.

#### 4.6. Асимптотическая оценка старшего ляпуновского показателя.

При изучении ляпуновских показателей необходимо рассмотреть линеаризованные на некотором решении  $x(t)$  уравнения (2.5)

$$\varepsilon \dot{y} + y = A(t)y(t-1), \quad (4.6)$$

где  $A(t) = f'(x(t-1))$ . В том случае, когда функция  $A(t)$  ограничена на  $[t_0, \infty) : |A(t)| \leq A_0$ , старший ляпуновский показатель  $\lambda_0$  уравнения (4.6) оценивается сверху числом  $\alpha_0$ , где  $\alpha_0$  – корень с наибольшей вещественной частью уравнения

$$\lambda \varepsilon + 1 = A_0 \exp(-\lambda). \quad (4.7)$$

В рассматриваемом нами случае такую оценку получить нельзя, поскольку функция  $f(x(t-1))$  разрывна, а значит,  $f'(x(t-1))$  содержит  $\delta$ -функции. В связи с этим оценим сверху норму оператора сдвига по траекториям уравнения (4.6) за время  $t = 1$ .

Произведем сначала в уравнении (4.6) замену

$$y = z \exp(-\varepsilon^{-1}t).$$

В итоге получим уравнение

$$\dot{z} = B(t, \varepsilon)z(t-1), \quad \text{где } B(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1}A(t) \exp(\varepsilon^{-1}). \quad (4.8)$$

Фиксируем произвольную функцию  $z(s) \in C_{[0,1]}$  ( $s \in [0, 1]$ ) и пусть

$$\|z(s)\|_{C_{[0,1]}} \leq 1. \quad (4.9)$$

Из (4.8) следует формула

$$z(t) = z(1) + \int_1^t B(\tau, \varepsilon)z(\tau-1)d\tau.$$

Учитывая, что кусочно-постоянная функция  $f(x(t-1))$  имеет разрывы в точках  $t_j + 1$  ( $j = 1, 2, \dots$ ;  $t_j$ -корни уравнения (4.1) или (4.2)), приходим к равенству

$$z(t) = z(1) + \left( \sum_{j=1}^{n(t)} z(t_j)(\dot{x}(t_j))^{-1} \right) \varepsilon^{-1} \exp(\varepsilon^{-1}),$$

в котором  $n(t)$  — количество значений  $t_j$  из отрезка  $[0, t - 1]$ . Оценим функцию  $z(t)$  при  $t \in [1, 2]$ . Прежде всего отметим, что  $|\dot{x}(t_j)|^{-1} \leq \varepsilon m$ , где  $m = [\min(1 - a, 1 - b, a, b)]^{-1}$ . Отсюда получаем, что

$$|z(t)| \leq |z(1)| + \left( \sum_{j=1}^{n(1)} |z(t_j)| \right) m \exp(\varepsilon^{-1}).$$

Учитывая (4.9), приходим к оценке

$$\|z(1 + s)\|_{C_{[0,1]}} \leq [1 + n(1)m \exp(\varepsilon^{-1})] \|z(s)\|_{C_{[0,1]}}. \quad (4.10)$$

Для определения старшего ляпуновского показателя  $\lambda_0$  решения  $x(t)$  необходимо находить при всех  $z(s) \in C_{[0,1]}$  пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \|y(t + s)\|_{C_{[0,1]}} = \lim_{t \rightarrow \infty} (t^{-1} \ln \|z(t + s)\|_{C_{[0,1]}}) - \varepsilon^{-1}.$$

Из оценки (4.10) и из определения числа  $S$  (с точностью до асимптотически малых при  $\varepsilon \rightarrow 0$  величин) приходим к итоговому соотношению

$$\lambda_0 \leq \ln[mS]. \quad (4.11)$$

Выше отмечалось, что для аттракторов с „наибольшей“ областью притяжения величина  $S$  линейно зависит от  $\varepsilon^{-1}$ . Тогда оценка (4.11) имеет вид  $\lambda_0 \leq \ln \varepsilon^{-1} + \text{const}$ . (По-видимому, показатель  $\lambda_0$  может совпадать хотя бы по порядку при  $\varepsilon \rightarrow 0$  с этой оценкой, т.е.  $\lambda_0 \sim \ln \varepsilon^{-1}$ ). Это означает, что чем больше число разрывов имеет нелинейность  $f(s)$ , тем сложнее динамика решений соответствующего уравнения (и тем больше  $\lambda_0$ ). Важно отметить, что для непрерывных нелинейных функций  $f(s)$  старший ляпуновский показатель  $\lambda_0$  оценивается сверху из (4.7) числом, не зависящим от  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Такой же вывод можно получить и оценивая ляпуновскую размерность. В случае непрерывной (гладкой)  $f(s)$  ляпуновская размерность может неограниченно возрастать при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Однако этот рост в случае наличия разрывов  $f(s)$  может происходить существенно быстрее.

## §5. Заключение

Сделаем несколько замечаний о сопоставлении поведения решений уравнения (0.1) нелинейностями

$$f(x) = ax(1 + x^n)^{-1}, \quad f(x) = Mx \exp(-(x - \gamma)^2), \quad (5.1)$$

$$f(s) = \begin{cases} 1, & a \leq s \leq b, \\ 0, & s < a \text{ или } s > b, \end{cases} \quad 0 \leq a < b \leq 1, \quad (5.2)$$

тем более, что чисто визуально эти нелинейности весьма похожи.

Сначала остановимся на некоторых общих моментах, которые имеют место для каждой из рассматриваемых нелинейностей. Во-первых, при относительно небольших значениях запаздывания  $T$  динамика довольно проста. Она допускает исследование аналитическими методами. Следует, конечно, обратить внимание на то, что в случае нелинейности (5.2) всегда асимптотически устойчивым является нулевое состояние равновесия. Во-вторых, одни и те же асимптотические методы [8, 17] дают одинаковые и эффективные результаты (о существовании и асимптотике устойчивого цикла) при условии, когда в случае (5.1) параметры  $M$  или  $\gamma$  достаточно велики, а в случае нелинейности (5.2) аналог соответствующей ситуации выделяется условием достаточной малости параметров  $a$  и  $b$ . В-третьих, при определенных  $a$  и  $b$  для нелинейности (5.2) наблюдаются похожие структурные изменения решений. Кроме того, получены довольно близкие результаты (см. [10, 41]) о зависимости корреляционной размерности и старшего ляпуновского показателя от величины запаздывания  $T$ .

Отметим затем основные отличительные черты поведения решений в случаях нелинейности (5.1) и (5.2).

Во-первых, при определенных параметрах оказалось возможно аналитическое исследование динамики решений уравнения (0.1) с нелинейностью (5.2). Во-вторых, если для (5.1) бифуркационные явления при изменении параметров основаны на бифуркациях удвоения, то в случае (5.2) более характерны бифуркации добавления периода (рассмотренные для непрерывных кусочно-линейных отображений [42] и для разрывных кусочно-линейных отображений [37]). В-третьих, случай (5.2) отличается развитое явление мультистабильности, существование разноплановых аттракторов и долгоживущих структур. В-четвертых, для нелинейности (5.2) весьма информативны специальные числовые характеристики. Так, важную роль в задаче о динамике играет исследованная в параграфе 4 величина  $S$  – распределение точек пересечения решением прямых  $x = a$  и  $x = b$ .



# Литература

- [1] Арнольд, В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.И. Арнольд. — М.: Наука, 1978.
- [2] Брюно, А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений / А.Д. Брюно. — М.: Наука, 1979.
- [3] Бутузов, В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / В.Ф. Бутузов, А.Б. Васильева. — М., 1973.
- [4] Васильева, А.Б. Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией. / А.Б. Васильева, С.А. Кащенко, Ю.С. Колесов, Н.Х. Розов // Матем. сборник. — 1986. — 130 (172). — №4(8). — С. 488–499.
- [5] Горяченко, В.Д. Исследование динамики численности отдельной популяции с учетом последствий. Краткий обзор / В.Д. Горяченко // Нелинейные колебания и экология. ЯрГУ. — Ярославль, 1984. — С. 66–83.
- [6] Горяченко, В.Д., Прикладные задачи устойчивости систем с запаздыванием / В.Д. Горяченко, А.Д. Капустин. — Горький, 1988.
- [7] Григорьева, Е.В. Установившиеся автоколебания в лазерах с запаздывающей обратной связью / Е.В. Григорьева, С.А. Кащенко // ЖЭТФ, 1994. — Т.106. — Вып. 1 (7). — С. 79–105.
- [8] Дмитриев, А.С. Асимптотика нерегулярных колебаний в модели автогенератора с запаздывающей обратной связью / А.С. Дмитриев, С.А. Кащенко // Докл. РАН. — 1993. — Т. 328. — №2. — С. 134–177.



- [9] Дмитриев, А.С. Стохастические колебания в радиотехнике / А.С. Дмитриев, В.Я. Кислов. — М.: Наука, 1989.
- [10] Дмитриев, А.С. Стохастические колебания в радиофизике и электронике / А.С. Дмитриев, В.Я. Кислов. — М.: Наука 1989.
- [11] Кащенко, Д.С. Синхронизация в системе из двух связанных автогенераторов первого порядка с релейной запаздывающей обратной связью / Д.С. Кащенко // Прикладная Нелинейная Динамика. — Т.5. — №2,3. — 1997. — С. 100–117.
- [12] Кащенко, Д.С. Динамика автогенератора первого порядка с релейной запаздывающей обратной связью / Д.С. Кащенко // Современные проблемы математики и информатики. — Ярославль. — 1997. — С. 105–113.
- [13] Кащенко, С.А. Исследование методами большого параметра системы нелинейных дифференциально-разностных уравнений, моделирующих задачу хищник-жертва / С.А. Кащенко // Докл.АН СССР. — 1982. — Т.266. — №4. — С. 792–795.
- [14] Кащенко, С.А. Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной / С.А. Кащенко // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25. — №8. — С. 1448–1451.
- [15] Кащенко, С.А. Пространственные особенности высокомодовых бифуркаций двухкомпонентных систем с малой диффузией / С.А. Кащенко // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25. — №2. — 9 с.
- [16] Кащенко, С.А. Асимптотический анализ динамики системы из двух связанных автогенераторов с запаздывающей обратной связью / С.А. Кащенко // Изв. вузов. Радиофизика. — 1990. — Т. 33. — №3. — С. 307–314.
- [17] Кащенко, С.А. Асимптотика релаксационных колебаний дифференциально-разностных системах с финитной нелинейностью / С.А. Кащенко // Дифф.уравнения. — 1995. — №8. — С.1330–1339.
- [18] Кащенко, С.А. Уравнения Гинзбурга-Ландау — нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с

- большим запаздыванием / С.А. Кашенко // Журнал Вычисл.матем. и матем. физ. — 1998. — Т.38. — №3. — С. 457–465.
- [19] Кашенко, С.А. Бифуркационные особенности сингулярно возмущенного уравнения с запаздыванием / С.А. Кашенко // Сибирский математический журнал. — Т. 40. — №3. — 1999. — С. 567–572.
- [20] Кашенко, С.А. Бифуркации в окрестности цикла при малых возмущениях с большим запаздыванием. / С.А. Кашенко // Журнал Вычисл. матем. и матем. физ. — 2000. — №4.
- [21] Кашенко, С.А. Об одном дифференциально-разностном уравнении, моделирующем импульсную активность нейрона / С.А. Кашенко, В.В. Майоров // Математическое моделирование. — 1993. — Т. 5. — №12. — С. 47–58.
- [22] Клушин, М.И. Резание металлов / М.И. Клушин. — М.: Машиностроение, 1958.
- [23] Ланда, П.С. Автоколебания в распределенных системах / П.С. Ланда. — М.: Наука, 1983.
- [24] Майстренко, В.Л., Бифуркационные явления в генераторах с линиями задержки / В.Л. Майстренко, Ю.Л. Майстренко, И.М. Сушко // Радиотехника и электроника. — 1994. — Вып. 8–9. — С. 1367–1380.
- [25] Марсден, Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. — М.: Мир, 1980.
- [26] Марчук, Г.И. Математическая модель противовирусного иммунного ответа / Г.И. Марчук, Р.В. Петров // Препринт №10, отдел вычислит. математики АН СССР. — Москва. — 1981.
- [27] Потапов, А.Б. Программы вычисления корреляционного показателя и оценки обобщенной энтропии по временному ряду / А.Б. Потапов // Препринт №27. — 1991. — Москва ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР. — 31 с.
- [28] Самойленко, А.М. Дифференциальное уравнение с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк. — Киев: Вища школа, 1987.

- [29] Халанай, А. Системы с запаздыванием. Результаты и проблемы / А. Халанай // Сб. переводов „Математика“ 10:5. — 1966. — С. 85–102.
- [30] Хейл, Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. — М.: Мир, 1984.
- [31] Шарковский, А.Н., Разностные уравнения и их приложения / А.Н. Шарковский, Ю.Л. Майстренко, Е.Ю. Романенко. — Киев: Наук. думка, 1981.
- [32] Эльясберг, М.Е. Об устойчивости процесса резания металлов / М.Е. Эльясберг // Известия АН СССР, ОТН. — №9. — 1958.
- [33] Gibbs, H.M. Observation of Chaos in "Optical Bistability" / H.M. Gibbs, F.A. Hopf, D.L. Kaplan, R.L. Shoemaker // Phys. Rev. Lett. — 1981. — V. 46. — №7 — P. 474–477.
- [34] Ikeda, K. Multiple-Valued Stationary State and Its Instability of the Transmitted Light by a Ring Cavity System / K. Ikeda // Opt. Comm. — 1979. — V.30. — №2 — P. 257–261.
- [35] Ikeda, K. Optical Turbulence: Chaotic Behavior of Transmitted Light from a Ring Cavity / K. Ikeda, H. Daido, O. Akimoto // Phys. Rev. Lett. — 1980. — V. 45. — №9. — P. 709–712.
- [36] Ikeda, K. Successive Higher-Harmonic Bifurcations in Systems with Delayed Feedback / K. Ikeda, K. Kondo, O. Akimoto // Phys. Rev. Lett. — 1982. — V. 49. — №20 — P. 1467–1470.
- [37] Kaschenko, D.S. Dynamics of the simplest piecewise linear discontinuous mappings / D.S. Kaschenko // Proceedings 5-th International Specialist Workshop "Nonlinear Dynamics of Electronics Systems". Moscow, Russia. — June 26–27, 1997. — P. 458–463.
- [38] Kaschenko, S.A. Dynamics of the first order neutral equation with relay feedback / S.A. Kaschenko // Proceedings 5-th International Specialist Workshop "Nonlinear Dynamics of Electronics Systems". Moscow, Russia. — June 26–27, 1997. — P. 244–250.
- [39] Kiliyas, T. Electronic chaos generators – design and applications / T. Kiliyas, K. Kutzer, A. Moegel, W. Schwarz // International Journal of Electronics. — Vol. 79. — №6. — P. 737–753. 1995.

- [40] Kiliyas, T. Generation and application of broadband signals using chaotic electronic systems / T. Kiliyas, A. Moegel, W. Schwarz // *Bifurcation and Chaos: Theory and Application*. — Akademie Verlag. — 1995.
- [41] Mackey, M.C. Oscillation and Chaos in Physiological Control Systems / M.C. Mackey, L. Glass // *Science*. — 1977. — V.197. — №4300. — P. 287–289.
- [42] Maistrenko, Yu.L. Cycles of Chaotic Intervals in a Time-Delayed Chua's Circuit / Yu.L. Maistrenko, V.L. Maistrenko, L.O. Chua // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — Vol. 3. — №. 6. — 1993. — P. 1557–1572.
- [43] Moegel, A. Analysis and simulation principles for chaotic systems containing delay elements / A. Moegel, W. Schwarz, S. Kaschenko // *NDES'96, Seville, Spain*. — 1996. — P. 147–151.
- [44] Stokes, A. On the approximation of nonlinear oscillation / A. Stokes // *Труды 5-й международной конференции по нелинейным колебаниям, Киев*. — 1970. — Т.2. — С. 480–491.

Учебное издание

**Кащенко Дмитрий Сергеевич**  
**Кащенко Илья Сергеевич**

**Динамика уравнений первого порядка  
с запаздыванием**

Учебное пособие

Редактор, корректор А. А. Аладьева  
Компьютерный набор Д. С. Кащенко, И. С. Кащенко  
Компьютерная верстка И. С. Кащенко

Подписано в печать 25.10.06. Формат 60×84/16. Бумага тип.  
Усл. печ. л. 7,67. Уч.-изд. л. 8,4. Тираж 200 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе  
Ярославского государственного университета.

150000, Ярославль, ул. Советская, 14.

Отпечатано

ООО „Ремдер“ ЛР ИД №06151 от 26.10.2001  
г. Ярославль, пр. Октября, 94, оф. 37.  
Тел. (4852) 73-35-03, 58-03-48, факс 58-03-49.