

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова

С.Д. Глызин, П.Н. Нестеров

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Ярославль, 2016

УДК 517.9
ББК В161.61я73
Г 75

Рецензенты:

кафедра математики физического факультета МГУ;
доктор физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой
математического анализа ФГБОУ ВО
«Удмуртский государственный университет» Л.И. Родина

Г 75

Глызин С.Д., Нестеров П.Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие. — Ярославль: ЯрГУ, 2016 — 192 с.
ISBN 978-5-8397-1089-4

Учебное пособие посвящено изложению основных разделов теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Оно содержит материалы лекционного курса, который читался авторами на математическом факультете и факультете информатики и вычислительной техники Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова на протяжении нескольких последних лет. В пособии предложено также некоторое количество задач для самостоятельного решения, позволяющих лучше усвоить изложенный материал.

Для студентов учреждений высшего образования физико-математических направлений подготовки.

Издание подготовлено в рамках проекта №1.1875.2014/К проектной части госзадания на НИР ЯрГУ №2014/258, а также при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации № МК-4625.2016.1.

Рис. 10. Библиогр.: 29 назв.

УДК 517.9
ББК В161.61я73

ISBN 978-5-8397-1089-4

© Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, 2016

© Глызин С.Д., Нестеров П.Н., 2016

Оглавление

| | |
|--|-----------|
| Введение | 6 |
| Глава 1. Предварительные сведения из алгебры и математического анализа | 8 |
| 1.1. Нормы векторов и матриц | 8 |
| 1.2. Метрическое пространство. Принцип сжимающих отображений | 15 |
| 1.3. Теорема Арцела | 18 |
| 1.4. Периодические функции | 22 |
| Глава 2. Скалярные дифференциальные уравнения первого порядка | 29 |
| 2.1. Существование и единственность решения задачи Коши | 29 |
| 2.2. Интегрирование линейных скалярных дифференциальных уравнений | 33 |
| 2.3. Периодические решения линейных скалярных дифференциальных уравнений | 35 |
| Глава 3. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами | 39 |
| 3.1. Дифференциальные операторы. Исследование задачи Коши | 39 |
| 3.2. Линейные однородные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами | 44 |
| 3.3. Линейные неоднородные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами | 51 |
| 3.4. Уравнение Эйлера | 58 |

| | |
|---|------------|
| Глава 4. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами | 60 |
| 4.1. Задача Коши. Общее решение линейной однородной системы | 60 |
| 4.2. Общее решение линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами | 68 |
| 4.3. Матричная экспонента и ее свойства. Вычисление матричной экспоненты | 72 |
| 4.4. Решение линейных систем с помощью матричной экспоненты. Оценка матричной экспоненты | 79 |
| Глава 5. Линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами | 83 |
| 5.1. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши | 83 |
| 5.2. Формула Лиувилля–Остроградского. Фундаментальная матрица линейной однородной системы | 88 |
| 5.3. Общее решение линейной неоднородной системы. Линейные уравнения высших порядков с переменными коэффициентами | 94 |
| 5.4. Системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами | 100 |
| Глава 6. Общие свойства систем нелинейных дифференциальных уравнений в нормальной форме | 111 |
| 6.1. Существование и единственность решения задачи Коши. Основные теоремы | 111 |
| 6.2. О непрерывной зависимости решений от начальных условий и параметров | 118 |
| 6.3. Продолжение решений | 124 |
| 6.4. Дифференцируемость решений по начальным условиям и параметрам | 125 |
| Глава 7. Теория устойчивости | 130 |
| 7.1. Основные определения. Устойчивость в линейных системах | 130 |
| 7.2. Второй метод Ляпунова | 136 |
| 7.3. Устойчивость по первому приближению | 144 |
| 7.4. Устойчивость многочленов | 147 |

| | |
|--|------------|
| 7.5. Замечания о неавтономном случае | 151 |
| Глава 8. Автономные системы дифференциальных уравнений | 154 |
| 8.1. Общие свойства автономных систем | 154 |
| 8.2. Скалярные автономные уравнения первого порядка | 158 |
| 8.3. Классификация положений равновесия линейной системы на плоскости | 162 |
| Глава 9. Краевые задачи | 171 |
| 9.1. Определение и общие свойства | 171 |
| 9.2. Функция Грина. Неоднородная краевая задача . . . | 175 |
| 9.3. Собственные значения и собственные функции . . | 181 |
| Заключение | 186 |
| Литература | 187 |

Введение

Предлагаемое вниманию читателей пособие содержит материалы лекционного курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения», который читался авторами на математическом факультете и факультете информатики и вычислительной техники Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова на протяжении нескольких последних лет. Материал пособия разделен на девять глав.

В первой из них содержатся предварительные сведения из алгебры и математического анализа, на которые необходимо обратить внимание при изучении курса.

Вторая глава посвящена изучению скалярных дифференциальных уравнений первого порядка. Доказывается теорема существования и единственности начальной задачи Коши для таких уравнений, а затем обсуждается задача построения решений линейных скалярных уравнений.

В третьей главе рассмотрены линейные дифференциальные уравнения старших порядков с постоянными коэффициентами, а в четвертой главе рассматриваются системы с постоянными коэффициентами. Во второй части четвертой главы вводится понятие матричной экспоненты и доказывается теорема об оценке нормы матричной экспоненты.

Пятая глава в свою очередь посвящена линейным системам дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, в ней сначала доказывается теорема существования и единственности решения, затем обосновывается формула Остроградского–Лиувилля и общие свойства линейных систем, а в последней части обсуждаются линейные системы с периодическими коэффициентами, в частности вводится понятие матрицы монодромии и мультипликаторов и доказывается теорема Ляпунова–Флоке.

В шестой главе доказывается теорема существования и единственности решения начальной задачи Коши для систем нелинейных дифференциальных уравнений, а затем обсуждаются проблемы продолжимости решений и их гладкая зависимость от начальных условий и параметров.

Седьмая глава посвящена одному из центральных понятий теории дифференциальных уравнений — устойчивости. В главе доказываются теоремы об устойчивости по первому приближению (первый метод Ляпунова) и утверждения об устойчивости и асимптотической устойчивости, получаемые на основе функций Ляпунова (второй метод Ляпунова). Рассмотрена также задача об устойчивости многочленов, обосновываются критерии устойчивости.

В восьмой главе приводятся общие свойства автономных систем дифференциальных уравнений. Для линейных систем на плоскости дана классификация положений равновесия.

Последняя, девятая глава полностью посвящена краевым задачам. Вводится понятие функции Грина, приводятся определения собственных функций и собственных чисел краевых задач, рассматривается проблема их нахождения.

Наша книга не ставит целью сколь-нибудь исчерпывающим образом описать теорию обыкновенных дифференциальных уравнений. Учитывая активное развитие данной науки, это вряд ли возможно. В пособии предпринята попытка собрать в непротиворечивую картину несколько основных тем теории для того, чтобы помочь студентам освоить материал читаемого курса. Читателям, интересующимся развитием основных тем данного курса, рекомендуем книги [1, 4, 8, 10, 21, 25].

Отметим также ряд специализированных сборников задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям [11, 16, 18, 20, 24], решение задач из которых позволит лучше усвоить материал курса.

Глава 1

Предварительные сведения из алгебры и математического анализа

1.1. Нормы векторов и матриц

Обозначим через \mathbb{R}^n пространство n -мерных вектор-столбцов, компонентами которых являются действительные числа: $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $x_i \in \mathbb{R}$. Здесь символом $(\cdot)^T$ обозначена операция транспонирования.

Определение 1.1. Говорят, что в пространстве \mathbb{R}^n введена норма, если каждому элементу x этого пространства поставлено в соответствие действительное число $\|x\|$, называемое нормой вектора x , и выполнены следующие три условия:

1. $\|x\| \geq 0$; причем $\|x\| = 0$, только если $x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Условия 1–3 традиционно называют аксиомами нормы. В пространстве \mathbb{R}^n норму можно ввести различными способами. Тем не менее наиболее употребительными являются следующие нормы:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad (1.1)$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.2)$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \quad (1.3)$$

Норму (1.1) принято называть октаэдрической, (1.2) — евклидовой или сферической, а норму (1.3) — кубической. Указанные нормы являются представителями (норма (1.3) — в предельном смысле) целого семейства норм

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (1.4)$$

Упражнение 1.1. Доказать неравенство

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.5)$$

Наряду с векторными нормами при проведении различных оценок часто приходится использовать так называемые матричные нормы. Пусть символом $\mathbb{M}_{n \times n}$ обозначена совокупность всех квадратных матриц порядка n , элементами которых являются действительные числа: $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что в пространстве $\mathbb{M}_{n \times n}$ определена матричная норма, если каждой матрице $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$ поставлено в соответствие действительное число $\|A\|$, причем выполняются все аксиомы векторной нормы из определения 1.1. Поскольку для квадратных матриц определена операция умножения, в ряде ситуаций возникает необходимость оценки величины $\|AB\|$, где $A, B \in \mathbb{M}_{n \times n}$. В этой связи удобным оказывается следующее свойство, выполнение которого наряду с условиями 1–3 часто априори требуют от матричной нормы:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad (1.6)$$

для любых $A, B \in \mathbb{M}_{n \times n}$.

Определение 1.2. Векторная норма $\|x\|_\alpha$ и матричная норма $\|A\|_\beta$ называются согласованными, если

$$\|Ax\|_\alpha \leq \|A\|_\beta \|x\|_\alpha \quad (1.7)$$

для любых $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$ и $x \in \mathbb{R}^n$.

Пусть в пространстве \mathbb{R}^n определена некоторая векторная норма $\|x\|$.

Определение 1.3. *Индукцированной матричной нормой называют норму $\|A\|$, определяемую формулой*

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \quad (1.8)$$

Упражнение 1.2. *Проверить, что для индуцированной матричной нормы (1.8) выполнены все аксиомы нормы 1–3.*

Очевидно, что индуцированная матричная норма является согласованной с соответствующей векторной нормой из (1.8) и для этой нормы выполнено неравенство (1.6). Действительно,

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad x \neq 0,$$

откуда

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|.$$

Используя дважды последнее неравенство, заключаем

$$\|AB\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|A\| \|Bx\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|B\|.$$

Равенству, определяющему индуцированную матричную норму, можно придать следующую эквивалентную форму записи:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Формула (1.8) имеет общий вид и мало пригодна для практического вычисления $\|A\|$. В ситуации, когда в пространстве \mathbb{R}^n фиксирована некоторая векторная форма $\|x\|$, для вычисления соответствующей индуцированной матричной нормы $\|A\|$ могут быть получены более простые формулы.

Теорема 1.1. *Пусть $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ и $\|A\|_\infty$ — матричные нормы, индуцированные соответствующими векторными нормами $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ и $\|x\|_\infty$. Справедливы следующие формулы:*

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad (1.9)$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_{A^*A}^{(i)}}, \quad (1.10)$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad (1.11)$$

где $\lambda_{A^*A}^{(i)}$ — собственные числа матрицы A^*A , а символом A^* обозначена матрица, эрмитово сопряженная с A .

Доказательство. Докажем справедливость равенств (1.10) и (1.11), начав с последнего. Согласно (1.3), имеем

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Откуда

$$\|A\|_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (1.12)$$

Построим далее вектор x такой, что

$$\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \geq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (1.13)$$

Тем самым, с учетом (1.12), будет установлена справедливость равенства (1.11). Предположим, что

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum_{j=1}^n |a_{lj}|,$$

т.е. максимум среди соответствующих сумм достигается, в частности, при $i = l$. Пусть $x = (\operatorname{sgn} a_{l1}, \operatorname{sgn} a_{l2}, \dots, \operatorname{sgn} a_{ln})$, где

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

Поскольку интерес представляет лишь случай, когда $x \neq 0$, то очевидно, что $\|x\|_\infty = 1$. Далее,

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{lj} x_j \right| = \left| \sum_{j=1}^n a_{lj} \operatorname{sgn} a_{lj} \right| =$$

$$= \sum_{j=1}^n |a_{lj}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

и тем самым справедливость неравенства (1.13) установлена.

Перейдем теперь к доказательству равенства (1.10). В пространстве \mathbb{R}^n определим скалярное произведение стандартным образом:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.14)$$

Поскольку элементами матрицы A являются действительные числа, то $A^* = A^T$. Имеем,

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x \neq 0} \sqrt{\frac{(Ax, Ax)}{(x, x)}} = \sqrt{\sup_{x \neq 0} \frac{(A^T A x, x)}{(x, x)}}. \quad (1.15)$$

Заметим, что матрица $B = A^T A$ является симметрической, поскольку

$$B^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = B.$$

Из курса линейной алгебры известно (см., например, [5]), что в этом случае существует ортонормированный базис в пространстве \mathbb{R}^n , составленный из собственных векторов этой матрицы. Обозначим векторы этого базиса символами e_1, e_2, \dots, e_n . Таким образом,

$$Be_i = \lambda_i e_i, \quad (e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \|e_i\|_2^2 = 1, & i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.16)$$

Отметим, что все собственные числа $\lambda_i = \lambda_{A^T A}^{(i)}$ матрицы B неотрицательны. Действительно, из (1.16) следует, что

$$\lambda_i = \frac{(Be_i, e_i)}{(e_i, e_i)} = (A^T A e_i, e_i) = (A e_i, A e_i) = \|A e_i\|_2^2 \geq 0. \quad (1.17)$$

Разложим теперь произвольный вектор $x \in \mathbb{R}^n$ по указанному базису:

$$x = \sum_{i=1}^n c_i e_i, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Используя свойства скалярного произведения и равенства из (1.16), получаем

$$(Bx, x) = \left(\sum_{i=1}^n c_i \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^n c_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |c_i|^2.$$

Отсюда легко выводим, что

$$(Bx, x) \leq (\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i) \sum_{i=1}^n |c_i|^2 = (\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i)(x, x) \quad (1.18)$$

и, аналогично,

$$(Bx, x) \geq (\min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i) \sum_{i=1}^n |c_i|^2 = (\min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i)(x, x). \quad (1.19)$$

Из (1.18), (1.19) следует, что

$$\min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \leq \frac{(Bx, x)}{(x, x)} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i, \quad x \neq 0.$$

Учитывая теперь первое из равенств (1.17), окончательно заключаем, что

$$\sup_{x \neq 0} \frac{(Bx, x)}{(x, x)} = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(Be_i, e_i)}{(e_i, e_i)} = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i.$$

Возвращаясь к (1.15), завершаем доказательство формулы (1.10). ■

Упражнение 1.3. Установить справедливость формулы (1.9).

Поскольку в пространстве \mathbb{R}^n , как показано выше, векторную норму можно ввести различными способами, то возникает следующий естественный вопрос. Если некоторая последовательность векторов $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ сходится к некоторому вектору $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ в какой-нибудь норме, то что можно сказать о сходимости этой последовательности в любой другой норме? Для прояснения этого вопроса введем следующее определение.

Определение 1.4. Нормы $\|x\|_\alpha$ и $\|x\|_\beta$, введенные в пространстве \mathbb{R}^n , называются эквивалентными, если существуют действительные числа $\gamma_{\alpha\beta} > 0$ и $\gamma_{\beta\alpha} > 0$ такие, что $\forall x \in \mathbb{R}^n$ имеют место неравенства

$$\|x\|_\alpha \leq \gamma_{\alpha\beta} \|x\|_\beta, \quad \|x\|_\beta \leq \gamma_{\beta\alpha} \|x\|_\alpha. \quad (1.20)$$

Очевидно, что если две нормы в пространстве \mathbb{R}^n эквивалентны, то в силу неравенств (1.20) сходимость последовательности в одной из них влечет сходимость в другой. Фундаментальным является следующий результат.

Теорема 1.2. В пространстве \mathbb{R}^n все нормы эквивалентны.

Доказательство. Поскольку отношение эквивалентности обладает свойством транзитивности, то нам достаточно показать, что любые две нормы $\|x\|_\alpha$ и $\|x\|_\beta$ в пространстве \mathbb{R}^n эквивалентны. Для этого достаточно установить, что некоторая норма $\|x\|_\alpha$ эквивалентна, например, норме $\|x\|_2$.

Выберем в пространстве \mathbb{R}^n стандартный базис e_1, \dots, e_n , где

$$e_i = (0, \dots, \overset{(i)}{1}, 0, \dots, 0)^T. \quad (1.21)$$

Тогда

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

и

$$\|x\|_\alpha = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_\alpha \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|_\alpha \leq \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|_\alpha \right) \|x\|_2. \quad (1.22)$$

Здесь мы воспользовались очевидным неравенством

$$|x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \|x\|_2.$$

Таким образом, установлено левое из неравенств (1.20). Для доказательства правого из этих неравенств воспользуемся методом от противного. Предположим, что это неравенство неверно. Тогда $\forall m \in \mathbb{N}$ найдется такой вектор $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$, что $\|x^{(m)}\|_\alpha = 1$ и $\|x^{(m)}\|_2 \geq m$. Полагая $y^{(m)} = x^{(m)} / \|x^{(m)}\|_2$, заключаем, что

$$\|y^{(m)}\|_2 = 1, \quad \|y^{(m)}\|_\alpha = \frac{1}{\|x^{(m)}\|_2} \leq \frac{1}{m}. \quad (1.23)$$

Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^n единичную сферу

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\},$$

которой принадлежат все векторы $y^{(m)}$. Поскольку сфера \mathcal{S} является множеством компактным, то из последовательности $y^{(m)}$ можно извлечь подпоследовательность $y^{(m_l)}$, сходящуюся к некоторому вектору $y_* \in \mathcal{S}$ при $m_l \rightarrow \infty$ в норме $\|x\|_2$. Иными словами, $\|y^{(m_l)} - y_*\|_2 \rightarrow 0$ при $m_l \rightarrow \infty$. Определим далее следующую функцию:

$$\varphi(y) = \|y\|_\alpha. \quad (1.24)$$

Используя неравенство (1.5) и установленную ранее оценку (1.22), получаем

$$|\varphi(y) - \varphi(z)| \leq \|y - z\|_\alpha \leq \gamma \|y - z\|_2, \quad \gamma = \sum_{i=1}^n \|e_i\|_\alpha, \quad (1.25)$$

где $y, z \in \mathbb{R}^n$. Полагая в (1.25) $y = y^{(m_l)}$ и $z = y_*$, приходим к выводу, что $\varphi(y^{(m_l)}) \rightarrow \varphi(y_*)$, когда $m_l \rightarrow \infty$. Из (1.23) следует, что $\varphi(y^{(m_l)}) \leq 1/m_l$, а значит, $\varphi(y^{(m_l)}) \rightarrow 0$ при $m_l \rightarrow \infty$. Отсюда немедленно выводим, что $\varphi(y_*) = 0$. В силу (1.24) и первой аксиомы векторной нормы заключаем, что $y_* = 0$. Но $y_* \in \mathcal{S}$, а следовательно, $\|y_*\|_2 = 1$ и $y_* \neq 0$. Получили противоречие, которое и завершает доказательство теоремы. ■

Изложенные в этом разделе факты легко переносятся и на тот случай, когда элементами вектора x или матрицы A являются комплексные числа. В этом случае речь уже идет о комплексном n -мерном арифметическом пространстве \mathbb{C}^n . Определенные нами выше формулы для векторных и матричных норм остаются справедливыми и в этом случае. А вот скалярное произведение в этом пространстве следует вводить, например, формулой

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i, \quad (1.26)$$

где символом \bar{a} обозначено число, комплексно сопряженное с $a \in \mathbb{C}$. Формула (1.26) является примером эрмитового скалярного произведения в унитарном пространстве, т.е. линейном пространстве над полем комплексных чисел.

1.2. Метрическое пространство. Принцип сжимающих отображений

Универсальным инструментом для доказательства теорем типа существования и единственности является принцип сжимающих отображений. Сформулируем его в наиболее общем виде.

Пусть E — некоторое множество произвольной природы.

Определение 1.5. *Говорят, что на множестве E определена метрика, если любой паре (x, y) элементов этого множества поставлено в соответствие действительное число $\rho(x, y)$ и выполнены следующие аксиомы:*

1. $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для любых $x, y, z \in E$.

Аксиомы 1–3 называют аксиомами метрики, а само действительное число $\rho(x, y)$ часто называют расстоянием между точками x и y множества E . Заметим, что из аксиом метрики следует, что $\rho(x, y)$ есть величина неотрицательная. Действительно,

$$0 = \rho(x, x) \leq \rho(x, y) + \rho(y, x) = 2\rho(x, y).$$

Определение 1.6. Множество E с введенной на нем метрикой ρ , иными словами пару (E, ρ) , называют метрическим пространством.

Определение 1.7. Последовательность точек x_n , $n \in \mathbb{N}$, метрического пространства (E, ρ) называется фундаментальной, если она удовлетворяет условию Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, если $n, m \geq N(\varepsilon)$.

Последовательность $x_n \in E$ называется сходящейся к элементу $x \in E$ (пишут $x_n \rightarrow x$, $n \rightarrow \infty$), если $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Определение 1.8. Метрическое пространство (E, ρ) , в котором любая фундаментальная последовательность сходится к некоторому элементу этого пространства, называется полным.

Отметим, что линейное нормированное пространство заведомо является метрическим, поскольку в нем можно ввести метрику по правилу $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Полные нормированные пространства принято называть банаховыми.

Определение 1.9. Пусть в метрическом пространстве (E, ρ) задано некоторое отображение $g: E \rightarrow E$. Отображение g называется сжимающим, если существует такое число $0 \leq q < 1$, что для любых $x, y \in E$ выполнено неравенство

$$\rho(g(x), g(y)) \leq q\rho(x, y). \quad (1.27)$$

Говорят, что отображение g непрерывно в точке $x \in E$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства

$\rho(x, y) < \delta$, где $y \in E$, следует неравенство $\rho(g(x), g(y)) < \varepsilon$. Легко показать, что сжимающее отображение g непрерывно в любой точке $x \in E$.

Принципом сжимающих отображений принято называть следующую теорему.

Теорема 1.3. *Всякое сжимающее отображение полного метрического пространства (E, ρ) в себя имеет единственную неподвижную точку, т.е. такую точку $x \in E$, что $g(x) = x$.*

Доказательство. Выберем произвольным образом точку $x_0 \in E$ и построим последовательность $x_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$, по формуле

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.28)$$

Покажем, что последовательность x_n сходится к некоторой точке $x \in E$ и эта точка является неподвижной точкой отображения g . Согласно (1.27), (1.28), имеем

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(g(x_n), g(x_{n-1})) \leq q\rho(x_n, x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.29)$$

Применяя это неравенство последовательно к величинам $\rho(x_n, x_{n-1})$, $\rho(x_{n-1}, x_{n-2})$ и т.д., окончательно получаем

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq q^n \rho(x_1, x_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, выбирая $m > n$ и пользуясь третьей аксиомой метрики (неравенством треугольника), выводим

$$\begin{aligned} \rho(x_m, x_n) &\leq \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leq \\ &\leq q^{m-1} \rho(x_1, x_0) + q^{m-2} \rho(x_1, x_0) + \dots + q^n \rho(x_1, x_0) = \\ &= q^n \rho(x_1, x_0) (1 + q + q^2 + \dots + q^{m-n-1}) \leq \\ &\leq q^n \rho(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{q^n}{1-q} \rho(x_1, x_0). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Поскольку $q < 1$, то из (1.30) следует, что последовательность x_n является фундаментальной. В силу полноты метрического пространства (E, ρ) это влечет сходимость данной последовательности к некоторому элементу $x \in E$, т.е. $x_n \rightarrow x$. В силу непрерывности отображения g заключаем, что $g(x_n) \rightarrow g(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Устремляя теперь n в равенстве (1.28) к бесконечности, приходим к равенству $x = g(x)$. Следовательно, точка $x \in E$ является неподвижной точкой отображения g .

Установим теперь единственность неподвижной точки у отображения g . Предположим противное, т.е. что у отображения g имеются, по крайней мере, две неподвижные точки $x, y \in E$ и $x \neq y$. Имеем,

$$x = g(x), \quad y = g(y).$$

Аналогично (1.29), получаем

$$\rho(x, y) = \rho(g(x), g(y)) \leq q\rho(x, y).$$

Сокращая обе части неравенства на величину $\rho(x, y) \neq 0$, приходим к неравенству $q \geq 1$, которое противоречит определению константы q . Теорема доказана. ■

Если отображение g является сжимающим, то формулу (1.28), определяющую последовательность x_n , которая сходится к неподвижной точке $x \in E$ этого отображения, называют обычно методом последовательных приближений или методом простой итерации. Нетрудно оценить скорость сходимости этой последовательности. Действительно, устремляя n в левой части (1.30) к бесконечности, приходим к неравенству

$$\rho(x, x_n) \leq \frac{q^n}{1 - q} \rho(x_1, x_0).$$

Таким образом, последовательность x_n сходится к неподвижной точке отображения g со скоростью геометрической прогрессии.

1.3. Теорема Арцела

Пусть на компактном множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ задано семейство функций $f_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, со значениями в \mathbb{R}^m .

Определение 1.10. Семейство функций $f_k(x)$ называется *равномерно ограниченным*, если существует такое число $M > 0$, что $\|f_k(x)\| \leq M$ для всех $x \in E$ и $k \in \mathbb{N}$.

Определение 1.11. Семейство функций $f_k(x)$ называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $k \in \mathbb{N}$ и любых $x_1, x_2 \in E$ из неравенства $\|x_1 - x_2\| < \delta$ следует неравенство $\|f_k(x_1) - f_k(x_2)\| < \varepsilon$.

Нетрудно заметить, что если все функции $f_k(x)$ удовлетворяет на E так называемому условию Липшица

$$\|f_k(x) - f_k(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad x, y \in E$$

с одной и той же константой L (константа Липшица), то такое семейство функций будет равностепенно непрерывным.

Упражнение 1.4. Исследовать семейство функций $f_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, \dots$, заданных на отрезке $E = [0, 1]$, на равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность.

Перед тем, как сформулировать и доказать основную теорему этого раздела, установим один вспомогательный результат.

Лемма 1.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — компакт. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить конечное множество точек y_1, \dots, y_s , принадлежащих E , такое, что для всякого $x \in E$ найдется такая точка y_k из этого множества, что $\|x - y_k\| < \varepsilon$.

Множество точек y_1, \dots, y_s называют конечной ε -сетью множества E . Таким образом, лемма 1.1 утверждает, что в любом компакте $\forall \varepsilon > 0$ можно построить конечную ε -сеть.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем произвольным образом точку $y_1 \in E$. Рассмотрим шар

$$\mathcal{O}(y_1, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z - y_1\| < \varepsilon\}$$

с центром в точке y_1 и радиусом ε . Если $E \subset \mathcal{O}$, то лемма доказана. В противном случае найдется точка $y_2 \in E$, что $\|y_1 - y_2\| \geq \varepsilon$. Построим шар $\mathcal{O}(y_2, \varepsilon)$. Если $E \subset \mathcal{O}(y_1, \varepsilon) \cup \mathcal{O}(y_2, \varepsilon)$, то ε -сеть, состоящая из точек y_1, y_2 , построена. Иначе, найдется точка $y_3 \in E$, такая что

$$\|y_1 - y_3\| \geq \varepsilon, \quad \|y_2 - y_3\| \geq \varepsilon.$$

Продолжая этот процесс, мы либо на s -ом шаге установим, что

$$E \subset \mathcal{O}(y_1, \varepsilon) \cup \dots \cup \mathcal{O}(y_s, \varepsilon),$$

и построим ε -сеть y_1, \dots, y_s , либо построим бесконечную последовательность точек $y_s \in E$, $s \in \mathbb{N}$, обладающую тем свойством, что

$$\|y_k - y_l\| \geq \varepsilon \tag{1.31}$$

для любых $k, l \in \mathbb{N}$. Поскольку E — компакт, то из любой последовательности точек этого множества можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Но из построенной последовательности y_s в силу неравенства (1.31) нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, этот вариант реализоваться не может, и лемма доказана. ■

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.4 (Арцела). Пусть на компакте $E \subset \mathbb{R}^n$ задана равномерно ограниченная и равномерно непрерывная последовательность функций $f_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда из этой последовательности можно извлечь равномерно сходящуюся на E подпоследовательность.

Доказательство. Выбирая $\varepsilon = 1, 1/2, \dots, 1/k, \dots$, построим для каждого значения ε конечную ε -сеть множества E . Совокупность всех точек этих ε -сетей образует счетное множество $A = \{y_1, y_2, \dots, y_k, \dots\}$ такое, что $A \subset E$ и $\bar{A} = E$, где \bar{A} есть замыкание множества A . Используемый далее принцип доказательства известен как «диагональный процесс».

Рассмотрим последовательность векторов $f_k(y_1)$, $k \in \mathbb{N}$, $y_1 \in A$. В силу равномерной ограниченности семейства функций $f_k(x)$ эта последовательность ограничена. Следовательно, согласно теореме Больцано–Вейерштрасса из этой последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $f_{k_l}(y_1)$, $l \in \mathbb{N}$. Рассматривая теперь подпоследовательность исходного семейства функций $f_{l,1}(x) = f_{k_l}(x)$, заключаем, что эта подпоследовательность сходится в точке $y_1 \in A$. Рассмотрим теперь последовательность векторов $f_{l,1}(y_2)$. Та же аргументация, что и выше, приводит к выводу, что из этой последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $f_{k_{l,1}}(y_2)$. Переходя теперь к подпоследовательности $f_{l,2}(x) = f_{k_{l,1}}(x)$ исходного семейства функций, заключаем, что она сходится в точках $y_1, y_2 \in A$. Продолжая этот процесс, абсолютно аналогично строим подпоследовательность исходного семейства функций $f_{l,m}(x) = f_{k_{l,m-1}}(x)$ для любого $m = 3, 4, \dots$. Построенная последовательность $f_{l,m}(x)$ сходится в точках $y_1, y_2, \dots, y_m \in A$.

Рассматривая теперь последовательность функций

$$f_{1,1}(x), f_{2,2}(x), \dots, f_{l,l}(x), \dots,$$

устанавливаем ее сходимости во всех точках множества A . Покажем, что эта подпоследовательность исходной последовательности функ-

ций $f_k(x)$ сходится равномерно на E . Проверим, что для последовательности $f_{l,l}(x)$ выполнен критерий Коши равномерной сходимости: для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $l > N(\varepsilon)$ и $p \in \mathbb{N}$ неравенство $\|f_{l+p,l+p}(x) - f_{l,l}(x)\| < \varepsilon$ выполнено $\forall x \in E$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta = \delta(\varepsilon/3) > 0$ из условия равностепенной непрерывности семейства функций $f_k(x)$. Пусть $z_1, \dots, z_s \in A$ — δ -сеть множества E . Следовательно, для любого $x \in E$ найдется z_i , что $\|x - z_i\| < \delta$. Поскольку последовательность $f_{l,l}(x)$ сходится во всех точках множества A , то последовательность $f_{l,l}(z_i)$ является фундаментальной, а значит, для всех $l > N = N(\varepsilon/3)$ и $p \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $\|f_{l+p,l+p}(z_i) - f_{l,l}(z_i)\| < \varepsilon/3$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f_{l+p,l+p}(x) - f_{l,l}(x)\| &= \|f_{l+p,l+p}(x) - f_{l+p,l+p}(z_i) + f_{l+p,l+p}(z_i) - \\ &\quad - f_{l,l}(z_i) + f_{l,l}(z_i) - f_{l,l}(x)\| \leq \|f_{l+p,l+p}(x) - f_{l+p,l+p}(z_i)\| + \\ &\quad + \|f_{l+p,l+p}(z_i) - f_{l,l}(z_i)\| + \|f_{l,l}(z_i) - f_{l,l}(x)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.32)$$

где первое и третье слагаемые в правой части неравенства меньше $\varepsilon/3$ в силу равностепенной непрерывности семейства $f_k(x)$ и выбора величины δ , а второе — в силу фундаментальности последовательности $f_{l,l}(z_i)$. Таким образом, подпоследовательность $f_{l,l}(x)$ исходной последовательности $f_k(x)$ удовлетворяет критерию Коши, и, следовательно, равномерно сходится на E .

Теорема доказана. ■

Приведем два следствия из этой теоремы.

Следствие 1.1. Пусть $x_0 \in E$ и f_0 — частичный предел последовательности векторов $f_k(x_0)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда подпоследовательность $f_{l,l}(x)$ может быть выбрана таким образом, что $f_{l,l}(x_0) \rightarrow f_0$ при $l \rightarrow \infty$.

Для доказательства этого следствия достаточно в качестве одной из точек некоторой ε -сети из A , скажем точки y_1 , взять точку x_0 , что возможно сделать в силу леммы 1.1. Выбирая затем подпоследовательность $f_{l,l}(x)$, так что $f_{l,l}(x_0) = f_{k_l}(x_0) \rightarrow f_0$, получаем требуемый результат.

Следствие 1.2. Пусть все равномерно сходящиеся подпоследовательности $f_{k_l}(x)$ последовательности $f_k(x)$ сходятся к одной и той же функции $f(x)$, $x \in E$. Тогда искомая последовательность $f_k(x)$ также сходится к $f(x)$ равномерно на E .

Доказательство. Покажем сначала, что последовательность $f_k(x)$ сходится к $f(x)$ поточечно. Предположим противное, что найдется такая точка $x_0 \in E$, что $f_k(x_0) \not\rightarrow f(x_0)$. Следовательно, существует подпоследовательность $f_{k_l}(x_0)$ такая, что $f_{k_l}(x_0) \rightarrow f_0 \neq f(x_0)$. В силу следствия 1.1 мы можем выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность $f_{l,l}(x)$ исходной последовательности $f_k(x)$, так что $f_{l,l}(x_0) \rightarrow f_0$. Но по условию $f_{l,l}(x) \Rightarrow f(x)$ на E , а значит, $f_{l,l}(x_0) \rightarrow f_0 = f(x_0)$. Получили противоречие. Таким образом, для любого $x \in E$ последовательность $f_k(x) \rightarrow f(x)$. Осталось показать, что эта сходимость равномерна по $x \in E$. Для этого достаточно проверить, что последовательность $f_k(x)$ удовлетворяет критерию Коши. Соответствующие оценки полностью повторяют оценки (1.32). ■

1.4. Периодические функции

Пусть функция $f(x)$ со значениями из \mathbb{R} определена для всех $x \in \mathbb{R}$ (допускается, что функция $f(x)$ может принимать в некоторых точках действительной оси значения, равные $\pm\infty$).

Определение 1.12. Функция $f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T > 0$ (период функции), что для всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место тождество

$$f(x + T) \equiv f(x). \quad (1.33)$$

Функцию $f(x)$ с периодом $T > 0$ называют T -периодической. Легко проверить, что если T — период функции $f(x)$, то число $T_m = mT$, где $m \in \mathbb{N}$, также является периодом этой функции. Представляет интерес вопрос о том, существуют ли у T -периодической функции периоды, отличные от T_m .

Положим $T_0 = \inf\{T\}$, где инфимум берется по множеству всевозможных периодов $T > 0$ периодической функции $f(x)$. Число T_0 будем называть наименьшим периодом функции $f(x)$. Очевидно, что $T_0 \geq 0$.

Лемма 1.2. Предположим, что для некоторой непрерывной на всей действительной оси T -периодической функции $f(x)$ имеет место равенство $T_0 = 0$. Тогда $f(x) \equiv \text{const}$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Покажем сначала, что множество всевозможных периодов $\{T > 0\}$ функции $f(x)$, объединенное с точкой $T = 0$, замкнуто. Пусть $T_n, n \in \mathbb{N}$, — некоторая последовательность точек этого множества и $T_n \rightarrow T_*, n \rightarrow \infty$. Имеем,

$$f(x + T_n) \equiv f(x) \quad (1.34)$$

и $x + T_n \rightarrow x + T_*, n \rightarrow \infty$. В силу непрерывности функции $f(x)$ справедливо предельное соотношение $f(x + T_n) \rightarrow f(x + T_*)$ для любой точки $x \in \mathbb{R}$. Переходя в (1.34) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем тождество (1.33) с $T = T_*$. Следовательно, число T_* либо является периодом функции $f(x)$, т.е. $T_* \in \{T > 0\}$, либо $T_* = 0$. Таким образом, замкнутость множества $\{T\} \cup \{0\}$ установлена.

Поскольку, согласно предположению, $\inf\{T\} = 0$, то существует последовательность $T_n > 0, n \in \mathbb{N}$, периодов функции $f(x)$ такая, что $T_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим множество периодов этой функции вида

$$A = \{mT_n, m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем элемент T_N последовательности T_n такой, что $0 < T_N < \varepsilon$. Тогда, очевидно, что множество $\{mT_N, m \in \mathbb{N}\}$ образует ε -сеть множества A . Отсюда следует, что $\bar{A} = [0, +\infty)$. Так как $A \subset \{T\} \cup \{0\}$, то

$$\bar{A} \subset \overline{\{T\} \cup \{0\}} = \{T\} \cup \{0\} \subset [0, +\infty),$$

а значит, $\{T\} \cup \{0\} = [0, +\infty)$. Поэтому любое число $T > 0$ является периодом функции $f(x)$. Выберем теперь произвольным образом точки $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, так что $x_1 < x_2$. Имеем

$$f(x_2) = f(x_1 + x_2 - x_1) \equiv f(x_1).$$

Следовательно, $f(x) \equiv \text{const}$, и лемма доказана. ■

Периодическую функцию $f(x) \equiv \text{const}$ иногда называют тривиальной периодической функцией.

Лемма 1.3. *Предположим, что для некоторой периодической функции $f(x)$ справедливо неравенство $T_0 > 0$. Тогда, если T — один из возможных периодов этой функции, то $T = mT_0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Заметим, что $T \notin [0, T_0)$, поскольку T_0 — наименьший из возможных периодов. Допустим, что $T \in (T_0, 2T_0)$, но тогда

положительное число $T_1 = 2T_0 - T$ также является периодом функции $f(x)$ и $T_1 \in (0, T_0)$, чего не может быть в силу определения T_0 . Совершенно аналогично показывается, что $T \notin (mT_0, (m+1)T_0)$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Действительно, в противном случае положительное число $T_m = (m+1)T_0 - T$ оказывается периодом функции $f(x)$, меньшим T_0 . Следовательно, $T = mT_0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. ■

Изучим теперь вопрос о том, при каких условиях сумма двух периодических функций также будет периодической функцией. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.5. *Сумма двух непрерывных на всей действительной оси периодических функций $f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x)$ — периодическая функция с наименьшим периодом $T_1 > 0$, а $f_2(x)$ — периодическая функция с наименьшим периодом $T_2 > 0$, будет периодической функцией тогда и только тогда, когда отношение*

$$\frac{T_1}{T_2} \quad (1.35)$$

есть число рациональное.

Доказательство. Пусть сначала величина (1.35) рациональна. Покажем, что в этом случае сумма двух периодических функций есть функция периодическая. В силу определения рационального числа с учетом неотрицательности рассматриваемого отношения

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q} \quad (1.36)$$

для некоторых $p, q \in \mathbb{N}$. Покажем, что положительное число

$$T = qT_1 = pT_2$$

является периодом функции $f_1(x) + f_2(x)$. Используя периодичность функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, получаем

$$f_1(x + T) + f_2(x + T) = f_1(x + qT_1) + f_2(x + pT_2) \equiv f_1(x) + f_2(x).$$

Легко видеть, что число T является наименьшим периодом функции $f_1(x) + f_2(x)$ лишь тогда, когда дробь p/q несократима.

Предположим теперь, что сумма $f_1(x) + f_2(x)$ является периодической функцией с периодом $T > 0$. Установим, что в этом случае

имеет место равенство (1.36) с некоторыми $p, q \in \mathbb{N}$. Предположим противное, что отношение (1.35) иррационально. Имеем

$$f_1(x+T) + f_2(x+T) \equiv f_1(x) + f_2(x).$$

Отсюда

$$\varphi(x) = f_1(x+T) - f_1(x) \equiv f_2(x) - f_2(x+T). \quad (1.37)$$

Легко видеть, что функция $\varphi(x)$ является периодической, а числа $T_1, T_2 > 0$ являются ее периодами. Покажем сначала, что периодическая функция $\varphi(x)$ не равна нулю тождественно. Предположим противное, что $\varphi(x) \equiv 0$. Тогда из (1.37) следует, что число $T > 0$ является одновременно периодом T_1 -периодической функции $f_1(x)$ и периодом T_2 -периодической функции $f_2(x)$. Из леммы 1.3 выводим, что

$$T = mT_1 = kT_2$$

для некоторых $m, k \in \mathbb{N}$. Но тогда отношение (1.35) рационально, что противоречит нашему предположению об иррациональности этой дроби. Следовательно, $\varphi(x) \not\equiv 0$. Пусть T_0 — наименьший период этой функции. Предположим, что $T_0 > 0$. Вновь привлекая лемму 1.3, в этом случае заключаем, что

$$T_1 = mT_0, \quad T_2 = kT_0$$

для некоторых $m, k \in \mathbb{N}$. Но тогда дробь (1.35) рациональна, что противоречит нашему предположению. Значит, $T_0 = 0$ и в силу леммы 1.2 справедливо тождество $\varphi(x) \equiv \text{const}$. Обозначая $\varphi(x) \equiv a$, в силу доказанного ранее приходим к выводу, что $a \neq 0$.

Из (1.37) в этом случае следует, что

$$f_1(x+T) \equiv f_1(x) + a$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. Отсюда

$$f_1(x+2T) \equiv f_1(x+T) + a \equiv f_1(x) + 2a, \quad \dots, \quad f_1(x+nT) \equiv f_1(x) + na,$$

где $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, функция $f_1(x)$ не является ограниченной при $x \geq x_0$. Это противоречит тому, что $f_1(x)$ — непрерывная периодическая функция, а значит (согласно теореме Вейерштрасса) ограниченная на $[0, T_1]$ и, как следствие, на всей оси функция. Таким образом, отношение (1.35) рационально и имеет место равенство (1.36) с некоторыми $p, q \in \mathbb{N}$.

Теорема доказана. ■

Свойства функции, являющейся суммой двух периодических функций с несоизмеримыми периодами (отношение (1.35) иррационально), изучаются в рамках теории так называемых почти периодических функций [7, 13, 29]. Оказывается, эти свойства во многом совпадают со свойствами непрерывных на всей оси периодических функций. Существует несколько возможных определений понятия почти периодической функции. Приведем здесь классическое определение, принадлежащее Г. Бору [3].

Определение 1.13. *Непрерывная на всей действительной оси функция $f(x)$ называется почти периодической, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $L(\varepsilon) > 0$, что на любом отрезке $[a, a + L(\varepsilon)]$ длины $L(\varepsilon)$ найдется хотя бы один ε -почти период функции $f(x)$, т.е. такое число τ , что*

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$$

для всех $x \in \mathbb{R}$.

Упражнение 1.5. *Показать, что если почти периодическая функция $f(x)$ не является периодической, то имеет место предельное равенство*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(\varepsilon) = +\infty,$$

где $L(\varepsilon)$ — величина из определения 1.13.

Упражнение 1.6. *Доказать, что сумма двух непрерывных на всей действительной оси периодических функций с несоизмеримыми периодами есть почти периодическая функция.*

Вернемся к изучению свойств периодических функций, полагая в дальнейшем, что рассматриваемые нами функции непрерывны во всех точках действительной оси.

Лемма 1.4. *Пусть $f(x)$ — произвольная T -периодическая функция. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ имеет место тождество*

$$\int_x^{x+T} f(t) dt \equiv \int_0^T f(t) dt. \quad (1.38)$$

Доказательство. Положим

$$\varphi(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt.$$

В силу непрерывности функции $f(x)$ заключаем, что функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема для $x \in \mathbb{R}$. Продифференцируем эту функцию как интеграл с переменными верхним и нижним пределами. С учетом периодичности функции $f(x)$ получаем

$$\frac{d\varphi}{dx} = f(x+T) - f(x) \equiv 0.$$

Следовательно, $\varphi(x) \equiv \text{const}$, а значит, $\varphi(x) \equiv \varphi(0)$, т.е. выполнено равенство (1.38). ■

Определение 1.14. Если $f(x)$ — произвольная T -периодическая функция, то величину

$$M[f] = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt \quad (1.39)$$

называют средним значением периодической функции.

Если T -периодическая функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема для всех $x \in \mathbb{R}$, то, дифференцируя тождество (1.33), заключаем, что производная $f'(x)$ также будет T -периодической функцией. Ответ на вопрос о том, при каких условиях интеграл от периодической функции будет периодической функцией, дает следующая теорема.

Теорема 1.6. Пусть $f(x)$ — произвольная T -периодическая функция. Тогда функция

$$I(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt \quad (1.40)$$

при любом $x_0 \in \mathbb{R}$ будет T -периодической тогда и только тогда, когда $M[f] = 0$.

Доказательство. Пусть $I(x)$ — T -периодическая функция. Тогда

$$I(T) - I(0) = \int_0^T f(t)dt = 0.$$

Из определения 1.14 тогда следует, что $M[f] = 0$.

Предположим теперь, что $M[f] = 0$. Используя тождество (1.38) и определение величины $M[f]$, получаем

$$I(x+T) - I(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt \equiv \int_0^T f(t)dt = 0.$$

Следовательно, функция $I(x)$ является T -периодической. ■

Следствие 1.3. Пусть функция $I(x)$ определена формулой (1.40), где $f(x)$ — T -периодическая функция. Тогда имеет место равенство

$$I(x) = M[f](x - x_0) + g(x),$$

где $g(x)$ — некоторая T -периодическая функция.

Действительно, функция $f(x) - M[f]$ является T -периодической функцией с нулевым средним значением. Из теоремы 1.6 тогда следует, что функция

$$g(x) = \int_{x_0}^x (f(t) - M[f])dt = I(x) - M[f](x - x_0)$$

является T -периодической.

Глава 2

Скалярные дифференциальные уравнения первого порядка

2.1. Существование и единственность решения задачи Коши

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (2.1)$$

где $x \in \mathbb{R}$, $f(x, y): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая заданная функция, а $y(x)$ — неизвестная функция со значениями из \mathbb{R} , называют скалярным дифференциальным уравнением первого порядка. Об уравнении вида (2.1) иногда говорят как об уравнении первого порядка, разрешенном относительно производной.

Определение 2.1. Непрерывно дифференцируемую на некотором промежутке \mathcal{I} функцию $y(x)$ называют решением дифференциального уравнения (2.1), если при подстановке этой функции вместо переменной y в это уравнение она обращает равенство (2.1) в тождество, выполненное для всех $x \in \mathcal{I}$.

В качестве промежутка $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ обычно выступает отрезок, интервал, полуинтервал или вся действительная ось. Отметим, что множество \mathcal{I} может быть как ограниченным (сверху или снизу), так и неограниченным. Как правило, функция, которая удовлетворяет

уравнению (2.1), т.е. является его решением, не единственна. В этой связи уравнение (2.1) обычно рассматривают с некоторыми дополнительными условиями, накладываемыми на решение $y(x)$. Наиболее типичным примером такого рода дополнительных условий является начальная задача или, как ее чаще называют, задача Коши.

Рассмотрим уравнение (2.1) вместе с дополнительным условием

$$y(x_0) = y_0, \quad (2.2)$$

где x_0 и y_0 — некоторые заданные действительные числа. Если функция $y(x)$ удовлетворяет на промежутке \mathcal{I} уравнению (2.1), а также условию (2.2), где $x_0 \in \mathcal{I}$, то такую функцию называют решением задачи Коши (или начальной задачи) (2.1), (2.2). Укажем далее требования относительно функции $f(x, y)$, которые гарантируют существование и единственность решения задачи Коши.

При доказательстве теорем типа существования и единственности вместо дифференциального уравнения (2.1) удобнее рассматривать эквивалентное интегральное уравнение. Сформулируем соответствующий результат.

Лемма 2.1. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных в прямоугольнике

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, a, b > 0\}. \quad (2.3)$$

Тогда задача Коши (2.1), (2.2) эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad (2.4)$$

при тех x из отрезка $|x - x_0| \leq a$, при которых $(x, y(x)) \in \mathcal{D}$.

Доказательство. Пусть непрерывно дифференцируемая функция $y(x)$ является решением задачи Коши (2.1), (2.2) на промежутке $\mathcal{I} = \{|x - x_0| \leq a\}$ и принимает значения из множества $\{|y - y_0| \leq b\}$, когда $x \in \mathcal{I}$. Подставляя эту функцию в уравнение (2.1) вместо переменной y , обращаем это равенство в тождество. Левая часть этого тождества есть непрерывная на отрезке \mathcal{I} функция в силу непрерывной дифференцируемости решения $y(x)$. Правая часть этого тождества, т.е. функция $f(x, y(x))$ как функция переменной x , также непрерывна на \mathcal{I} . Действительно, точка $(x, y(x)) \in \mathcal{D}$, когда $x \in \mathcal{I}$, функция $y(x)$ непрерывна на этом промежутке, а функция $f(x, y)$

непрерывна по совокупности переменных в прямоугольнике \mathcal{D} . Интегрируя теперь полученное тождество на промежутке $[x_0, x] \subset \mathcal{I}$ и учитывая (2.2), получаем интегральное уравнение (2.4).

Пусть теперь функция $y(x)$ является решением интегрального уравнения (2.4) на некотором промежутке \mathcal{I} и принимает значения из множества $\{|y - y_0| \leq b\}$. Заметим, что функция $y(x)$ непрерывна как интеграл с переменным верхним пределом, и, более того, непрерывно дифференцируема на \mathcal{I} . Действительно, в силу непрерывности функции $f(x, y(x))$ как функции переменной x правая часть (2.4) дифференцируема. Дифференцируя равенство (2.4), убеждаемся, что функция $y(x)$ удовлетворяет на промежутке \mathcal{I} уравнению (2.1). Кроме того, из (2.4) также следует, что $y(x)$ удовлетворяет начальному условию (2.2). Следовательно, функция $y(x)$ на промежутке \mathcal{I} является решением задачи Коши (2.1), (2.2). ■

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть в прямоугольнике \mathcal{D} , определяемом формулой (2.3), функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной x , а по переменной y удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad (2.5)$$

где точки $(x, y_1) \in \mathcal{D}$, $(x, y_2) \in \mathcal{D}$, а L — постоянная. Тогда на некотором отрезке $\mathcal{I} = \{|x - x_0| \leq h\}$, $0 < h \leq a$, решение задачи Коши (2.1), (2.2) существует и единственно.

Доказательство. Несложно показать, что накладываемые на $f(x, y)$ условия влекут непрерывность этой функции в прямоугольнике \mathcal{D} по совокупности переменных. Следовательно, от задачи (2.1), (2.2), согласно лемме 2.1, мы можем перейти к эквивалентному интегральному уравнению (2.4). Покажем, что это уравнение имеет на отрезке \mathcal{I} единственное решение, используя принцип сжимающих отображений.

Запишем уравнение (2.4) в виде

$$y = g(y), \quad g(y) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Будем считать, что отображение $g(y)$ определено на метрическом пространстве (E, ρ) . В качестве множества E выберем множество

всех непрерывных на отрезке \mathcal{I} функций со значениями из множества $\{|y - y_0| \leq b\}$. Метрику на этом множестве введем по формуле

$$\rho(y_1, y_2) = \sup_{x \in \mathcal{I}} |y_1(x) - y_2(x)|.$$

Поскольку сходимость по метрике ρ представляет собой равномерную сходимость на множестве непрерывных функций, то, согласно известному результату из курса математического анализа, метрическое пространство (E, ρ) полно.

Покажем сначала, что отображение g переводит множество E в себя. Пусть $y(x)$ — непрерывная на отрезке \mathcal{I} функция, принимающая значения из множества $\{|y - y_0| \leq b\}$. Тогда функция $f(x, y(x))$ есть непрерывная на \mathcal{I} функция переменной x . Следовательно, образ $g(y)$ есть также непрерывная на \mathcal{I} функция как интеграл с переменным верхним пределом. Заметим, что поскольку $f(x, y)$ непрерывна на компактном множестве \mathcal{D} , то она ограничена, т.е. $|f(x, y)| \leq M$ ($M > 0$) для всех $(x, y) \in \mathcal{D}$. Тогда

$$|g(y) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y(t))| dt \right| \leq M|x - x_0| \leq Mh.$$

Выбирая $h \leq b/M$, заключаем, что $|g(y) - y_0| \leq b$. Значит, образ $g(y)$ как функция переменной x принимает значения из множества $\{|y - y_0| \leq b\}$. Таким образом, нами показано, что $g(y)$ принадлежит множеству E .

Установим сжимаемость отображения g . Имеем,

$$\begin{aligned} \rho(g(y_1), g(y_2)) &= \sup_{x \in \mathcal{I}} \left| \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, y_2(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \sup_{x \in \mathcal{I}} \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt \right| \leq L \sup_{x \in \mathcal{I}} \left| \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_2(t)| dt \right| \leq \\ &\leq L|x - x_0| \sup_{x \in \mathcal{I}} |y_1(x) - y_2(x)| \leq Lh\rho(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Выбирая теперь h достаточно малым, можно добиться выполнения неравенства $q = Lh < 1$. Таким образом, отображение g является сжимающим в E .

Согласно принципу сжимающих отображений, у отображения g существует единственная неподвижная точка в E . Следовательно,

интегральное уравнение (2.4) (а значит, и задача Коши (2.1), (2.2)) имеет на отрезке $\mathcal{I} = \{|x - x_0| \leq h\}$ единственное непрерывно дифференцируемое решение. Теорема доказана. ■

Упражнение 2.1. Пусть функция $f(x, y)$ удовлетворяет требованиям теоремы 2.1. Показать, что эта функция непрерывна в \mathcal{D} по совокупности переменных.

2.2. Интегрирование линейных скалярных дифференциальных уравнений

Теорема 2.1, устанавливающая существование и единственность решения $y(x)$ задачи Коши (2.1), (2.2), не дает явной формулы для этого решения. Для многих скалярных уравнений с помощью так называемых элементарных методов интегрирования получить явную формулу, как правило, удастся. В этом разделе мы рассмотрим одно из простейших скалярных уравнений, линейное уравнение первого порядка, и построим формулу для решения соответствующей задачи Коши.

Дифференциальное уравнение называется линейным, если оно линейно относительно неизвестной функции, а также всех ее производных, входящих в уравнение. Рассмотрим линейное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + f(x), \quad (2.6)$$

в котором $a(x)$ и $f(x)$ — некоторые заданные действительные функции, непрерывные для всех $x \in \mathbb{R}$, а $y(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — неизвестная функция, подлежащая определению. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (2.6) называется однородным, в противном случае — неоднородным. Поставим соответствующую задачу Коши (2.6), (2.2) и построим ее решение.

Не обращаясь к теореме 2.1, предположим, что решение $y(x)$ исследуемой задачи Коши существует. Умножим обе части равенства (2.6) на функцию $e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} \neq 0$. Получим

$$\frac{dy}{dx} e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} - a(x)y(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} = f(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}.$$

Замечая, что левая часть этого равенства есть производная произведения двух функций, приходим к равенству

$$\frac{d}{dx} \left(y(x) e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt} \right) = f(x) e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt}.$$

Интегрируя полученное равенство на промежутке от x_0 до x , с учетом (2.2) заключаем, что

$$y(x) e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt} - y_0 = \int_{x_0}^x f(s) e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt} ds.$$

Откуда окончательно выводим, что

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} + \int_{x_0}^x f(s) e^{\int_s^x a(t) dt} ds. \quad (2.7)$$

Заметим, что формула (2.7) не зависит от выбранного нами возможного решения задачи Коши (2.6), (2.2). Следовательно, эта задача может иметь не более одного решения. Существование этого решения опять же следует из формулы (2.7). Несложно проверить, что эта формула задает решение соответствующей задачи Коши. Наконец, отметим, что это единственное решение определено и непрерывно дифференцируемо на всей действительной оси, что вновь следует из (2.7) и условий, наложенных на функции $a(x)$ и $f(x)$.

Фиксируя точку x_0 и изменяя величину y_0 с помощью формулы (2.7), мы получим все возможные решения уравнения (2.6). Обозначая $C = y_0$, запишем формулу (2.7) в виде

$$y(x) = C e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} + \int_{x_0}^x f(s) e^{\int_s^x a(t) dt} ds. \quad (2.8)$$

Здесь величина C является произвольной действительной постоянной. Формулу (2.8) называют общим решением уравнения (2.6). Заметим, что первое слагаемое в правой части (2.8) удовлетворяет соответствующему однородному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y. \quad (2.9)$$

Изменяя произвольную постоянную C , мы получим все решения однородного уравнения. Таким образом, первое слагаемое представляет собой общее решение однородного уравнения. Второе слагаемое в (2.8) есть некоторая конкретная функция. Нетрудно проверить, что это слагаемое является решением исходного уравнения (2.6). Таким образом, это слагаемое представляет собой некоторое частное решение уравнения (2.6).

Оказывается, что представление общего решения в виде

$$y(x) = y_{\text{одн.}}(x) + y_{\text{част.}}(x),$$

где $y_{\text{одн.}}(x)$ есть общее решение соответствующего однородного уравнения, а $y_{\text{част.}}(x)$ — частное решение исходного неоднородного уравнения, характерно для всех линейных уравнений, включая также и системы таких уравнений.

В завершение этого раздела заметим, что построенные нами формулы (2.7) и (2.8) остаются справедливыми и в том случае, когда функции $a(x)$ и $f(x)$ являются комплекснозначными, т.е. принимают значения из \mathbb{C} . Очевидно, что тогда и решения $y(x)$ уравнения (2.6) также являются, вообще говоря, комплекснозначными функциями.

2.3. Периодические решения линейных скалярных дифференциальных уравнений

В данном разделе мы снова будем рассматривать уравнение (2.6), полагая на сей раз, что непрерывные на всей действительной оси функции $a(x)$ и $y(x)$ являются T -периодическими, т.е.

$$a(x + T) \equiv a(x), \quad f(x + T) \equiv f(x). \quad (2.10)$$

Нас будут интересовать условия, при которых уравнение (2.6) имеет периодические решения. Заметим, что подобная постановка задачи является вариантом тех дополнительных условий, которые накладываются на решение дифференциального уравнения. Очевидно, что требование периодичности решения может быть записано в виде тождества $y(x + T) \equiv y(x)$, справедливого для всех $x \in \mathbb{R}$. Оказывается, что, если $y(x)$ является решением уравнения (2.6), то для установления его периодичности нет необходимости проверять справедливость этого тождества для всех $x \in \mathbb{R}$.

Лемма 2.2. *Решение $y(x)$ уравнения (2.6) является T -периодической функцией тогда и только тогда, когда*

$$y(0) = y(T). \quad (2.11)$$

Доказательство. В одну сторону утверждение леммы очевидно. Действительно, если решение $y(x)$ является T -периодической функцией, то равенство (2.11) следует из условия периодичности. Предположим далее, что для некоторого решения уравнения (2.6) имеет место равенство (2.11). Покажем, что это решение есть T -периодическая функция. Пусть $z(x) = y(x + T)$, тогда

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy(x + T)}{dx} = a(x + T)y(x + T) + f(x + T) = a(x)z(x) + f(x).$$

Следовательно, функция $z(x)$ также является решением уравнения (2.6). Кроме того, в силу (2.11) имеет место равенство $y(0) = z(0)$. Но, как было показано в предыдущем разделе, задача Коши (2.6), (2.2) имеет единственное решение. Значит, $z(x) \equiv y(x)$ и поэтому $y(x + T) \equiv y(x)$. ■

Теорема 2.2. *Предположим, что среднее значение функции $a(x)$ отлично от нуля, т.е. $M[a(x)] \neq 0$. Тогда уравнение (2.6) имеет единственное T -периодическое решение $y_*(x)$ и, кроме того, для любого другого решения этого уравнения справедливы предельные равенства:*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) - y_*(x)) = 0, \quad (2.12)$$

если $M[a(x)] < 0$, и

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (y(x) - y_*(x)) = 0, \quad (2.13)$$

если $M[a(x)] > 0$.

Доказательство. В силу леммы 2.2 нам необходимо искать решения, для которых $y(0) = y(T)$. Рассматривая решение $y(x)$ с начальным условием $y(0) = y_0$, получаем для него представление (2.7), где $x_0 = 0$. Откуда, учитывая, что $y(T) = y_0$, получаем

$$y_0 = y_0 e^{\int_0^T a(t) dt} + \int_0^T f(s) e^{\int_s^T a(t) dt} ds. \quad (2.14)$$

Поскольку $M[a(x)] \neq 0$, то

$$1 - e^{\int_0^T a(t)dt} \neq 0,$$

а значит, из (2.14) мы можем однозначно определить начальное условие периодического решения $y_*(x)$. Именно,

$$y_0 = \left(1 - e^{\int_0^T a(t)dt}\right)^{-1} \int_0^T f(s) e^{\int_s^T a(t)dt} ds. \quad (2.15)$$

Таким образом, единственное T -периодическое решение $y_*(x)$ уравнения (2.6) описывается формулой (2.7), в которой $x_0 = 0$, а y_0 определяется равенством (2.15). Обозначим начальное условие (2.15) периодического решения $y_*(x)$ символом y_* .

Пусть $y(x)$ — некоторое решение уравнения (2.6) с начальным условием $y(0) = y_0$. Тогда

$$y(x) - y_*(x) = (y_0 - y_*) e^{\int_0^x a(t)dt}. \quad (2.16)$$

Из следствия 1.3 выводим, что

$$I(x) = \int_0^x a(t)dt = M[a(x)]x + g(x),$$

где $g(x)$ — некоторая T -периодическая функция. Отсюда следует, что

$$I(x) \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (2.17)$$

если $M[a(x)] < 0$, и

$$I(x) \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow -\infty, \quad (2.18)$$

если $M[a(x)] > 0$. Используя предельные соотношения (2.17), (2.18) в (2.16), получаем предельные равенства (2.12) и (2.13) соответственно. Теорема доказана. ■

Теорема 2.3. Пусть $M[a(x)] = 0$, тогда уравнение (2.6) имеет T -периодические решения в том и только в том случае, когда

$$\int_0^T f(s) e^{-\int_0^s a(t)dt} ds = 0. \quad (2.19)$$

Доказательство. Из доказательства предыдущей теоремы следует, что периодические решения уравнения (2.6) существуют тогда и только тогда, когда выполнено равенство (2.14) для некоторого начального условия $y_0 = y(0)$. Поскольку $M[a(x)] = 0$, то для существования периодических решений необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^T f(s) e^{\int_s^T a(t) dt} ds = 0. \quad (2.20)$$

Замечая, что

$$\int_s^T a(t) dt = \int_s^0 a(t) dt + \int_0^T a(t) dt = \int_s^0 a(t) dt,$$

от условия (2.20) приходим к эквивалентному условию (2.19). Отметим, что поскольку равенство (2.14) при условии (2.19) выполнено для любых $y_0 \in \mathbb{R}$, то в рассматриваемом случае все решения уравнения (2.6) являются T -периодическими. ■

Упражнение 2.2. Построить периодическое решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -y + \sin x.$$

Глава 3

Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами

3.1. Дифференциальные операторы. Исследование задачи Коши

Линейным дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами называют уравнение

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = f(x), \quad (3.1)$$

где a_i ($i = 1, \dots, n$) — некоторые постоянные числа (действительные или комплексные), $f(x)$ — заданная и непрерывная на \mathbb{R} функция со значениями в \mathbb{R} (или в \mathbb{C}), и $y(x)$ — неизвестная действительно- или комплекснозначная функция. Уравнение (3.1) называют однородным, если $f(x) \equiv 0$, и неоднородным — в противном случае.

В дальнейшем при изложении материала этой главы мы во многом будем придерживаться книги [18]. Символами $C(\mathbb{R})$ и $C_n(\mathbb{R})$ обозначим множество всех непрерывных и n раз непрерывно дифференцируемых на \mathbb{R} функций соответственно. Функция $y(x) \in C_n(\mathbb{R})$ называется решением уравнения (3.1), если при ее подстановке в это уравнение она превращает его в верное для всех $x \in \mathbb{R}$ тождество.

В отличие от (2.2) начальные условия для решения $y(x)$ уравнения (3.1) в случае задачи Коши формулируются несколько иначе. Именно, решение $y(x)$ уравнения (3.1) называют решением задачи Коши, если оно удовлетворяет дополнительным условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad (3.2)$$

где x_0, y_0, \dots, y_{n-1} — заданные числа. Для исследования задачи Коши (3.1), (3.2) нам потребуется привлечь понятие дифференциального оператора и познакомиться с некоторыми свойствами подобных операторов.

Оператором дифференцирования, действующим из пространства $C_1(\mathbb{R})$ в пространство $C(\mathbb{R})$, называется оператор D , действующий по правилу $Dy(x) = y'(x)$. Аналогично вводится понятие k -й степени ($k \in \mathbb{N}$) оператора D как оператора D^k , действующего из $C_k(\mathbb{R})$ в $C(\mathbb{R})$ по правилу $D^k y(x) = y^{(k)}(x)$. Дифференциальным многочленом степени $n \in \mathbb{N}$ (или многочленом степени n от оператора дифференцирования D) называют оператор

$$L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n I, \quad (3.3)$$

действующий из $C_n(\mathbb{R})$ в $C(\mathbb{R})$ по правилу

$$L(D)y(x) = y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x). \quad (3.4)$$

Здесь a_i ($i = 1, \dots, n$) — заданные числа (действительные или комплексные), а I — тождественный оператор, действующий из $C_n(\mathbb{R})$ в $C_n(\mathbb{R})$ по правилу $Iy(x) = y(x)$. Рассмотренные выше операторы являются примерами так называемых дифференциальных операторов. С помощью введенных операторов можно записать дифференциальное уравнение (3.1) в операторной форме

$$L(D)y(x) = f(x). \quad (3.5)$$

Упражнение 3.1. Проверить, что оператор $L(D)$ является линейным оператором, т.е. для любых чисел c_1 и c_2 и любых функций $y_1(x), y_2(x) \in C_n(\mathbb{R})$ выполнено равенство

$$L(D)(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)) = c_1 L(D)y_1(x) + c_2 L(D)y_2(x).$$

Пусть наряду с дифференциальным многочленом (3.3) имеется дифференциальный многочлен степени $m \in \mathbb{N}$

$$M(D) = D^m + b_1 D^{m-1} + \dots + b_{m-1} D + b_m I,$$

где b_i ($i = 1, \dots, n$) — заданные числа. Суммой дифференциальных многочленов $L(D) + M(D)$ называют дифференциальный многочлен степени $k = \max(m, n)$, действующий из $C_k(\mathbb{R})$ в $C(\mathbb{R})$ согласно формуле

$$(L(D) + M(D))y(x) = L(D)y(x) + M(D)y(x), \quad y(x) \in C_k(\mathbb{R}).$$

Произведением дифференциальных многочленов $L(D)M(D)$ будем называть дифференциальный многочлен степени $n + m$, действующий из $C_{n+m}(\mathbb{R})$ в $C(\mathbb{R})$ по правилу

$$(L(D)M(D))y(x) = L(D)(M(D)y(x)), \quad y(x) \in C_{n+m}(\mathbb{R}).$$

Нетрудно показать, что введенные нами операции сложения и умножения дифференциальных многочленов обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции, производимые над алгебраическими многочленами (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность). Этот факт позволяет работать с такими многочленами, как с обыкновенными, и, в частности, разлагать их на множители.

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости следующего равенства для любого $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$L(D)(e^{\lambda x}) = L(\lambda)e^{\lambda x}. \quad (3.6)$$

Здесь $L(\lambda)$ — алгебраический многочлен степени n от комплексной переменной λ :

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n. \quad (3.7)$$

Многочлен $L(\lambda)$ называют характеристическим многочленом уравнения (3.5) (или дифференциального многочлена $L(D)$). Как известно (см., например, [12]), многочлен $L(\lambda)$ можно представить в виде произведения

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — все корни многочлена $L(\lambda)$, некоторые из которых могут совпадать друг с другом (случай кратных корней). Очевидно, что подобное разложение в силу свойств введенных операций сложения и умножения будет тогда справедливо и для дифференциального многочлена $L(D)$:

$$L(D) = (D - \lambda_1 I)(D - \lambda_2 I) \dots (D - \lambda_n I). \quad (3.8)$$

Перейдем теперь к исследованию задачи Коши (3.1), (3.2). Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. *Задача Коши (3.1), (3.2) имеет единственное решение $y(x) \in C_n(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Если $n = 1$, то задача Коши (3.1), (3.2) есть частный случай задачи Коши (2.6), (2.2), а следовательно, имеет единственное решение $y(x) \in C_1(\mathbb{R})$.

Пусть $n \geq 2$. Положим

$$M_1(D) = (D - \lambda_2 I) \dots (D - \lambda_n I)$$

и определим новую неизвестную функцию $z_1(x) = M_1(D)y(x)$. Для определения функции $z_1(x)$ в силу (3.5), (3.8) получаем задачу Коши типа (2.6), (2.2):

$$\begin{cases} (D - \lambda_1 I)z_1 = z_1'(x) - \lambda_1 z_1(x) = f(x), \\ z_1(x_0) = (M_1(D)y(x))|_{x=x_0} = z_{1,0}. \end{cases}$$

Эта задача имеет единственное решение $z_1(x) \in C_1(\mathbb{R})$, которое определяется формулой вида (2.7):

$$z_1(x) = e^{\lambda_1(x-x_0)} z_{1,0} + \int_{x_0}^x e^{\lambda_1(x-s)} f(s) ds.$$

Далее, полагая

$$M_2(D) = (D - \lambda_3 I) \dots (D - \lambda_n I)$$

и вводя новую неизвестную функцию $z_2(x) = M_2(D)y(x)$, получаем для нее задачу Коши аналогичного вида:

$$\begin{cases} (D - \lambda_2 I)z_2 = z_2'(x) - \lambda_2 z_2(x) = z_1(x), \\ z_2(x_0) = (M_2(D)y(x))|_{x=x_0} = z_{2,0}. \end{cases}$$

Заметим, что правая часть соответствующего дифференциального уравнения, т.е. функция $z_1(x)$, однозначно определена и принадлежит множеству $C_1(\mathbb{R})$. Функция $z_2(x)$, следовательно, также определяется однозначно и

$$z_2(x) = e^{\lambda_2(x-x_0)} z_{2,0} + \int_{x_0}^x e^{\lambda_2(x-s)} z_1(s) ds. \quad (3.9)$$

Поскольку функция $z_1(x)$ принадлежит множеству $C_1(\mathbb{R})$, то из формулы (3.9) следует, что $z_2(x) \in C_2(\mathbb{R})$.

Продолжая действовать аналогично, на заключительном n -ом шаге получим задачу Коши

$$\begin{cases} (D - \lambda_n I)y(x) = y'(x) - \lambda_n y(x) = z_{n-1}(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

где функция $z_{n-1}(x)$ определена и принадлежит множеству $C_{n-1}(\mathbb{R})$. Следовательно,

$$y(x) = e^{\lambda_n(x-x_0)}y_0 + \int_{x_0}^x e^{\lambda_n(x-s)}z_{n-1}(s)ds,$$

и $y(x) \in C_n(\mathbb{R})$.

Теорема доказана. ■

В завершение этого раздела приведем еще один результат, который нам в дальнейшем потребуется.

Лемма 3.1. Пусть λ — некоторое комплексное число и $L(D)$ — дифференциальный многочлен вида (3.3). Тогда для любой функции $y(x) \in C_n(\mathbb{R})$ справедлива следующая формула (формула сдвига):

$$L(D)(e^{\lambda x}y(x)) = e^{\lambda x}L(D + \lambda I)y(x). \quad (3.10)$$

Доказательство. Воспользовавшись известной формулой Лейбница для вычисления старших производных произведения двух функций, при любом $k \in \mathbb{N}$ получаем

$$\begin{aligned} D^k(e^{\lambda x}y(x)) &= (e^{\lambda x}y(x))^{(k)} = \sum_{j=0}^k C_k^j (e^{\lambda x})^{(j)} y^{(k-j)}(x) = \\ &= e^{\lambda x} \sum_{j=0}^k C_k^j \lambda^j D^{k-j}y(x) = e^{\lambda x} (D + \lambda I)^k y(x). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (3.3), выводим

$$\begin{aligned} L(D)(e^{\lambda x}y(x)) &= e^{\lambda x}(D + \lambda I)^n y(x) + a_1 e^{\lambda x}(D + \lambda I)^{n-1} y(x) + \dots + \\ &+ a_{n-1} e^{\lambda x}(D + \lambda I)y(x) + a_n e^{\lambda x}y(x) = e^{\lambda x}L(D + \lambda I)y(x). \end{aligned}$$
■

3.2. Линейные однородные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0, \quad (3.11)$$

или это же уравнение, записанное в операторной форме

$$L(D)y(x) = 0, \quad (3.12)$$

называют линейным однородным дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами. Этот раздел мы посвятим изучению структуры всех решений уравнения (3.11). Начнем со следующего простого результата.

Лемма 3.2. *Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения (3.11) и c_1, c_2 — произвольные комплексные числа, то функция*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

также является решением уравнения (3.11).

Доказательство. Запишем уравнение (3.11) в форме (3.12). Воспользовавшись линейностью дифференциального оператора $L(D)$ (см. упражнение 3.1), имеем

$$L(D)y(x) = L(D)(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)) = c_1 L(D)y_1(x) + c_2 L(D)y_2(x) = 0,$$

так как по условию $L(D)y_1(x) = 0$ и $L(D)y_2(x) = 0$. ■

Лемма 3.2 таким образом утверждает, что множество всех решений уравнения (3.11) является линейным пространством, вообще говоря, над полем \mathbb{C} . Далее в этом разделе мы установим, какова размерность этого пространства.

Рассмотрим характеристический многочлен $L(\lambda)$, определяемый формулой (3.7). Уравнение

$$L(\lambda) = 0 \quad (3.13)$$

называется характеристическим уравнением для (3.11). Напомним, что число λ_0 является корнем кратности k ($k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$) уравнения (3.13), если

$$L(\lambda_0) = L'(\lambda_0) = \dots = L^{(k-1)}(\lambda_0) = 0, \quad L^{(k)}(\lambda_0) \neq 0. \quad (3.14)$$

Лемма 3.3. Пусть λ_0 является корнем характеристического уравнения (3.13) кратности k . Тогда функции

$$e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda_0 x} \quad (3.15)$$

удовлетворяют уравнению (3.12).

Доказательство. Предположим сначала, что $\lambda_0 = 0$. Тогда

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-k} \lambda^k = \lambda^k (\lambda^{n-k} + a_1 \lambda^{n-k-1} + \dots + a_{n-k}),$$

где $a_{n-k} \neq 0$. Следовательно,

$$L(D) = (D^{n-k} + a_1 D^{n-k-1} + \dots + a_{n-k} I) D^k.$$

Поскольку $D^k(x^j) = (x^j)^{(k)} = 0$ для всех $j = 0, \dots, k-1$, то и

$$L(D)(x^j) = 0.$$

Пусть теперь $\lambda_0 \neq 0$. В уравнении (3.12) сделаем замену $y = e^{\lambda_0 x} z$. Используя формулу сдвига (3.10), получаем

$$L(D)y(x) = e^{\lambda_0 x} L(D + \lambda_0 I)z(x) = 0.$$

Характеристический многочлен $L(\lambda + \lambda_0)$ имеет корень $\lambda = 0$ кратности k . Поэтому в силу уже доказанного уравнение $L(D + \lambda_0 I)z(x) = 0$ имеет решения $1, x, \dots, x^{k-1}$. Вспоминая сделанную замену, заключаем, что функции (3.15) удовлетворяют тогда уравнению (3.12) для всех $j = 1, \dots, k-1$. ■

Пусть

$$\omega_j(x) = L(D)(x^j e^{\lambda_0 x}), \quad j = 0, \dots, k-1. \quad (3.16)$$

Если λ_0 является корнем уравнения (3.13) кратности k , то в силу леммы 3.3 для всех $j = 0, \dots, k-1$ выполнено тождество $\omega_j(x) \equiv 0$. Имеет место в некотором смысле обратное утверждение (см. [17]).

Лемма 3.4. Пусть функции $\omega_j(x)$ ($j = 0, \dots, k-1$) определены формулой (3.16). Тогда, если эти функции одновременно обращаются в ноль хотя бы в одной точке $x = x_0$, т.е.

$$\omega_0(x_0) = \omega_1(x_0) = \dots = \omega_{k-1}(x_0) = 0, \quad (3.17)$$

то число λ_0 является корнем характеристического уравнения (3.13) и кратность этого корня не меньше k .

Доказательство. В силу формулы сдвига (3.10), имеем

$$\omega_j(x) = e^{\lambda_0 x} L(D + \lambda_0 I)x^j, \quad j = 0, \dots, k-1. \quad (3.18)$$

Разлагая дифференциальный многочлен $L(D + \lambda_0 I)$ по степеням оператора D , получаем

$$L(D + \lambda_0 I) = b_0 I + b_1 D + \dots + b_{n-1} D^{n-1} + b_n D^n. \quad (3.19)$$

Из (3.18) и (3.19) следует, что

$$\omega_0(x_0) = e^{\lambda_0 x_0} b_0.$$

Отсюда в силу (3.17) заключаем, что

$$b_0 = 0.$$

Предположим теперь, что имеют место равенства

$$b_0 = b_1 = \dots = b_{j-1} = 0, \quad j \leq k-1. \quad (3.20)$$

Покажем, что $b_j = 0$. В силу (3.18), (3.19) и (3.20) имеем

$$\omega_j(x_0) = e^{\lambda_0 x_0} j! b_j.$$

Из (3.17) тогда следует, что $b_j = 0$, а значит,

$$b_0 = b_1 = \dots = b_{k-1} = 0.$$

Следовательно, многочлен $L(D + \lambda_0 I)$ имеет вид

$$L(D + \lambda_0 I) = b_k D^k + \dots + b_n D^n = (b_k I + \dots + b_n D^{n-k}) D^k = M(D) D^k.$$

Тогда

$$L(D) = M(D - \lambda_0 I)(D - \lambda_0 I)^k$$

и

$$L(\lambda) = M(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^k. \quad (3.21)$$

Из представления (3.21) следует, что λ_0 является корнем характеристического уравнения (3.13) кратности не меньше k . ■

Сформулируем теперь основной результат этого раздела.

Теорема 3.2. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — совокупность всех попарно различных корней характеристического уравнения (3.13), причем корень λ_j имеет кратность k_j , так что $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Положим

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\lambda_1 x}, & y_2(x) &= x e^{\lambda_1 x}, & \dots, & y_{k_1}(x) &= x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x}, \\ y_{k_1+1}(x) &= e^{\lambda_2 x}, & y_{k_1+2}(x) &= x e^{\lambda_2 x}, & \dots, & y_{k_1+k_2}(x) &= x^{k_2-1} e^{\lambda_2 x}, \\ &\dots\dots\dots & & & & & \dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots & & & & & y_n(x) &= x^{k_m-1} e^{\lambda_m x}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Тогда все функции (3.22) являются решениями уравнения (3.11) и, кроме того, при любых константах c_1, c_2, \dots, c_n функция

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad (3.23)$$

также является решением уравнения (3.11). Любое решение уравнения (3.11) имеет вид (3.23), причем константы c_1, c_2, \dots, c_n для каждого решения определяются однозначно.

Доказательство. Первая часть теоремы легко выводится из леммы 3.2 и леммы 3.3. Действительно, из леммы 3.3 следует, что все функции (3.22) являются решениями уравнения (3.11). Тогда в силу леммы 3.2 решением этого уравнения является и их произвольная линейная комбинация (3.23).

Пусть $y_*(x)$ — некоторое решение уравнения (3.23) с начальными условиями

$$y_*(x_0) = y_0, \quad y'_*(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y_*^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (3.24)$$

В силу теоремы 3.1 это решение определено на всей оси и принадлежит множеству $C_n(\mathbb{R})$. Покажем далее, что существуют такие константы c_1, c_2, \dots, c_n , что решение $y(x)$ уравнения (3.11), описываемое формулой (3.23), также удовлетворяет начальным условиям (3.24). Согласно теореме 3.1 отсюда будет следовать, что $y(x) \equiv y_*(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Для определения решения $y(x)$ вида (3.23) с начальными условиями (3.24) получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c_1, c_2, \dots, c_n :

$$c_1 y_1^{(s)}(x_0) + c_2 y_2^{(s)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(s)}(x_0) = y_0^{(s)}, \quad s = 0, \dots, n-1. \quad (3.25)$$

Система (3.25) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) & \dots & y'_n(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

отличен от нуля. Докажем, что этот определитель отличен от нуля. Для этого достаточно установить, что строки матрицы (3.26) линейно независимы [12]. Предположим противное, что существуют такие константы $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0$, одновременно не равные нулю, на которые следует умножить первую, вторую и так далее строки матрицы (3.26), чтобы их сумма была равна нулю. Выписывая сумму элементов j -го столбца, приходим к равенству

$$b_0 y_j^{(n-1)}(x_0) + b_1 y_j^{(n-2)}(x_0) + \dots + b_{n-1} y_j(x_0) = 0,$$

которое можно записать в виде

$$M(D)y_j(x)|_{x=x_0} = 0, \quad (3.27)$$

где $M(D) = b_0 D^{n-1} + b_1 D^{n-2} + \dots + b_{n-1} I$. В силу леммы 3.4 равенство (3.27), используемое для $j = 1, \dots, k_1$, дает, что λ_1 есть корень многочлена $M(\lambda)$ кратности не меньше k_1 . Аналогично для $j = k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2$ полученное равенство означает, что λ_2 есть корень многочлена $M(\lambda)$ кратности не меньше k_2 и т.д. Совокупность всех этих равенств приводит нас к выводу, что многочлен $M(\lambda)$ имеет не менее n корней с учетом их кратностей. Последнее же невозможно, поскольку $M(\lambda)$ является многочленом степени не выше, чем $n - 1$. Полученное противоречие означает, что система (3.25) однозначно разрешима относительно неизвестных c_1, c_2, \dots, c_n .

Теорема доказана. ■

Следствие 3.1. *Множество всех решений уравнения (3.11) является комплексным линейным пространством размерности n . Базис в этом пространстве образуют функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$, описываемые формулами (3.22).*

То, что множество всех решений уравнения (3.11) образует линейное пространство, было отмечено нами ранее (см. лемму 3.2). В силу доказанной теоремы любое решение уравнения (3.11) однозначно представляется как линейная комбинация функций (3.22). Следовательно, функции (3.22) образуют базис в указанном пространстве решений.

Следствие 3.2. *Каждое решение уравнения (3.11) может быть записано в виде*

$$y(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + P_2(x)e^{\lambda_2 x} + \dots + P_m(x)e^{\lambda_m x}, \quad (3.28)$$

где $P_j(x) = c_{j,1} + c_{j,2}x + \dots + c_{j,k_j}x^{k_j-1}$ — многочлен степени $k_j - 1$, коэффициентами которого являются произвольные комплексные постоянные $c_{j,1}, \dots, c_{j,k_j}$.

Группируя в (3.23) слагаемые при одинаковых показателях экспоненты, получаем представление решений уравнения (3.11) в форме (3.28).

Определение 3.1. Функция (3.28) называется общим решением линейного однородного уравнения (3.11).

Общее решение уравнения (3.11), согласно теореме 3.2, обладает следующими свойствами:

- при любом наборе постоянных $c_{j,1}, \dots, c_{j,k_j}$ ($j = 1, \dots, m$) функция вида (3.28) является решением уравнения (3.11);
- каждое решение уравнения (3.11) однозначно представимо в виде (3.28).

Если все коэффициенты уравнения (3.11) действительны, то, как оказывается, общее решение этого уравнения также может быть записано в действительной форме даже тогда, когда многочлен $L(\lambda)$ имеет комплексные корни. Другими словами, в пространстве всех решений уравнения (3.11) наряду с базисом, содержащим комплекснозначные функции вида (3.22), может быть указан базис, все функции в котором действительны. Обсудим этот вопрос более подробно.

Лемма 3.5. Предположим, что все коэффициенты уравнения (3.11) действительны. Тогда если $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ — комплексный корень кратности k характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$, то и комплексно сопряженное число $\bar{\lambda}_0 = \alpha - i\beta$ является корнем этого уравнения такой же кратности.

Доказательство. Поскольку $L(\lambda_0) = 0$, то

$$L(\bar{\lambda}_0) = \bar{\lambda}_0^n + a_1\bar{\lambda}_0^{n-1} + \dots + a_{n-1}\bar{\lambda}_0 + a_n = \overline{L(\lambda_0)} = 0.$$

Аналогично показывается, что

$$L'(\bar{\lambda}_0) = \dots = L^{(k-1)}(\bar{\lambda}_0) = 0, \quad L^{(k)}(\bar{\lambda}_0) \neq 0.$$

■

Лемма 3.6. Пусть все коэффициенты уравнения (3.11) действительны. Функция $y(x) = u(x) + iv(x)$ является решением уравнения (3.11) тогда и только тогда, когда решениями этого уравнения являются функции $u(x) = \operatorname{Re} y(x)$ и $v(x) = \operatorname{Im} y(x)$.

Доказательство. С учетом действительности коэффициентов уравнения (3.11) утверждение леммы легко выводится из линейности оператора $L(D)$:

$$L(D)y(x) = L(D)(u(x) + \mathrm{i}v(x)) = L(D)u(x) + \mathrm{i}L(D)v(x).$$

■

Пусть $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ — комплексный корень характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$ кратности k , тогда в силу леммы 3.5 корнем этого уравнения такой же кратности является и число $\bar{\lambda} = \alpha - \mathrm{i}\beta$. Поэтому наряду с решениями $y_l(x) = x^l e^{\lambda x}$ в формуле (3.28) содержатся и решения $\bar{y}_l(x) = x^l e^{\bar{\lambda}x}$, где $l = 0, \dots, k-1$. В силу формулы Эйлера

$$y_l(x) = x^l e^{\alpha x} \cos \beta x + \mathrm{i} x^l e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

откуда

$$u_l(x) = \operatorname{Re} y_l(x) = x^l e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad v_l(x) = \operatorname{Im} y_l(x) = x^l e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Согласно лемме 3.6 функции $u_l(x)$ и $v_l(x)$ являются действительнoзначными решениями уравнения (3.11) для всех $l = 0, \dots, k-1$. Заметим также, что

$$u_l(x) = \frac{y_l(x) + \bar{y}_l(x)}{2}, \quad v_l(x) = \frac{y_l(x) - \bar{y}_l(x)}{2\mathrm{i}}. \quad (3.29)$$

Заменив теперь каждую комплексно сопряженную пару решений $y_l(x)$ и $\bar{y}_l(x)$ на пару решений $u_l(x)$ и $v_l(x)$ для всех $l = 0, \dots, k-1$ перейдем от комплексного базиса (3.22) к действительному. При этом заметим, что в силу формул (3.29) новые функции действительно образуют базис в пространстве всех решений уравнения (3.11). Наконец, взяв в формуле (3.28) все произвольные постоянные $c_{j,1}, \dots, c_{j,k_j}$ действительными, получим запись общего решения уравнения (3.11) в действительной форме.

Упражнение 3.2. Найти общее решение:

- а) $y'' + 2y' + y = 0$,
- б) $y''' + 2y'' = 0$,
- в) $y''' + 8y = 0$,
- г) $y^{(IV)} - 4y = 0$.

3.3. Линейные неоднородные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами

Перейдем теперь к рассмотрению линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = f(x), \quad (3.30)$$

где a_1, \dots, a_n — некоторые действительные или комплексные числа, а заданная скалярная функция $f(x)$ (действительно или комплекснозначная) непрерывна во всех точках действительной оси \mathbb{R} .

Предположим, что нам известно некоторое решение $y_0(x)$ уравнения (3.30). Осуществляя в этом уравнении замену $y(x) = z(x) + y_0(x)$ и используя операторное представление для уравнения (3.30), получаем

$$\begin{aligned} L(D)y(x) &= L(D)(z(x) + y_0(x)) = L(D)z(x) + L(D)y_0(x) = \\ &= L(D)z(x) + f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что

$$L(D)z(x) = z^{(n)}(x) + a_1 z^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} z'(x) + a_n z(x) = 0,$$

т.е. функция $z(x)$ является решением соответствующего однородного уравнения (3.11). Осталось заметить, что если теперь в качестве $z(x)$ взять общее решение однородного уравнения (3.11), которое описывается формулой (3.28), то формула

$$y(x) = z(x) + y_0(x)$$

дает все решения неоднородного уравнения (3.30). В этом случае функцию $y(x)$ называют общим решением неоднородного уравнения (3.30), а функцию $y_0(x)$ — его частным решением. Таким образом, наша задача состоит в том, чтобы научиться каким-либо образом находить некоторое частное решение уравнения (3.30).

Следующее утверждение обычно называют принципом суперпозиции.

Лемма 3.7. Пусть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и $y_1(x)$ — некоторое решение уравнения (3.30) с $f(x) \equiv f_1(x)$, а $y_2(x)$ — некоторое решение уравнения (3.30) с $f(x) \equiv f_2(x)$. Тогда $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ является решением уравнения (3.30).

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} L(D)y(x) &= L(D)(y_1(x) + y_2(x)) = L(D)y_1(x) + L(D)y_2(x) = \\ &= f_1(x) + f_2(x) = f(x). \end{aligned}$$

■

Укажем сначала метод построения частного решения $y_0(x)$ в том случае, когда функция $f(x)$ имеет специальный вид, а точнее, является так называемым квазимногочленом.

Определение 3.2. *Функция*

$$f(x) = e^{\mu x} P_m(x),$$

где $\mu \in \mathbb{C}$ — заданное комплексное число, а $P_m(x)$ — заданный алгебраический многочлен степени m с комплексными коэффициентами, называется квазимногочленом.

Рассмотрим уравнение

$$L(D)y(x) = e^{\mu x} P_m(x). \quad (3.31)$$

Определение 3.3. Если число $\mu \in \mathbb{C}$ является корнем характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$, то говорят, что в уравнении (3.31) имеет место резонансный случай. Если же число $\mu \in \mathbb{C}$ не является корнем характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$, то в уравнении (3.31) имеет место нерезонансный случай.

Ответ на вопрос о том, как находить частное решение в случае, когда неоднородность $f(x)$ является квазимногочленом, дает следующая теорема.

Теорема 3.3. Уравнение (3.31) имеет единственное решение вида

$$y(x) = x^k e^{\mu x} Q_m(x),$$

где $Q_m(x)$ — алгебраический многочлен одинаковой с $P_m(x)$ степени m , а число k равно кратности корня μ характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$ в резонансном случае и $k = 0$ в нерезонансном случае.

Доказательство. Заметим, что если $\mu \neq 0$, то заменой $y = e^{\mu x} z$ мы можем избавиться от множителя $e^{\mu x}$ в правой части (3.31). Действительно, в силу формулы сдвига (3.10) получаем

$$L(D)y(x) = L(D)(e^{\mu x} z(x)) = e^{\mu x} L(D + \mu I)z(x) = e^{\mu x} P_m(x).$$

Откуда $L(D + \mu I)z(x) = P_m(x)$. Заметим, что корень $\lambda = 0$ многочлена $L(\lambda + \mu)$ имеет ту же кратность, что и корень μ многочлена $L(\lambda)$ (в резонансном случае) и $\lambda = 0$ не является корнем многочлена $L(\lambda + \mu)$ в нерезонансном случае. Таким образом, нам достаточно провести доказательство теоремы для уравнения

$$L(D)y(x) = P_m(x). \quad (3.32)$$

а). Нерезонансный случай ($L(0) \neq 0$). Пусть

$$\begin{aligned} P_m(x) &= p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_{m-1} x + p_m, \\ Q_m(x) &= q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_{m-1} x + q_m. \end{aligned}$$

Будем искать решение уравнения (3.32) в виде $y(x) = Q_m(x)$. Подставим многочлены $P_m(x)$ и $y(x) = Q_m(x)$ в (3.32) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x . Получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных q_0, q_1, \dots, q_m :

$$\begin{cases} a_n q_0 = p_0, \\ a_n q_1 + a_{n-1} m q_0 = p_1, \\ \dots\dots\dots, \\ a_n q_m + \dots = p_m. \end{cases}$$

Матрица этой системы является нижней треугольной, а на ее диагонали расположены числа $a_n = L(0) \neq 0$. Следовательно, определитель такой матрицы отличен от нуля и неизвестные q_0, q_1, \dots, q_m однозначно определяются.

б). Резонансный случай ($\lambda = 0$ является корнем многочлена $L(\lambda)$ кратности k). Многочлен $L(\lambda)$ имеет тогда вид

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-k} \lambda^k, \quad a_{n-k} \neq 0, \quad 1 \leq k < n$$

и $L(\lambda) = \lambda^n$, если $k = n$. Следовательно,

$$L(D) = \begin{cases} (D^{n-k} + a_1 D^{n-k-1} + \dots + a_{n-k} I) D^k, & k < n, \\ D^n, & k = n. \end{cases}$$

Если $k < n$, то заменой $z(x) = D^k y(x)$ мы приводим уравнение (3.32) к виду

$$M(D)z = (D^{n-k} + a_1 D^{n-k-1} + \dots + a_{n-k} I)z(x) = P_m(x)$$

Поскольку $M(0) = a_{n-k} \neq 0$, то для этого уравнения имеет место нерезонансный случай. Таким образом, в силу ранее доказанного существует единственное решение этого уравнения вида $z(x) = R_m(x)$, где $R_m(x)$ — алгебраический многочлен степени m . Следовательно, нам остается рассмотреть уравнение

$$D^k y(x) = \begin{cases} R_m(x), & k < n, \\ P_m(x), & k = n. \end{cases} \quad (3.33)$$

Интегрируя это уравнение k раз, убеждаемся в том, что любое решение этого уравнения является многочленом степени $m + k$. Рассмотрим это уравнение вместе с начальными условиями:

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(k-1)}(0) = 0. \quad (3.34)$$

В силу теоремы 3.1 задача Коши (3.33), (3.34) имеет единственное решение. Это решение является многочленом степени $m + k$, а условия (3.34) означают, что ноль является корнем этого многочлена и его кратность не меньше k . Отсюда заключаем, что

$$y(x) = x^k Q_m(x), \quad (3.35)$$

где $Q_m(x)$ — некоторый алгебраический многочлен степени m . Заметим, что решение уравнения (3.32) такого вида единственно. Действительно, в противном случае любое другое решение вида (3.35) также являлось бы решением задачи Коши (3.33), (3.34), что невозможно.

Теорема доказана. ■

Указанное в теореме частное решение $y(x)$ ищут, как правило, методом неопределенных коэффициентов, т.е. полагают

$$y(x) = x^k (q_0 x^m + \dots + q_{m-1} x + q_m) e^{\mu x}.$$

После подстановки этого выражения в уравнение (3.31), сокращения на $e^{\mu x}$ в обеих частях полученного равенства и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x мы приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных

q_0, \dots, q_m . В силу доказанной теоремы эта система имеет единственное решение.

Пусть в уравнении (3.30) все коэффициенты a_1, \dots, a_n действительны и

$$f(x) = e^{\alpha x} (A(x) \cos \beta x + B(x) \sin \beta x),$$

где α и β — действительные числа, а $A(x)$ и $B(x)$ — алгебраические многочлены произвольных степеней, причем максимальная из них равна m . Тогда частное решение уравнения (3.30) следует искать в виде

$$y(x) = x^k e^{\alpha x} (C(x) \cos \beta x + D(x) \sin \beta x), \quad (3.36)$$

где $C(x)$ и $D(x)$ — многочлены степени m с неопределенными коэффициентами. Кроме того, число k равно кратности корня $\lambda = \alpha + i\beta$ характеристического многочлена $L(\lambda)$ в резонансном случае и $k = 0$ в нерезонансном случае. Действительно, используя формулы Эйлера, мы можем записать функцию $f(x)$ в виде суммы двух квазимногочленов

$$f(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} E(x) + e^{(\alpha-i\beta)x} F(x),$$

где $E(x)$ и $F(x)$ — алгебраические многочлены степени m с комплексными коэффициентами. Тогда из теоремы 3.3 и принципа суперпозиции (лемма 3.7) следует, что решение уравнения (3.30) нужно искать в виде

$$y(x) = x^k e^{(\alpha+i\beta)x} Q(x) + x^k e^{(\alpha-i\beta)x} R(x), \quad (3.37)$$

где $Q(x)$ и $R(x)$ — многочлены степени m с неопределенными коэффициентами. Число k равно кратности корня $\lambda = \alpha + i\beta$ характеристического многочлена $L(\lambda)$ (в силу леммы 3.5 корень $\lambda = \alpha - i\beta$ многочлена $L(\lambda)$ имеет такую же кратность) в резонансном случае и $k = 0$ в нерезонансном случае. Применяя затем формулы Эйлера в (3.37), получаем для решения $y(x)$ представление вида (3.36).

Упражнение 3.3. Найти общее решение:

- а) $y'' + 2y' + 17y = e^{-x} + \sin 4x$,
- б) $y''' + 2y'' = (x + 1)e^{-2x}$,
- в) $y''' + y' = x \sin x$,
- г) $y^{(IV)} - 4y'' = x + e^{-2x}$.

Рассмотрим теперь общий случай, когда функция $f(x)$ в уравнении (3.30) имеет произвольный вид. Пусть функция $K(x)$ является решением следующей задачи Коши для однородного уравнения:

$$L(D)y(x) = y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0,$$

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = 0, \quad y^{(n-1)}(0) = 1. \quad (3.38)$$

Функцию $K(x)$ называют обычно функцией Коши.

Теорема 3.4. Уравнение (3.30) имеет решение вида

$$y(x) = \int_{x_0}^x K(x-t)f(t)dt, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \quad (3.39)$$

Доказательство. Проверим, что функция $y(x) \in C_n(\mathbb{R})$, определяемая формулой (3.39), удовлетворяет уравнению (3.30). Имеем,

$$y'(x) = K(0)f(x) + \int_{x_0}^x K'(x-t)f(t)dt = \int_{x_0}^x K'(x-t)f(t)dt.$$

Аналогично, учитывая (3.38), получаем

$$\begin{aligned} y''(x) &= K'(0)f(x) + \int_{x_0}^x K''(x-t)f(t)dt = \int_{x_0}^x K''(x-t)f(t)dt, \\ &\dots \dots \dots, \\ y^{(n-1)}(x) &= K^{(n-2)}(0)f(x) + \int_{x_0}^x K^{(n-1)}(x-t)f(t)dt = \\ &= \int_{x_0}^x K^{(n-1)}(x-t)f(t)dt \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= K^{(n-1)}(0)f(x) + \int_{x_0}^x K^{(n)}(x-t)f(t)dt = \\ &= f(x) + \int_{x_0}^x K^{(n)}(x-t)f(t)dt. \end{aligned}$$

Используя полученные соотношения в уравнении (3.30), а также равенство $L(D)K(x) = 0$, выполненное для всех $x \in \mathbb{R}$, получаем

$$L(D)y(x) = f(x) + \int_{x_0}^x K^{(n)}(x-t)f(t)dt + a_1 \int_{x_0}^x K^{(n-1)}(x-t)f(t)dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + a_{n-1} \int_{x_0}^x K'(x-t)f(t)dt + a_n \int_{x_0}^x K(x-t)f(t)dt = \\
& = f(x) + \int_{x_0}^x L(D)K(x-t)f(t)dt = f(x).
\end{aligned}$$

■

В силу теоремы 3.2 имеем

$$K(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x),$$

где c_1, c_2, \dots, c_n — некоторые постоянные, а функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ определяются формулами (3.22). Учитывая теперь начальные условия (3.38), для нахождения функции $K(x)$ получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c_1, \dots, c_n :

$$\begin{cases} c_1 y_1(0) + c_2 y_2(0) + \dots + c_n y_n(0) = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ c_1 y_1^{(n-2)}(0) + c_2 y_2^{(n-2)}(0) + \dots + c_n y_n^{(n-2)}(0) = 0, \\ c_1 y_1^{(n-1)}(0) + c_2 y_2^{(n-1)}(0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

Согласно теореме 3.2 эта система имеет единственное решение. Таким образом, задача нахождения частного решения уравнения (3.30) в общем случае сводится к решению некоторой системы линейных алгебраических уравнений и вычислению интеграла (3.39).

Как правило, для нахождения общего решения уравнения (3.30) в случае произвольной функции $f(x)$ обычно используют так называемый метод вариации произвольных постоянных. С этим методом мы познакомимся чуть позднее.

В завершение этого раздела заметим, что можно предполагать непрерывность функции $f(x)$ имеющей место лишь на некотором промежутке $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$. В этом случае все полученные нами результаты остаются справедливыми, если $x \in \mathcal{I}$.

Упражнение 3.4. Найти общее решение:

$$\begin{aligned}
& \text{а) } y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}, \quad \text{в) } y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x+1}, \\
& \text{б) } y''' + y'' = \frac{x-1}{x^2}, \quad \text{г) } y'' + y = \frac{1}{\sin^2 x}.
\end{aligned}$$

3.4. Уравнение Эйлера

Уравнение вида

$$x^n y^{(n)}(x) + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} x y'(x) + a_n y(x) = f(x), \quad (3.40)$$

где a_1, \dots, a_n — некоторые постоянные (действительные или комплексные), а скалярная функция $f(x)$ непрерывна на некотором промежутке \mathcal{I} , называют уравнением Эйлера. Уравнение (3.40) является примером так называемого уравнения с переменными коэффициентами. Особенностью уравнения Эйлера является то обстоятельство, что заменой независимой переменной

$$x = \begin{cases} e^t, & x > 0, \\ -e^t, & x < 0, \end{cases} \quad (3.41)$$

оно преобразуется в уравнение с постоянными коэффициентами.

В дальнейшем, не ограничивая общности, считаем, что $x > 0$, и осуществим в уравнении (3.40) замену $x = e^t$. Полагая $z(t) = y(e^t)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{-t} \frac{dz}{dt}, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= e^{-2t} \left(\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} \right), \end{aligned} \quad (3.42)$$

.....

$$\frac{d^k y}{dx^k} = e^{-kt} \left(\beta_1 \frac{dz}{dt} + \beta_2 \frac{d^2 z}{dt^2} + \dots + \beta_k \frac{d^k z}{dt^k} \right),$$

где β_i — некоторые постоянные. Справедливость этих равенств может быть доказана по индукции. Действительно, считая, что эти равенства имеют место, и дифференцируя последнее из них по t , получим

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} &= e^{-(k+1)t} \left(\beta_1 \frac{d^2 z}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^3 z}{dt^3} + \dots + \beta_k \frac{d^{k+1} z}{dt^{k+1}} \right) - \\ &- k e^{-(k+1)t} \left(\beta_1 \frac{dz}{dt} + \beta_2 \frac{d^2 z}{dt^2} + \dots + \beta_k \frac{d^k z}{dt^k} \right) = \\ &= e^{-(k+1)t} \left(\gamma_1 \frac{dz}{dt} + \gamma_2 \frac{d^2 z}{dt^2} + \dots + \gamma_k \frac{d^k z}{dt^k} \right). \end{aligned}$$

Подставим теперь равенства (3.42) в уравнение (3.40) и учтем, что множители $x^k = e^{kt}$ сокращаются со множителями e^{-kt} . Приходим к

уравнению с постоянными коэффициентами

$$b_0 z^{(n)}(t) + b_1 z^{(n-1)}(t) + \dots + b_{n-1} \dot{z}(t) + b_n z(t) = g(t), \quad (3.43)$$

где b_1, \dots, b_n — некоторые числа и $g(t) = f(e^t)$.

На практике для приведения уравнения (3.40) к виду (3.43) осуществлять замену (3.41) необходимости нет. Коэффициенты уравнения (3.43), очевидно, совпадают с коэффициентами характеристического полинома

$$M(\lambda) = b_0 \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1} \lambda + b_n, \quad (3.44)$$

построенного для однородного уравнения

$$M(D)z(t) = b_0 z^{(n)}(t) + b_1 z^{(n-1)}(t) + \dots + b_{n-1} \dot{z}(t) + b_n z(t) = 0.$$

Из леммы 3.1 следует, что

$$M(D)e^{\lambda t} = e^{\lambda t} M(\lambda). \quad (3.45)$$

Обозначим левую часть (3.40) как $L(D)y(x)$. В силу осуществленной замены имеем равенство $L(D)y(x) = M(D)z(t)$ и, в частности,

$$L(D)x^\lambda = M(D)e^{\lambda t}.$$

Из (3.45) тогда следует, что

$$L(D)x^\lambda = x^\lambda M(\lambda).$$

Таким образом, многочлен $M(\lambda)$ может быть построен подстановкой функции $y(x) = x^\lambda$ в левую часть (3.40). Осуществляя эту подстановку, получаем

$$M(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \cdot \dots \cdot (\lambda - n + 1) + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n. \quad (3.46)$$

Приравнивая теперь коэффициенты в (3.44) и (3.46) при одинаковых степенях λ , находим все коэффициенты b_0, \dots, b_n .

Упражнение 3.5. Найти общее решение уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} \text{а) } x^2 y'' + 2xy' - 12y &= 0, & \text{в) } x^2 y'' - 2y &= 2x^3, \\ \text{б) } x^2 y'' - 2xy' - 4y &= 0, & \text{г) } x^2 y'' + 3xy' + y &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Глава 4

Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

4.1. Задача Коши. Общее решение линейной однородной системы

Линейной системой с постоянными коэффициентами n -го порядка называется система линейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + f_i(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

Здесь $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — неизвестные функции переменного t , a_{ij} — заданные числа (действительные или комплексные), $f_1(t), \dots, f_n(t)$ — заданные скалярные функции со значениями в \mathbb{R} или \mathbb{C} . Запись системы уравнений (4.1) существенно упрощается, если воспользоваться векторно-матричной формой записи. Именно, пусть A — матрица, элементами которой являются коэффициенты системы (4.1), т.е. числа a_{ij} ,

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n.$$

Далее, положим

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда система (4.1) может быть записана в виде одного векторного уравнения

$$\dot{x} = Ax + f(t). \quad (4.2)$$

Систему (4.2) называют однородной, если $f(t) \equiv 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, и неоднородной — в противном случае.

Предположим, что вектор-функция $f(t)$ непрерывна на некотором промежутке $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ (т.е. все скалярные функции $f_1(t), \dots, f_n(t)$ непрерывны на \mathcal{I}). Выберем произвольную точку $t_0 \in \mathcal{I}$ и произвольный вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (или $x_0 \in \mathbb{C}^n$). Рассмотрим начальное условие

$$x(t_0) = x_0. \quad (4.3)$$

Определение 4.1. Непрерывно-дифференцируемая на промежутке \mathcal{I} вектор-функция $x(t)$, обращающая все уравнения системы (4.2) в тождества для всех $t \in \mathcal{I}$ и удовлетворяющая условию (4.3), называется решением задачи Коши (4.2), (4.3).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.1. На промежутке \mathcal{I} решение задачи Коши (4.2), (4.3) существует и единственно.

Доказательство теоремы 4.1 будет дано далее в этой главе, после того как нами будет определено понятие матричной экспоненты.

Рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax. \quad (4.4)$$

В силу теоремы 4.1 решение системы (4.4), удовлетворяющее начальному условию (4.3), существует и единственно для любых t_0, x_0 . Кроме того, это решение определено и непрерывно дифференцируемо для всех $t \in \mathbb{R}$.

Лемма 4.1. Пусть $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$ — решения системы (4.4) и c_1, c_2 — произвольные комплексные числа. Тогда вектор-функция

$$x(t) = c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t)$$

также является решением системы (4.4).

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= c_1 \dot{x}^{(1)}(t) + c_2 \dot{x}^{(2)}(t) = c_1 A x^{(1)}(t) + c_2 A x^{(2)}(t) = \\ &= A(c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t)) = A x(t).\end{aligned}$$

■

Теорема 4.2. *Множество всех решений системы (4.4) образует комплексное линейное пространство размерности n .*

Доказательство. Линейность указанного пространства решений немедленно следует из леммы 4.1. Выберем в пространстве \mathbb{C}^n некоторый базис e_1, \dots, e_n . Пусть $x^{(i)}(t)$ — решение системы (4.4) с начальным условием $x^{(i)}(0) = e_i$, $i = 1, \dots, n$. В силу теоремы 4.1 такие вектор-функции существуют, единственны и определены для всех $t \in \mathbb{R}$. Покажем сначала, что любое решение системы (4.4) может быть представлено в виде линейной комбинации вектор-функций $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$.

Рассмотрим произвольное решение $x(t)$ системы (4.4), принимающее при $t = 0$ некоторое значение, равное $x_0 \in \mathbb{C}^n$. Поскольку векторы e_1, \dots, e_n образуют в пространстве \mathbb{C}^n базис, то

$$x_0 = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n,$$

где $c_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим вектор-функцию

$$\tilde{x}(t) = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_n x^{(n)}(t).$$

В силу леммы 4.1 вектор-функция $\tilde{x}(t)$ является решением системы (4.4), и, кроме того, $\tilde{x}(0) = x_0$. Поскольку $x(0) = \tilde{x}(0)$, то в силу теоремы 4.1 для всех $t \in \mathbb{R}$ имеет место тождество $x(t) \equiv \tilde{x}(t)$. Следовательно, $x(t) = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_n x^{(n)}(t)$.

Установим теперь линейную независимость вектор-функций $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$. Предположим противное, что эти вектор-функции линейно зависимы. Тогда существуют такие одновременно не равные нулю комплексные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, что

$$\alpha_1 x^{(1)}(t) + \dots + \alpha_n x^{(n)}(t) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отсюда при $t = 0$ получаем

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0.$$

Последнее равенство противоречит тому, что векторы e_1, \dots, e_n образуют базис в пространстве \mathbb{C}^n . Таким образом, вектор-функции $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ образуют линейно независимую систему.

Поскольку вектор-функции $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ линейно независимы и любое решение системы (4.4) может быть представлено в виде некоторой линейной комбинации этих функций, то они образуют базис в пространстве решений системы (4.4), и, значит, размерность этого пространства равна n . Теорема доказана. ■

Следствие 4.1. Пусть векторы e_1, \dots, e_n образуют базис в пространстве \mathbb{C}^n . Тогда решения $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ системы (4.4) с начальными условиями $x_1(0) = e_1, \dots, x_n(0) = e_n$ образуют базис в пространстве всех решений этой системы.

Следствие 4.2. Пусть $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ — произвольные линейно независимые решения системы (4.4). Тогда любое решение этой системы может быть однозначно представлено в виде

$$x(t) = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_n x^{(n)}(t), \quad (4.5)$$

где c_1, \dots, c_n — некоторые комплексные числа.

Суть следствия 4.2, по существу, представляет собой содержание известного результата о том, что любые n линейно независимых векторов в n -мерном пространстве образуют в нем базис.

Определение 4.2. Вектор-функцию (4.5), где c_1, \dots, c_n — произвольные комплексные постоянные, называют общим решением системы (4.4).

Как и в случае с линейными дифференциальными уравнениями n -го порядка с постоянными коэффициентами, общее решение системы n -го порядка с постоянными коэффициентами обладает следующими свойствами:

- при любом наборе постоянных c_1, \dots, c_n вектор-функция вида (4.5) является решением системы (4.4);
- каждое решение системы (4.4) однозначно представимо в виде (4.5).

Основная задача данного раздела состоит в том, чтобы построить некоторую линейно независимую систему решений $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$. Универсальным инструментом для таких целей является так называемый метод Эйлера. Будем искать нетривиальные решения системы (4.4) в виде

$$x(t) = e^{\lambda t} h, \quad (4.6)$$

где λ — некоторое комплексное число, а $h \neq 0$ — некоторый вектор из \mathbb{C}^n . Подставим представление (4.6) в систему (4.4). Получаем

$$\lambda e^{\lambda t} h = A(e^{\lambda t} h) = e^{\lambda t} Ah,$$

откуда, сокращая на экспоненту, выводим

$$Ah = \lambda h, \quad h \neq 0. \quad (4.7)$$

Равенство (4.7) означает следующее: вектор-функция (4.6) является решением системы (4.4) тогда и только тогда, когда число λ является собственным числом матрицы A , а вектор h — соответствующим ему собственным вектором.

Теорема 4.3. Пусть в пространстве \mathbb{C}^n существует базис, составленный из собственных векторов h_1, \dots, h_n матрицы A , и пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — соответствующие этим векторам собственные числа. Тогда вектор-функция

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} h_n, \quad (4.8)$$

где c_1, \dots, c_n — произвольные комплексные числа, является общим решением системы (4.4).

Доказательство. В силу установленного выше вектор-функции

$$x^{(i)}(t) = e^{\lambda_i t} h_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

являются решениями системы (4.4). Далее, поскольку $x^{(i)}(0) = h_i$, $i = 1, \dots, n$, а векторы h_1, \dots, h_n образуют базис в пространстве \mathbb{C}^n , то в силу следствия 4.1 указанные решения $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ образуют базис в пространстве решений системы (4.4). Наконец, привлекая следствие 4.2, завершаем доказательство теоремы. ■

Известно, что собственные векторы произвольной $(n \times n)$ -матрицы A не всегда образуют базис в пространстве \mathbb{C}^n . Следовательно, формула (4.8) не во всех случаях дает общее решение системы (4.4). В силу теоремы 4.2 для того, чтобы описать общий случай, действовать надо следующим образом. Необходимо в пространстве \mathbb{C}^n выбрать такой базис h_1, \dots, h_n , что можно построить явную (и по возможности простую) формулу для решения $x^{(i)}(t)$ системы (4.4) с начальным условием $x^{(i)}(0) = h_i$, $i = 1, \dots, n$. Таким базисом является так называемый жорданов базис.

Напомним некоторые необходимые нам сведения из курса линейной алгебры.

Определение 4.3. Пусть λ — некоторое собственное число матрицы A . Систему векторов h_1, h_2, \dots, h_k таких, что

$$\begin{aligned} Ah_1 &= \lambda h_1, & h_1 &\neq 0, \\ Ah_2 &= \lambda h_2 + h_1, \\ \dots &\dots \dots \\ Ah_k &= \lambda h_k + h_{k-1}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

называют жордановой цепочкой длины k , отвечающей собственному числу λ . Вектор h_1 называется собственным вектором матрицы A , а векторы h_2, \dots, h_k — присоединенными к нему векторами.

Для простого (не кратного) собственного числа λ присоединенных векторов к собственному вектору h_1 не существует. Если же λ — кратное собственное число матрицы A , то может существовать, вообще говоря, несколько жордановых цепочек, отвечающих этому собственному числу. Основным результатом в теории жордановой формы матрицы является следующая теорема (см., например, [5]).

Теорема 4.4. Предположим, что у матрицы A имеется ровно $s \leq n$ линейно независимых собственных векторов $h_1^{(1)}, h_1^{(2)}, \dots, h_1^{(s)}$, отвечающих собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$. Тогда в пространстве \mathbb{C}^n существует базис, составленный из s жордановых цепочек $h_1^{(l)}, h_2^{(l)}, \dots, h_{k_l}^{(l)}$ ($l = 1, \dots, s$), где

$$\begin{aligned} Ah_1^{(l)} &= \lambda_l h_1^{(l)}, & h_1 &\neq 0, \\ Ah_2^{(l)} &= \lambda_l h_2^{(l)} + h_1^{(l)}, \\ \dots &\dots \dots \\ Ah_{k_l}^{(l)} &= \lambda_l h_{k_l}^{(l)} + h_{k_l-1}^{(l)}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Теперь мы можем сформулировать основной результат о структуре общего решения однородной системы (4.4).

Теорема 4.5. Пусть в пространстве \mathbb{C}^n выбран базис, составленный из s жордановых цепочек вида (4.10), где $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$. Положим для всех $l = 1, \dots, s$:

$$x_1^{(l)}(t) = e^{\lambda_l t} h_1^{(l)},$$

$$\begin{aligned}
x_2^{(l)}(t) &= e^{\lambda_l t} \left(t h_1^{(l)} + h_2^{(l)} \right), \\
x_3^{(l)}(t) &= e^{\lambda_l t} \left(\frac{t^2}{2} h_1^{(l)} + t h_2^{(l)} + h_3^{(l)} \right), \\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
x_{k_l}^{(l)}(t) &= e^{\lambda_l t} \left(\frac{t^{k_l-1}}{(k_l-1)!} h_1^{(l)} + \dots + t h_{k_l-1}^{(l)} + h_{k_l}^{(l)} \right).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Тогда вектор-функция

$$x(t) = \sum_{l=1}^s \left(c_1^{(l)} x_1^{(l)}(t) + c_2^{(l)} x_2^{(l)}(t) + \dots + c_{k_l}^{(l)} x_{k_l}^{(l)}(t) \right), \tag{4.12}$$

где $c_1^{(l)}, c_2^{(l)}, \dots, c_{k_l}^{(l)}$ ($l = 1, \dots, s$) — произвольные комплексные числа, является общим решением системы (4.4).

Доказательство. Покажем сначала, что каждая из вектор-функций $x_j^{(l)}(t)$ ($j = 1, \dots, k_l$) является решением системы (4.4). При $j = 1$ вектор $h_1^{(l)}$ является собственным вектором матрицы A , отвечающим собственному числу λ_l , и соответствующий результат был установлен нами ранее. Пусть $j > 1$, тогда в силу равенств (4.11) имеем

$$\dot{x}_j^{(l)}(t) = \lambda_l x_j^{(l)}(t) + x_{j-1}^{(l)}(t).$$

Из формул (4.10) и (4.11) следует, что

$$\begin{aligned}
Ax_j^{(l)}(t) &= e^{\lambda_l t} \left(\frac{t^{j-1}}{(j-1)!} A h_1^{(l)} + \dots + t A h_{j-1}^{(l)} + A h_j^{(l)} \right) = \\
&= e^{\lambda_l t} \left(\frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \lambda_l h_1^{(l)} + \dots + t [\lambda_l h_{j-1}^{(l)} + h_{j-2}^{(l)}] + \lambda_l h_j^{(l)} + h_{j-1}^{(l)} \right) = \\
&= \lambda_l x_j^{(l)}(t) + x_{j-1}^{(l)}(t).
\end{aligned}$$

Следовательно, $\dot{x}_j^{(l)}(t) = Ax_j^{(l)}(t)$, т.е. вектор-функция является решением системы (4.4).

Заметим далее, что $x_j^{(l)}(0) = h_j^{(l)}$, где $j = 1, \dots, k_l$ и $l = 1, \dots, s$. В силу следствия 4.1 вектор-функции $x_j^{(l)}(t)$ образуют базис в пространстве всех решений системы (4.4). Наконец, используя следствие 4.2, заключаем, что формула (4.12) есть общее решение системы (4.4). ■

Упражнение 4.1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, где матрица A имеет вид:

$$a) \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad б) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad в) \begin{pmatrix} -5 & -2 & -2 \\ 10 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Если все элементы матрицы A действительны, то общее решение системы (4.4) может быть записано в действительной форме. Очевидно, что если собственное число λ_l ($l = 1, \dots, s$) действительно, то отвечающая ему жорданова цепочка вида (4.10) состоит из действительных векторов и соответствующие базисные решения (4.11) также действительны. Пусть λ_l является комплексным собственным числом матрицы A и ему отвечает жорданова цепочка (4.10). Поскольку собственные числа матрицы A определяются как корни характеристического многочлена

$$L(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

то в силу леммы 3.5 из главы 3 комплексно сопряженное число $\bar{\lambda}_l$ также является собственным числом матрицы A , т.е. $\lambda_p = \bar{\lambda}_l$ для некоторого $p = 1, \dots, s$. В силу равенств (4.10) этому собственному числу отвечает жорданова цепочка длины $k_p = k_l$, состоящая из векторов $h_1^{(p)} = \bar{h}_1^{(l)}, h_2^{(p)} = \bar{h}_2^{(l)}, \dots, h_{k_p}^{(p)} = \bar{h}_{k_l}^{(l)}$. Из теоремы 4.5 тогда следует, что вектор-функции $x_j^{(p)}(t) = \bar{x}_j^{(l)}(t)$, наряду с функциями $x_j^{(l)}(t)$ ($j = 1, \dots, k_l$), являются элементами базиса в пространстве всех решений системы (4.4). В силу линейности этого пространства, решениями системы (4.4) также будут действительнoзначные вектор-функции

$$u_j(t) = \frac{x_j^{(l)}(t) + x_j^{(p)}(t)}{2} = \frac{x_j^{(l)}(t) + \bar{x}_j^{(l)}(t)}{2} = \operatorname{Re} x_j^{(l)}(t)$$

и

$$v_j(t) = \frac{x_j^{(l)}(t) - x_j^{(p)}(t)}{2i} = \frac{x_j^{(l)}(t) - \bar{x}_j^{(l)}(t)}{2i} = \operatorname{Im} x_j^{(l)}(t)$$

для всех $j = 1, \dots, k_l$. Нетрудно заметить, что построенные функции $u_j(t)$ и $v_j(t)$ ($j = 1, \dots, k_l$) являются линейно независимыми. Заменим теперь в общем решении (4.12) слагаемые с номерами l и p суммами $c_1^{(l)}u_1(t) + \dots + c_{k_l}^{(l)}u_{k_l}(t)$ и $c_1^{(l)}v_1(t) + \dots + c_{k_l}^{(l)}v_{k_l}(t)$, где $c_1^{(l)}, \dots, c_{k_l}^{(l)}$ — произвольные действительные постоянные. Повторяя эту процедуру для всех комплексных собственных чисел λ_l матрицы A , построим общее решение системы (4.4) в действительной форме.

Упражнение 4.2. Построить общее решение системы $\dot{x} = Ax$ в действительной форме, если матрица A имеет следующий вид:

$$a) \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}, \quad б) \begin{pmatrix} -12 & -8 \\ 20 & 12 \end{pmatrix}, \quad в) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2. Общее решение линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами

В этом разделе рассматривается неоднородная система

$$\dot{x} = Ax + f(t), \quad (4.13)$$

где A — заданная $(n \times n)$ -матрица, $x(t)$ — неизвестная вектор-функция с n компонентами и $f(t)$ — непрерывная на промежутке $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ вектор-функция.

Пусть $x_0(t)$ — некоторое известное (частное) решение системы (4.13). Осуществляя тогда в этой системе замену $x(t) = y(t) + x_0(t)$, приходим к выводу, что неизвестная вектор-функция $y(t)$ является решением соответствующей однородной системы

$$\dot{y} = Ay. \quad (4.14)$$

Эта система изучалась нами в предыдущем разделе. Как известно, все ее решения описываются формулой

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t),$$

где $y_1(t), \dots, y_n(t)$ — некоторые линейно независимые решения системы (4.14), а c_1, \dots, c_n — произвольные комплексные постоянные. Следовательно, общее решение линейной неоднородной системы (4.13) может быть записано в виде

$$x(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t) + x_0(t).$$

Таким образом, задача построения общего решения системы (4.13) сводится, по существу, к задаче поиска некоторого частного решения этой системы.

Полезным при построении частного решения оказывается так называемый принцип суперпозиции.

Лемма 4.2. Пусть $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ и $x_1(t)$ является решением системы (4.13) с $f(t) \equiv f_1(t)$, а $x_2(t)$ — решением системы (4.13) с $f(t) \equiv f_2(t)$. Тогда вектор-функция $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ является решением системы (4.13).

Доказательство. Имеем,

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = Ax_1 + f_1(t) + Ax_2 + f_2(t) = Ax(t) + f(t).$$

■

Далее в этом разделе мы подробно рассмотрим процедуру построения частного решения в случае, когда неоднородность $f(t)$ имеет специальный вид, а точнее, является векторным квазимногочленом.

Определение 4.4. Вектор-функцию $f(t)$ вида

$$f(t) = e^{\mu t} P_m(t), \quad (4.15)$$

где μ — некоторое, вообще говоря, комплексное число, а $P_m(t)$ — векторный алгебраический многочлен степени m , называют векторным квазимногочленом.

Как оказывается, в случае, когда вектор-функция $f(t)$ является квазимногочленом, частное решение системы (4.13) также можно найти в виде квазимногочлена.

Лемма 4.3. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — собственное число матрицы A и h_1, \dots, h_k — некоторая отвечающая ему жорданова цепочка из базиса \mathbb{C}^n . Тогда если

$$f(t) = e^{\mu t} \left(P_m^{(1)}(t)h_1 + \dots + P_m^{(k)}(t)h_k \right),$$

где $P_m^{(j)}(t)$ ($j = 1, \dots, k$) — скалярные алгебраические многочлены степени не выше m , то существует и единственно частное решение системы (4.13) вида

$$x_0(t) = \begin{cases} e^{\mu t} Q_m(t), & \mu \neq \lambda, \\ te^{\mu t} Q_{m+k-1}(t), & \mu = \lambda, \end{cases}$$

где $Q_m(t)$ и $Q_{m+k-1}(t)$ — векторные многочлены степени m и $(m + k - 1)$ соответственно.

Доказательство. Будем искать частное решение системы (4.13) в виде

$$x_0(t) = \sum_{j=1}^k \varphi_j(t) h_j, \quad (4.16)$$

где $\varphi_j(t)$ ($j = 1, \dots, k$) — подлежащие определению скалярные функции. Подставляя выражение (4.16) в систему (4.13) и используя равенства (4.9), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \dot{\varphi}_j(t) h_j &= \sum_{j=1}^k \varphi_j(t) A h_j + e^{\mu t} \sum_{j=1}^k P_m^{(j)}(t) h_j = \\ &= \lambda \varphi_1(t) h_1 + \sum_{j=2}^k \varphi_j(t) (\lambda h_j + h_{j-1}) + e^{\mu t} \sum_{j=1}^k P_m^{(j)}(t) h_j. \end{aligned}$$

Поскольку векторы h_1, \dots, h_k линейно независимы, из этого равенства следует, что

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1(t) &= \lambda \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + e^{\mu t} P_m^{(1)}(t), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dot{\varphi}_{k-1}(t) &= \lambda \varphi_{k-1}(t) + \varphi_k(t) + e^{\mu t} P_m^{(k-1)}(t), \\ \dot{\varphi}_k(t) &= \lambda \varphi_k(t) + e^{\mu t} P_m^{(k)}(t). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Решаем эту систему, начиная с последнего уравнения. Если $\mu \neq \lambda$, то в каждом из этих уравнений имеет место нерезонансный случай. Тогда в силу теоремы 3.3 существует единственное решение этой системы вида

$$\varphi_k(t) = e^{\mu t} Q_m^{(k)}(t), \quad \dots, \quad \varphi_1(t) = e^{\mu t} Q_m^{(1)}(t),$$

где $Q_m^{(j)}(t)$ ($j = 1, \dots, k$) — алгебраические многочлены степени не выше m . В силу (4.16) система уравнений (4.13) имеет тогда единственное решение вида

$$x_0(t) = e^{\mu t} \sum_{j=1}^k Q_m^{(j)}(t) h_j = e^{\mu t} Q_m(t),$$

где $Q_m(t)$ — векторный многочлен степени m .

Если $\mu = \lambda$, то в каждом из уравнений системы (4.17) имеет место резонансный случай. Кратность корня μ как корня соответствующего

характеристического многочлена равна, очевидно, 1. Следовательно, в силу теоремы 3.3 система (4.17) имеет единственное решение вида

$$\varphi_k(t) = te^{\mu t} Q_m^{(k)}(t), \quad \varphi_{k-1}(t) = te^{\mu t} Q_{m+1}^{(k-1)}(t), \quad \dots, \quad \varphi_1(t) = te^{\mu t} Q_{m+k-1}^{(1)}(t),$$

где $Q_m^{(k)}(t), \dots, Q_{m+k-1}^{(1)}(t)$ — алгебраические многочлены степени $m, \dots, m+k-1$ соответственно. Вспоминая (4.16), заключаем, что система (4.13) имеет единственное решение вида

$$x_0(t) = te^{\mu t} \sum_{j=1}^k Q_{m+k-j}^{(j)}(t) h_j = te^{\mu t} Q_{m+k-1}(t),$$

где $Q_{m+k-1}(t)$ — векторный многочлен степени $m+k-1$. ■

Теперь мы можем сформулировать общий результат.

Теорема 4.6. Пусть в системе (4.13) функция $f(t)$ является квазимногочленом вида (4.15). Тогда эта система всегда имеет частное решение вида

$$x_0(t) = e^{\mu t} Q_{m+k}(t), \quad (4.18)$$

где $Q_{m+k}(t)$ — векторный многочлен степени $m+k$. Причем $k=0$, если μ не является собственным числом матрицы A , и k не превосходит длины максимальной жордановой цепочки для μ , если μ является собственным числом матрицы A .

Доказательство. В силу теоремы 4.4 в пространстве \mathbb{C}^n всегда можно выбрать базис, составленный из s жордановых цепочек вида $h_1^{(j)}, h_2^{(j)}, \dots, h_{k_j}^{(j)}$ ($j=1, \dots, s$), отвечающих соответственно собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ матрицы A . Раскладывая коэффициенты многочлена $P_m(t)$ по указанному базису, получаем

$$P_m(t) = \sum_{j=1}^s \left(P_1^{(j)}(t) h_1^{(j)} + \dots + P_{k_j}^{(j)}(t) h_{k_j}^{(j)} \right).$$

Среди алгебраических многочленов $P_1^{(j)}(t), \dots, P_{k_j}^{(j)}(t)$ ($j=1, \dots, s$) имеется хотя бы один степени m . Используя принцип суперпозиции (лемма 4.2), ищем частное решение системы (4.13) в виде

$$x_0(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_s(t), \quad (4.19)$$

где $x_j(t)$ ($j=1, \dots, s$) — частное решение следующей системы:

$$\dot{x}_j(t) = Ax_j + e^{\mu t} \left(P_1^{(j)}(t) h_1^{(j)} + \dots + P_{k_j}^{(j)}(t) h_{k_j}^{(j)} \right). \quad (4.20)$$

Из леммы 4.3 следует, что, если $\mu \neq \lambda_j$ для всех $j = 1, \dots, s$, то каждая система вида (4.20) имеет частное решение $x_j(t) = e^{\mu t} Q_m^{(j)}(t)$, где $Q_m^{(j)}(t)$ — вектор-многочлен степени m . Следовательно, в этом случае система (4.13) имеет частное решение вида (4.18) с $k = 0$.

Предположим теперь, что μ является собственным числом матрицы A . Тогда в силу леммы 4.3 система (4.20) имеет частное решение $x_j(t) = e^{\mu t} Q_m^{(j)}(t)$, если $\lambda_j \neq \mu$, и $x_j(t) = t e^{\mu t} Q_{m+k_j-1}^{(j)}(t)$, если $\lambda_j = \mu$. Здесь $Q_m^{(j)}(t)$ и $Q_{m+k_j-1}^{(j)}(t)$ — векторные многочлены степени m и $m + k_j - 1$ соответственно. Учитывая теперь (4.19), заключаем, что система (4.13) имеет частное решение вида (4.18). ■

Частное решение (4.18) системы (4.13) на практике ищут обычно с помощью метода неопределенных коэффициентов. Если длина максимальной жордановой цепочки k для собственного числа μ не известна, то число k полагают равным алгебраической кратности μ .

В том случае, когда вектор-функция $f(t)$ в системе (4.13) не является векторным квазимногочленом, для нахождения частного решения обычно используют метод вариации произвольных постоянных. Этот метод мы обсудим чуть позднее.

Упражнение 4.3. Построить общее решение линейной неоднородной системы уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y - 2e^t, \\ \dot{y} = x - y - e^t, \end{cases} & \quad \text{б) } \begin{cases} \dot{x} = 5x - y + 5 \sin t, \\ \dot{y} = 4x + y - \cos t, \end{cases} \\ & \quad \text{в) } \begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y + t, \\ \dot{y} = x - 2z - 3t^2, \\ \dot{z} = -y + 2z + 3t - 2. \end{cases} \end{aligned}$$

4.3. Матричная экспонента и ее свойства. Вычисление матричной экспоненты

Пусть A — $(n \times n)$ -матрица, элементами которой являются действительные или комплексные числа.

Определение 4.5. Матричной экспонентой e^{tA} называют сумму степенного матричного ряда

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2} + \dots \quad (4.21)$$

Корректность определения матричной экспоненты в виде бесконечного ряда (4.21) обосновывается в следующей лемме.

Лемма 4.4. *Ряд (4.21) для любой матрицы A сходится равномерно на любом отрезке $t \in [t_1, t_2]$ по матричной норме.*

Доказательство. Положим

$$S^{(l)}(t) = \sum_{k=0}^l \frac{t^k A^k}{k!}.$$

Поскольку все векторные (а следовательно, и матричные) нормы в конечномерном пространстве эквивалентны (см. теорему 1.2), нам достаточно установить равномерную сходимость ряда (4.21) в какой-нибудь из матричных норм. Выберем в качестве такой нормы индуцированную матричную норму $\|\cdot\|_\infty$, определяемую формулой (1.11) из раздела 1.1. В силу свойств индуцированной матричной нормы имеем

$$\begin{aligned} \|S^{(l+p)}(t) - S^{(l)}(t)\|_\infty &= \left\| \sum_{k=l+1}^{l+p} \frac{t^k A^k}{k!} \right\|_\infty \leq \sum_{k=l+1}^{l+p} \frac{|t|^k \|A\|_\infty^k}{k!} \leq \\ &\leq \sum_{k=l+1}^{l+p} \frac{a^k}{k!}, \quad a = \max\{|t_1|, |t_2|\}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Поскольку числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \quad (4.23)$$

сходится для любого $a \in \mathbb{R}$, выражение в правой части (4.22) по критерию Коши может быть сделано меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ для всех $l \geq N(\varepsilon)$ и $p \in \mathbb{N}$. Откуда выводим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\|S^{(l+p)}(t) - S^{(l)}(t)\|_\infty < \varepsilon, \quad l \geq N(\varepsilon), \quad p \in \mathbb{N}, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Далее, из определения используемой нормы следует, что для всех $l \geq N(\varepsilon)$, $p \in \mathbb{N}$ и $t \in [t_1, t_2]$ выполнены неравенства

$$|s_{ij}^{(l+p)}(t) - s_{ij}^{(l)}(t)| \leq \|S^{(l+p)}(t) - S^{(l)}(t)\|_\infty < \varepsilon, \quad (4.24)$$

где $s_{ij}^{(l)}(t)$ и $s_{ij}^{(l+p)}(t)$ — элементы матриц $S^{(l)}(t)$ и $S^{(l+p)}(t)$ соответственно. В силу критерия Коши равномерной сходимости функциональной последовательности из (4.24) следует, что $s_{ij}^{(l)}(t) \Rightarrow s_{ij}^{(\infty)}(t)$

на отрезке $t \in [t_1, t_2]$. Устремляя в (4.24) число p к бесконечности, заключаем, что

$$|s_{ij}^{(\infty)}(t) - s_{ij}^{(l)}(t)| \leq \varepsilon, \quad l \geq N(\varepsilon).$$

Пусть элементами матрицы e^{tA} являются числа $s_{ij}^{(\infty)}(t)$. Тогда

$$\|e^{tA} - S^{(l)}(t)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |s_{ij}^{(\infty)}(t) - s_{ij}^{(l)}(t)| \leq n\varepsilon, \quad l \geq N(\varepsilon).$$

В силу произвольности величины $\varepsilon > 0$, устанавливаем требуемый результат. ■

Замечание 1. Из неравенств (4.22) в силу сходимости ряда (4.23) следует, что ряд (4.21) для любой матрицы A и любого $t \in \mathbb{R}$ является абсолютно сходящимся в том смысле, что сходится числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k \|A\|^k}{k!}.$$

Лемма 4.5. Пусть квадратные $(n \times n)$ -матрицы A и B коммутируют, т. е. $AB = BA$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}. \quad (4.25)$$

Доказательство. В силу определения матричной экспоненты имеем

$$\begin{aligned} e^{tA} e^{tB} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m B^m}{m!} \right) = \left(I + tA + \dots + \frac{t^p A^p}{p!} + \dots \right) \times \\ &\times \left(I + tB + \dots + \frac{t^q B^q}{q!} + \dots \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^m \frac{t^p A^p}{p!} \frac{t^{m-p} B^{m-p}}{(m-p)!} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{p=0}^m \frac{m!}{p!(m-p)!} A^p B^{m-p}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

В силу известного результата из курса анализа о перемножении числовых рядов (см., например, [9]) абсолютная сходимость ряда (4.21) гарантирует законность осуществленных в (4.26) операций. Далее,

поскольку матрицы A и B коммутируют, то имеет место формула бинома Ньютона

$$(A + B)^m = \sum_{p=0}^m C_m^p A^p B^{m-p}, \quad C_m^p = \frac{m!}{p!(m-p)!}.$$

Учитывая это равенство в (4.26), окончательно получаем

$$e^{tA} e^{tB} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} (A + B)^m = e^{t(A+B)}.$$

■

Упражнение 4.4. Показать, что если матрицы A и B не коммутируют, то равенство (4.25), вообще говоря, может не иметь места.

Следствие 4.3. Справедливы формулы

$$e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1A} e^{t_2A}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R} \quad (4.27)$$

$$(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.28)$$

Доказательство. Для обоснования первой из этих формул достаточно в (4.25) выбрать $t = 1$, в качестве матрицы A взять матрицу t_1A и положить $B = t_2A$. Вторая формула получается из (4.25), если положить $B = -A$ и заметить, что $e^{\mathbb{O}} = I$, где \mathbb{O} — нулевая матрица. ■

Заметим, что из равенства (4.28) следует невырожденность матричной экспоненты e^{tA} для всех $t \in \mathbb{R}$.

Лемма 4.6. Матричная экспонента e^{tA} как матричная функция переменной t дифференцируема при всех $t \in \mathbb{R}$, и справедливы равенства

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA} = e^{tA}A. \quad (4.29)$$

Доказательство. Заметим, что второе из равенств (4.29), т. е. коммутируемость матриц A и e^{tA} , вытекает из представления матричной экспоненты в виде ряда (4.21) и коммутируемости матрицы A с любой ее степенью A^k , $k = 0, 1, \dots$. Проверим теперь справедливость

первого равенства в (4.29). Ряд, составленный из производных члена ряда (4.21), имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{t^k A^k}{k!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^k}{(k-1)!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = A e^{tA}.$$

В силу леммы 4.4 этот ряд, как и исходный ряд (4.21), равномерно сходится на любом отрезке $[t_1, t_2]$. Вновь апеллируя к известному из курса анализа результату о дифференцировании функциональных рядов (см., в частности, [9]), заключаем, что

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{t^k A^k}{k!} \right) = A e^{tA}.$$

■

Положим

$$x(t) = e^{tA} x_0, \quad x_0 \in \mathbb{C}^n. \quad (4.30)$$

Из леммы 4.6 выводим, что

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}(e^{tA}) x_0 = A e^{tA} x_0 = A x(t).$$

Следовательно, вектор-функция $x(t)$, определяемая формулой (4.30), является решением однородной системы (4.4) с начальным условием $x(0) = x_0$. Выбирая в качестве начального условия x_0 векторы e_i ($i = 1, \dots, n$), определяемые формулой (1.21), приходим к выводу, что столбцы матрицы e^{tA} являются решениями системы (4.4). Более того, в силу следствия 4.1 эти решения образуют базис в пространстве всех решений системы (4.4). Матрицы $X(t)$, обладающие таким свойством, называют фундаментальными матрицами системы (4.4).

Таким образом, мы получили практический способ вычисления матрицы e^{tA} . Необходимо построить решения системы (4.4) с начальными условиями $x_i(0) = e_i$ ($i = 1, \dots, n$) и расположить их в естественном порядке по столбцам некоторой матрицы — это и будет матрица e^{tA} . Другой, алгебраический, способ построения этой матрицы мы излагаем ниже.

Лемма 4.7. Пусть матрицы A и B подобны, т. е. $B = C^{-1}AC$ для некоторой невырожденной матрицы C . Тогда $e^{tB} = C^{-1}e^{tA}C$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Заметим, что

$$B^2 = (C^{-1}AC)(C^{-1}AC) = C^{-1}A^2C.$$

Аналогично проверяется, что $B^k = C^{-1}A^kC$ для всех $k = 0, 1, \dots$. Тогда в силу (4.21) имеем

$$e^{tB} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k B^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k C^{-1}A^kC}{k!} = C^{-1}e^{tA}C, \quad t \in \mathbb{R}.$$

■

Лемма 4.8. Пусть $(n \times n)$ -матрица A имеет блочно-диагональную форму

$$A = \begin{pmatrix} B & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & C \end{pmatrix},$$

где B — $k \times k$ -матрица, C — $m \times m$ -матрица ($k + m = n$), а символом \mathbb{O} обозначены нулевые матрицы соответствующих размеров. Тогда

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{tB} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & e^{tC} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. В силу операций над блочно-диагональными матрицами из (4.21) следует, что

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k B^k}{k!} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k C^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{tB} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & e^{tC} \end{pmatrix}.$$

■

Согласно теореме 4.4, в пространстве \mathbb{C}^n существует базис, составленный из $s \leq n$ жордановых цепочек $h_1^{(l)}, h_2^{(l)}, \dots, h_{k_l}^{(l)}$ ($l = 1, \dots, s$), $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$, отвечающих собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$. В силу равенств (4.10) в этом базисе матрица A имеет следующую блочно-диагональную форму:

$$J = \text{diag}(J_{\lambda_1}, J_{\lambda_2}, \dots, J_{\lambda_s}) = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & J_{\lambda_2} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \ddots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & J_{\lambda_s} \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

где $(k_l \times k_l)$ -матрица J_{λ_l} имеет вид

$$J_{\lambda_l} = \begin{pmatrix} \lambda_l & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_l & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_l & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_l & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_l \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Матрицу J называют жордановой нормальной формой матрицы A , а матрицу J_{λ_l} — жордановой клеткой или жордановым блоком (иногда — жордановым ящиком). Из леммы 4.8 выводим, что

$$e^{tJ} = \text{diag}(e^{tJ_{\lambda_1}}, e^{tJ_{\lambda_2}}, \dots, e^{tJ_{\lambda_s}}), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.33)$$

Пусть по столбцам $(n \times n)$ -матрицы C расположены жордановы цепочки $h_1^{(l)}, h_2^{(l)}, \dots, h_{k_l}^{(l)}$ ($l = 1, \dots, s$). Нетрудно проверить, что в силу (4.10) оказывается выполненным равенство $CJ = AC$, а следовательно, $J = C^{-1}AC$. Используя теперь лемму 4.7, заключаем, что $e^{tJ} = C^{-1}e^{tA}C$, а значит,

$$e^{tA} = Ce^{tJ}C^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.34)$$

Таким образом, в силу формул (4.33), (4.34) задача вычисления матричной экспоненты e^{tA} сводится по существу к вычислению матричной экспоненты $e^{tJ_{\lambda_l}}$ для жорданова блока (4.32).

Пусть $(k_l \times k_l)$ -матрица Δ_l определяется формулой (4.32) с той лишь разницей, что по диагонали стоит число 0, а не собственное число λ_l . Очевидно, что

$$J_{\lambda_l} = \lambda_l I_l + \Delta_l, \quad (4.35)$$

где I_l — единичная $(k_l \times k_l)$ -матрица. В силу коммутативности матриц I_l из Δ_l , согласно лемме 4.5, имеем

$$e^{tJ_{\lambda_l}} = e^{t\lambda_l I_l} e^{t\Delta_l} = e^{\lambda_l t} e^{t\Delta_l}. \quad (4.36)$$

Здесь мы воспользовались вытекающим из представления (4.21) очевидным равенством

$$e^{t\lambda_l I_l} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \lambda_l^k I_l^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \lambda_l^k}{k!} I_l = e^{\lambda_l t} I_l.$$

Далее, непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\Delta_l^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \Delta_l^{k_l-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

и $\Delta_l^m = \mathbb{O}$ для всех $m \geq k_l$. Откуда выводим, что

$$e^{t\Delta_l} = \sum_{j=0}^{k_l-1} \frac{t^j \lambda_l^j}{j!} \Delta_l^j.$$

С учетом (4.36) окончательно получаем

$$e^{tJ_{\lambda_l}} = e^{\lambda_l t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \dots & \frac{t^{k_l-1}}{(k_l-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{k_l-2}}{(k_l-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Используя представление (4.38) в формуле (4.33), с учетом (4.34) вычисляем матрицу e^{tA} .

Упражнение 4.5. Вычислить матричную экспоненту e^{tA} , если матрица A имеет вид:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad б) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad в) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.4. Решение линейных систем с помощью матричной экспоненты. Оценка матричной экспоненты

В этом разделе мы продолжим изучение задачи Коши (4.2), (4.3) и докажем отмеченную нами ранее теорему 4.1, немного расширив ее формулировку. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.7. Пусть вектор-функция $f(t)$ непрерывна на некотором промежутке $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$. Тогда для любого $t_0 \in \mathcal{I}$ решение задачи Коши (4.2), (4.3) существует, единственно и для всех $t \in \mathcal{I}$ определяется формулой

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}f(s)ds. \quad (4.39)$$

Доказательство. В системе (4.2) перейдем к новой неизвестной вектор-функции $y(t)$ с помощью замены $x(t) = e^{tA}y(t)$. В силу невырожденности матрицы e^{tA} эта замена обратима. Подставляя ее в (4.2), с учетом леммы 4.6 получаем

$$\dot{x} = Ae^{tA}y + e^{tA}\dot{y} = Ae^{tA}y + f(t).$$

Откуда в силу (4.28) выводим

$$\dot{y} = e^{-tA}f(t).$$

Интегрируя это равенство на промежутке $[t_0, t]$, приходим к следующему представлению для вектор-функции $y(t)$:

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-sA}f(s)ds, \quad y(t_0) = e^{-t_0A}x(t_0).$$

Возвращаясь теперь к исходной вектор-функции $x(t)$, с учетом (4.3) и равенства (4.27) получаем формулу (4.39). ■

Выбирая в качестве x_0 в формуле (4.39) произвольный n -мерный вектор (действительно- или комплекснозначный), получаем запись общего решения неоднородной системы с помощью матричной экспоненты:

$$x(t) = e^{tA}c + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}f(s)ds. \quad (4.40)$$

В частности, общее решение однородной системы (4.4) может быть представлено в следующей компактной форме (сравни с (4.12)):

$$x(t) = e^{tA}c, \quad c \in \mathbb{C}^n. \quad (4.41)$$

В завершение этого раздела приведем один результат, важный с точки зрения различных приложений.

Теорема 4.8. Пусть матрица A имеет жорданову форму (4.31). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется действительное число $M(\varepsilon) > 0$ такое, что справедлива оценка:

$$\|e^{tA}\| \leq M(\varepsilon)e^{(\alpha+\varepsilon)t}, \quad t \geq 0, \quad (4.42)$$

где $\alpha = \max(\operatorname{Re} \lambda_1, \dots, \operatorname{Re} \lambda_s)$.

Доказательство. В силу эквивалентности всех матричных норм достаточно установить неравенство (4.42) для какой-нибудь матричной нормы, например, для $\|\cdot\|_\infty$. Из (4.34) следует, что

$$\|e^{tA}\|_\infty \leq \|C\|_\infty \|e^{tJ}\|_\infty \|C^{-1}\|_\infty = M_1 \|e^{tJ}\|_\infty, \quad (4.43)$$

где $M_1 = \|C\|_\infty \|C^{-1}\|_\infty > 0$. Далее, из (4.33) и определения используемой нормы (1.11) выводим, что

$$\begin{aligned} \|e^{tJ}\|_\infty &= \max(\|e^{tJ_{\lambda_1}}\|_\infty, \dots, \|e^{tJ_{\lambda_s}}\|_\infty) \leq \\ &\leq \|e^{tJ_{\lambda_1}}\|_\infty + \dots + \|e^{tJ_{\lambda_s}}\|_\infty. \end{aligned} \quad (4.44)$$

В силу (4.38) для всех $t \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \|e^{tJ_{\lambda_l}}\|_\infty &= |e^{\lambda_l t}| \max\left(1, 1+t, \dots, 1+t+\dots \frac{t^{k_l-1}}{(k_l-1)!}\right) \leq \\ &\leq |e^{\lambda_l t}| \left(1+t+\dots \frac{t^{k_l-1}}{(k_l-1)!}\right) = e^{\operatorname{Re} \lambda_l t} P_{k_l-1}(t). \end{aligned}$$

Используя полученное неравенство в (4.44), получаем

$$\begin{aligned} \|e^{tJ}\|_\infty &\leq e^{\operatorname{Re} \lambda_1 t} P_{k_1-1}(t) + \dots + e^{\operatorname{Re} \lambda_s t} P_{k_s-1}(t) \leq \\ &\leq e^{\alpha t} (P_{k_1-1}(t) + \dots + P_{k_s-1}(t)) = e^{\alpha t} P_{k-1}(t). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Здесь $P_{k-1}(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{k-1} t^{k-1}$ — некоторый алгебраический многочлен с положительными коэффициентами a_0, \dots, a_{k-1} степени $k-1$, где $k = \max(k_1, \dots, k_s)$. Заметим, что для любого $j = 0, 1, \dots$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M_2(j, \varepsilon)$, что

$$t^j \leq M_2(j, \varepsilon) e^{\varepsilon t} \quad (4.46)$$

для всех $t \geq 0$. Неравенство (4.46) может быть доказано простой индукцией по параметру j . Используя это неравенство в (4.45), получаем

$$\|e^{tJ}\|_\infty \leq e^{(\alpha+\varepsilon)t} M_3(\varepsilon),$$

где $M_3(\varepsilon) = a_0 M_2(0, \varepsilon) + a_1 M_2(1, \varepsilon) + \dots + a_{k-1} M_2(k-1, \varepsilon)$ и $t \geq 0$. Возвращаясь теперь к оценке (4.43), устанавливаем справедливость неравенства (4.42) с $M(\varepsilon) = M_1 M_3(\varepsilon)$ для нормы $\|\cdot\|_\infty$.

Теорема доказана. ■

Замечание 1. Предположим, что собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ матрицы A имеют неположительные действительные части, т. е. $\operatorname{Re} \lambda_l \leq 0$ для всех $l = 1, \dots, s$, и, кроме того, собственным числам, для которых $\operatorname{Re} \lambda_l = 0$, отвечают жордановы клетки порядка 1 в жордановой форме (4.31) матрицы A . Тогда найдется действительное число $M > 0$ такое, что

$$\|e^{tA}\| \leq M, \quad t \geq 0. \quad (4.47)$$

Действительно, если $\operatorname{Re} \lambda_l = 0$, то соответствующая оценка блока $e^{tJ_{\lambda_l}}$ имеет вид

$$\|e^{tJ_{\lambda_l}}\|_\infty = |e^{\lambda_l t}| = 1.$$

Тогда неравенство (4.45) может быть переписано следующим образом:

$$\|e^{tJ}\|_\infty \leq e^{\alpha t} P_{k-1}(t) + N_1,$$

где N_1 — число блоков в жордановой форме матрицы A , для которых $\operatorname{Re} \lambda_l = 0$, и

$$\alpha = \max(\operatorname{Re} \lambda_l \mid \operatorname{Re} \lambda_l < 0, l = 1, \dots, s).$$

Осталось заметить, что поскольку $\alpha < 0$, то найдется такое число $N_2 > 0$, что

$$e^{\alpha t} P_{k-1}(t) \leq N_2, \quad t \geq 0.$$

Следствие 4.4. Пусть все собственные числа матрицы A имеют отрицательные действительные части, т. е. $\operatorname{Re} \lambda_l < 0$ для всех $l = 1, \dots, s$. Тогда все решения однородной системы (4.4) стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Действительно, в силу представления (4.41) и неравенства (4.42) имеем

$$\|x(t)\| \leq \|e^{tA}\| \|c\| \leq M(\varepsilon) e^{(\alpha+\varepsilon)t}, \quad t \geq 0.$$

Поскольку $\alpha = \max(\operatorname{Re} \lambda_1, \dots, \operatorname{Re} \lambda_s) < 0$, то, выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым так, что $-\gamma = \alpha + \varepsilon < 0$, можно добиться выполнения неравенства

$$\|x(t)\| \leq M(\varepsilon) e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0.$$

Отсюда следует, что $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. ■

Глава 5

Линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

5.1. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши

В этой главе речь пойдет о системах линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad (5.1)$$

где $A(t)$ — $(n \times n)$ -матрица, элементами которой являются скалярные функции $a_{ij}(t)$ ($i, j = 1, \dots, n$) со значениями в \mathbb{R} или \mathbb{C} , а $f(t)$ — заданная вектор-функция, принимающая значения из \mathbb{R}^n или \mathbb{C}^n . В дальнейшем будем предполагать, что все функции $a_{ij}(t)$ и все компоненты $f_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) вектор-функции $f(t)$ непрерывны на некотором промежутке $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$. Точно так же, как и для систем с постоянными коэффициентами, в этом случае определяется понятие решения системы (5.1).

Определение 5.1. *Непрерывно-дифференцируемая на промежутке \mathcal{I} вектор-функция $x(t)$, обращающая все уравнения системы (5.1) в тождества для всех $t \in \mathcal{I}$, называется решением системы (5.1).*

Рассмотрим задачу нахождения решения системы (5.1), удовлетворяющего начальному условию

$$x(t_0) = x_0, \quad (5.2)$$

где $t_0 \in \mathcal{I}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$. Такая задача называется задачей Коши. Перед тем как перейти к изложению основного результата этого раздела, сформулируем один вспомогательный результат, представляющий самостоятельный интерес. Справедлива следующая лемма, называемая обычно леммой Гронуолла или Гронуолла–Беллмана.

Лемма 5.1. *Пусть непрерывная и неотрицательная на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ скалярная функция $\varphi(t)$ удовлетворяет неравенству*

$$\varphi(t) \leq C + \alpha \int_{t_0}^t \varphi(s) ds, \quad (5.3)$$

где $C \geq 0$, $\alpha > 0$ и $t \in [t_0, t_0 + T]$. Тогда для всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ справедливо неравенство

$$\varphi(t) \leq Ce^{\alpha(t-t_0)}. \quad (5.4)$$

Доказательство. Положим

$$I(t) = \int_{t_0}^t \varphi(s) ds.$$

Из (5.3) следует, что

$$0 \leq I'(t) = \varphi(t) \leq C + \alpha I(t)$$

Умножая обе части этого неравенства на $e^{-\alpha(t-t_0)}$, получаем

$$\frac{d}{dt} \left(I(t) e^{-\alpha(t-t_0)} \right) \leq C e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

Проинтегрируем это неравенство от t_0 до t и учтем, что $I(t_0) = 0$. Тогда получим

$$I(t)e^{-\alpha(t-t_0)} \leq \frac{C}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(t-t_0)})$$

или

$$I(t) \leq \frac{C}{\alpha}(e^{\alpha(t-t_0)} - 1). \quad (5.5)$$

В силу (5.3) имеет место неравенство

$$\varphi(t) \leq C + \alpha I(t).$$

Используя в этом неравенстве оценку (5.5), получаем (5.4). ■

Следствие 5.1. Пусть непрерывная и неотрицательная на отрезке $[t_1, t_2]$ скалярная функция $\varphi(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\varphi(t) \leq C + \alpha \left| \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right|, \quad (5.6)$$

где $C \geq 0$, $\alpha > 0$ и $t_0, t \in [t_1, t_2]$. Тогда для всех $t \in [t_1, t_2]$ справедливо неравенство

$$\varphi(t) \leq Ce^{\alpha|t-t_0|}. \quad (5.7)$$

Теперь мы можем установить однозначную разрешимость задачи (5.1), (5.2).

Теорема 5.1. Пусть $t_0 \in [t_1, t_2] \subset \mathcal{I}$, тогда на отрезке $[t_1, t_2]$ существует и единственно решение задачи Коши (5.1), (5.2).

Доказательство. Легко проверяется (см., в частности, лемму 2.1), что решение задачи Коши (5.1), (5.2) на отрезке $[t_1, t_2]$ эквивалентно решению интегрального уравнения

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [A(s)x(s) + f(s)] ds, \quad t \in [t_1, t_2]. \quad (5.8)$$

Покажем, что это уравнение имеет единственное непрерывное (а следовательно, и непрерывно дифференцируемое) решение, определенное на отрезке $[t_1, t_2]$. Воспользуемся методом последовательных приближений.

Положим $x^{(0)}(t) \equiv x_0$ и определим вектор-функции $x^{(n)}(t)$, $n \in \mathbb{N}$, согласно формуле

$$x^{(n)}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [A(s)x^{(n-1)}(s) + f(s)] ds, \quad t \in [t_1, t_2]. \quad (5.9)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \|x^{(1)}(t) - x^{(0)}(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [A(s)x_0 + f(s)] ds \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| ds \right| \|x_0\| + \left| \int_{t_0}^t \|f(s)\| ds \right| \leq M_1 \|x_0\| |t - t_0| + M_2 |t - t_0| = \\ &= M |t - t_0|, \quad M = M_1 \|x_0\| + M_2, \quad t \in [t_1, t_2], \end{aligned} \quad (5.10)$$

где

$$M_1 = \max_{t \in [t_1, t_2]} \|A(t)\|, \quad M_2 = \max_{t \in [t_1, t_2]} \|f(t)\|.$$

Из (5.9) следует, что

$$\begin{aligned} \|x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t A(s) [x^{(n)}(s) - x^{(n-1)}(s)] ds \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| \|x^{(n)}(s) - x^{(n-1)}(s)\| ds \right| \leq M_1 \left| \int_{t_0}^t \|x^{(n)}(s) - x^{(n-1)}(s)\| ds \right| \end{aligned}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [t_1, t_2]$. В частности, при $n = 1$ с учетом (5.10) получаем

$$\|x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t)\| \leq M_1 M \int_{t_0}^t |s - t_0| ds = \frac{M_1 M}{2} |t - t_0|^2.$$

Используя теперь индукцию по $n \in \mathbb{N}$, легко устанавливаем, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [t_1, t_2]$ справедливо неравенство

$$\|x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t)\| \leq M_1 \left| \int_{t_0}^t \frac{M_1^{n-1} M}{n!} |s - t_0|^n ds \right| = \frac{M_1^n M}{(n+1)!} |t - t_0|^{n+1}.$$

Откуда, в частности, следует, что

$$\|x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t)\| \leq \frac{M_1^n MT^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (5.11)$$

где $T = \max(|t_1 - t_0|, |t_2 - t_0|)$. Заметим, что

$$x^{(n)}(t) = x^{(0)}(t) + (x^{(1)}(t) - x^{(0)}(t)) + \dots + (x^{(n)}(t) - x^{(n-1)}(t)).$$

В силу (5.11) функциональный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x^{(k+1)}(t) - x^{(k)}(t)) \quad (5.12)$$

мажорируется по норме сходящимся числовым рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_1^k MT^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Следовательно, ряд (5.12) (а значит, и последовательность $x_n(t)$) равномерно сходится на отрезке $[t_1, t_2]$, т. е. $x_n(t) \Rightarrow x(t)$. Таким образом, в силу известного результата из курса анализа (см., например, [9]) мы можем перейти к пределу под интегралом в (5.9) при $n \rightarrow \infty$. Устремляя в (5.9) число n к бесконечности, заключаем, что предельная вектор-функция $x(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (5.8).

Покажем теперь, что построенное нами на отрезке $[t_1, t_2]$ решение $x(t)$ интегрального уравнения (5.8) единственно. Предположим противное, что существует еще одно решение $y(t) \not\equiv x(t)$ уравнения (5.8), определенное на этом отрезке. Полагая $z(t) = x(t) - y(t)$, убеждаемся, что вектор-функция $z(t)$ удовлетворяет уравнению

$$z(t) = \int_{t_0}^t A(s)z(s)ds, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Откуда

$$\|z(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| \|z(s)\| ds \right| \leq M_1 \left| \int_{t_0}^t \|z(s)\| ds \right|, \quad t \in [t_1, t_2],$$

т. е. выполнено неравенство типа (5.6) с $C = 0$. В силу леммы Гронуолла-Беллмана тогда для всех $t \in [t_1, t_2]$ должно быть выполнено неравенство (5.7), т. е. $z(t) \equiv 0$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. ■

5.2. Формула Лиувилля–Остроградского. Фундаментальная матрица линейной однородной системы

В этом разделе мы займемся изучением свойств решений линейной однородной системы с переменными коэффициентами

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (5.13)$$

Не ограничивая общности, будем считать, что элементы матрицы $A(t)$ суть непрерывные на всей оси функции. Тогда, согласно теореме 5.1, решения системы (5.13) непрерывно дифференцируемы для всех $t \in \mathbb{R}$.

Лемма 5.2. Пусть $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$ — решения системы (5.13) и c_1, c_2 — произвольные комплексные числа. Тогда вектор-функция

$$x(t) = c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t)$$

также является решением системы (5.13).

Доказательство очевидно. Совершенно аналогично теореме 4.2 из главы 4 устанавливается следующий результат.

Теорема 5.2. Множество всех решений системы (5.13) образует линейное пространство размерности n .

Таким образом, если $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ — произвольные линейно независимые решения системы (5.13), то любое ее решение допускает представление вида

$$x(t) = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_n x^{(n)}(t) \quad (5.14)$$

с некоторыми постоянными c_1, \dots, c_n . Такой набор вектор-функций называют фундаментальной системой решений. Напомним (см. следствие 4.1), что для построения такой системы достаточно взять какой-нибудь базис e_1, \dots, e_n в пространстве \mathbb{R}^n (или \mathbb{C}^n , если элементы матрицы $A(t)$ комплекснозначны) и построить решения системы (5.13) с начальными условиями $x_1(0) = e_1, \dots, x_n(0) = e_n$.

Пусть $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ — произвольные вектор-функции со значениями в \mathbb{R}^n или \mathbb{C}^n .

Определение 5.2. Определитель матрицы $X(t)$, по столбцам которой расположены вектор-функции $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$, называют определителем Вронского или вронскианом.

В случае, когда по столбцам матрицы $X(t)$ расположены решения системы (5.13), для вычисления определителя Вронского может быть получена явная формула. Эта формула носит название формулы Лиувилля–Остроградского.

Теорема 5.3. Пусть по столбцам матрицы $X(t)$ расположены решения $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ системы (5.13). Тогда для определителя Вронского $W(t) = \det X(t)$ этой системы вектор-функций справедлива следующая формула:

$$W(t) = W(t_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds \right\}, \quad t_0, t \in \mathbb{R}. \quad (5.15)$$

Доказательство. Пусть элементами матрицы $X(t)$ являются скалярные функции $x_{ij}(t)$ так, что j -й столбец этой матрицы есть вектор-функция $x^{(j)}(t) = (x_{1j}(t), x_{2j}(t), \dots, x_{nj}(t))^T$. Из определения определителя матрицы (см., например, [12]) следует, что

$$W(t) = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} (-1)^{N(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} x_{1\alpha_1}(t) x_{2\alpha_2}(t) \dots x_{n\alpha_n}(t), \quad (5.16)$$

где сумма берется по всем перестановкам $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ чисел от 1 до n и $N(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — число инверсий в перестановке. В силу (5.16) имеем

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) = & \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} (-1)^{N(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \dot{x}_{1\alpha_1}(t) x_{2\alpha_2}(t) \dots x_{n\alpha_n}(t) + \\ & + \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} (-1)^{N(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} x_{1\alpha_1}(t) \dot{x}_{2\alpha_2}(t) \dots x_{n\alpha_n}(t) + \dots + \\ & + \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} (-1)^{N(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} x_{1\alpha_1}(t) x_{2\alpha_2}(t) \dots \dot{x}_{n\alpha_n}(t). \end{aligned}$$

В силу определения определителя мы можем записать это равенство в следующем виде:

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dot{x}_{i1}(t) & \dot{x}_{i2}(t) & \dots & \dot{x}_{in}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} (i). \quad (5.17)$$

Поскольку вектор-функция $x^{(j)}(t) = (x_{1j}(t), x_{2j}(t), \dots, x_{nj}(t))^T$ удовлетворяет системе (5.13), то для i -й компоненты этой вектор-функции справедливо равенство

$$\dot{x}_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_{kj}(t). \quad (5.18)$$

Используя (5.18) в (5.17), а также свойства определителя, получаем

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) \det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{k1}(t) & x_{k2}(t) & \dots & x_{kn}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} (i). \quad (5.19)$$

Каждый из определителей в (5.19), за исключением тех, которые получаются при $k = i$, равен нулю, поскольку у соответствующей матрицы i -я и k -я строки одинаковы. Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= \sum_{i=1}^n a_{ii}(t) \det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{i1}(t) & x_{i2}(t) & \dots & x_{in}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} (i) = \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii}(t) W(t) = W(t) \operatorname{tr} A(t). \end{aligned}$$

Полученное равенство представляет собой скалярное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $W(t)$ с начальным условием в точке $t = t_0$, равным $W(t_0)$. Решение этой задачи определяется формулой типа (2.7) из главы 2. Применительно к рассматриваемому уравнению эта формула приводит нас к равенству (5.15). ■

Следствие 5.2. Пусть A — постоянная $(n \times n)$ -матрица и $t \in \mathbb{R}$. Имеет место формула

$$\det e^{tA} = e^{t \operatorname{tr} A}. \quad (5.20)$$

Действительно, из результатов раздела 4.3. следует, что по столбцам матричной экспоненты e^{tA} расположены решения системы (5.13)

с матрицей $A(t) \equiv A$. Выбирая в формуле (5.15) $t_0 = 0$ и замечая, что $\det e^{\mathbb{O}} = \det I = 1$, получаем равенство (5.20).

Пусть $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ — некоторые решения системы (5.13), расположенные по столбцам матрицы $X(t)$. Несложно проверить, что в этом случае матрица $X(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{X} = A(t)X. \quad (5.21)$$

Определение 5.3. Если вектор-функции $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ образуют фундаментальную систему решений, то составленную из них матрицу $X(t)$ называют фундаментальной матрицей системы (5.13).

В силу (5.14) все решения системы (5.13) могут быть записаны с помощью фундаментальной матрицы следующим образом:

$$x(t) = X(t)c, \quad (5.22)$$

где $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ — вектор, составленный из произвольных постоянных c_i ($i = 1, \dots, n$). Очевидно, что фундаментальная матрица $X(t)$ определяется не единственным образом, а зависит от выбора фундаментальной системы решений для (5.13). Имеет место следующее утверждение.

Лемма 5.3. Пусть $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — фундаментальные матрицы системы (5.13). Тогда существует такая невырожденная $(n \times n)$ -матрица C , что выполнено равенство

$$X_1(t) = X_2(t)C.$$

Доказательство. Заметим сначала, что если $X(t)$ — какая-нибудь фундаментальная матрица и C — невырожденная матрица, то матрица $Y(t) = X(t)C$ также является фундаментальной. Действительно, эта матрица удовлетворяет матричному уравнению (5.21):

$$\dot{Y} = \dot{X}C = A(t)X(t)C = A(t)Y(t),$$

а значит, ее столбцы являются решениями системы (5.13). Осталось проверить, что эти решения образуют фундаментальную систему. Поскольку $X(t)$ — фундаментальная матрица, то ее столбцы линейно

независимы. Отсюда в частности следует, что $\det X(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. В силу невырожденности матрицы C имеем

$$\det Y(t) = \det X(t) \det C \neq 0.$$

Следовательно, столбцы матрицы $Y(t)$ также линейно независимы, а значит, эта матрица фундаментальна.

Рассмотрим матрицы $Y_1(t) = X_1(t)X_1^{-1}(0)$ и $Y_2(t) = X_2(t)X_2^{-1}(0)$. В силу изложенного выше эти матрицы являются фундаментальными. Кроме того, $Y_1(0) = Y_2(0) = I$, а следовательно, по столбцам этих матриц стоят решения системы (5.13), удовлетворяющие в точке $t = 0$ одинаковым начальным условиям. Из теоремы 5.1 тогда следует, что эти решения совпадают для всех $t \in \mathbb{R}$, т. е. $Y_1(t) \equiv Y_2(t)$. Откуда

$$X_1(t) = X_2(t)X_2^{-1}(0)X_1(0) = X_2(t)C, \quad t \in \mathbb{R}.$$

■

Определение 5.4. *Фундаментальную матрицу $X(t)$, удовлетворяющую условию $X(t_0) = I$ (условие нормировки), называют матрицантом системы (5.13).*

Из леммы 5.3 следует, что если $X(t)$ — какая-нибудь фундаментальная матрица системы (5.13), то матрица $Y(t) = X(t)X^{-1}(t_0)$ будет матрицантом этой системы. Заметим, что, в отличие от произвольной фундаментальной матрицы, матрицант системы (5.13) при фиксированном t_0 в силу теоремы 5.1 определяется однозначно. Обозначим через $X(t, t_0)$ матрицант системы с условием нормировки $X(t_0) = I$ и будем рассматривать эту матричную функцию как функцию двух переменных.

Определение 5.5. *Фундаментальную матрицу $X(t, s)$ ($t, s \in \mathbb{R}$), являющуюся матрицантом системы (5.13) по переменной t с условием нормировки $X(s, s) = I$, называют матрицей Коши системы (5.13).*

Очевидно, что матрица Коши системы (5.13) определяется однозначно. Если $X(t)$ — произвольная фундаментальная матрица системы (5.13), то матрица Коши может быть выражена формулой

$$X(t, s) = X(t)X^{-1}(s). \quad (5.23)$$

Действительно, если переменная $s \in \mathbb{R}$ фиксирована, то согласно лемме 5.3 в левой и правой частях этого равенства стоят фундаментальные по переменной $t \in \mathbb{R}$ матрицы системы (5.13). Кроме того,

при $t = s$ эти матрицы совпадают, а значит, в силу теоремы 5.1 эти матрицы совпадают при всех t . Установим еще несколько формул, которые оказываются полезными при использовании матрицы Коши.

Лемма 5.4. Пусть $X(t, s)$ — матрица Коши системы (5.13). Справедливы следующие формулы:

$$X^{-1}(t, s) = X(s, t), \quad (5.24)$$

$$X(t, s) = X(t, t_0)X(t_0, s), \quad (5.25)$$

$$\det X(t, s) = \exp \left\{ \int_s^t \operatorname{tr} A(\tau) d\tau \right\} \quad (5.26)$$

для любых $t_0, t, s \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Используя формулу (5.23), заключаем

$$X^{-1}(t, s) = (X(t)X^{-1}(s))^{-1} = X(s)X^{-1}(t) = X(s, t).$$

Таким образом, равенство (5.24) установлено. Далее, матрицы в левой и правой части (5.25) при любом (фиксированном) значении переменной s являются фундаментальными матрицами системы (5.13) по переменной t с одинаковым условием нормировки при $t = t_0$, равным $X(t_0, s)$. Следовательно, эти матрицы в силу теоремы 5.1 совпадают при всех t . Наконец, формула (5.26) есть простое следствие формулы Лиувилля–Остроградского (5.15) с учетом условия нормировки $X(s, s) = I$. ■

Вообще говоря, построить матрицу Коши для произвольной системы (5.13) удастся лишь в редких случаях. Тем не менее в некоторых простых ситуациях это возможно сделать. Так, если система (5.13) одномерна, т. е. представляет собой линейное скалярное уравнение, в котором $A(t) \equiv a(t)$ — некоторая непрерывная скалярная функция, то из (5.26) следует, что

$$X(t, s) = \exp \left\{ \int_s^t a(\tau) d\tau \right\}.$$

Другой пример, в котором матрица $X(t, s)$ может быть легко указана, доставляет система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, т. е. система (5.13), в которой $A(t) \equiv A$. В

силу результатов, полученных в разделе 4.3., матрицантом этой системы является матрица $X(t) = e^{tA}$. Из представления (5.23) тогда следует, что

$$X(t, s) = e^{tA}e^{-sA} = e^{(t-s)A}.$$

5.3. Общее решение линейной неоднородной системы. Линейные уравнения высших порядков с переменными коэффициентами

Мы начнем этот раздел с того, что построим решение задачи Коши (5.1), (5.2).

Теорема 5.4. Пусть вектор-функция $f(t)$ и элементы матрицы $A(t)$ непрерывны на промежутке \mathcal{I} и $t_0 \in [t_1, t_2] \subset \mathcal{I}$. Тогда на отрезке $[t_1, t_2]$ единственное решение задачи Коши (5.1), (5.2) определяется формулой:

$$x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, s)f(s)ds, \quad t \in [t_1, t_2], \quad (5.27)$$

где $X(t, s)$ — матрица Коши системы (5.13).

Доказательство. Пусть $X(t)$ — произвольная фундаментальная матрица линейной однородной системы (5.13). Тогда все решения линейной однородной системы могут быть представлены с помощью формулы (5.22). Будем далее рассматривать эту формулу как замену переменной в исходной неоднородной системе (5.1) относительно новой неизвестной вектор-функции $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$. Осуществляя эту замену в системе (5.1), получим

$$\dot{x} = \dot{X}(t)c + X(t)\dot{c} = A(t)X(t)c + f(t).$$

Учитывая, что матрица $X(t)$ обратима и, кроме того, удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению (5.21), приходим к системе

$$\dot{c} = X^{-1}(t)f(t). \quad (5.28)$$

В силу (5.2) и замены (5.22) эта система должна решаться вместе с начальным условием $c(t_0) = X^{-1}(t_0)x_0$. Интегрируя равенство (5.28)

на промежутке от t_0 до t , получаем следующее представление для неизвестной вектор-функции $c(t)$:

$$c(t) = X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds.$$

Возвращаясь теперь к исходной вектор-функции $x(t)$ с помощью замены (5.22) и учитывая равенство (5.23), устанавливаем справедливость формулы (5.27). ■

Замечание 1. Замену переменной (5.22), где $c = c(t)$, осуществляемую в линейной неоднородной системе (5.1), принято называть методом вариации произвольных постоянных.

Рассмотрим далее уравнение

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)\dot{x}(t) + a_n(t)x(t) = f(t), \quad (5.29)$$

где $x(t)$ — неизвестная функция со значениями в \mathbb{R} (или в \mathbb{C}), а $a_1(t), \dots, a_n(t)$ и $f(t)$ — непрерывные на некотором промежутке \mathcal{I} действительно- или комплекснозначные скалярные функции. Уравнение (5.29) называют дифференциальным уравнением n -го порядка с переменными коэффициентами. Решением этого уравнения называют n раз непрерывно дифференцируемую функцию $x(t)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество для всех $t \in \mathcal{I}$. Дополним это уравнение начальными условиями

$$x(t_0) = x^{(0)}, \quad \dot{x}(t_0) = x^{(1)}, \quad \dots \quad x^{(n-1)}(t_0) = x^{(n-1)}, \quad (5.30)$$

где $x^{(0)}, \dots, x^{(n-1)}$ — заданные числа и $t_0 \in \mathcal{I}$. Задачу (5.29), (5.30) называют задачей Коши для функции $x(t)$. Оказывается, эту задачу можно представить как задачу Коши для некоторой системы линейных дифференциальных уравнений. Определим новые неизвестные функции $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ по правилу

$$y_1(t) = x(t), \quad y_2(t) = \dot{x}(t), \quad \dots \quad y_n(t) = x^{(n-1)}(t). \quad (5.31)$$

Дифференцируя эти равенства и выражая величину $x^{(n)}(t)$ из уравнения (5.29), получаем следующую систему уравнений для определения функций $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dot{y}_n &= -a_n(t)y_1 - a_{n-1}(t)y_2 - \dots - a_1(t)y_n + f(t) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Полагая $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ и $\hat{f}(t) = (0, \dots, 0, f(t))^T$, систему (5.32) запишем в векторно-матричной форме:

$$\dot{y} = A(t)y + \hat{f}(t), \quad (5.33)$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \dots & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

Начальные условия (5.30) с учетом равенств (5.31) запишутся в виде начального условия для вектор-функции $y(t)$:

$$y(t_0) = y_0, \quad y_0 = (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})^T. \quad (5.35)$$

Таким образом, мы можем перенести все результаты, полученные нами в предыдущем разделе для систем уравнений, на случай линейного уравнения n -го порядка (5.29). Так, из теоремы 5.1 следует, что если $t_0 \in [t_1, t_2] \subset \mathcal{I}$, то на отрезке $[t_1, t_2]$ существует и единственно решение задачи Коши (5.29), (5.30). Напомним, что скалярные функции $x_1(t), \dots, x_k(t)$ ($k \in \mathbb{N}$) называются линейно независимыми на \mathcal{I} , если из равенства

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_kx_k(t) \equiv 0, \quad (5.36)$$

выполненного для всех $t \in \mathcal{I}$ с некоторыми константами c_1, \dots, c_k , следует, что $c_1 = \dots = c_k = 0$. В противном случае, систему функций $x_1(t), \dots, x_k(t)$ называют линейно зависимой на \mathcal{I} . Имеет место следующее утверждение.

Лемма 5.5. *Скалярные функции $x_1(t), \dots, x_k(t)$, принадлежащие классу $C_n(\mathcal{I})$, линейно зависимы на \mathcal{I} тогда и только тогда, когда линейно зависимы на \mathcal{I} вектор-функции $y_{(1)}(t), \dots, y_{(k)}(t)$, где $y_{(i)}(t) = (x_i(t), \dot{x}_i(t), \dots, x_i^{(n-1)}(t))^T$ ($i = 1, \dots, k$).*

Доказательство. Пусть функции $x_1(t), \dots, x_k(t)$ линейно зависимы на \mathcal{I} . Тогда найдутся такие числа c_1, \dots, c_k , что $|c_1| + \dots + |c_k| > 0$ и для всех $t \in \mathcal{I}$ выполнено равенство (5.36). Дифференцируя это

равенство сначала один раз, потом два и т. д., устанавливаем справедливость векторного равенства

$$c_1 y_{(1)}(t) + c_2 y_{(2)}(t) + \dots + c_k y_{(k)}(t) = 0 \quad (5.37)$$

с теми же числами c_1, \dots, c_k . Следовательно, вектор-функции $y_{(1)}(t), \dots, y_{(k)}(t)$ также линейно зависимы на \mathcal{I} .

Обратно, пусть вектор-функции $y_{(1)}(t), \dots, y_{(k)}(t)$ линейно зависимы на \mathcal{I} , т. е. выполнено векторное равенство (5.37), в котором $|c_1| + \dots + |c_k| > 0$. Выписывая тогда равенство для первых компонент соответствующих векторов в обеих частях (5.37), приходим к равенству (5.36). Значит, функции $x_1(t), \dots, x_k(t)$ линейно зависимы на \mathcal{I} . ■

Из леммы 5.5 выводим, что функции $x_1(t), \dots, x_k(t)$ линейно независимы на \mathcal{I} тогда и только тогда, когда линейно независимы на \mathcal{I} соответствующие вектор-функции $y_{(1)}(t), \dots, y_{(k)}(t)$. Таким образом, если $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — линейно независимые решения однородного уравнения

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)\dot{x}(t) + a_n(t)x(t) = 0, \quad (5.38)$$

то соответствующая система вектор-функций

$$y_{(i)}(t) = (x_i(t), \dot{x}_i(t), \dots, x_i^{(n-1)}(t))^T, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.39)$$

образует фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы (5.13) с матрицей $A(t)$ вида (5.34) и наоборот. Отсюда в силу теоремы 5.2 следует, что множество всех решений уравнения (5.38) образует n -мерное линейное пространство. Следовательно, любое решение этого уравнения может быть представлено в виде

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t),$$

где $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — линейно независимые решения (5.38) (фундаментальная система решений), а c_1, \dots, c_n — некоторые числа.

Пусть $Y(t)$ — некоторая $(n \times n)$ -матрица, по столбцам которой расположены вектор-функции $y_{(1)}(t), \dots, y_{(n)}(t)$, построенные по правилу (5.39). Определитель $W(t) = \det Y(t)$ называют определителем Вронского системы решений $x_1(t), \dots, x_n(t)$ уравнения (5.38). В силу формулы Лиувилля–Остроградского (5.15) и вида матрицы $A(t)$ справедлива формула:

$$W(t) = W(t_0) \exp \left\{ - \int_{t_0}^t a_1(s) ds \right\}, \quad t_0 \in \mathcal{I}. \quad (5.40)$$

Имеет место следующий результат.

Лемма 5.6. *Решения $x_1(t), \dots, x_n(t)$ уравнения (5.38) линейно независимы на некотором промежутке \mathcal{I} тогда и только тогда, когда $W(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathcal{I}$. Решения $x_1(t), \dots, x_n(t)$ уравнения (5.38) линейно зависимы на промежутке \mathcal{I} тогда и только тогда, когда $W(t) \equiv 0$ для всех $t \in \mathcal{I}$.*

Доказательство. Действительно, если $x_1(t), \dots, x_n(t)$ линейно независимы на промежутке \mathcal{I} , то в силу леммы 5.5 соответствующие решения $y_{(1)}(t), \dots, y_{(n)}(t)$ системы (5.13) с матрицей $A(t)$ вида (5.34) также линейно независимы на \mathcal{I} . Значит, векторы $y_{(1)}(t_0), \dots, y_{(n)}(t_0)$ линейно независимы для любого $t_0 \in \mathcal{I}$, и поэтому $W(t_0) \neq 0$. Обратно, если $W(t_0) \neq 0$ для некоторого $t_0 \in \mathcal{I}$, то в силу известного результата из линейной алгебры векторы $y_{(1)}(t_0), \dots, y_{(n)}(t_0)$ линейно независимы. Тогда решения $y_{(1)}(t), \dots, y_{(n)}(t)$, отвечающие соответствующим начальным условиям $y_{(1)}(t_0), \dots, y_{(n)}(t_0)$, линейно независимы на отрезке \mathcal{I} (см. доказательство теоремы 4.2). В части линейной зависимости результат проверяется аналогично. ■

Рассмотрим неоднородное уравнение (5.29). Перейдем к эквивалентной ему системе уравнений (5.33). Пусть $x_1(t), \dots, x_n(t)$ некоторая фундаментальная система решений однородного уравнения (5.38), а $y_{(1)}(t), \dots, y_{(n)}(t)$ — соответствующая фундаментальная система решений системы (5.13) с матрицей $A(t)$ вида (5.34), построенная по правилу (5.39). Расположим вектор-функции $y_{(1)}(t), \dots, y_{(n)}(t)$ по столбцам матрицы $Y(t)$, образовав таким образом фундаментальную матрицу. Воспользуемся в системе (5.34) методом вариации произвольных постоянных, т. е. осуществим замену

$$y(t) = Y(t)c(t), \quad c(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))^T, \quad (5.41)$$

где $c_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) — неизвестные функции, подлежащие определению. Действуя так же, как при доказательстве теоремы 5.4, устанавливаем, что вектор-функция $c(t)$ определяется из системы

$$Y(t)\dot{c} = \hat{f}(t).$$

Расписывая это равенство поэлементно, получаем следующую систе-

му для нахождения скалярных функций $\dot{c}_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$):

$$\begin{cases} \dot{c}_1 x_1(t) + \dot{c}_2 x_2(t) + \dots + \dot{c}_n x_n(t) = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dot{c}_1 x_1^{(n-2)}(t) + \dot{c}_2 x_2^{(n-2)}(t) + \dots + \dot{c}_n x_n^{(n-2)}(t) = 0, \\ \dot{c}_1 x_1^{(n-1)}(t) + \dot{c}_2 x_2^{(n-1)}(t) + \dots + \dot{c}_n x_n^{(n-1)}(t) = f(t). \end{cases} \quad (5.42)$$

Однозначно определяя из этой системы функции $\dot{c}_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, (это возможно сделать, поскольку $\det Y(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathcal{I}$) и интегрируя полученные равенства, определяем компоненты вектора $c(t)$. Возвращаясь затем к вектор-функции $y(t)$ с помощью формулы (5.41) и выписывая равенство для первых компонент соответствующих векторов, получаем следующее представление для общего решения неоднородного уравнения (5.29):

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) + \dots + c_n(t)x_n(t). \quad (5.43)$$

Представление (5.43), в котором функции $c_1(t), \dots, c_n(t)$ определяются из системы (5.42), называют методом вариации произвольных постоянных в неоднородном уравнении (5.29).

В завершении этого раздела получим несколько иное представление для общего решения неоднородного уравнения (5.29). Очевидно, что общее решение уравнения (5.29) имеет вид

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t) + x_0(t),$$

где $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения (5.38), c_1, \dots, c_n — произвольные числа и $x_0(t)$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения (5.29). Определим далее функцию $K(t, s)$ как решение однородного уравнения (5.38) по переменной t , удовлетворяющее начальным условиям

$$K(s, s) = \frac{\partial K}{\partial t}(s, s) = \dots = \frac{\partial^{n-2} K}{\partial t^{n-2}}(s, s) = 0, \quad \frac{\partial^{n-1} K}{\partial t^{n-1}}(s, s) = 1,$$

где $s \in \mathcal{I}$. Функцию $K(t, s)$ называют, как правило, функцией Коши. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.5. Пусть функции $a_1(t), \dots, a_n(t)$ и $f(t)$ непрерывны на промежутке \mathcal{I} и $t_0 \in \mathcal{I}$. Тогда функция

$$x_0(t) = \int_{t_0}^t K(t, s) f(s) ds$$

есть частное решение неоднородного уравнения (5.29), определенное для всех $t \in \mathcal{I}$.

Доказательство этого результата проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.4.

Упражнение 5.1. Построить функцию Коши для уравнений:

$$а) \ddot{x} - x = 0, \quad б) \ddot{x} + x = 0, \quad в) \ddot{x} = 0.$$

5.4. Системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t+T) \equiv A(t), \quad T > 0 \quad (5.44)$$

с непрерывной на всей действительной оси T -периодической матрицей $A(t)$. Системы с периодическими коэффициентами возникают в многочисленных приложениях, где служат моделями различных динамических систем (задачи небесной механики, описание вынужденных колебаний механических конструкций, параметрические усилители). В силу периодичности матрицы $A(t)$ подобные системы обладают некоторыми специальными свойствами. В частности, оказывается, что динамика решений системы (5.44) во многом определяется так называемыми мультипликаторами системы.

Пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (5.44) с условием нормировки $X(0) = I$, т. е. матрицант этой системы.

Определение 5.6. Матрицу $X(T)$ называют матрицей монодромии системы (5.44), а ее собственные числа — мультипликаторами этой системы.

Основные результаты о структуре решений системы (5.44) с периодической матрицей $A(t)$ составляют существо так называемой теории Ляпунова–Флоке. Ниже излагаются центральные утверждения этой теории.

Лемма 5.7. Для всех $t \in \mathbb{R}$ имеет место тождество

$$X(t+T) \equiv X(t)X(T). \quad (5.45)$$

Доказательство. Покажем, что матрица $X(t + T)$ также является фундаментальной матрицей системы (5.44). Действительно, поскольку $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (5.44), используя периодичность матрицы $A(t)$, получаем

$$\dot{X}(t + T) = A(t + T)X(t + T) = A(t)X(t + T).$$

Следовательно, $X(t + T)$ наряду с матрицей $X(t)$ является фундаментальной матрицей системы (5.44). В силу леммы 5.3 существует такая невырожденная матрица C , что

$$X(t + T) \equiv X(t)C.$$

Полагая в этом тождестве $t = 0$, приходим к выводу, что

$$C = X(T).$$

■

Определение 5.7. Пусть B — некоторая квадратная матрица. Матрица C , такая что

$$e^C = B,$$

называется логарифмом матрицы B и обозначается

$$C = \text{Ln } B.$$

Справедливо следующее утверждение (см., например, [7]).

Лемма 5.8. Всякая невырожденная матрица B имеет логарифм.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда матрица B является жордановой клеткой J_{λ_l} размера $k_l \times k_l$ вида (4.32). Заметим при этом, что собственное число $\lambda_l \neq 0$, поскольку матрица B невырожденная. В силу (4.35) имеем

$$B = \lambda_l I_l + \Delta_l = \lambda_l \left(I_l + \frac{\Delta_l}{\lambda_l} \right). \quad (5.46)$$

По аналогии с известным степенным рядом

$$\ln(1 + z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} z^j, \quad z \in \mathbb{C} \quad (5.47)$$

с кругом сходимости $|z| < 1$ определим матрицу

$$C = I_l \operatorname{Ln} \lambda_l + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \left(\frac{\Delta_l}{\lambda_l} \right)^j, \quad (5.48)$$

где

$$\operatorname{Ln} \lambda_l = \ln |\lambda_l| + i(\arg \lambda_l + 2\pi m), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.49)$$

Заметим, что ряд в формуле (5.48) содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых, поскольку в силу (4.37) имеют место равенства $\Delta_l^j = \mathbb{O}$ для всех $j \geq k_l$.

Далее, из формулы (5.47) следует, что в круге $|z| < 1$ имеет место тождество

$$\exp \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} z^j \right\} \equiv 1 + z. \quad (5.50)$$

Раскладывая левую часть этого выражения в степенной ряд в круге $|z| < 1$, получаем

$$\exp \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} z^j \right\} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j. \quad (5.51)$$

Из теории степенных рядов следует, что в круге $|z| < 1$ степенные ряды в правых частях (5.50) и (5.51) должны совпадать, а значит, должны совпадать и коэффициенты при одинаковых степенях z . Отсюда следует, что $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ и $a_j = 0$, если $j \geq 2$. Пусть теперь Z — некоторая комплекснозначная квадратная матрица, такая что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} Z^j$$

сходится (для наших целей, впрочем, достаточно считать, что этот ряд состоит лишь из конечного числа ненулевых слагаемых). Поскольку матрица Z коммутирует с любой своей степенью, то степенное разложение матричной экспоненты

$$\exp \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} Z^j \right\}$$

по степеням Z в силу (5.51) формально совпадает с рядом

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j Z^j = a_0 I + a_1 Z = I + Z.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} Z^j\right\} = I + Z. \quad (5.52)$$

Возвращаясь теперь к равенству (5.48), учитывая (5.46) и лемму 4.5 из главы 4, получаем

$$e^C = \exp\{I_l \operatorname{Ln} \lambda_l\} \exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \left(\frac{\Delta_l}{\lambda_l}\right)^j\right\} = \lambda_l \left(I + \frac{\Delta_l}{\lambda_l}\right) = B. \quad (5.53)$$

Таким образом,

$$C = \operatorname{Ln} B = \operatorname{Ln} J_{\lambda_l} = I_l \operatorname{Ln} \lambda_l + \sum_{j=1}^{k_l-1} \frac{(-1)^{j-1}}{j \lambda_l^j} \Delta_l^j. \quad (5.54)$$

Пусть теперь B — произвольная невырожденная $(n \times n)$ -матрица. Как известно, существует такая невырожденная матрица S , которая приводит матрицу B к жордановой нормальной форме (4.31), (4.32), т. е. $J = S^{-1}BS$. Отсюда

$$B = S \operatorname{diag}(J_{\lambda_1}, J_{\lambda_2}, \dots, J_{\lambda_s}) S^{-1}.$$

Положим

$$C = \operatorname{Ln} B = S \operatorname{diag}(\operatorname{Ln} J_{\lambda_1}, \operatorname{Ln} J_{\lambda_2}, \dots, \operatorname{Ln} J_{\lambda_s}) S^{-1}, \quad (5.55)$$

где матрицы $\operatorname{Ln} J_{\lambda_l}$ ($l = 1, \dots, s$) вычисляются по формуле (5.54). В силу леммы 4.7 и (5.53), имеем

$$\begin{aligned} e^C &= S \operatorname{diag}(e^{\operatorname{Ln} J_{\lambda_1}}, e^{\operatorname{Ln} J_{\lambda_2}}, \dots, e^{\operatorname{Ln} J_{\lambda_s}}) S^{-1} = \\ &= S \operatorname{diag}(J_{\lambda_1}, J_{\lambda_2}, \dots, J_{\lambda_s}) S^{-1} = B. \end{aligned}$$

Лемма доказана. ■

Замечание 1. В силу формулы (5.49) матрица $\operatorname{Ln} B$ определяется неоднозначно.

Замечание 2. Из формул (5.54), (5.55) следует, что если $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — собственные числа матрицы B , то собственными числами матрицы $\operatorname{Ln} B$ являются соответственно числа $\operatorname{Ln} \lambda_1, \dots, \operatorname{Ln} \lambda_s$. Кроме того, соответствующие жордановы клетки матриц B и $\operatorname{Ln} B$ имеют одинаковые размеры.

Замечание 3. Если все элементы $(n \times n)$ -матрицы B действительны и, кроме того, все ее собственные числа положительны, то в силу (5.49) и действительности матриц S , S^{-1} среди матриц $\text{Ln } B$ может быть выбрана действительная.

Сформулируем далее две основные теоремы этого раздела.

Теорема 5.6 (Флоке). Матрицант системы (5.44) имеет вид

$$X(t) = \Phi(t)e^{t\Lambda}, \quad (5.56)$$

где $\Phi(t)$ — непрерывно дифференцируемая на всей действительной оси невырожденная T -периодическая $(n \times n)$ -матрица и Λ — некоторая постоянная $(n \times n)$ -матрица.

Доказательство. Положим

$$\Lambda = \frac{1}{T} \text{Ln } X(T), \quad (5.57)$$

откуда

$$X(T) = e^{T\Lambda}. \quad (5.58)$$

Определим функцию $\Phi(t)$ следующим образом:

$$\Phi(t) = X(t)e^{-t\Lambda}, \quad (5.59)$$

где $X(t)$ — матрицант системы (5.44). Тогда

$$X(t) = X(t)e^{-t\Lambda}e^{t\Lambda} = \Phi(t)e^{t\Lambda}$$

и равенство (5.56) установлено. Проверим свойства матрицы $\Phi(t)$. Непрерывная дифференцируемость этой матрицы и ее невырожденность для всех $t \in \mathbb{R}$ мгновенно вытекают из представления (5.59) и соответствующих свойств фундаментальной матрицы $X(t)$ и матричной экспоненты $e^{-t\Lambda}$. Далее,

$$\Phi(t+T) = X(t+T)e^{-(t+T)\Lambda} = X(t+T)e^{-T\Lambda}e^{-t\Lambda}.$$

В силу леммы 5.7 и равенства (5.58) имеем

$$\Phi(t+T) = X(t)X(T)e^{-T\Lambda}e^{-t\Lambda} = X(t)e^{T\Lambda}e^{-T\Lambda}e^{-t\Lambda} = X(t)e^{-t\Lambda} = \Phi(t).$$

Следовательно, матрица $\Phi(t)$ является T -периодической.

Теорема доказана. ■

Замечание 1. Матрицы Λ и $\Phi(t)$, определяемые соответственно формулами (5.57) и (5.59), являются, вообще говоря, комплексными. Можно при построении ограничиться действительными матрицами (в случае действительности матрицы $A(t)$). Именно, из леммы 5.7 следует, что

$$X(2T) = X^2(T).$$

Предположим, что все собственные числа матрицы $X^2(T)$, а значит, и $X(2T)$ положительны. Определим тогда матрицу Λ следующим образом:

$$\Lambda = \frac{1}{2T} \operatorname{Ln} X(2T). \quad (5.60)$$

В силу замечания 3 к лемме 5.8 в качестве $\operatorname{Ln} X(2T)$ мы можем выбрать действительную матрицу. Далее, определим матрицу $\Phi(t)$ формулой (5.59), где матрица Λ определена согласно (5.60). Несложно показать, что в этом случае действительная матрица $\Phi(t)$ будет $2T$ -периодической. В случае, если среди собственных чисел матрицы $X(2T)$ имеются комплексные числа, для обоснования соответствующего результата следует воспользоваться [28, Лемма I, стр. 56].

Определение 5.8. Собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ матрицы Λ , определяемой формулой (5.57), называются характеристическими показателями системы (5.44).

Пусть μ_1, \dots, μ_s — собственные числа матрицы монодромии $X(T)$, т. е. мультипликаторы системы (5.44). В силу замечания 2 к лемме 5.8 и формулы (5.57) характеристические показатели системы (5.44) связаны с ее мультипликаторами с помощью формул

$$\lambda_l = \frac{1}{T} \operatorname{Ln} \mu_l = \frac{1}{T} [\ln |\mu_l| + i(\arg \mu_l + 2\pi m)], \quad (5.61)$$

где $l = 1, \dots, s$ и $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В отличие от мультипликаторов характеристические показатели системы (5.44), таким образом, определяются не однозначно, а с точностью до чисто мнимых слагаемых $\frac{2\pi m i}{T}$. Полезно иметь в виду следующие соотношения между мультипликаторами, вытекающие из определения и формулы Лиувилля–Остроградского (5.15):

$$\sum_{l=1}^s \mu_l = \operatorname{tr} X(T),$$

$$\prod_{l=1}^s \mu_l = \det X(T) = \exp \left\{ \int_0^T \operatorname{tr} A(s) ds \right\}.$$

Следующая лемма проясняет понятие мультипликатора и оправданность такой терминологии.

Лемма 5.9. *Для всякого мультипликатора μ существует нетривиальное решение $x(t)$ системы (5.44) такое, что*

$$x(t+T) = \mu x(t). \quad (5.62)$$

Обратно, если для некоторого нетривиального решения $x(t)$ выполнено условие (5.62), то число μ является мультипликатором системы (5.44).

Доказательство. Пусть μ — мультипликатор системы (5.44). Выберем в качестве начального условия $x(0)$ для решения $x(t)$ — собственный вектор матрицы $X(T)$, отвечающий собственному числу μ , т. е.

$$x(t) = X(t)x(0), \quad X(T)x(0) = \mu x(0).$$

Тогда в силу леммы 5.7 имеем

$$x(t+T) = X(t+T)x(0) = X(t)X(T)x(0) = X(t)\mu x(0) = \mu x(t)$$

и, значит, выполнено условие (5.62).

Предположим теперь, что для некоторого нетривиального решения $x(t)$ системы (5.44) имеет место соотношение (5.62). Тогда при $t = 0$ получим

$$x(T) = \mu x(0).$$

Таким образом,

$$X(T)x(0) = x(T) = \mu x(0)$$

и, следовательно, число μ является собственным значением матрицы $X(T)$, т. е. мультипликатором системы (5.44). ■

Следствие 5.3. *Система (5.44) имеет нетривиальное T -периодическое решение $x(t)$ в том и только в том случае, когда у этой системы имеется мультипликатор $\mu = 1$.*

Замечание 1. Положим

$$\mu = e^{\lambda T}, \quad \varphi(t) = x(t)e^{-\lambda t},$$

где λ — характеристический показатель системы (5.44), отвечающий ее мультипликатору μ , а $x(t)$ — нетривиальное решение этой системы, удовлетворяющее условию (5.62). Тогда из (5.62) следует, что

$$\varphi(t+T) = x(t+T)e^{-\lambda(t+T)} = \mu x(t)e^{-\lambda t}e^{-\lambda T} = e^{\lambda T}\varphi(t)e^{-\lambda T} = \varphi(t).$$

Следовательно, функция $\varphi(t)$ является T -периодической, а нетривиальное решение $x(t)$ системы (5.44), удовлетворяющее соотношению (5.62), допускает представление

$$x(t) = \varphi(t)e^{\lambda t}. \quad (5.63)$$

Определение 5.9. *Непрерывно дифференцируемая матрица $S(t)$ ($t \geq t_0$) называется матрицей Ляпунова, если выполнены следующие условия:*

1. Матрицы $S(t)$ и $\dot{S}(t)$ ограничены на промежутке $[t_0, \infty)$, т. е.:

$$\|S(t)\| \leq M, \quad \|\dot{S}(t)\| \leq M, \quad t \geq t_0, \quad (5.64)$$

где $M > 0$.

2. Матрица $S(t)$ невырождена для всех $t \geq t_0$ и, более того,

$$|\det S(t)| \geq m > 0, \quad t \geq t_0 \quad (5.65)$$

для некоторой положительной константы m . Замена переменной $x(t) = S(t)y(t)$ ($t \geq t_0$) с $(n \times n)$ -матрицей Ляпунова $S(t)$ называется ляпуновской заменой.

Теорема 5.7 (Ляпунова). *Существует такая T -периодическая ляпуновская замена, с помощью которой система (5.44) приводится к виду*

$$\dot{y} = \Lambda y, \quad (5.66)$$

где Λ — некоторая постоянная $(n \times n)$ -матрица.

Доказательство. Согласно теореме 5.6 матрицант системы (5.44) допускает представление вида (5.56). Легко проверить, что T -периодическая матрица $\Phi(t)$, определяемая равенством (5.59), является матрицей Ляпунова, и, следовательно, замена $x = \Phi(t)y$ является ляпуновской заменой. Осуществляя эту замену в системе (5.44), получим

$$\dot{\Phi}(t)y + \Phi(t)\dot{y} = A(t)\Phi(t)y. \quad (5.67)$$

В силу (5.59) имеем

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= \dot{X}(t)e^{-t\Lambda} - X(t)e^{-t\Lambda}\Lambda = \\ &= A(t)X(t)e^{-t\Lambda} - \Phi(t)\Lambda = A(t)\Phi(t) - \Phi(t)\Lambda. \end{aligned}$$

Используя это равенство в формуле (5.67) и учитывая невырожденность матрицы $\Phi(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$, приходим к системе (5.66).

Теорема доказана. ■

Теоремы 5.6 и 5.7 часто формулируют в виде одной теоремы, именуемой теоремой Ляпунова–Флоке. Эти теоремы позволяют дать качественное описание динамики решений периодической системы (5.44), а также описать структуру общего решения этой системы. В этой связи имеет место следующая теорема.

Теорема 5.8. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Если все мультипликаторы системы (5.44) расположены внутри единичного круга на комплексной плоскости, т. е. $|\mu_l| < 1$ для всех $l = 1, \dots, s$, то все решения этой системы экспоненциально стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$.*

2. *Если все мультипликаторы системы (5.44) расположены внутри или на границе единичного круга на комплексной плоскости, т. е. $|\mu_l| \leq 1$ для всех $l = 1, \dots, s$, причем мультипликаторам $|\mu_l| = 1$ отвечают жордановы клетки порядка 1 в жордановой форме матрицы монодромии $X(T)$, то все решения этой системы ограничены при $t \rightarrow +\infty$.*

3. *Если у системы (5.44) имеется хотя бы один мультипликатор $|\mu_l| > 1$, то у этой системы имеются неограниченные при $t \rightarrow +\infty$ решения.*

Доказательство.

1. Воспользуемся представлением (5.56) для матрицанта системы (5.44). Имеем

$$x(t) = X(t)x(0) = \Phi(t)e^{t\Lambda}x(0). \quad (5.68)$$

В силу соотношения (5.61) условие $|\mu_l| < 1$ ($l = 1, \dots, s$) влечет выполнение неравенства $\operatorname{Re} \lambda_l < 0$ для всех характеристических показателей системы (5.44). Поскольку матрица $\Phi(t)$ является матрицей Ляпунова, то существует такая положительная константа $M_1 > 0$, что

$$\|\Phi(t)\| \leq M_1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.69)$$

Осталось теперь воспользоваться оценкой матричной экспоненты $e^{t\Lambda}$ аналогичной той, что была использована при выводе следствия 4.4. Откуда

$$\|x(t)\| \leq \|\Phi(t)\| \|e^{t\Lambda}\| \|x(0)\| \leq M_1 M_2 \|x(0)\| e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0$$

для некоторых $M_2, \gamma > 0$. Следовательно, $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

2. Вновь обратимся к представлению (5.56) для матрицанта системы (5.44). В силу соотношения (5.61) мультипликаторам $|\mu_l| < 1$

отвечают собственные числа матрицы Λ , для которых $\operatorname{Re} \lambda_l < 0$. Кроме того, мультипликаторам $|\mu_l| = 1$ отвечают собственные числа матрицы Λ , для которых $\operatorname{Re} \lambda_l = 0$ и, в силу замечания 2 к лемме 5.8, соответствующие жордановы клетки в жордановой форме матрицы Λ имеют порядок 1. Используя теперь замечание 1 к теореме 4.8 из главы 4, а также формулу (5.68) и неравенство (5.69), заключаем, что

$$\|x(t)\| \leq \|\Phi(t)\| \|e^{t\Lambda}\| \|x(0)\| \leq M_1 M_2 \|x(0)\|, \quad t \geq 0.$$

3. Воспользуемся результатом леммы 5.9, а точнее представлением (5.63) для нетривиального решения системы (5.44), отвечающего характеристическому показателю $\mu_l = e^{\lambda_l T}$. Имеем

$$\|x(t)\| = \|\varphi(t)\| |e^{\lambda_l t}| = \|\varphi(t)\| e^{\operatorname{Re} \lambda_l t},$$

где $\varphi(t)$ — некоторая нетривиальная T -периодическая функция. Поскольку $|\mu_l| > 1$, то $\operatorname{Re} \lambda_l > 0$, и, следовательно, величина $\|x(t)\|$ не ограничена при $t \rightarrow +\infty$.

Теорема доказана. ■

Завершая разговор о линейных системах с периодическими коэффициентами, приведем результат о структуре общего решения таких систем.

Теорема 5.9. *Предположим, что у системы (5.44) имеется $s \leq n$ характеристических показателей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, которым отвечают s жордановых цепочек длины k_1, k_2, \dots, k_s соответственно, причем $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$. Положим для всех $l = 1, \dots, s$:*

$$\begin{aligned} x_1^{(l)}(t) &= e^{\lambda_l t} \psi_1^{(l)}(t), \\ x_2^{(l)}(t) &= e^{\lambda_l t} \left(t \psi_1^{(l)}(t) + \psi_2^{(l)}(t) \right), \\ x_3^{(l)}(t) &= e^{\lambda_l t} \left(\frac{t^2}{2} \psi_1^{(l)}(t) + t \psi_2^{(l)}(t) + \psi_3^{(l)}(t) \right), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{k_l}^{(l)}(t) &= e^{\lambda_l t} \left(\frac{t^{k_l-1}}{(k_l-1)!} \psi_1^{(l)}(t) + \dots + t \psi_{k_l-1}^{(l)}(t) + \psi_{k_l}^{(l)}(t) \right), \end{aligned} \tag{5.70}$$

где $\psi_1^{(l)}(t), \psi_2^{(l)}(t), \dots, \psi_{k_l}^{(l)}(t)$ ($l = 1, \dots, s$) — некоторые T -периодические, вообще говоря, комплекснозначные вектор-функции. Тогда вектор-функция

$$x(t) = \sum_{l=1}^s \left(c_1^{(l)} x_1^{(l)}(t) + c_2^{(l)} x_2^{(l)}(t) + \dots + c_{k_l}^{(l)} x_{k_l}^{(l)}(t) \right) \tag{5.71}$$

с произвольными комплексными числами $c_1^{(l)}, c_2^{(l)}, \dots, c_{k_l}^{(l)}$ ($l = 1, \dots, s$) является общим решением системы (5.44).

Доказательство. Из теоремы 5.7 следует, что система (5.44) с помощью ляпуновской замены $x = \Phi(t)y$, где T -периодическая матрица $\Phi(t)$ определяется формулой (5.59), приводится к виду (5.66). Общее решение линейной системы с постоянными коэффициентами (5.66) определяется согласно теореме 4.5. Возвращаясь затем к исходной системе (5.44), используя упомянутую ляпуновскую замену, устанавливаем справедливость представлений (5.70), (5.71). ■

Подробное изложение теории линейных систем с периодически-ми коэффициентами с приложениями к различным задачам физики и техники заинтересованный читатель может найти в известной монографии [28].

Глава 6

Общие свойства систем нелинейных дифференциальных уравнений в нормальной форме

6.1. Существование и единственность решения задачи Коши. Основные теоремы

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений, записанную в векторной форме:

$$y'(x) = f(x, y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6.1)$$

где

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad y'(x) = \begin{pmatrix} y'_1(x) \\ \vdots \\ y'_n(x) \end{pmatrix}, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

и $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ ($i = 1, \dots, n$) — заданные скалярные действительные функции, определенные на некотором множестве $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Систему (6.1) называют системой n дифференциальных уравнений, записанной в нормальной форме.

Определение 6.1. Непрерывно дифференцируемую на некотором промежутке \mathcal{I} вектор-функцию $y(x)$ называют решением системы (6.1), если при подстановке компонент этой вектор-функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ в систему (6.1) все n уравнений этой системы обращаются в тождества, выполненные для всех $x \in \mathcal{I}$.

Рассмотрим начальное условие

$$y(x_0) = y_0, \quad (6.2)$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$ и $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Решение $y(x)$ системы (6.1), удовлетворяющее начальному условию (6.2), называется решением задачи Коши (6.1), (6.2). Будем в дальнейшем считать, что вектор-функция $f(x, y)$ определена в параллелепипеде

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b, a, b > 0\}. \quad (6.3)$$

Совершенно аналогично лемме 2.1 устанавливается следующий результат.

Лемма 6.1. Пусть вектор-функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных в параллелепипеде \mathcal{D} . Тогда задача Коши (6.1), (6.2) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad (6.4)$$

при тех x из отрезка $|x - x_0| \leq a$, при которых $(x, y(x)) \in \mathcal{D}$.

Основным результатом, устанавливающим однозначную разрешимость задачи Коши (6.1), (6.2), является следующая теорема.

Теорема 6.1 (Пикара–Линделёфа). Пусть в параллелепипеде \mathcal{D} , определяемом формулой (6.3), функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной x , а по переменной y удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|, \quad (6.5)$$

где точки $(x, y_1) \in \mathcal{D}$, $(x, y_2) \in \mathcal{D}$, а L — постоянная. Тогда на отрезке $|x - x_0| \leq h$, где

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad M = \max_{(x, y) \in \mathcal{D}} \|f(x, y)\|, \quad (6.6)$$

решение задачи Коши (6.1), (6.2) существует и единственно.

Доказательство. Заметим, что обоснование существования и единственности задачи Коши (6.1), (6.2) можно провести по схеме доказательства теоремы 2.1, используя принцип сжимающих отображений. Мы же проведем доказательство методом последовательных приближений. Будем в дальнейшем рассматривать промежуток $x \in [x_0, x_0 + h]$. Обоснование теоремы для отрезка $x \in [x_0 - h, x_0]$ проводится аналогично.

Условия, наложенные нами на функцию $f(x, y)$, гарантируют ее непрерывность по совокупности переменных в параллелепипеде \mathcal{D} . Следовательно, в силу леммы 6.1 нам достаточно установить однозначную разрешимость системы уравнений (6.4) на отрезке $x \in [x_0, x_0 + h]$. Положим $y_0(x) \equiv y_0$ и

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.7)$$

Покажем сначала, что

$$\|y_k(x) - y_0\| \leq b, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.8)$$

если $x \in [x_0, x_0 + h]$. Воспользуемся индукцией по k . Очевидно, что $\|y_0(x) - y_0\| \leq b$. Предположим, что $\|y_k(x) - y_0\| \leq b$, когда $k = 0, 1, \dots, m$. Тогда

$$\begin{aligned} \|y_{m+1}(x) - y_0\| &= \left\| \int_{x_0}^x f(t, y_m(t)) dt \right\| \leq \int_{x_0}^x \|f(t, y_m(t))\| dt \leq \\ &\leq M(x - x_0) \leq Mh \leq b \end{aligned}$$

и неравенство (6.8) установлено. Заметим также, что из (6.7) и (6.8) следует, что все функции $y_k(x)$ непрерывны на отрезке $[x_0, x_0 + h]$.

Покажем далее по индукции, что

$$\|y_{k+1}(x) - y_k(x)\| \leq \frac{ML^k(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.9)$$

если $x \in [x_0, x_0 + h]$. При $k = 0$ неравенство установлено выше. Предположим, что неравенство (6.9) справедливо для $k = 0, 1, \dots, m-1$. Из (6.7) с учетом (6.5) выводим, что

$$\|y_{m+1}(x) - y_m(x)\| \leq \int_{x_0}^x \|f(t, y_m(t)) - f(t, y_{m-1}(t))\| dt \leq$$

$$\leq L \int_{x_0}^x \|y_m(t) - y_{m-1}(t)\| dt.$$

Используя теперь неравенство (6.9) при $k = m - 1$, заключаем, что

$$\|y_{m+1}(x) - y_m(x)\| \leq \frac{ML^m}{m!} \int_{x_0}^x (t - t_0)^m dt = \frac{ML^m(x - x_0)^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Таким образом, справедливость (6.9) установлена. Заметим, что функцию $y_k(x)$ можно рассматривать как частичную сумму ряда

$$y_0 + \sum_{m=0}^{\infty} (y_{m+1}(x) - y_m(x)),$$

который равномерно сходится на отрезке $[x_0, x_0 + h]$, поскольку в силу (6.9) мажорируется на этом отрезке сходящимся числовым рядом

$$\|y_0\| + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{ML^m h^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Следовательно, $y_k(x) \Rightarrow y(x)$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in [x_0, x_0 + h]$ и, кроме того, функция $y(x)$ непрерывна при $x \in [x_0, x_0 + h]$. Поскольку функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна в \mathcal{D} , то несложно проверить, что $f(x, y_k(x)) \Rightarrow f(x, y(x))$ ($k \rightarrow \infty$) равномерно по $x \in [x_0, x_0 + h]$. В силу известного результата из анализа мы можем перейти в равенстве (6.7) к пределу при $k \rightarrow \infty$ под знаком интеграла. Откуда получаем равенство (6.4) и, значит, существование решения у этой системы интегральных уравнений обосновано.

Покажем теперь единственность построенного решения системы (6.4) на отрезке $[x_0, x_0 + h]$. Предположим, что существует еще решение $z(x) \not\equiv y(x)$ системы уравнений (6.4) такое, что $(x, y(x)) \in \mathcal{D}$ для всех $x \in [x_0, x_0 + h]$. Тогда из (6.4) и (6.5) следует, что

$$\|y(x) - z(x)\| \leq \int_{x_0}^x \|f(t, y(t)) - f(t, z(t))\| dt \leq L \int_{x_0}^x \|y(t) - z(t)\| dt.$$

В силу неравенства Гронуолла–Беллмана (лемма 5.1) отсюда следует, что $y(x) \equiv z(x)$, когда $x \in [x_0, x_0 + h]$.

Теорема доказана. ■

Замечание 1. Пусть вектор-функция $f(x, y)$ непрерывна в параллелепипеде \mathcal{D} вместе со своими частными производными $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y)$, где $i, j = 1, \dots, n$. Тогда вектор-функция $f(x, y)$ удовлетворяет в \mathcal{D} условию Липшица (6.5). Положим

$$L = \max_{(x, y) \in \mathcal{D}} \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right\|,$$

где символом $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ обозначена матрица Якоби, т. е. $(n \times n)$ -матрица, составленная из частных производных $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y)$ ($i, j = 1, \dots, n$).

Справедливо следующее неравенство — аналог формулы Лагранжа конечных приращений для функций нескольких переменных (см., например, [8, стр. 581]):

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq \sup_{t \in [0, 1]} \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1 + t(y_2 - y_1)) \right\| \|y_1 - y_2\| \leq L \|y_1 - y_2\|,$$

где $(x, y_1) \in \mathcal{D}$, $(x, y_2) \in \mathcal{D}$. Здесь мы, разумеется, учли, что в силу выпуклости множества \mathcal{D} точка $(x, y_1 + t(y_2 - y_1))$ принадлежит \mathcal{D} при всех $t \in [0, 1]$.

Замечание 2. При условиях теоремы 6.1 нельзя гарантировать того, что решение $y(x)$ задачи Коши (6.1), (6.2) существует на всей действительной оси (сравни с линейной системой (5.1)). Действительно, достаточно рассмотреть в качестве примера задачу Коши

$$y'(x) = y^2, \quad y(0) = 1.$$

Единственное решение этой задачи, функция $y(x) = (1 - x)^{-1}$, существует лишь на промежутке $-\infty < x < 1$.

Замечание 3. Если нарушается условие Липшица (6.5), то гарантировать единственность решения задачи Коши (6.1), (6.2) нельзя. Соответствующий пример доставляет, в частности, задача Коши для скалярного уравнения

$$y'(x) = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0.$$

Эта задача наряду с решениями $y(x) \equiv 0$ и $y(x) = \frac{x^2}{4}$ ($x \geq 0$) имеет, в частности, континуальное семейство решений

$$y(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq c, \\ \frac{(x - c)^2}{4}, & c \leq x, \end{cases}$$

где $c > 0$ — произвольное действительное число.

В связи с последним замечанием представляет интерес вопрос о том, какие условия необходимо наложить на вектор-функцию $f(x, y)$, чтобы можно было гарантировать существование решения задачи Коши (6.1), (6.2), но не обязательно — его единственность. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 6.2 (Пеано). *Пусть в параллелепипеде*

$$\mathcal{D}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid x_0 \leq x \leq x_0 + a, \|y - y_0\| \leq b, a, b > 0\}$$

функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных. Тогда на отрезке $[x_0, x_0 + h]$, где

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad M = \max_{(x, y) \in \mathcal{D}^+} \|f(x, y)\|,$$

существует по крайней мере одно решение $y(x)$ задачи Коши (6.1), (6.2).

Доказательство. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим вектор-функцию $y_k(x)$ на отрезке $x_0 - \frac{1}{k} \leq x \leq x_0 + h$ следующим образом. Положим $y_k(x) \equiv y_0$, если $x \in [x_0 - \frac{1}{k}, x_0]$, и

$$y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f\left(t, y_k\left(t - \frac{1}{k}\right)\right) dt, \quad (6.10)$$

если $x \in [x_0, x_0 + h]$. На промежутке $[x_0, x_0 + h]$ функция $y_k(x)$, определяемая формулой (6.10), строится шагами. На первом шаге эта вектор-функция определяется на отрезке $x \in [x_0, x_0 + \alpha_1]$, где $\alpha_1 = \min\left(h, \frac{1}{k}\right)$. В этом случае $t - \frac{1}{k} \in [x_0 - \frac{1}{k}, x_0]$, а значит, подынтегральная функция в (6.10) есть $f(t, y_0)$. Из (6.10) следует, что

$$\|y_k(x) - y_0\| \leq \int_{x_0}^x \|f(t, y_0)\| dt \leq M(x - x_0) \leq M\alpha_1 \leq Mh.$$

Откуда в силу (6.6) выводим, что

$$\|y_k(x) - y_0\| \leq b, \quad (6.11)$$

когда $x \in [x_0, x_0 + \alpha_1]$. Заметим, что неравенство (6.11) очевидно справедливо и когда $x \in [x_0 - \frac{1}{k}, x_0]$. Если $\alpha_1 = h$, то построение закончено. Иначе, на втором шаге функция $y_k(x)$ с помощью формулы (6.10) продолжается на промежуток $[x_0 + \alpha_1, x_0 + \alpha_2]$, где $\alpha_2 = \min\left(h, \frac{2}{k}\right)$. На сей раз $t - \frac{1}{k} \in [x_0 - \frac{1}{k}, x_0 + \alpha_1]$ и, значит, подынтегральное выражение в (6.10) есть некоторая известная нам функция. Кроме того, поскольку точка $(t, y_k(t - \frac{1}{k}))$ в силу неравенства (6.11) принадлежит параллелепипеду \mathcal{D}^+ , так же как и на первом шаге устанавливаем, что неравенство (6.11) справедливо и на промежутке $x \in [x_0 + \alpha_1, x_0 + \alpha_2]$. Если $\alpha_2 = h$, то построение закончено. Иначе, продолжая этот процесс, за конечное число шагов мы построим вектор-функцию $y_k(x)$ на всем отрезке $[x_0, x_0 + h]$.

Рассмотрим построенную последовательность вектор-функций $y_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, на отрезке $[x_0, x_0 + h]$. Заметим, что эта последовательность равномерно ограничена на этом отрезке, поскольку в силу (6.11) имеет место оценка

$$\|y_k(x)\| \leq \|y_k(x) - y_0\| + \|y_0\| \leq b + \|y_0\|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Далее, заметим, что в силу (6.10) с учетом (6.6) справедливо неравенство

$$\|y'_k(x)\| = \|f(x, y_k(x - \frac{1}{k}))\| \leq M, \quad x \in [x_0, x_0 + h].$$

Из представления

$$y_k(x_1) - y_k(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} y'_k(x) dx$$

тогда следует, что

$$\|y_k(x_1) - y_k(x_2)\| \leq M \|x_1 - x_2\|$$

для любых $x_1, x_2 \in [x_0, x_0 + h]$ и $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, все вектор-функции $y_k(x)$ удовлетворяют условию Липшица с одной и той же константой, равной M . Отсюда следует равностепенная непрерывность последовательности $y_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$. В силу теоремы Арцела (см. раздел 1.3.) из последовательности $y_k(x)$ можно извлечь равномерно сходящуюся на отрезке $[x_0, x_0 + h]$ к некоторой вектор-функции $y(x)$ подпоследовательность $y_{k_l}(x)$. Положим в равенстве

(6.10) $k = k_l$. В силу равностепенной непрерывности последовательности $y_k(x)$ нетрудно показать, что $y_{k_l}(x - \frac{1}{k_l}) \Rightarrow y(x)$ на отрезке $[x_0, x_0 + h]$. В силу равномерной непрерывности функции $f(x, y)$ в параллелепипеде \mathcal{D}^+ заключаем, что $f(x, y_{k_l}(x - \frac{1}{k_l})) \Rightarrow f(x, y(x))$ равномерно на отрезке $[x_0, x_0 + h]$. Переходя в равенстве (6.10) к пределу при $k_l \rightarrow +\infty$, устанавливаем, что предельная функция $y(x)$ является решением системы интегральных уравнений (6.4). В силу леммы 6.1 отсюда следует, что непрерывно дифференцируемая на отрезке $[x_0, x_0 + h]$ вектор-функция $y(x)$ является решением задачи Коши (6.1), (6.2).

Теорема доказана. ■

Геометрическую природу решений задачи Коши (6.1), (6.2) в условиях теоремы Пеано проясняет следующая теорема.

Теорема 6.3 (Кнезера). Пусть выполнены все условия теоремы 6.2. Положим $x_0 < c \leq x_0 + h$ и обозначим через S_c множество тех точек $y_c \in \mathbb{R}^n$, для которых на отрезке $[x_0, c]$ существует решение задачи Коши (6.1), (6.2), такое, что $y(c) = y_c$. Тогда множество S_c является замкнутым связным множеством.

Доказательство этой теоремы читатель может найти в книге [25]. Там же можно познакомиться с примером задачи Коши (6.1), (6.2) с непрерывной в плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ функцией $f(x, y)$, которая для любой начальной точки (x_0, y_0) имеет более одного решения на каждом отрезке $[x_0, x_0 + h]$ и $[x_0 - h, x_0]$ при любом $h > 0$.

6.2. О непрерывной зависимости решений от начальных условий и параметров

Рассмотрим задачу Коши (6.1), (6.2), решение которой обозначим как функцию $y(x, x_0, y_0)$, подчеркивая её зависимость от начальных условий. В данном разделе мы будем интересоваться характером зависимости решения $y(x, x_0, y_0)$ от переменных x_0 и y_0 . Определим параллелепипед \mathcal{D} следующим образом:

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |x - x^0| \leq a, \|y - y^0\| \leq b, a, b > 0\}. \quad (6.12)$$

Основным результатом этого раздела является следующая теорема.

Теорема 6.4. Пусть выполнены все условия теоремы 6.1, а параллелепипед \mathcal{D} определяется формулой (6.12). Тогда решение $y(x, x_0, y_0)$ есть непрерывная по совокупности переменных функция в любой точке (x, x_0, y_0) , где $x \in [x_0 - \hat{h}, x_0 + \hat{h}]$, $\hat{h} > 0$, и (x_0, y_0) — внутренняя точка параллелепипеда \mathcal{D} .

Установим сначала один вспомогательный результат. Обозначим $y_0(x) = y(x, x_0, y_0)$ — решение задачи Коши (6.1), (6.2). В силу теоремы Пикара–Линделёфа это решение существует, по крайней мере, на некотором отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$, $h > 0$. Кроме того, $(x, y_0(x)) \in \mathcal{D}$, когда $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$. Осуществим в (6.1) замену $z = y(x) - y_0(x)$, в результате которой получим систему

$$z'(x) = f(x, z + y_0(x)) - f(x, y_0(x)). \quad (6.13)$$

Рассмотрим эту систему вместе с начальным условием

$$z(x_0) = z_0, \quad z_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (6.14)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 6.2. Найдется такое $\delta > 0$, что для всех $\|z_0\| < \delta$ решение $z(x, z_0)$ задачи Коши (6.13), (6.14) определено на некотором отрезке $[x_0 - \hat{h}, x_0 + \hat{h}]$, $\hat{h} > 0$, и стремится к нулю при $z_0 \rightarrow 0$ равномерно по $x \in [x_0 - \hat{h}, x_0 + \hat{h}]$.

Доказательство. Поскольку (x_0, y_0) является внутренней точкой множества \mathcal{D} , то найдется такое $0 < \hat{h} < h$, что $|y_0(x) - y^0| \leq b_1 < b$, когда $|x - x_0| \leq \hat{h}$. Рассмотрим параллелепипед

$$\mathcal{D}_z = \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| \leq \hat{h}, \|z\| \leq b - b_1\}.$$

Пусть

$$F(x, z) = f(x, z + y_0(x)) - f(x, y_0(x)).$$

Заметим, что вектор-функция $F(x, z)$ непрерывна по переменным x, z , когда $(x, z) \in \mathcal{D}_z$. Действительно, это следует из непрерывности вектор-функции $f(x, y)$ по переменным $(x, y) \in \mathcal{D}$ и того факта, что

$$\|z + y_0(x) - y^0\| \leq \|z\| + \|y_0(x) - y^0\| \leq b - b_1 + b_1 = b,$$

если $|x - x_0| \leq \hat{h}$. Кроме того, в силу (6.5) оказывается выполненным условие Липшица

$$\|F(x, z_1) - F(x, z_2)\| \leq L\|z_1 - z_2\|, \quad (6.15)$$

где точки $(x, z_1) \in \mathcal{D}_z$, $(x, z_2) \in \mathcal{D}_z$, а L — постоянная.

Считаем далее, что $x \in [x_0, x_0 + \hat{h}]$. Доказательство для отрезка $[x_0 - \hat{h}, x_0]$ проводится аналогично. Будем искать решение задачи Коши (6.13), (6.14) методом последовательных приближений. Пусть $\|z_0\| \leq \delta \leq b - b_1$ и положим $z_0(x) \equiv z_0$. Определим функции

$$z_{m+1}(x) = z_0 + \int_{x_0}^x F(t, z_m(t)) dt, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (6.16)$$

Из (6.5) следует, что

$$\|z_1(x) - z_0\| \leq \int_{x_0}^x \|F(t, z_0)\| dt \leq L\|z_0\|(x - x_0), \quad x \in [x_0, x_0 + \hat{h}].$$

Далее в силу (6.15) имеем

$$\begin{aligned} \|z_2(x) - z_1(x)\| &\leq \int_{x_0}^x \|F(t, z_1(t)) - F(t, z_0)\| dt \leq \\ &\leq L \int_{x_0}^x \|z_1(t) - z_0\| dt \leq L^2 \|z_0\| \frac{(x - x_0)^2}{2}, \end{aligned}$$

когда скоро $\|z_1(x)\| \leq b - b_1$ для всех $x \in [x_0, x_0 + \hat{h}]$. Совершенно аналогично устанавливается, что

$$\|z_m(x) - z_{m-1}(x)\| \leq L^m \|z_0\| \frac{(x - x_0)^m}{m!}, \quad (6.17)$$

если $\|z_k(x)\| \leq b - b_1$ для всех $x \in [x_0, x_0 + \hat{h}]$ и $k = 0, 1, \dots, m - 1$.

Покажем теперь, что всегда можно выбрать $\delta > 0$ и $\|z_0\| \leq \delta$ так, что $\|z_m(x)\| \leq b - b_1$ для всех $x \in [x_0, x_0 + \hat{h}]$ и $m \in \mathbb{N}$. Действительно, из представления

$$z_m(x) = z_0 + (z_1(x) - z_0) + \dots + (z_m(x) - z_{m-1}(x)) \quad (6.18)$$

и неравенства (6.17) следует, что

$$\begin{aligned} \|z_m(x)\| &\leq \|z_0\| \left(1 + L(x - x_0) + \dots + \frac{L^m (x - x_0)^m}{m!} \right) \leq \\ &\leq \|z_0\| \exp\{L(x - x_0)\} \leq \|z_0\| \exp\{L\hat{h}\} \end{aligned} \quad (6.19)$$

при $x \in [x_0, x_0 + \hat{h}]$. Выбирая затем $\delta = (b - b_1) \exp\{-L\hat{h}\}$ и $\|z_0\| \leq \delta$, убеждаемся в том, что

$$\|z_m(x)\| \leq (b - b_1) \exp\{-L\hat{h}\} \exp\{L\hat{h}\} = b - b_1$$

для всех $x \in [x_0, x_0 + \hat{h}]$ и $m \in \mathbb{N}$.

Наконец, осталось заметить, что из (6.17), (6.18) и (6.19) следует равномерная на отрезке $x \in [x_0, x_0 + \hat{h}]$ сходимость последовательности $z_m(x)$ к некоторой функции $z(x, z_0)$. Переходя в (6.16) к пределу при $m \rightarrow \infty$, убеждаемся в том, что функция $z(x, z_0)$ является решением задачи Коши (6.13), (6.14). Кроме того, устремляя в (6.19) число m к бесконечности, заключаем, что

$$\|z(x, z_0)\| \leq \|z_0\| \exp\{L\hat{h}\}.$$

Откуда выводим, что $z(x, z_0) \rightarrow 0$ при $z_0 \rightarrow 0$ равномерно относительно $x \in [x_0, x_0 + \hat{h}]$.

Лемма доказана. ■

Доказательство теоремы 6.4. Пусть $y_\Delta(x) = y(x, x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0)$ — решение системы (6.1) с начальным условием $y(x_0 + \Delta x_0) = y_0 + \Delta y_0$. Без ограничения общности будем считать, что $\Delta x_0 > 0$. Заметим, что решение $y_\Delta(x)$ можно продолжить в точку $x = x_0$. Действительно, выберем Δx_0 и $\|\Delta y_0\|$ настолько малыми, что параллелепипед

$$\mathcal{D}_\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |x - x_0 - \Delta x_0| \leq a_1, \|y - y_0 - \Delta y_0\| \leq b_1\}$$

для некоторых фиксированных $a_1 > 0, b_1 > 0$ лежит внутри параллелепипеда \mathcal{D} . Тогда в силу теоремы Пикара–Линделёфа решение $y_\Delta(x)$ определено на отрезке $[x_0 + \Delta x_0 - h_1, x_0 + \Delta x_0 + h_1]$, где $h_1 = \min(a_1, b_1/M)$. Уменьшая, если необходимо, величину Δx_0 , добьемся того, что решение $y_\Delta(x)$ будет определено и в точке $x = x_0$. Кроме того, поскольку

$$y_\Delta(x_0 + \Delta x_0) = y_\Delta(x_0) + \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x_0} y'_\Delta(t) dt = y_\Delta(x_0) + \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x_0} f(t, y_\Delta(t)) dt,$$

то

$$\|y_0 + \Delta y_0 - y_\Delta(x_0)\| \leq \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x_0} \|f(t, y_\Delta(t))\| dt \leq M \Delta x_0. \quad (6.20)$$

Полагая $z = y_\Delta(x) - y_0(x)$, приходим к следующей задаче Коши для функции $z(x)$:

$$\begin{cases} z'(x) = f(x, z + y_0(x)) - f(x, y_0(x)), \\ z(x_0) = y_\Delta(x_0) - y_0. \end{cases} \quad (6.21)$$

В силу (6.20) имеем

$$\|y_\Delta(x_0) - y_0\| \leq \|y_0 + \Delta y_0 - y_\Delta(x_0)\| + \|\Delta y_0\| \leq M\Delta x_0 + \|\Delta y_0\|.$$

Из леммы 6.2 следует, что решение задачи Коши (6.21) стремится к нулю при $\Delta x_0 \rightarrow 0$ и $\Delta y_0 \rightarrow 0$ равномерно по $x \in [x_0 - \hat{h}, x_0 + \hat{h}]$. Это, в частности, означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что

$$\begin{aligned} \|z(x, z_0)\| &= \|y_\Delta(x) - y_0(x)\| = \\ &= \|y(x, x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0) - y(x, x_0, y_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

для всех $x \in [x_0 - \hat{h}, x_0 + \hat{h}]$, если только $\Delta x_0, \|\Delta y_0\| < \delta(\varepsilon)$. Выбирая теперь $x, x + \Delta x \in [x_0 - \hat{h}, x_0 + \hat{h}]$, получаем

$$\begin{aligned} y(x + \Delta x, x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0) - y(x, x_0, y_0) &= \\ &= \int_x^{x+\Delta x} y'_\Delta(t) dt + y_\Delta(x) - y_0(x). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Поскольку точки $(x, z(x))$ и $(x + \Delta x, z(x + \Delta x))$ в силу леммы 6.2 принадлежат параллелепипеду \mathcal{D}_z , то, следовательно, точки $(x, y_\Delta(x))$ и $(x + \Delta x, y_\Delta(x + \Delta x))$ принадлежат параллелепипеду \mathcal{D} , который определяется формулой (6.12). Но тогда

$$\left\| \int_x^{x+\Delta x} y'_\Delta(t) dt \right\| \leq \int_x^{x+\Delta x} \|f(t, y_\Delta(t))\| dt \leq M\Delta x < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (6.24)$$

если величина $|\Delta x|$ достаточно мала. Из (6.23) с учетом (6.22) и (6.24) выводим, что

$$\|y(x + \Delta x, x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0) - y(x, x_0, y_0)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

А это и означает, что решение $y(x, x_0, y_0)$ непрерывно по совокупности переменных в точке (x, x_0, y_0) .

Теорема доказана. ■

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений, правая часть которой зависит от m действительных параметров:

$$y'(x) = f(x, y, \mu), \quad \mu \in \mathbb{R}^m. \quad (6.25)$$

Дополним эту систему начальным условием

$$y(x_0) = y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (6.26)$$

Определим параллелепипед

$$\mathcal{D}_\mu = \{(x, y, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid |x - x_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b, \|\mu - \mu_0\| \leq c\}. \quad (6.27)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6.5. Пусть в параллелепипеде \mathcal{D}_μ функция $f(x, y, \mu)$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица по переменной y :

$$\|f(x, y_1, \mu) - f(x, y_2, \mu)\| \leq L\|y_1 - y_2\|,$$

где точки $(x, y_1, \mu) \in \mathcal{D}_\mu$, $(x, y_2, \mu) \in \mathcal{D}_\mu$, а L — постоянная, не зависящая от μ . Тогда решение $y(x, \mu)$ задачи Коши (6.25), (6.26) есть непрерывная по совокупности переменных функция, при $|\mu - \mu_0| \leq c$ и $|x - x_0| \leq h$, где

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad M = \max_{(x, y, \mu) \in \mathcal{D}_\mu} \|f(x, y, \mu)\|. \quad (6.28)$$

Доказательство. Рассуждения, совершенно аналогичные тем, что были проведены при доказательстве теоремы Пикара–Линделёфа, позволяют нам утверждать, что последовательность $y_0(x, \mu) = y_0$,

$$y_{k+1}(x, \mu) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_k(t, \mu), \mu) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.29)$$

стремится к решению $y(x, \mu)$ задачи Коши (6.25), (6.26) при $k \rightarrow \infty$ равномерно по x и μ , где $|x - x_0| \leq h$ и $\|\mu - \mu_0\| \leq c$. Несложно убедиться, что все функции $y_k(x, \mu)$ непрерывны по совокупности переменных x, μ , когда $|x - x_0| \leq h$ и $|\mu - \mu_0| \leq c$. Известный результат из курса анализа гарантирует нам тогда, что равномерный предел такой последовательности, функция $y(x, \mu)$, также есть непрерывная

на этом множестве функция. Переходя в формуле (6.29) к пределу при $k \rightarrow \infty$, убеждаемся, что $y(x, \mu)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(x, \mu) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t, \mu), \mu) dt,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно задаче Коши (6.25), (6.26). Точно так же, как и в теореме Пикара–Линделёфа, доказывается затем единственность построенного решения $y(x, \mu)$. ■

6.3. Продолжение решений

В замечании 2 к теореме Пикара–Линделёфа приведен пример задачи Коши (6.1), (6.2), который показывает, что ее решение может быть непродолжаемо на всю ось, даже в тех случаях, когда функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения при всех $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. В этом разделе мы обсудим самые простые результаты, касающиеся продолжения решения задачи Коши (6.1), (6.2) по переменной x .

Будем далее предполагать, что задача Коши (6.1), (6.2) в силу теоремы 6.1 однозначно разрешима при любых начальных условиях $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Определим следующие величины:

$$\begin{aligned} \omega_+ &= \sup \{ x_+ \in \mathbb{R} \mid y_0(x) \text{ существует на отрезке } [x_0, x_+] \}, \\ \omega_- &= \sup \{ x_- \in \mathbb{R} \mid y_0(x) \text{ существует на отрезке } [x_-, x_0] \}, \end{aligned}$$

где $y_0(x)$ — решение задачи (6.1), (6.2).

Определение 6.2. Интервал (ω_-, ω_+) называют максимальным интервалом существования решения $y_0(x)$.

Очевидно, что решение $y_0(x)$ может быть продолжено на свой максимальный интервал существования. Действительно, выберем монотонно возрастающую последовательность $x_k \geq x_0$, $k \in \mathbb{N}$, так, что решение $y_0(x)$ существует на отрезке $[x_0, x_k]$ и, кроме того, $x_k \rightarrow \omega_+$. Поскольку решение $y_0(x)$ существует на отрезке $[x_0, x_k]$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то оно существует и на множестве

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} [x_0, x_k] = [x_0, \omega_+).$$

Следовательно, решение $y_0(x)$ продолжимо на полуинтервал $[x_0, \omega_+)$. Таким же образом решение $y_0(x)$ может быть продолжено и на полуинтервал $(\omega_-, x_0]$. Если $\omega_+ = +\infty$ ($\omega_- = -\infty$), то вопрос о продолжимости решения вправо (влево) не стоит. Таким образом, необходимо лишь прояснить, что происходит с решением $y_0(x)$, когда величина ω_+ (ω_-) конечна. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 6.6. *Пусть величина ω_+ (ω_-) конечна. Тогда имеет место предельное равенство:*

$$\lim_{x \rightarrow \omega_+ - 0} \|y_0(x)\| = +\infty \quad \left(\lim_{x \rightarrow \omega_- + 0} \|y_0(x)\| = +\infty \right). \quad (6.30)$$

Доказательство. Пусть, например, величина ω_+ конечна. Предположим, что предельное равенство (6.30) не имеет места. Тогда найдется такая монотонно возрастающая последовательность $x_k \geq x_0$, $k \in \mathbb{N}$, и $x_k \rightarrow \omega_+ - 0$ при $k \rightarrow \infty$, что решение $y_0(x)$ существует на отрезке $[x_0, x_k]$ и, кроме того, $y_0(x_k) \rightarrow y_*$, где $y_* \in \mathbb{R}^n$. Пусть $y(x, \omega_+, y_*)$ — решение системы (6.1) с начальным условием $y(\omega_+) = y_*$, где $y_* \in \mathbb{R}^n$. В силу теоремы Пикара–Линделёфа это решение существует на некотором отрезке $[\omega_+ - h, \omega_+ + h]$, $h > 0$. Рассмотрим также решение $y(x, x_k, y_0(x_k))$ системы (6.1) с начальным условием в точке $x = x_k$, равным $y_0(x_k)$ и $k \gg 1$. Поскольку $x_k \rightarrow \omega_+ - 0$ и $y_0(x_k) \rightarrow y_*$, то по теореме 6.4 решение $y(x, x_k, y_0(x_k))$ определено на некотором отрезке $[\omega_+ - \hat{h}, \omega_+ + \hat{h}]$, если $k \gg 1$. Заметим, что $y_0(x) \equiv y(x, x_k, y_0(x_k))$ в силу единственности решения задачи Коши. Поэтому решение $y_0(x)$ также существует на некотором отрезке $[\omega_+ - \hat{h}, \omega_+ + \hat{h}]$, $\hat{h} > 0$. А это противоречит определению величины ω_+ . Доказательство для случая, когда конечной оказывается величина ω_- , совершенно аналогично.

Теорема доказана. ■

6.4. Дифференцируемость решений по начальным условиям и параметрам

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, зависящую от параметров

$$y'(x) = f(x, y, \mu), \quad \mu \in \mathbb{R}^m, \quad (6.31)$$

вместе с начальным условием (6.2), решение которой обозначим как $y(x, \mu)$, а также — задачу Коши (6.1), (6.2), решение которой будем обозначать как $y(x, x_0, y_0)$. В этом разделе изучается вопрос о существовании частных производных

$$\frac{\partial y}{\partial \mu_j}(x, \mu), \quad \frac{\partial y}{\partial y_0^k}(x, x_0, y_0), \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n,$$

где $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ и $y_0 = (y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^n)$. Сперва покажем, что вопрос о существовании частных производных решения системы (6.31) по параметрам сводится к задаче нахождения частных производных решения некоторой системы по начальным условиям. Действительно, будем считать параметр μ в системе (6.31) новой векторной переменной, которая подчиняется системе

$$\mu'(x) = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}^m, \quad (6.32)$$

и начальному условию

$$\mu(x_0) = \mu_0. \quad (6.33)$$

Нетрудно заметить тогда, что задача нахождения частной производной $\frac{\partial y}{\partial \mu_j}(x, \mu)$ решения системы (6.31) эквивалентна задаче нахож-

дения частной производной по начальному условию $\frac{\partial y}{\partial \mu_0^j}(x, x_0, y_0, \mu_0)$, где $y(x, x_0, y_0, \mu_0)$ — решение системы (6.31), (6.32), удовлетворяющее начальным условиям (6.2), (6.33), и $\mu_0 = (\mu_0^1, \mu_0^2, \dots, \mu_0^m)$. По этой причине будем далее рассматривать задачу Коши (6.1), (6.2) и исследуем вопрос существования частных производных $\frac{\partial y}{\partial y_0^k}(x, x_0, y_0)$, где $k = 1, \dots, n$.

Теорема 6.7. Пусть в параллелепипеде \mathcal{D} , определяемом формулой (6.12), непрерывны по совокупности переменных вектор-функция $f(x, y)$, а также все ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial y_k}(x, y)$, $k = 1, \dots, n$. Тогда существуют и непрерывны по совокупности переменных частные производные $\frac{\partial y}{\partial y_0^k}(x, x_0, y_0)$, $k = 1, \dots, n$, решения $y(x, x_0, y_0)$ задачи Коши (6.1), (6.2), где (x_0, y_0) — внутренняя точка множества \mathcal{D} и $x \in [x_0 - \hat{h}, x_0 + \hat{h}]$ для некоторого $\hat{h} = \hat{h}(x_0, y_0) > 0$.

Основу доказательства сформулированного результата составляет следующая лемма, именуемая обычно леммой Адамара.

Лемма 6.3. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна (по совокупности переменных) на множестве $(x_1, x_2) \times K$, где K — открытое выпуклое множество в пространстве \mathbb{R}^n , и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y_k}(x, y)$, $k = 1, \dots, n$. Тогда на множестве $(x_1, x_2) \times K \times K$ существует непрерывная по совокупности переменных матрица $A(x, y^{(1)}, y^{(2)})$ такая, что

$$A(x, y, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \quad (6.34)$$

и

$$f(x, y^{(1)}) - f(x, y^{(2)}) = A(x, y^{(1)}, y^{(2)})(y^{(1)} - y^{(2)}), \quad (6.35)$$

где $x \in (x_1, x_2)$ и $y, y^{(1)}, y^{(2)} \in K$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(t) = f(x, ty^{(1)} + (1-t)y^{(2)}), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Функция $F(t)$ корректно определена в силу выпуклости множества K . Очевидно, что

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, ty^{(1)} + (1-t)y^{(2)})(y^{(1)} - y^{(2)}).$$

Интегрируя это равенство по переменной t в пределах от 0 до 1, получаем

$$F(1) - F(0) = A(x, y^{(1)}, y^{(2)})(y^{(1)} - y^{(2)}),$$

где

$$A(x, y^{(1)}, y^{(2)}) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, ty^{(1)} + (1-t)y^{(2)}) dt. \quad (6.36)$$

Замечая, что $F(1) = f(x, y^{(1)})$ и $F(0) = f(x, y^{(2)})$, приходим к равенству (6.35). Наконец, формула (6.34) есть простое следствие представления (6.36). ■

Доказательство теоремы 6.7. Обозначим через $y_t(x)$ решение системы (6.1) с начальным условием

$$y_t(x_0) = y_0 + te_k, \quad e_k = (0, \dots, \overset{(k)}{1}, 0, \dots, 0)^T,$$

где $t \in \mathbb{R}$ и $0 < |t| \ll 1$. В силу теоремы 6.4 при достаточно малых $|t|$ решение $y_t(x)$ определено на некотором отрезке $[x_0 - \hat{h}, x_0 + \hat{h}]$, $\hat{h} > 0$,

и, кроме того, равномерно по x из этого отрезка $y_t(x) \rightarrow y(x, x_0, y_0)$ при $t \rightarrow 0$. Определим функцию

$$z_t(x) = \frac{y_t(x) - y(x, x_0, y_0)}{t}.$$

По определению имеем

$$\frac{\partial y}{\partial y_0^k}(x, x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} z_t(x). \quad (6.37)$$

Покажем, что этот предел существует. Используя лемму Адамара, заключаем, что

$$\begin{aligned} z'_t(x) &= \frac{1}{t} [f(x, y_t(x)) - f(x, y(x, x_0, y_0))] = \\ &= A(x, y_t(x), y(x, x_0, y_0)) z_t(x), \\ z_t(x_0) &= e_k. \end{aligned} \quad (6.38)$$

В силу непрерывности матрицы $A(x, y^{(1)}, y^{(2)})$ равномерно по x из отрезка $[x_0 - \hat{h}, x_0 + \hat{h}]$ имеет место предельное равенство

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} A(x, y_t(x), y(x, x_0, y_0)) &= A(x, y(x, x_0, y_0), y(x, x_0, y_0)) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, x_0, y_0)). \end{aligned} \quad (6.39)$$

Будем рассматривать (6.38) как семейство задач Коши, зависящее от параметра t . Заметим, что матрица $A(x, y_t(x), y(x, x_0, y_0))$ непрерывна по t, x при $|t| \ll 1$ и $x \in [x_0 - \hat{h}, x_0 + \hat{h}]$. Из теоремы 6.5 тогда следует, что решение $z_t(x)$ непрерывно зависит от параметра t при $|t| \ll 1$ т.е.,

$$\lim_{t \rightarrow 0} z_t(x) = z_0(x), \quad x \in [x_0 - \hat{h}, x_0 + \hat{h}]$$

и, кроме того, в силу (6.39) функция $z_0(x)$ является решением задачи Коши

$$z'_0(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, x_0, y_0)) z_0(x), \quad z_0(x_0) = e_k. \quad (6.40)$$

Таким образом, из (6.37) окончательно выводим, что

$$\frac{\partial y}{\partial y_0^k}(x, x_0, y_0) = z_0(x).$$

Осталось заметить, что поскольку матрица $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, x_0, y_0))$ непрерывно зависит от переменных x_0, y_0 как от параметров, то и решение

$z_0(x)$ задачи (6.40) в силу теоремы 6.5 непрерывно по совокупности переменных.

Теорема доказана. ■

Замечание 1. Можно показать, что при условиях теоремы 6.7 непрерывной по совокупности переменных оказывается и частная производная $\frac{\partial y}{\partial x_0}(x, x_0, y_0)$ решения $y(x, x_0, y_0)$ задачи Коши (6.1), (6.2).

Возвращаясь теперь к системе (6.31), можно сформулировать следующий результат, касающийся существования частных производных $\frac{\partial y}{\partial \mu_j}(x, \mu)$, $j = 1, \dots, t$.

Теорема 6.8. Пусть в параллелепипеде \mathcal{D}_μ , определяемом формулой (6.27), непрерывны по совокупности переменных функция $f(x, y, \mu)$, а также все ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial y_k}(x, y, \mu)$, $k = 1, \dots, n$, и $\frac{\partial f}{\partial \mu_j}(x, y, \mu)$, $j = 1, \dots, t$. Тогда при $|x - x_0| \leq h$, где величина h определяется формулой (6.28), и любом μ из отрезка $|\mu - \mu_0| \leq c$ существуют и непрерывны частные производные $\frac{\partial y}{\partial \mu_j}(x, \mu)$, $j = 1, \dots, t$ решения $y(x, \mu)$ задачи Коши (6.31), (6.2).

В завершение отметим, что если в теоремах 6.7 и 6.8 требовать существование и непрерывность всех высших производных функций $f(x, y)$ и $f(x, y, \mu)$ по компонентам векторов y и μ вплоть до некоторого порядка r , то можно показать, что и решения $y(x, x_0, y_0)$ и $y(x, \mu)$ также будут обладать всеми производными по переменной x_0 и компонентам векторов y_0 и μ вплоть до порядка r включительно.

Глава 7

Теория устойчивости

7.1. Основные определения.

Устойчивость в линейных системах

В этом разделе мы продолжаем разговор о системах нелинейных дифференциальных уравнений, которые на сей раз будем записывать в виде:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt} \right), \quad (7.1)$$

где переменная $t \in \mathbb{R}$ обычно обозначает время, а $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ является пространственной переменной. Будем предполагать, что вектор-функция $f(t, x)$ и все ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ непрерывны по совокупности переменных при $t \geq t_*$ для некоторого $t_* \in \mathbb{R}$ (причем t_* может быть символом $-\infty$) и $x \in \mathcal{U}$, где \mathcal{U} — некоторое открытое множество в \mathbb{R}^n . Обозначим $x_0(t) = x(t, t^0)$ — решение системы (7.1) с начальным условием $x_0(t^0) = x^0$, где $t^0 \geq t_*$ и $x^0 \in \mathcal{U}$. В силу теоремы 6.1 такое решение существует, единственно и определено, по крайней мере, на некотором отрезке $[t^0, t^0 + h]$, $h > 0$. Принципиальным для дальнейшего будет предположение о том, что решение $x_0(t)$ определено при всех $t \geq t^0$.

Системы вида (7.1) возникают обычно как модели различных динамических процессов (физических, биологических, химических, экономических и т.д.). В этой связи актуальным является вопрос о том, насколько решение $x_0(t)$ способно отражать некоторый наблюдаемый динамический режим. Действительно, начальные условия этого решения выбираются не точно, а лишь приближенно, исходя из некоторых характеристик наблюдаемого процесса. Иными словами, в предположении адекватности модели (7.1) наблюдаемый

режим соответствует решению $x(t) = x(t, t_0)$ системы (7.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, $t_0 \geq t^0$, таким, что векторы начальных условий x_0 и x^0 в некотором смысле близки. Теорема 6.4 о непрерывной зависимости решений от начальных условий позволяет нам тогда утверждать, что решения $x_0(t)$ и $x(t)$ остаются близки и на некотором отрезке $[t_0, t_0 + \hat{h}]$, $\hat{h} > 0$. Но на практике мы хотели бы быть уверены в том, что и при увеличении значения переменной t решение $x_0(t)$ будет по-прежнему адекватно отражать наблюдаемый процесс, т. е. останется близким к решению $x(t)$. Ответ на вопрос о близости решений системы (7.1) с близкими начальными условиями на бесконечном промежутке дает теория устойчивости. Основы этой теории были заложены великим русским математиком А.М. Ляпуновым в его докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения» (см. [15]).

Определение 7.1. *Решение $x_0(t)$ называется устойчивым (по Ляпунову), если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $t_0 \geq t^0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что выполнены следующие условия:*

1). *Любое решение $x(t)$ системы (7.1) такое, что*

$$\|x(t_0) - x_0(t_0)\| < \delta, \quad t_0 \geq t^0, \quad (7.2)$$

определено для всех $t \geq t_0$.

2). *Любое решение $x(t)$ системы (7.1), для которого выполнено неравенство (7.2), обладает тем свойством, что*

$$\|x(t) - x_0(t)\| < \varepsilon \quad (7.3)$$

для всех $t \geq t_0$.

На рисунке 7.1 схематично изображено понятие устойчивого решения. Решение $x(t)$ с начальным условием в момент времени $t = t_0$ из δ -окрестности решения $x_0(t)$ (δ -трубка) остается при всех $t \geq t_0$ в ε -окрестности этого решения (ε -трубка). Решение $x_0(t)$, не являющееся устойчивым, называют неустойчивым (по Ляпунову). Рассмотрим несколько простых примеров исследования устойчивости нулевого решения.

Пример 1. Пусть $f(t, x) = -x$ и $x \in \mathbb{R}$. Тогда решение уравнения (7.1) с начальным условием в точке $t = t_0$ задается формулой $x(t) = x(t_0)e^{-(t-t_0)}$. Из этой формулы легко выводим, что если выбрать $\delta = \varepsilon$, то из неравенства $|x(t_0)| < \delta$ при $t \geq t_0$ следует неравенство $|x(t)| < \varepsilon$. Следовательно, решение $x_0(t) \equiv 0$ является устойчивым.

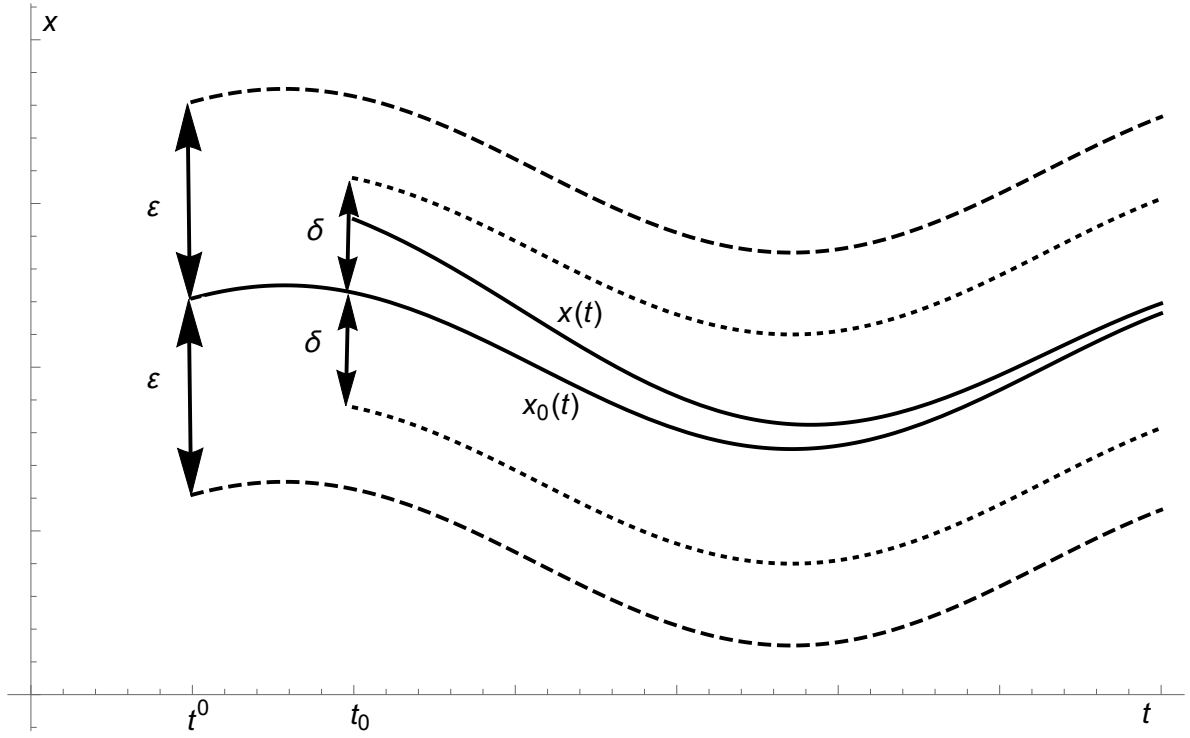


Рис. 7.1. Схематичное изображение устойчивого решения $x_0(t)$

Пример 2. Пусть $f(t, x) = x$ и $x \in \mathbb{R}$. Тогда решение уравнения (7.1) с начальным условием в точке $t = t_0$ задается формулой $x(t) = x(t_0)e^{t-t_0}$. Выбирая $x(t_0) = \delta$, замечаем, что любое такое решение стремится к бесконечности при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, неравенство $|x(t)| < \varepsilon$ не может выполняться для всех $t \geq t_0$ ни при каком выборе величины ε . Значит, решение $x_0(t) \equiv 0$ неустойчиво.

Пример 3. Пусть $f(t, x) = x^2$ и $x \in \mathbb{R}$. Несложно проверить, что решение уравнения (7.1) с начальным условием в точке $t = 0$ задается формулой $x(t) = (x^{-1}(0) - t)^{-1}$. Выбирая $x(0) = \delta$, замечаем, что любое такое решение терпит разрыв в точке $t = \delta^{-1}$, а следовательно, не является определенным при всех $t \geq 0$. Таким образом, решение $x_0(t) \equiv 0$ неустойчиво.

Определение 7.2. Решение $x_0(t)$ называется *асимптотически устойчивым*, если:

- 1). Оно является устойчивым (по Ляпунову).
- 2). Для любого $t_0 \geq t^0$ найдется такое $\eta = \eta(t_0) > 0$, что любое решение $x(t)$ системы (7.1), для которого выполнено неравенство $\|x(t_0) - x_0(t_0)\| < \eta$, обладает тем свойством, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_0(t)\| = 0. \quad (7.4)$$

Легко видеть, что решение $x_0(t) \equiv 0$ в примере 1 является асимптотически устойчивым.

Оказывается, исследование устойчивости произвольного решения $x_0(t)$ всегда можно свести к исследованию устойчивости нулевого решения некоторой преобразованной системы. Действительно, осуществим в системе (7.1) замену $y(t) = x(t) - x_0(t)$. В результате этой замены приходим к системе

$$\dot{y} = f(t, y + x_0(t)) - f(t, x_0(t)), \quad (7.5)$$

которая имеет решение $y_0(t) \equiv 0$. Нетрудно заметить, что определения 7.1 и 7.2, сформулированные для решения $y_0(t) \equiv 0$ системы (7.5), в силу проделанной замены эквивалентны соответствующим определениям устойчивости решения $x_0(t)$ системы (7.1). По этой причине часто более удобной оказывается формулировка утверждений об устойчивости не произвольного решения $x_0(t)$, а нулевого решения системы (7.1), наличие которого априори предполагается. Этим обстоятельством мы в дальнейшем будем пользоваться.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (7.6)$$

в которой элементы $(n \times n)$ -матрицы $A(t)$ и компоненты вектор-функции $f(t)$ непрерывны при $t \geq t_*$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 7.1. *Решение $x_0(t)$ системы (7.6) устойчиво тогда и только тогда, когда устойчиво нулевое решение соответствующей однородной системы*

$$\dot{y} = A(t)y. \quad (7.7)$$

Доказательство. Пусть решение $x_0(t)$ системы (7.6) устойчиво, т. е. выполнены соответствующие условия из определения 7.1. Сделаем в этой системе замену $y(t) = x(t) - x_0(t)$, в результате которой приходим к системе (7.7). Переписывая теперь условия устойчивости решения $x_0(t)$ из определения 7.1 в терминах функции $y(t)$, получаем в точности определение устойчивости решения $y_0(t) \equiv 0$ системы (7.7).

Предположим теперь, что решение $y_0(t) \equiv 0$ системы (7.7) устойчиво. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ и любого $t_0 \geq t_*$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, что из неравенства $\|y(t_0)\| < \delta$ следует неравенство

$\|y(t)\| < \varepsilon$, выполненное для всех $t \geq t_0$. Пусть теперь $x_0(t)$ — некоторое решение системы (7.6), определенное для всех $t \geq t_*$. Полагая $y(t) = x(t) - x_0(t)$, заключаем, что $x(t)$ является решением системы (7.6) и, кроме того, оказываются выполненными все условия из определения 7.1. Следовательно, решение $x_0(t)$ устойчиво. ■

Следствие 7.1. *Все решения системы (7.6) устойчивы или неустойчивы одновременно. Устойчивость или неустойчивость решений не зависит от вектор-функции $f(t)$ и совпадает с устойчивостью или неустойчивостью нулевого решения системы (7.7).*

Замечание 1. Утверждения леммы 7.1 и следствия 7.1 остаются справедливыми, если заменить термин «устойчивость» на «асимптотическая устойчивость».

Характерной особенностью поведения решений линейной однородной системы (7.7) является связь между устойчивостью всех решений этой системы и их ограниченностью при $t \geq t_*$.

Лемма 7.2. *Любое решение $y_0(t)$ системы (7.7) устойчиво тогда и только тогда, когда все решения этой системы ограничены при $t \geq t_*$.*

Доказательство. Поскольку устойчивость любого решения системы (7.7) эквивалентна устойчивости нулевого решения этой системы, будем в дальнейшем полагать, что $y_0(t) \equiv 0$.

Предположим сначала, что все решения системы (7.7) ограничены при $t \geq t_*$. Пусть $Y(t)$ — матрицант этой системы. Тогда в силу ограниченности всех решений, а значит, и фундаментальных, найдется такая константа $M > 0$, что $\|Y(t)\| \leq M$ для всех $t \geq t_*$. Выберем произвольным образом величину $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq t_*$. Рассмотрим решение $y(t)$ с начальным условием $y(t_0) = y_0$ такое, что $\|y_0\| < \delta$, где $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Замечая, что $y(t) = Y(t)y_0$, получаем

$$\|y(t)\| \leq \|Y(t)\| \|y_0\| < M\delta = \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

Таким образом, нулевое решение системы (7.7) устойчиво.

Пусть теперь нулевое решение системы (7.7) устойчиво. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого $t_0 \geq t_*$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, что из неравенства $\|y(t_0)\| < \delta$ следует неравенство $\|y(t)\| < \varepsilon$, выполненное для всех $t \geq t_0$. Предположим противное, что найдется не ограниченное при $t \geq t_*$ решение $\tilde{y}(t)$ системы (7.7). Очевидно, что $\tilde{y}(t_0) \neq 0$

для любого $t_0 \geq t_*$ в силу теоремы о единственности решения задачи Коши для линейных систем. Рассмотрим решение системы (7.7) вида

$$y(t) = \frac{\delta}{2} \frac{\tilde{y}(t)}{\|\tilde{y}(t_0)\|}.$$

Очевидно, что $\|y(t_0)\| < \delta$, а следовательно, при $t \geq t_0$ должно выполняться и неравенство $\|y(t)\| < \varepsilon$. Но тогда

$$\|\tilde{y}(t)\| = \frac{2}{\delta} \|y(t)\| \|\tilde{y}(t_0)\| < \frac{2\varepsilon}{\delta} \|\tilde{y}(t_0)\|$$

для всех $t \geq t_0$. Последнее противоречит неограниченности решения $\tilde{y}(t)$. Следовательно, все решения системы (7.7) ограничены при $t \geq t_*$. ■

Замечание 1. Несложно показать, что любое решение $y_0(t)$ системы (7.7) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все решения этой системы стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Наиболее просто задача устойчивости решается в случае систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax. \quad (7.8)$$

Теорема 7.1. Любое решение системы (7.8):

а) устойчиво в том и только в том случае, если все собственные числа матрицы A имеют неположительные действительные части, и, кроме того, собственным числам с нулевой действительной частью отвечают жордановы клетки порядка 1 в жордановой форме матрицы A ;

б) асимптотически устойчиво в том и только в том случае, если все собственные числа матрицы A имеют отрицательные действительные части;

в) неустойчиво в том и только в том случае, если у матрицы A имеется собственное число с положительной действительной частью или собственное число с нулевой действительной частью, но ему отвечает жорданова клетка порядка больше 1.

Доказательство.

а). Если выполнены все сформулированные в этом пункте условия, то в силу представления $x(t) = e^{tA}x(0)$ и оценки матричной экспоненты (4.47) все решения системы (7.8) ограничены. Из леммы 7.2 тогда следует, что любое решение системы (7.8) устойчиво. Предположим теперь, что любое решение системы (7.8) устойчиво. Тогда

все решения системы (7.8) должны быть ограниченными. Допустим, что у матрицы A имеется собственное число λ такое, что $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Пусть h_1 — отвечающий ему собственный вектор. Как известно, система (7.8) имеет решение $x(t) = e^{\lambda t} h_1$. Это решение не ограничено при $t \rightarrow +\infty$, поскольку

$$\|x(t)\| = |e^{\lambda t}| \|h_1\| = e^{\operatorname{Re} \lambda t} \|h_1\| \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, для устойчивости необходимо, чтобы все собственные числа матрицы A имели неположительные действительные части. Предположим теперь, что у матрицы A есть собственное число λ такое, что $\operatorname{Re} \lambda = 0$ и ему отвечает жорданова клетка порядка больше 1. Тогда, помимо собственного вектора h_1 , имеется присоединенный к нему вектор h_2 такой, что $A h_2 = \lambda h_2 + h_1$. Из раздела 4.1. нам известно, что в этом случае у системы (7.8) существует решение $x(t) = e^{\lambda t}(t h_1 + h_2)$. Поскольку

$$\|x(t)\| = |e^{\lambda t}| \|t h_1 + h_2\| \geq |t| \|h_1\| - \|h_2\|,$$

то $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, а значит, решение $x(t)$ не ограничено.

б). В силу пункта а) для устойчивости необходимо, чтобы все собственные числа матрицы A имели неположительные действительные части. В силу замечания к лемме 7.2 осталось показать, что все решения системы (7.8) стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$ тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы A имеют отрицательные действительные части. В одну сторону это вытекает из следствия 4.4. С другой стороны, если бы у матрицы A имелось собственное число λ , для которого $\operatorname{Re} \lambda = 0$, с отвечающим ему собственным вектором h_1 , то для решения $x(t) = e^{\lambda t} h_1$ системы (7.8) была бы справедлива оценка

$$\|x(t)\| = |e^{\lambda t}| \|h_1\| = \|h_1\|.$$

Но тогда $x(t) \not\rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, а значит, это решение системы (7.8) не является асимптотически устойчивым.

в). Следует из а). ■

7.2. Второй метод Ляпунова

В этом разделе будем рассматривать нелинейную систему вида

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (7.9)$$

правая часть которой, в отличие от (7.1), не зависит явно от независимой переменной t . Такие системы называются *автономными*. Как и в предыдущем разделе, будем предполагать, что вектор-функция $f(x)$ и все ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ непрерывны при всех $x \in \mathcal{U}$, где \mathcal{U} — некоторое открытое множество в \mathbb{R}^n , содержащее внутри себя точку $x = 0$ (иными словами, \mathcal{U} — это некоторая окрестность нуля). Кроме того, будем считать, что $f(0) = 0$, т. е. система (7.9) имеет решение $x(t) \equiv 0$.

Предположим, что на множестве \mathcal{U} определена непрерывно дифференцируемая функция $V(x): \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 7.3. Функция $V(x)$ называется *положительно (отрицательно) определенной* в \mathcal{U} , если:

- 1⁰. $V(0) = 0$.
- 2⁰. $V(x) > 0$ ($V(x) < 0$) для всех $x \in \mathcal{U}$, $x \neq 0$.

Пример положительно определенной во всем \mathbb{R}^n функции доставляет функция $V(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$.

Определение 7.4. Функцию

$$\dot{V}(x) = (\text{grad } V(x), f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$$

называют *производной в силу системы* (7.9).

Несложно заметить, что производная в силу системы (7.9) является производной по переменной t сложной функции $W(t) = V(x(t))$, где $x(t)$ является решением этой системы.

Определение 7.5. Положительно определенная в \mathcal{U} функция $V(x)$ называется *функцией Ляпунова*, если для всех $x \in \mathcal{U}$ выполнено неравенство

$$\dot{V}(x) \leq 0,$$

где $\dot{V}(x)$ — производная в силу системы (7.9).

Излагаемые ниже результаты составляют суть так называемого второго метода Ляпунова. Этот метод известен также как метод функций Ляпунова.

Теорема 7.2 (теорема Ляпунова об устойчивости). Пусть для системы (7.9) в некоторой окрестности нуля \mathcal{U} существует функция Ляпунова. Тогда нулевое решение этой системы устойчиво.

Доказательство. Выберем величину $\varepsilon > 0$ так, что шар

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \varepsilon\}$$

целиком лежит в \mathcal{U} . Пусть \mathcal{S}_ε — граница этого шара, т.е. сфера $\|x\| = \varepsilon$. Поскольку \mathcal{S}_ε — компактное множество и непрерывная функция $V(x)$ принимает на ней лишь положительные значения, то существует

$$\min_{x \in \mathcal{S}_\varepsilon} V(x) = m > 0. \quad (7.10)$$

Рассмотрим теперь замкнутый шар \mathcal{B}_δ радиуса $0 < \delta < \varepsilon$. В силу непрерывности функции $V(x)$ и того факта, что $V(0) = 0$, величину δ можно выбрать настолько малой, что для всех $x \in \mathcal{B}_\delta$ будет выполнено неравенство $V(x) < m$. Осталось лишь показать, что если $x_0 \in \mathcal{B}_\delta$, то $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{B}_\varepsilon$ для всех $t \geq t_0$.

Введем в рассмотрение функцию $W(t) = V(x(t, t_0, x_0))$. Поскольку $\dot{W}(t) = \dot{V}(x(t, t_0, x_0)) \leq 0$, то функция $W(t)$ невозрастающая. Значит, $W(t) \leq W(t_0) = V(x_0) < m$ для всех $t \geq t_0$. Следовательно, решение $x(t, t_0, x_0)$ не может пересечь сферу \mathcal{S}_ε . В противном случае, нашлось бы $t_1 > t_0$, что $x(t_1, t_0, x_0) \in \mathcal{S}_\varepsilon$, а, значит, в силу (7.10) имело бы место неравенство $W(t_1) = V(x(t_1, t_0, x_0)) \geq m$. Таким образом, решение $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{B}_\varepsilon$ для всех $t \geq t_0$. Осталось лишь заметить, что в силу теоремы 6.6 решение $x(t, t_0, x_0)$ определено для всех $t \geq t_0$.

Теорема доказана. ■

Теорема 7.3 (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). Пусть для системы (7.9) в некоторой окрестности нуля \mathcal{U} существует функция Ляпунова такая, что функция $\dot{V}(x)$ отрицательно определена в \mathcal{U} . Тогда нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво.

Доказательство. Выбирая шары \mathcal{B}_ε и \mathcal{B}_δ так же, как это было сделано при доказательстве предыдущей теоремы, заключаем, что если $\|x_0\| \leq \delta$, то $\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$. Рассмотрим вновь функцию $W(t) = V(x(t, t_0, x_0))$. Поскольку функция $W(t)$ невозрастающая ($\dot{W}(t) \leq 0$) и ограниченная ($0 \leq W(t) \leq W(t_0)$), то существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} W(t) = A \geq 0. \quad (7.11)$$

Предположим сначала, что $A = 0$. Тогда $x(t, t_0, x_0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, т.к. $V(x) > 0$, если $x \neq 0$, и $V(0) = 0$. В этом случае

теорема доказана. Допустим теперь, что $A > 0$. Отсюда следует, что $W(t) \geq A$ при всех $t \geq t_0$, и, значит, существует такое $0 < \alpha \leq \varepsilon$, что $\|x(t, t_0, x_0)\| \geq \alpha$ для всех $t \geq t_0$. Действительно, в противном случае существовала бы последовательность $t_n \rightarrow +\infty$ такая, что $x(t_n, t_0, x_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Но тогда бы $W(t_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что не так в силу нашего предположения. Поскольку в шаровом слое $\alpha \leq x \leq \varepsilon$ функция $\dot{V}(x)$ непрерывна и принимает отрицательные значения, то найдется такое число m , что в этом слое будет выполнено неравенство $\dot{V}(x) \leq -m < 0$. Откуда выводим, что

$$\dot{W}(t) = \dot{V}(x(t, t_0, x_0)) \leq -m, \quad t \geq t_0.$$

Интегрируя это неравенство в промежутке от t_0 до t , заключаем, что $W(t) \leq W(t_0) - m(t - t_0)$. Но тогда $W(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, что противоречит (7.11). Таким образом, $A = 0$, и доказательство теоремы завершено. ■

Сформулируем еще одну теорему, которая позволяет с помощью функций Ляпунова доказывать неустойчивость нулевого решения. Пусть, как и прежде, \mathcal{U} — некоторая окрестность нуля в пространстве \mathbb{R}^n . Кроме того, пусть \mathcal{U}_1 — некоторое открытое подмножество \mathcal{U} , для которого точка $x = 0$ является граничной точкой.

Теорема 7.4 (теорема Четаева о неустойчивости). Пусть для системы (7.9) в некоторой окрестности нуля \mathcal{U} существует функция Ляпунова такая, что

$$V(x) > 0, \quad \dot{V}(x) > 0$$

для всех $x \in \mathcal{U}_1$, и $V(x) = 0$ в тех граничных точках области \mathcal{U}_1 , которые лежат внутри \mathcal{U} . Тогда нулевое решение этой системы неустойчиво.

Доказательство. Возьмем $x_0 \in \mathcal{U}_1$ и рассмотрим решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (7.9). Заметим, что это решение не может попасть на ту часть границы \mathcal{U}_1 , которая лежит в \mathcal{U} , ни при каком $t \geq t_0$. Действительно, рассматривая функцию $W(t) = V(x(t, t_0, x_0))$, заключаем, что $W(t) > 0$ и $\dot{W}(t) > 0$ при $t \geq t_0$ до тех пор, пока $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{U}_1$. Поскольку функция $W(t)$ возрастает, то $W(t) \geq W(t_0) > 0$ при $t \geq t_0$, а значит, равенство $W(t) = 0$ не может быть выполнено, т.е. решение $x(t, t_0, x_0)$ не может попасть на рассматриваемый участок границы области \mathcal{U}_1 , все время оставаясь в \mathcal{U}_1 . Пусть $\Omega \subset \mathcal{U}_1$ — некоторый компакт, такой что $x_0 \in \Omega$. Тогда

$$\dot{W}(t) = \dot{V}(x(t, t_0, x_0)) \geq m > 0, \quad t \geq t_0,$$

пока $x(t, t_0, x_0) \in \Omega$, и $W(t) \geq W(t_0) + m(t - t_0)$. Следовательно, решение $x(t, t_0, x_0)$ покидает любой компакт $\Omega \subset \mathcal{U}_1$. Действительно, функция $V(x)$ будучи непрерывной ограничена сверху на компакте Ω , а значит, и функция $W(t)$ ограничена, пока $x(t, t_0, x_0) \in \Omega$. Но в силу установленного выше неравенства имеем $W(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Осталось заметить, что решение $x(t, t_0, x_0)$, где $x_0 \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{B}_\delta$ и δ — произвольная сколь угодно малая величина, по этим причинам обязано покинуть некоторый шар \mathcal{B}_ε , оставаясь все время в области \mathcal{U}_1 . Значит, нулевое решение системы (7.9) неустойчиво.

Теорема доказана. ■

Функцию Ляпунова, удовлетворяющую всем условиям теоремы 7.4, называют иногда функцией Четаева.

Рассмотрим несколько примеров исследования нулевого решения нелинейной системы дифференциальных уравнений с помощью метода функций Ляпунова.

Пример 1.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_1^2 - x_2^3. \end{cases}$$

В качестве функции Ляпунова возьмем функцию $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Вычислим производную этой функции в силу системы:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = 2x_1(-x_1 + x_2 + x_1x_2) + \\ &+ 2x_2(x_1 - x_2 - x_1^2 - x_2^3) = -2(x_1 - x_2)^2 - 2x_2^4. \end{aligned}$$

Несложно видеть, что функция $\dot{V}(x_1, x_2)$ отрицательно определена во всем пространстве \mathbb{R}^2 . Согласно теореме 7.3, нулевое решение рассматриваемой системы асимптотически устойчиво.

Пример 2.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1^3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^3. \end{cases}$$

Пусть снова функция $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ будет выбрана в качестве функции Ляпунова. Вычисляя производную этой функции в силу системы, получаем:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = 2x_1(-x_2 + x_1^3) + \\ &+ 2x_2(x_1 + x_2^3) = 2x_1^4 + 2x_2^4. \end{aligned}$$

Выбирая в качестве окрестности нуля \mathcal{U} пространство \mathbb{R}^2 , а в качестве \mathcal{U}_1 — множество $\mathcal{U} \setminus \{0\}$, убеждаемся в том, что оказываются выполненными все условия теоремы Четаева. Следовательно, нулевое решение рассматриваемой системы неустойчиво.

Упражнение 7.1. *С помощью метода функций Ляпунова исследовать устойчивость нулевого решения следующей системы:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -2x_1^3 - x_2^3. \end{cases}$$

Несмотря на то что не существует алгоритма построения функции Ляпунова в общем случае, для некоторых специальных задач такая функция может быть указана, исходя из свойств рассматриваемой системы. Примером такой задачи является задача построения функции Ляпунова для линейной системы (7.8) в случае асимптотической устойчивости ее решений, а также в ситуации, когда у матрицы A имеется собственное число с положительной действительной частью, т. е. когда все решения этой системы неустойчивы.

Рассмотрим сначала случай, когда все собственные числа матрицы A имеют отрицательные действительные части. Будем строить функцию Ляпунова в виде положительно определенной квадратичной формы

$$V(x) = (Hx, x) > 0, \quad x \neq 0, \quad (7.12)$$

где $H^* = H$ — самосопряженная $(n \times n)$ -матрица, подлежащая определению, а символом $*$ обозначена операция эрмитова сопряжения, т. е. транспонирование матрицы и комплексное сопряжение всех ее элементов. Скалярное произведение в (7.12) понимается в смысле унитарного пространства и вычисляется согласно формуле (1.26). Покажем далее, что матрица H может быть выбрана так, что функция $V(x)$ будет положительно определенной, а ее производная в силу системы (7.8) будет функцией отрицательно определенной. Вычисляя последнюю, имеем

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= (H\dot{x}, x) + (Hx, \dot{x}) = (HAx, x) + (Hx, Ax) = \\ &= (HAx, x) + (A^*Hx, x) = ((HA + A^*H)x, x). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Постараемся выбрать матрицу H так, что

$$HA + A^*H = -I. \quad (7.14)$$

Откуда в силу (7.13) будет следовать, что

$$\dot{V}(x) = -(x, x), \quad (7.15)$$

а значит, функция $\dot{V}(x)$ является отрицательно определенной во всем пространстве \mathbb{R}^n . Уравнение (7.14) называют матричным уравнением Ляпунова. Ответ на вопрос о разрешимости этого уравнения в интересующей нас ситуации дает следующая лемма.

Лемма 7.3. *Пусть все собственные числа матрицы A имеют отрицательные действительные части. Тогда единственное решение уравнения (7.14) имеет вид*

$$H = \int_0^{+\infty} e^{tA^*} e^{tA} dt. \quad (7.16)$$

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши для матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dX}{dt} = XA + A^*X, \quad X(0) = I. \quad (7.17)$$

В силу теоремы 4.1 эта задача имеет единственное определенное на всей оси решение. Простой проверкой убеждаемся в том, что это решение может быть представлено в виде

$$X(t) = e^{tA^*} e^{tA}.$$

Поскольку все собственные числа матрицы A (а следовательно, и матрицы A^*) имеют отрицательные действительные части, то в силу оценки матричной экспоненты из следствия 4.4 заключаем, что имеет место неравенство

$$\|X(t)\| \leq M e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0, \quad (7.18)$$

для некоторых $M, \gamma > 0$. Из неравенства (7.18), в частности, следует, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = 0$. Интегрируя тогда обе части дифференциального уравнения (7.17) в промежутке от 0 до $+\infty$ и учитывая соответствующее начальное условие, получаем

$$-I = \int_0^{+\infty} X(t) dt A + A^* \int_0^{+\infty} X(t) dt.$$

Полагая теперь

$$H = \int_0^{+\infty} X(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{tA^*} e^{tA} dt,$$

приходим к выводу, что матрица H является решением матричного уравнения (7.14). Осталось заметить, что несобственный интеграл в (7.16) существует в силу оценки (7.18).

Лемма доказана. ■

Проверим теперь, что матрица H , задаваемая равенством (7.16) является самосопряженной и положительно определенной. Действительно, в силу свойств операции эрмитова сопряжения, имеем

$$\begin{aligned} H^* &= \int_0^{+\infty} (e^{tA^*} e^{tA})^* dt = \int_0^{+\infty} (e^{tA})^* (e^{tA^*})^* dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{tA^*} e^{tA} dt = H. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} (Hx, x) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{tA^*} e^{tA} dt x, x \right) = \int_0^{+\infty} (e^{tA^*} e^{tA} x, x) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} (e^{tA} x, (e^{tA^*})^* x) dt = \int_0^{+\infty} (e^{tA} x, e^{tA} x) dt = \int_0^{+\infty} \|e^{tA} x\|^2 dt > 0, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $V(x)$, определяемая формулой (7.12), является функцией Ляпунова с отрицательно определенной производной в силу системы (7.8).

Рассмотрим теперь случай, когда матрица A имеет собственное число с положительной действительной частью. Пусть жорданова форма матрицы A имеет вид (4.31). Будем считать для определенности, что собственным числом, о котором идет речь, является число λ_s (т.е. $\operatorname{Re} \lambda_s > 0$) и ему отвечает жорданов блок J_{λ_s} . Пусть невырожденная матрица C приводит матрицу A к жордановой форме. Тогда замена $x = Cy$ преобразует систему (7.8) к виду

$$\dot{y} = Jy, \quad y \in \mathbb{C}^n,$$

где матрица J определяется формулой (4.31). Последнее уравнение в этой системе в силу сделанных предположений имеет вид

$$\dot{y}_n = \lambda_s y_n.$$

В качестве функции Ляпунова (Четаева) выберем функцию

$$V(x) = y_n \bar{y}_n = |y_n|^2, \quad (7.19)$$

где

$$y_n = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

и c_1, \dots, c_n — некоторые, вообще говоря, комплексные постоянные. Имеем

$$\dot{V}(x) = \frac{dy_n}{dt} \bar{y}_n + y_n \frac{d\bar{y}_n}{dt} = \lambda_s |y_n|^2 + \bar{\lambda}_s |y_n|^2 = 2 \operatorname{Re} \lambda_s |y_n|^2.$$

В качестве области \mathcal{U}_1 из теоремы 7.4 возьмем область $y_n \neq 0$. В исходных переменных x_1, \dots, x_n граница этой области задается уравнениями

$$\sum_{j=1}^n x_j \operatorname{Re} c_j = 0, \quad \sum_{j=1}^n x_j \operatorname{Im} c_j = 0.$$

Легко проверить тогда, что все условия теоремы Четаева оказываются выполненными.

7.3. Устойчивость по первому приближению

Продолжим рассмотрение автономной системы (7.9). Как и ранее, будем предполагать, что функция $f(x)$ и все ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ непрерывны при всех $x \in \mathcal{U}$, где \mathcal{U} — некоторая открытая окрестность нуля в пространстве \mathbb{R}^n . Как и в предыдущем разделе, считаем, что $f(0) = 0$, т.е. система (7.9) имеет нулевое решение.

Наложенные на функцию $f(x)$ условия влекут ее дифференцируемость в точке $x = 0$. Следовательно, система (7.9) может быть представлена в виде

$$\dot{x} = Ax + \omega(x), \quad x \in \mathcal{U}. \quad (7.20)$$

Здесь $A = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0}$ — матрица Якоби отображения $f(x)$, вычисленная в точке $x = 0$, т.е. $(n \times n)$ -матрица, составленная из частных

производных $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$. Далее, функция $\omega(x)$ обладает тем свойством, что $\omega(x) = o(\|x\|)$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\omega(x)}{\|x\|} = 0. \quad (7.21)$$

Отбрасывая в системе (7.20) слагаемое $\omega(x)$, имеющее в нуле более высокий порядок малости, чем Ax , приходим к линейной системе (7.8). Вопрос об устойчивости нулевого решения последней решается согласно теореме 7.1. Нас будет интересовать вопрос о том, в какой степени эта теорема дает ответ на вопрос об устойчивости нулевого решения системы (7.9).

Теорема 7.5 (теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению). Пусть все собственные числа матрицы A имеют отрицательные действительные части. Тогда нулевое решение системы (7.9) асимптотически устойчиво. Если же у матрицы A имеется хотя бы одно собственное число с положительной действительной частью, то нулевое решение системы (7.9) неустойчиво.

Доказательство. В силу замечания 1 к теореме Пикара–Линделёфа решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (7.9), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$, существует при любых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathcal{U}$.

Предположим сначала, что все собственные числа матрицы A имеют отрицательные действительные части. Будем рассматривать систему (7.20) как линейную неоднородную систему с неоднородностью $f(t) = \omega(x(t))$. В силу теоремы 4.7 из раздела 4 для решения $x(t, t_0, x_0)$ этой системы справедливо следующее представление:

$$x(t, t_0, x_0) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}\omega(x(s, t_0, x_0))ds. \quad (7.22)$$

Далее, в силу следствия 4.4 найдутся такие $M, \gamma > 0$, что

$$\|e^{(t-t_0)A}\| \leq Me^{-\gamma(t-t_0)}, \quad t \geq t_0. \quad (7.23)$$

Из равенства (7.21) следует, что для любого $\eta > 0$ найдется такое $r = r(\eta) > 0$, что

$$\|\omega(x)\| \leq \eta\|x\|, \quad \|x\| \leq r. \quad (7.24)$$

Оценивая теперь решение $x(t, t_0, x_0)$ по норме и используя неравенства (7.23) и (7.24), получаем

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq M e^{-\gamma(t-t_0)} \|x_0\| + M\eta \int_{t_0}^t e^{-\gamma(t-s)} \|x(s, t_0, x_0)\| ds.$$

Это неравенство справедливо для тех значений $t \geq t_0$, для которых $\|x(t, t_0, x_0)\| \leq r$. Умножим обе части этого неравенства на величину $e^{\gamma t}$ и обозначим $\varphi(t) = e^{\gamma t} \|x(t, t_0, x_0)\|$. Имеем

$$\varphi(t) \leq M e^{\gamma t_0} \|x_0\| + M\eta \int_{t_0}^t \varphi(s) ds.$$

Используя лемму (5.1) (лемма Гронвулла–Беллмана), из этого неравенства выводим, что

$$\varphi(t) \leq M e^{\gamma t_0} \|x_0\| e^{M\eta(t-t_0)}.$$

Отсюда следует, что

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq M \|x_0\| e^{(-\gamma + M\eta)(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

Выберем величину η настолько малой, что $M\eta \leq \frac{1}{2}$. Тогда будем иметь

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq M \|x_0\| e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t_0)}, \quad t \geq t_0. \quad (7.25)$$

Выберем начальное условие x_0 настолько малым, что $M \|x_0\| \leq r(\eta)$. Тогда из (7.25) будет следовать, что $\|x(t, t_0, x_0)\| \leq r$ для всех $t \geq t_0$. Значит, и неравенство (7.25) выполнено для всех $t \geq t_0$. В частности, в силу теоремы 6.6 решение $x(t, t_0, x_0)$ определено при всех $t \geq t_0$.

Фиксируем теперь величину $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M}$. Тогда из неравенства (7.25) вытекает, что если $\|x_0\| < \delta$, то $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$. Следовательно, нулевое решение системы (7.9) устойчиво. Кроме того, из (7.25) выводим, что $x(t, t_0, x_0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Значит, нулевое решение системы (7.9) асимптотически устойчиво.

Предположим теперь, что у матрицы A имеется собственное число с положительной действительной частью. Пусть матрица C приводит матрицу A к жордановой форме. Осуществляя замену $x = Cy$ в системе (7.20), приходим к системе

$$\dot{y} = Jy + w(y).$$

Здесь функция $w(y) = (w_1(y), \dots, w_n(y))$ обладает теми же свойствами, что и функция $\omega(x)$. Построим функцию Четаева так же, как это было сделано в конце предыдущего раздела. Имеем

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= (\lambda_s y_n + w_n(y)) \bar{y}_n + y_n (\bar{\lambda}_s \bar{y}_n + \bar{w}_n(y)) = \\ &= 2 \operatorname{Re} \lambda_s |y_n|^2 + 2 \operatorname{Re}(y_n \bar{w}_n(y)).\end{aligned}$$

Для любого $\eta > 0$ найдется такое $r = r(\eta) > 0$, что $|\bar{w}_n(y)| \leq \eta \|y\|$, если $\|y\| \leq r$. Поскольку $|y_n| \leq \|y\|$, то

$$2 \operatorname{Re}(y_n \bar{w}_n(y)) \geq -2 |y_n \bar{w}_n(y)| \geq -2 \eta |y_n| \|y\| \geq -2 \eta \|y\|^2.$$

Значит,

$$\dot{V}(x) \geq 2 \operatorname{Re} \lambda_s |y_n|^2 - 2 \eta \|y\|^2.$$

В частности, если $y = (0, \dots, 0, y_n)$, где $y_n \neq 0$, то

$$\dot{V}(x) \geq (2 \operatorname{Re} \lambda_s - 2 \eta) |y_n|^2 > 0$$

при условии, что $\eta < \operatorname{Re} \lambda_s$. Поскольку величину $|y_n|$ можно взять сколь угодно малой, а функция $\dot{V}(x)$ непрерывна по x , то в сколь угодно малой окрестности нуля существует открытое множество \mathcal{U}_1 , граница которого содержит точку $x = 0$, такое что $\dot{V}(x) > 0$ для всех $x \in \mathcal{U}_1$. Из теоремы Четаева тогда следует, что нулевое решение системы (7.9) неустойчиво. ■

7.4. Устойчивость многочленов

Как следует из материала предыдущего раздела, устойчивость нулевого решения системы (7.9) в линейном приближении определяется знаками действительных частей собственных чисел. Поскольку собственные числа являются корнями алгебраического полинома n -й степени, то уже при $n \geq 5$ явных формул для этих чисел, вообще говоря, указать нельзя. Следовательно, возникает очевидный вопрос о том, каким образом можно было бы определять знаки действительных частей корней алгебраических полиномов, не имея возможности получить для них формулы.

Определение 7.6. *Многочлен*

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (7.26)$$

называется устойчивым, если все его корни имеют отрицательные действительные части.

Установим сначала следующее необходимое условие устойчивости.

Лемма 7.4. Пусть многочлен $L(\lambda)$ с действительными коэффициентами a_i , $i = 1, \dots, n$, устойчив. Тогда все его коэффициенты положительны.

Доказательство. Представим многочлен $L(\lambda)$ в виде

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n),$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — его корни. Покажем, что, раскрывая скобки в этом выражении, мы, в конечном итоге, получим лишь положительные коэффициенты. Все корни можно разбить на две группы: действительные и комплексные. Будем вычислять произведение множителей $(\lambda - \lambda_i)$ внутри каждой из групп. Тогда

$$L(\lambda) = L_1(\lambda)L_2(\lambda), \quad L_1(\lambda) = \prod_{\lambda_i < 0} (\lambda - \lambda_i), \quad L_2(\lambda) = \prod_{\lambda_i \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \lambda_i < 0} (\lambda - \lambda_i).$$

Многочлен $L_1(\lambda)$ содержит лишь положительные коэффициенты, поскольку $(-\lambda_i) > 0$. Рассмотрим теперь многочлен $L_2(\lambda)$. Поскольку все коэффициенты исходного многочлена $L(\lambda)$ действительны, то в силу леммы 3.5, наряду с корнем $\lambda_i \in \mathbb{C}$ существует сопряженный с ним корень $\bar{\lambda}_i$. Но тогда

$$(\lambda - \lambda_i)(\lambda - \bar{\lambda}_i) = \lambda^2 - 2(\operatorname{Re} \lambda_i)\lambda + |\lambda_i|^2.$$

Все коэффициенты этого многочлена положительны, т. к. $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$. Следовательно, положительны и все коэффициенты многочленов $L_2(\lambda)$ и $L(\lambda)$. ■

Необходимые и достаточные условия отрицательности действительных частей корней алгебраических многочленов впервые были получены Раусом. Более известны условия, предложенные Гурвицем. Составим из коэффициентов многочлена (7.26) следующую $(n \times n)$ -матрицу (матрица Гурвица):

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}. \quad (7.27)$$

По главной диагонали этой матрицы расположены коэффициенты a_1, \dots, a_n . По левую и правую стороны от диагонального элемента расположены коэффициенты a_k с увеличивающимися и уменьшающимися на единицу индексами соответственно. При этом если $k > n$ или $k < 0$, то полагают $a_k = 0$, и, кроме того, $a_0 = 1$. Справедлива следующая теорема, которую обычно называют критерием Рауса–Гурвица.

Теорема 7.6 (теорема Гурвица). *Для устойчивости многочлена (7.26) необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы Гурвица (7.27)*

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_3 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

$$\Delta_n = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

были положительными.

Мы приведем доказательство лишь для случаев $n = 2$ и $n = 3$. Доказательство этой теоремы для произвольного n любознательный читатель может найти, например, в книге [26].

Доказательство. Пусть $n = 2$, тогда $L(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$. В силу леммы 7.4, если многочлен $L(\lambda)$ устойчив, то $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$. Но тогда $\Delta_1 = a_1 > 0$ и

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = a_1 a_2 > 0.$$

Обратно, пусть $\Delta_1 > 0$ и $\Delta_2 > 0$. Тогда, очевидно, что $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$. По формулам Виета имеем

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -a_1 < 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 = a_2 > 0.$$

Если λ_1 и λ_2 действительны, то в силу правой из вышеуказанных формул эти корни должны быть одного знака. Тогда из левой формулы вытекает, что оба эти корня отрицательны. Если же $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, то из левой формулы следует, что $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 < 0$.

Рассмотрим теперь случай $n = 3$. Имеем

$$L(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3. \quad (7.28)$$

Далее, $\Delta_1 = a_1$,

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} = a_1a_2 - a_3, \quad \Delta_3 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = a_3\Delta_2.$$

Таким образом, с учетом леммы 7.4 нам необходимо показать, что многочлен (7.28) с положительными коэффициентами устойчив тогда и только тогда, когда имеет место неравенство

$$a_1a_2 > a_3. \quad (7.29)$$

В дальнейшем будем использовать тот факт, что корни алгебраического многочлена (7.28) непрерывно зависят от его коэффициентов. Выясним сначала, когда у многочлена (7.28) могут существовать корни на мнимой оси (в том числе и нулевой корень). Положим $\lambda = i\omega$, где $\omega \in \mathbb{R}$, и подставим это выражение в (7.28). Предполагая, что $L(i\omega) = 0$, получаем, что

$$-i\omega^3 - a_1\omega^2 + ia_1\omega + a_3 = 0.$$

Приравнивая к нулю действительные и мнимые части, имеем

$$a_3 = a_2\omega^2, \quad a_1 = \omega^2.$$

Отсюда следует, что корень на мнимой оси может существовать лишь при выполнении равенства $a_1a_2 = a_3$. Таким образом, изменение числа корней с отрицательной (положительной) действительной частью при непрерывном изменении коэффициентов многочлена (7.28) возможно лишь при пересечении поверхности $a_1a_2 = a_3$ в пространстве коэффициентов. Значит, число корней с отрицательной (положительной) действительной частью в областях, описываемых неравенством (7.29) или неравенством

$$a_1a_2 < a_3, \quad (7.30)$$

сохраняется.

Предположим, что выполнено неравенство (7.30). Устремляя коэффициенты a_1 и a_2 в (7.28) к нулю, заключаем, что при выполнении указанного неравенства при близких к нулю значениях a_1 и a_2 у многочлена (7.28) должны иметься корни сколь угодно близкие к корням многочлена

$$L(\lambda) = \lambda^3 + a_3.$$

Этот многочлен имеет один отрицательный корень $\lambda_1 = -\sqrt[3]{a_3}$ и два комплексно сопряженных

$$\lambda_{2,3} = \sqrt[3]{a_3} \left(\cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Заметим, что $\operatorname{Re} \lambda_2 = \operatorname{Re} \lambda_3 > 0$, следовательно, и многочлен (7.28) при выполнении неравенства (7.30) обязан иметь корни с положительной действительной частью.

Пусть выполнено неравенство (7.29). Устремляя теперь коэффициент a_3 в (7.28) к нулю, заключаем, что при выполнении указанного неравенства при близких к нулю значениях a_3 у многочлена (7.28) должны иметься корни сколь угодно близкие к корням многочлена

$$L(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2).$$

Корни многочлена $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ имеют отрицательные действительные части в силу положительности коэффициентов a_1 и a_2 (случай $n = 2$). Следовательно, многочлен (7.28) тоже имеет, как минимум, два корня, действительные части которых отрицательны. Обращаясь к формуле Виета

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -a_3 < 0,$$

определяем знак третьего корня (этот корень обязан быть действительным). Очевидно, что этот корень — отрицательный. Таким образом, при выполнении неравенства (7.29) все корни многочлена (7.28) имеют отрицательные действительные части. ■

Следствие 7.2. *В случае $n = 2$ необходимое условие устойчивости многочлена (положительность коэффициентов) является и достаточным.*

Упражнение 7.2. *Найти необходимые и достаточные условия устойчивости многочлена с комплексными коэффициентами*

$$L(\lambda) = \lambda^2 + (p_1 + ip_2)\lambda + q_1 + iq_2,$$

где p_1, p_2, q_1, q_2 — действительные числа.

7.5. Замечания о неавтономном случае

Рассмотрим нелинейную систему (7.1), правая часть которой зависит явным образом от переменной t . Пусть на вектор-функцию $f(t, x)$

наложены те же условия, что и в разделе 7.1. Дополнительно предположим, что система (7.1) имеет нулевое решение, т. е. $f(t, 0) = 0$. Нас будут интересовать вопросы, связанные с исследованием устойчивости нулевого решения. Как и ранее, считаем, что \mathcal{U} — некоторое открытое множество в \mathbb{R}^n , содержащее внутри себя точку $x = 0$.

Пусть на множестве \mathcal{U} определена непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных функция $V(t, x): \{t \geq t_*\} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 7.7. *Функция $V(t, x)$ называется положительно (отрицательно) определенной в \mathcal{U} , если существует непрерывная в \mathcal{U} скалярная функция $Z(x)$ такая, что:*

- 1⁰. $V(t, 0) = Z(0) = 0$.
- 2⁰. $V(t, x) \geq Z(x) > 0$ ($V(t, x) \leq -Z(x) < 0$) для всех $t \geq t_*$ и $x \in \mathcal{U}$, $x \neq 0$.

Очевидно, что функция $Z(x)$ является положительно (отрицательно) определенной в смысле определения 7.3. В качестве функции $Z(x)$ иногда можно брать

$$Z(x) = \inf_{t \geq t_*} |V(t, x)|.$$

Определение 7.8. *Функцию*

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + (\text{grad}_x V(t, x), f(t, x)) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x)$$

называют производной в силу системы (7.1).

Производная в силу системы (7.1) является производной по переменной t сложной функции $W(t) = V(t, x(t))$, где $x(t)$ является решением этой системы.

Определение 7.9. *Положительно определенная в \mathcal{U} функция $V(t, x)$ называется функцией Ляпунова, если для всех $t \geq t_*$ и $x \in \mathcal{U}$ выполнено неравенство*

$$\dot{V}(t, x) \leq 0,$$

где $\dot{V}(t, x)$ — производная в силу системы (7.1).

Совершенно аналогично теоремам 7.2 и 7.3 с учетом новых определений формулируются теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения системы (7.1). Если ограничиться выбором функции Ляпунова $V(x)$, не зависящей от t , то

справедливой остается и формулировка теоремы Четаева о неустойчивости. Только условие положительности производной в силу системы (7.1) в подобласти \mathcal{U}_1 следует заменить условием того, что

$$\dot{V}(x) \geq Z(x) > 0, \quad t \geq t_*, \quad x \in \mathcal{U}_1,$$

где $Z(x)$ — непрерывная в \mathcal{U}_1 функция. Теорему Четаева можно сформулировать и для случая, когда функция Ляпунова (Четаева) ищется в виде $V(t, x)$. Соответствующий результат можно найти, например, в книге [7].

Теорему 7.5 об устойчивости по первому приближению в неавтономном случае можно установить для так называемой квазилинейной системы

$$\dot{x} = Ax + \omega(t, x), \quad t \geq t_*, \quad x \in \mathcal{U}. \quad (7.31)$$

Здесь A — постоянная $(n \times n)$ -матрица, функция $\omega(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных при $t \geq t_*$ и $x \in \mathcal{U}$ и обладает тем свойством, что $\omega(t, x) = o(\|x\|)$ равномерно по $t \geq t_*$, т. е.

$$\frac{\omega(t, x)}{\|x\|} \Rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0. \quad (7.32)$$

Очевидно, что из (7.32) и непрерывности функции $\omega(t, x)$ следует, что $\omega(t, 0) = 0$. Устойчивость нулевого решения системы (7.31) можно определить с помощью теоремы 7.5.

Глава 8

Автономные системы дифференциальных уравнений

8.1. Общие свойства автономных систем

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (8.1)$$

Пусть вектор-функция $f(x)$ и все ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ непрерывны в некоторой области $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Отметим далее несколько общих свойств решений систем (8.1).

Лемма 8.1. *Если $x = \varphi(t)$ — некоторое решение системы (8.1), то $x = \varphi(t + c)$, где c — произвольное действительное число, также является решением этой системы.*

Доказательство. Поскольку $x = \varphi(t)$ — решение системы (8.1), то

$$\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t)),$$

где $t \in \mathcal{I}$ и \mathcal{I} — интервал существования решения $\varphi(t)$ (см. раздел 6.3.). Тогда, если $t + c \in \mathcal{I}$, то

$$\dot{\varphi}(t + c) = f(\varphi(t + c)).$$

Следовательно, $x = \varphi(t + c)$ также является решением системы (8.1). ■

Свойство, указанное в лемме 8.1, называется инвариантностью относительно сдвигов по времени.

Определение 8.1. Пусть $\mathcal{I} = (\omega_-, \omega_+)$ — максимальный интервал существования решения $x = \varphi(t)$ системы (8.1). Множество

$$\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \varphi(t), t \in \mathcal{I}\}$$

называется фазовой траекторией (орбитой) системы (8.1).

Очевидно, что траектория системы (8.1) представляет собой некоторую кривую в пространстве \mathbb{R}^n (фазовое пространство). Эту кривую можно считать ориентированной, и ее ориентация определяется направлением движения точки $x = \varphi(t)$ вдоль этой кривой при увеличении значений переменной t .

Лемма 8.2. Любые две траектории γ_1 и γ_2 системы (8.1) либо не пересекаются, либо совпадают.

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \varphi(t), t \in \mathcal{I}_1\}, \\ \gamma_2 &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \psi(t), t \in \mathcal{I}_2\},\end{aligned}$$

где $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ — максимальные интервалы существования решений $x = \varphi(t)$ и $x = \psi(t)$ соответственно. Предположим, что

$$x_0 \in \gamma_1 \cap \gamma_2.$$

Тогда найдутся такие $t_1 \in \mathcal{I}_1$ и $t_2 \in \mathcal{I}_2$, что

$$x_0 = \varphi(t_1) = \psi(t_2).$$

В силу леммы 8.1 решением системы (8.1) является и вектор-функция $x = \varphi_1(t)$, где

$$\varphi_1(t) = \varphi(t + t_1 - t_2), \quad t + t_1 - t_2 \in \mathcal{I}_1. \quad (8.2)$$

Но тогда

$$\varphi_1(t_2) = \varphi(t_1) = \psi(t_2)$$

и, следовательно, по теореме единственности решения задачи Коши (теорема 6.1) должно выполняться тождество $\varphi_1(t) \equiv \psi(t)$, $t \in \mathcal{I}_2$. Откуда с учетом (8.2) выводим, что $\gamma_1 = \gamma_2$. ■

Определение 8.2. *Решение системы (8.1) вида $x(t) \equiv x_0 \in \mathcal{U}$, где $t \in \mathbb{R}$, называется положением (состоянием) равновесия системы (8.1).*

Лемма 8.3. *Точка $x_0 \in \mathcal{U}$ является положением равновесия системы (8.1) тогда и только тогда, когда $f(x_0) = 0$.*

Доказательство. Если x_0 — положение равновесия системы (8.1), то вектор-функция $x(t) \equiv x_0$ является решением этой системы. Но тогда $\dot{x} \equiv 0$ и подстановка этой вектор-функции в (8.1) приводит нас к равенству $f(x_0) = 0$. Обратно, если $f(x_0) = 0$, то вектор-функция $x(t) \equiv x_0$ является решением системы (8.1). Следовательно, x_0 — положение равновесия этой системы. ■

Определение 8.3. *Если решение системы (8.1) вида $x = \varphi(t)$ определено на всей действительной оси и является периодической вектор-функцией периода $T > 0$, то соответствующая ему траектория называется замкнутой траекторией (или циклом) системы (8.1).*

Всякая замкнутая траектория системы (8.1) является гладкой замкнутой кривой в пространстве \mathbb{R}^n . Справедлива следующая теорема о классификации всех траекторий системы (8.1).

Теорема 8.1. *Всякая траектория автономной системы (8.1) относится к одному из следующих трех типов:*

- 1) *положение равновесия;*
- 2) *замкнутая траектория;*
- 3) *траектория без самопересечений.*

Доказательство. Покажем, что если решение $x = \varphi(t, x_0)$ с начальным условием $x(0) = x_0$ не является положением равновесия системы (8.1) и соответствующая ему траектория γ пересекает сама себя, то вектор-функция $\varphi(t, x_0)$ периодически с периодом $T > 0$ продолжается на всю ось, а следовательно, γ — замкнутая траектория.

Предположим, что найдутся такие t_1 и t_2 , $t_1 < t_2$, что

$$\varphi(t_1, x_0) = \varphi(t_2, x_0).$$

Поскольку x_0 не является положением равновесия системы (8.1), то

$$\varphi(t, x_0) \neq \varphi(t_1, x_0), \quad t \in [t_1, t_2].$$

Обозначим $T = t_2 - t_1$ и покажем, что решение $\varphi(t, x_0)$ периодически продолжается на всю ось. Действительно, в силу леммы 8.1 решением системы (8.1) является также вектор-функция

$$\psi(t, x_0) = \varphi(t + T, x_0), \quad t \in [t_1 - T, t_1].$$

Заметим, что

$$\psi(t_1, x_0) = \varphi(t_1 + T, x_0) = \varphi(t_2, x_0) = \varphi(t_1, x_0).$$

В силу теоремы единственности отсюда следует, что

$$\varphi(t, x_0) \equiv \psi(t, x_0) \equiv \varphi(t + T, x_0), \quad t \in [t_1 - T, t_1].$$

Таким образом решение $\varphi(t, x_0)$ продолжается единственным образом по периодическому закону на отрезок $[t_1 - T, t_1]$. Полагая затем

$$\psi_1(t, x_0) = \varphi(t - T, x_0), \quad t \in [t_2, t_2 + T],$$

можно продолжить решение $\varphi(t, x_0)$ периодическим образом на отрезок $[t_2, t_2 + T]$. Аналогично можно продолжить решение $\varphi(t, x_0)$ на всю действительную ось с сохранением периодичности. Из леммы 8.2 тогда следует, что траектория γ , отвечающая этому решению, является замкнутой траекторией. ■

В завершение этого раздела приведем так называемое групповое свойство решений системы (8.1).

Лемма 8.4. Пусть $x = \varphi(t, x_0)$ — решение системы (8.1) с начальным условием $x(0) = x_0$. Тогда для любых $t_1, t_2, t_1 + t_2 \in \mathcal{I}$ имеет место равенство:

$$\varphi(t_1 + t_2, x_0) = \varphi(t_1, \varphi(t_2, x_0)) = \varphi(t_2, \varphi(t_1, x_0)).$$

Доказательство. Положим

$$\varphi_1(t) = \varphi(t, \varphi(t_1, x_0)), \quad \varphi_2(t) = \varphi(t + t_1, x_0).$$

Заметим, что $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ являются решениями системы (8.1), принимающими в точке $t = 0$ значения

$$\varphi_1(0) = \varphi(t_1, x_0) = \varphi_2(0).$$

В силу теоремы единственности отсюда следует, что $\varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t)$, если t принадлежит интервалу существования этих решений. В частности,

$$\varphi_1(t_2) = \varphi(t_2, \varphi(t_1, x_0)) = \varphi_2(t_2) = \varphi(t_1 + t_2, x_0).$$

Наконец, полагая

$$\varphi_3(t) = \varphi(t, \varphi(t_2, x_0)), \quad \varphi_4(t) = \varphi(t + t_2, x_0),$$

аналогичным образом можно показать, что $\varphi_3(t) \equiv \varphi_4(t)$. Откуда при $t = t_1$ получаем, что

$$\varphi_3(t_1) = \varphi(t_1, \varphi(t_2, x_0)) = \varphi_4(t_1) = \varphi(t_1 + t_2, x_0).$$

Лемма доказана. ■

8.2. Скалярные автономные уравнения первого порядка

Рассмотрим наиболее простую ситуацию, когда в системе (8.1) переменная $x \in \mathbb{R}$, т.е. имеем скалярное автономное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (8.3)$$

Будем считать, что функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема для всех $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 8.2. *Предположим, что уравнение (8.3) имеет ограниченное при $t \geq 0$ ($t \leq 0$) решение $x = x_0(t)$, т.е. $|x_0(t)| \leq M$, $M > 0$. Тогда либо само это решение является положением равновесия уравнения (8.3), либо оно стремится к некоторому положению равновесия этого уравнения при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$).*

Доказательство. Пусть решение $x_0(t) \not\equiv \text{const}$ при $t \geq 0$, т.е. не является положением равновесия уравнения (8.3). Покажем тогда, что $\dot{x}_0(t) \neq 0$ для всех $t \geq 0$. Предположим противное, что $\dot{x}_0(t_0) = 0$ при некотором $t_0 \geq 0$. Тогда из (8.3) выводим, что

$$\dot{x}_0(t_0) = f(x(t_0)) = 0.$$

Следовательно, $x_0(t_0)$ — положение равновесия уравнения (8.3). Отсюда в силу теоремы единственности выводим, что $x_0(t) \equiv x_0(t_0)$ при

всех $t \in \mathbb{R}$. Полученное противоречие показывает, что функция $\dot{x}_0(t)$ не меняет знака при $t \geq 0$.

Считаем, что $\dot{x}_0(t) > 0$ для всех $t \geq 0$ (случай $\dot{x}_0(t) < 0$ рассматривается аналогично). В силу теоремы Вейерштрасса монотонно возрастающая и ограниченная функция $x_0(t)$ имеет предел при $t \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_0(t) = a. \quad (8.4)$$

Покажем, что $f(a) = 0$. Отсюда в силу леммы 8.3 будет следовать, что точка a — положение равновесия уравнения (8.3). Поскольку $\dot{x}_0(t) = f(x_0(t))$ для всех $t \geq 0$, то в силу непрерывности функции $f(x)$ из (8.4) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}_0(t) = f(a). \quad (8.5)$$

В силу положительности функции $\dot{x}_0(t)$ заключаем, что $f(a) \geq 0$. Покажем, что в действительности $f(a) = 0$. Предположим противное, что $f(a) > 0$. Из (8.5) выводим тогда, что

$$\dot{x}_0(t) \geq m > 0, \quad t \geq 0, \quad (8.6)$$

для некоторого $m \in \mathbb{R}$. Интегрируя неравенство (8.6) в промежутке от 0 до t , получаем

$$x_0(t) \geq mt + x_0(0), \quad t \geq 0.$$

Правая часть этого неравенства стремится к $+\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Значит, решение $x_0(t)$ не является ограниченным при $t \geq 0$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $f(a) = 0$.

Случай ограниченности решения $x_0(t)$ на полуоси $t \leq 0$ рассматривается аналогично.

Теорема доказана. ■

Исследуем теперь динамику решений уравнения (8.3). Предположим, что функция $f(x)$ имеет на действительной оси лишь конечное число нулей $x_1 < \dots < x_n$. Очевидно, что эти точки являются положениями равновесия уравнения (8.3). Рассмотрим решение $x_0(t)$ с начальным условием $x_0(0) = x_0$. Пусть $x_0 = x_i$, $i = 1, \dots, n$, тогда в силу теоремы единственности $x_0(t) \equiv x_i$ для всех $t \in \mathbb{R}$, т. е. $x_0(t)$ — положение равновесия. Предположим теперь, что $x_0 \in (x_i, x_{i+1})$ для некоторого $i = 1, \dots, n-1$. Функция $f(x)$ сохраняет знак на интервале $x_0 \in (x_i, x_{i+1})$. Решение $x_0(t)$ не может пересечь прямые $x = x_i$ и $x = x_{i+1}$ ни при каком $t \in \mathbb{R}$ в силу теоремы единственности. Значит,

$x_0(t) \in (x_i, x_{i+1})$ для всех $t \in \mathbb{R}$ (при этом решение $x_0(t)$ продолжимо на всю ось в силу теоремы 6.6). Из (8.3) таким образом следует, что функция $\dot{x}_0(t)$ сохраняет свой знак для всех $t \in \mathbb{R}$. Отсюда вытекает, что решение $x_0(t)$ либо монотонно возрастает при всех $t \in \mathbb{R}$, если $f(x) > 0$ на интервале (x_i, x_{i+1}) , либо монотонно убывает при всех $t \in \mathbb{R}$, если $f(x) < 0$ при $x \in (x_i, x_{i+1})$. Поскольку решение $x_0(t)$ ограничено при всех $t \in \mathbb{R}$ и не является положением равновесия уравнения (8.3), то из теоремы 8.2 выводим, что $x_0(t)$ стремится к положению равновесия при $t \rightarrow -\infty$ и при $t \rightarrow +\infty$. А это означает, что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_0(t) = x_i, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_0(t) = x_{i+1},$$

если $f(x) > 0$ на интервале (x_i, x_{i+1}) , или

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_0(t) = x_{i+1}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_0(t) = x_i,$$

если $f(x) < 0$ на этом интервале.

Рассмотрим теперь случай, когда $x_0 > x_n$ (случай $x_0 < x_1$ рассматривается по аналогии). Решение $x_0(t)$ монотонно возрастает при всех $t \in \mathbb{R}$, если $f(x) > 0$ на интервале $(x_n, +\infty)$, и монотонно убывает на этом интервале, если $f(x) < 0$. В первом случае решение $x_0(t)$ не ограничено сверху при $t \geq 0$ и ограничено снизу при $t \leq 0$, а во втором случае — наоборот. Из теоремы 8.2 тогда следует, что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_0(t) = x_n,$$

если $f(x) > 0$ при $x \in (x_n, +\infty)$, и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_0(t) = x_n,$$

если $f(x) < 0$. Поскольку решение $x_0(t)$ не ограничено на полуоси $t \geq 0$ (или $t \leq 0$), то это решение может быть непродолжаемо на всю полуось. Другими словами, решение $x_0(t)$ стремится к $+\infty$ либо при $t \rightarrow \pm\infty$, либо при $t \rightarrow t_*$ для некоторого $t_* \in \mathbb{R}$, т. е. имеет вертикальную асимптоту. Обсудим этот вопрос подробнее. Поскольку, $\dot{x}_0(t) = f(x_0(t))$, то

$$\frac{\dot{x}_0(t)}{f(x_0(t))} = 1.$$

Интегрируя это равенство в промежутке от 0 до t , получаем.

$$\int_0^t \frac{\dot{x}_0(t)}{f(x_0(t))} dt = t. \quad (8.7)$$

Предположим, что $x_0(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow t_*$. Осуществляя в интеграле замену переменной интегрирования по правилу $x = x_0(t)$ с учетом начального условия $x_0(0) = x_0$, имеем

$$\int_0^t \frac{\dot{x}_0(t)}{f(x_0(t))} dt = \int_{x_0}^{x_0(t)} \frac{dx}{f(x)}. \quad (8.8)$$

Устремим в равенстве (8.7) переменную t к t_* . Поскольку, согласно нашему предположению $x_0(t_*) = +\infty$, то учитывая (8.8), получаем

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} = t_*. \quad (8.9)$$

Таким образом, решение $x_0(t)$ с начальным условием $x_0 \in (x_n, +\infty)$ имеет вертикальную асимптоту $t = t_*$ тогда и только тогда, когда конечен интеграл (8.9). В противном случае, решение $x_0(t)$ существует на всей действительной оси и, кроме того, стремится к $+\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, если $f(x) > 0$ на промежутке $x \in (x_n, +\infty)$, или при $t \rightarrow -\infty$, если $f(x) < 0$.

Осталось заметить, что с учетом леммы 8.1 любое решение $x(t)$ уравнения (8.3) может быть представлено в виде $x(t) = x_0(t + c)$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$.

Пример. Исследуем динамику решений уравнения

$$\dot{x} = x - x^3. \quad (8.10)$$

Положения равновесия этого уравнения: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Заметим, что если $x = x(t)$ — решение уравнения (8.10), то и функция $x = -x(t)$ является решением этого уравнения. Следовательно, необходимо изучить лишь динамику решения $x = x_0(t)$ с начальным условием $x_0(0) = x_0 > 0$. Исследуя знак функции $f(x) = x - x^3$, заключаем, что $x_0(t)$ возрастает, если $x_0 \in (0, 1)$, и $x_0(t)$ убывает, если $x_0 \in (1, +\infty)$. Отсюда следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_0(t) = 1,$$

если $x_0 > 0$, и

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_0(t) = 0,$$

если $x_0 \in (0, 1)$. Наконец, поскольку сходится интеграл (8.9), если $x_0 > 1$, то решение $x_0(t)$ имеет вертикальную асимптоту $t = t_*$. Графики решений уравнения (8.10) схематично изображены на рис. 8.1.

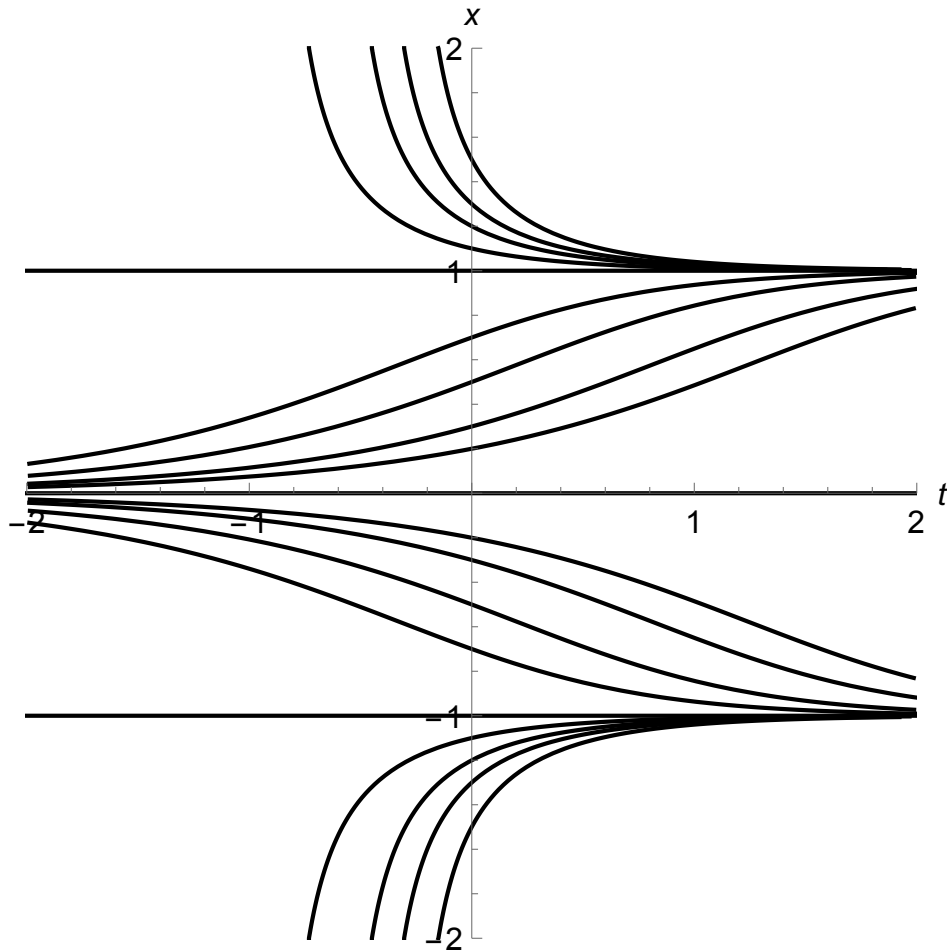


Рис. 8.1. Графики решений уравнения (8.10)

Упражнение 8.1. В предыдущем примере вычислить величину t_* , определяемую формулой (8.9).

8.3. Классификация положений равновесия линейной системы на плоскости

В этом разделе мы займемся изучением поведения решений двумерной линейной системы

$$\dot{x} = Ax, \quad x = (x_1, x_2)^T. \quad (8.11)$$

Будем предполагать, что все элементы матрицы A действительны, а сама матрица невырождена. Следовательно, система $Ax = 0$ имеет только нулевое решение, а, значит, единственное положение равновесия системы дифференциальных уравнений (8.11) находится в точке

$x = 0$. Существует такая невырожденная матрица C , что заменой $x = Cy$ система (8.11) приводится к виду

$$\dot{y} = Jy, \quad y = (y_1, y_2)^T, \quad (8.12)$$

где $J = C^{-1}AC$ — жорданова форма матрицы A . Напомним, что по диагонали матрицы J расположены собственные числа λ_1 и λ_2 матрицы A . Мы ограничимся рассмотрением лишь ситуации, когда $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В этом случае матрица J является диагональной матрицей, а значит, система (8.12) может быть записана в виде двух не зависящих друг от друга уравнений

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2. \end{cases} \quad (8.13)$$

Оказывается, динамика решений системы (8.13) (а следовательно, и системы (8.11)) существенно зависит от вида собственных чисел λ_1 и λ_2 . Рассмотрим основные случаи.

1). $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_1 \lambda_2 > 0$.

Общее решение системы (8.13) имеет вид

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (8.14)$$

где c_1, c_2 — произвольные действительные постоянные. Если $c_1 \neq 0$, то, выражая переменную t из левого равенства и подставляя в правое, мы получим следующее семейство кривых, на которых расположены траектории системы (8.13) в плоскости (y_1, y_2) :

$$y_2 = c_2 \left(\frac{y_1}{c_1} \right)^p, \quad p = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0, \quad \frac{y_1}{c_1} > 0. \quad (8.15)$$

Если же $c_2 \neq 0$, то, выражая переменную t из правого равенства в (8.14) и подставляя в левое, получим семейство кривых

$$y_1 = c_1 \left(\frac{y_2}{c_2} \right)^q, \quad q = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0, \quad \frac{y_2}{c_2} > 0. \quad (8.16)$$

При $c_2 = 0$ и $c_1 = 0$ формулы (8.15) и (8.16) определяют прямые $y_2 = 0$ и $y_1 = 0$. При $c_1, c_2 \neq 0$ эти формулы задают кривые типа ветвей парабол, которые касаются оси $y_2 = 0$, если $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, или оси $y_1 = 0$, если $|\lambda_2| < |\lambda_1|$. Направление движения по траекториям, лежащим на этих кривых, при возрастании переменной t , определяется устойчивостью нулевого положения равновесия системы (8.13).

Если $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$, то в силу теоремы 7.1 ноль является асимптотически устойчивым положением равновесия. Следовательно, все решения системы (8.13) стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Если же $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$, то нулевое положение равновесия системы (8.13) неустойчиво и все решения, кроме нулевого, стремятся к бесконечности при $t \rightarrow +\infty$. На рис. 8.2 изображен вид траекторий системы (8.13) и направление движения вдоль этих траекторий, когда $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$.

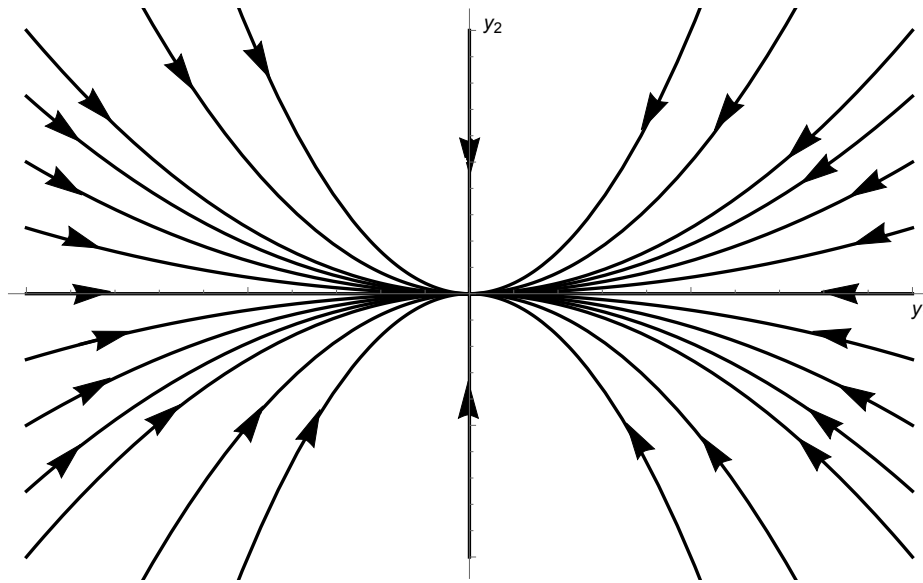


Рис. 8.2. Вид траекторий системы (8.13) ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $|\lambda_1| < |\lambda_2|$)

Положение равновесия, в окрестности которого траектории имеют вид, изображенный на рис. 8.2, называется *узлом*. Если это положение равновесия устойчиво, то узел называют устойчивым, в противном случае — неустойчивым.

Возвращаясь теперь к переменным (x_1, x_2) с помощью замены $x = Cy$, замечаем следующее. Поскольку по столбцам матрицы C расположены собственные векторы h_1 и h_2 , отвечающие собственным числам λ_1 и λ_2 , то прямые $y_2 = 0$ и $y_1 = 0$ переходят в прямые, направляющими которых служат эти векторы. Остальные кривые представляют собой видоизмененные «параболы», которые касаются одной из этих прямых, а точнее, прямой, направляющей которой является собственный вектор, отвечающий меньшему по модулю собственному числу (см. рис. 8.3).

Упражнение 8.2. Изобразить вид траекторий системы (8.12) в ситуации, когда $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ и, кроме того, выполнено одно из следующих условий:

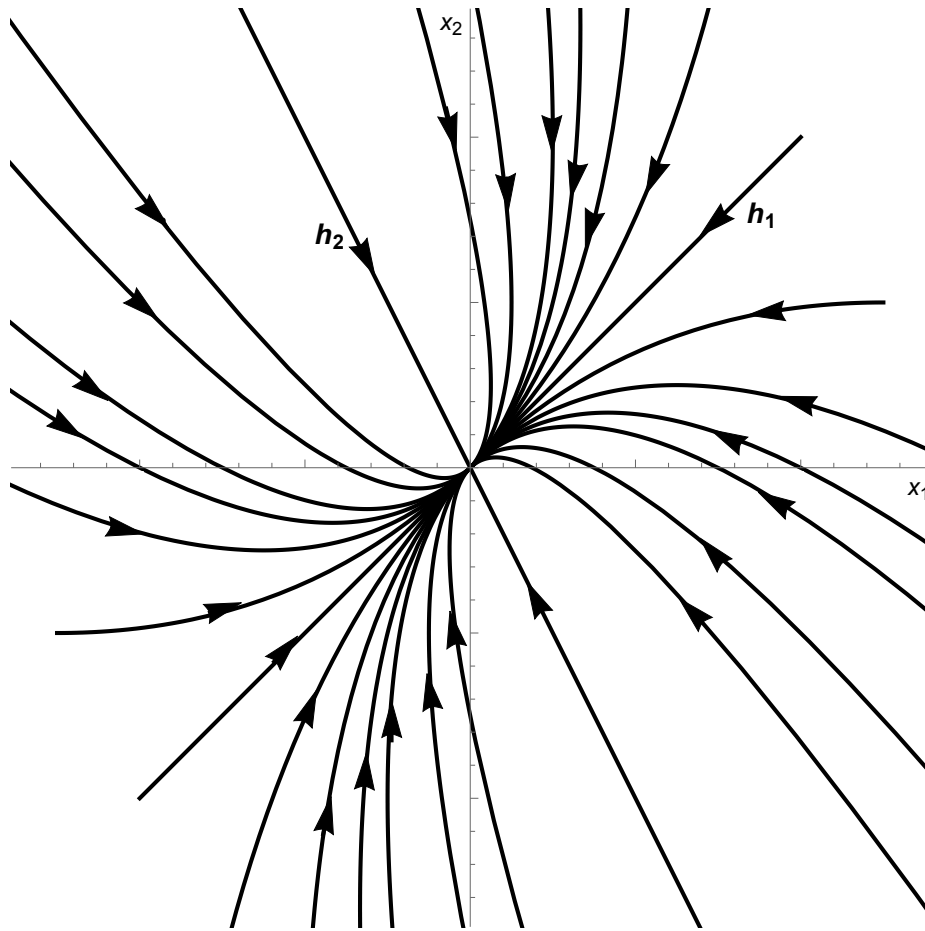


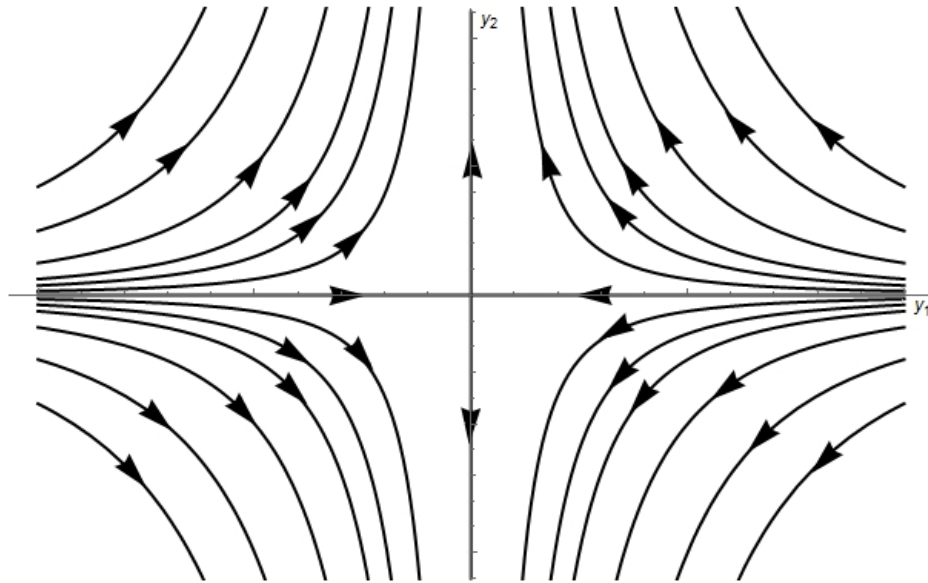
Рис. 8.3. Вид траекторий в окрестности устойчивого узла системы (8.11)

- а) существует базис в \mathbb{R}^2 , составленный из собственных векторов, отвечающих собственному числу λ_1 (дикритический узел);
 б) существует базис в \mathbb{R}^2 , составленный из собственного вектора h_1 , отвечающего собственному числу λ_1 и присоединенного к нему вектора h_2 (вырожденный узел).

2). $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.

Как и в предыдущем случае, система (8.12) имеет вид (8.13), а ее решения определяются формулами (8.14). В плоскости (y_1, y_2) эти формулы определяют семейство кривых, которые задаются равенствами (8.15) и (8.16), где на сей раз $p < 0$ и $q < 0$. Вновь при $c_2 = 0$ и $c_1 = 0$ получаем прямые $y_2 = 0$ и $y_1 = 0$, а при $c_1, c_2 \neq 0$ — кривые типа гипербол, асимптотами которых являются указанные прямые. Вид траекторий системы (8.13) и возможное направление движения вдоль этих траекторий изображены на рис. 8.4.

Положение равновесия, в окрестности которого траектории имеют вид, изображенный на рис. 8.4, называется *седлом*. Поскольку

Рис. 8.4. Вид траекторий системы (8.13) ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$)

в рассматриваемой ситуации всегда существует положительное собственное число, то седло — это неустойчивое положение равновесия системы (8.13). Прямые $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$ называют *сепаратрисами* седла. Они разделяют траектории с разным направлением движения. Предположим для определенности, что $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Из формул (8.14) тогда следует, что на прямой $y_2 = 0$ расположены траектории системы (8.13), отвечающие решениям, которые стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$, а на прямой $y_1 = 0$ — решения, которые стремятся к нулю при $t \rightarrow -\infty$. В этой связи прямая $y_2 = 0$ называется устойчивой сепаратрисой, а $y_1 = 0$ — неустойчивой.

Возвращаясь к переменным (x_1, x_2) , устанавливаем, что сепаратрисы $y_2 = 0$ и $y_1 = 0$ переходят в сепаратрисные прямые, направляющими которых служат собственные векторы h_1 и h_2 . Эти прямые являются асимптотами для всех остальных траекторий системы (8.11) (см. рис. 8.5).

3). $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$, где $\alpha \neq 0$ и $\omega > 0$. Поскольку матрица A действительна и ее собственные числа комплексно сопряжены друг другу, то собственные векторы h_1 и h_2 , отвечающие этим собственным числам, можно выбрать так, что $h_2 = \bar{h}_1$. Тогда замена $x = Cy$ приводит эту систему к виду (8.13), где y_1, y_2 оказываются комплексными переменными. Несложно показать, что при этом переменные y_1 и y_2 оказываются комплексно сопряжены друг другу, т. е. $y_2 = \bar{y}_1$. Иными словами, вместо системы (8.13) нам достаточно рассмотреть одно

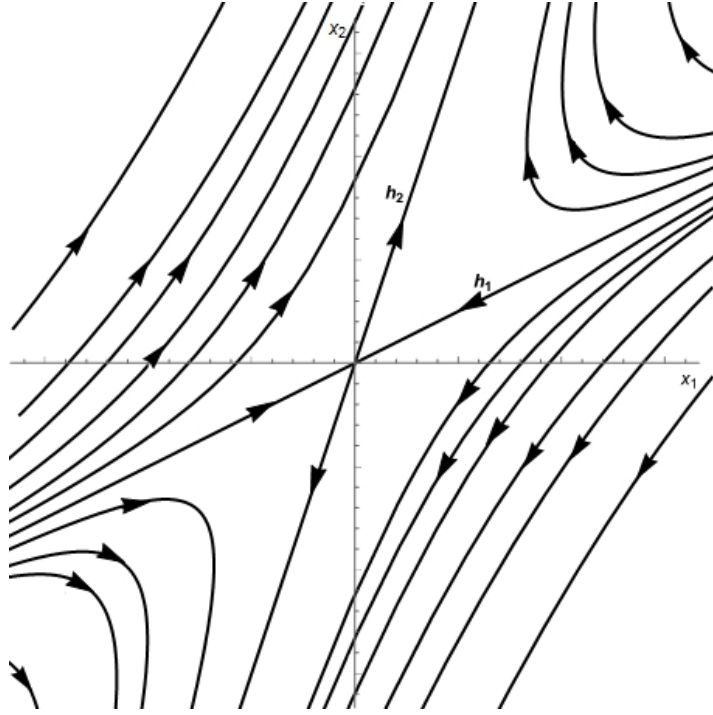


Рис. 8.5. Вид траекторий в окрестности седла системы (8.11)

уравнение

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \quad \lambda_1 = \alpha + i\omega, \quad y_1 \in \mathbb{C}. \quad (8.17)$$

В уравнении (8.17) перейдем к полярным переменным, полагая

$$y_1 = \rho e^{i\varphi}, \quad (8.18)$$

где $\rho = \rho(t) \geq 0$ и $\varphi = \varphi(t) \in \mathbb{R}$. Подставляя представление (8.18) в уравнение (8.17), получаем

$$\dot{\rho} e^{i\varphi} + i\dot{\varphi} e^{i\varphi} = \lambda_1 \rho e^{i\varphi}.$$

Сокращая обе части этого равенства на величину $e^{i\varphi}$ и приравнивая отдельно действительные и мнимые части, приходим к следующим уравнениям:

$$\dot{\rho} = \alpha \rho, \quad \dot{\varphi} = \omega.$$

Откуда выводим, что

$$\rho(t) = c e^{\alpha t}, \quad \varphi(t) = \omega t + \varphi_0, \quad (8.19)$$

где $c \geq 0$ и $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Исключая переменную t из этих формул, получаем представление для кривых, на которых находятся траектории системы (8.13), в координатах (ρ, φ) :

$$\rho = c \exp\left\{\frac{\alpha\varphi}{\omega}\right\}, \quad c \geq 0. \quad (8.20)$$

При $s \neq 0$ формула (8.20) описывает семейство кривых типа логарифмических спиралей (рис. 8.6). Направление движения вдоль тра-

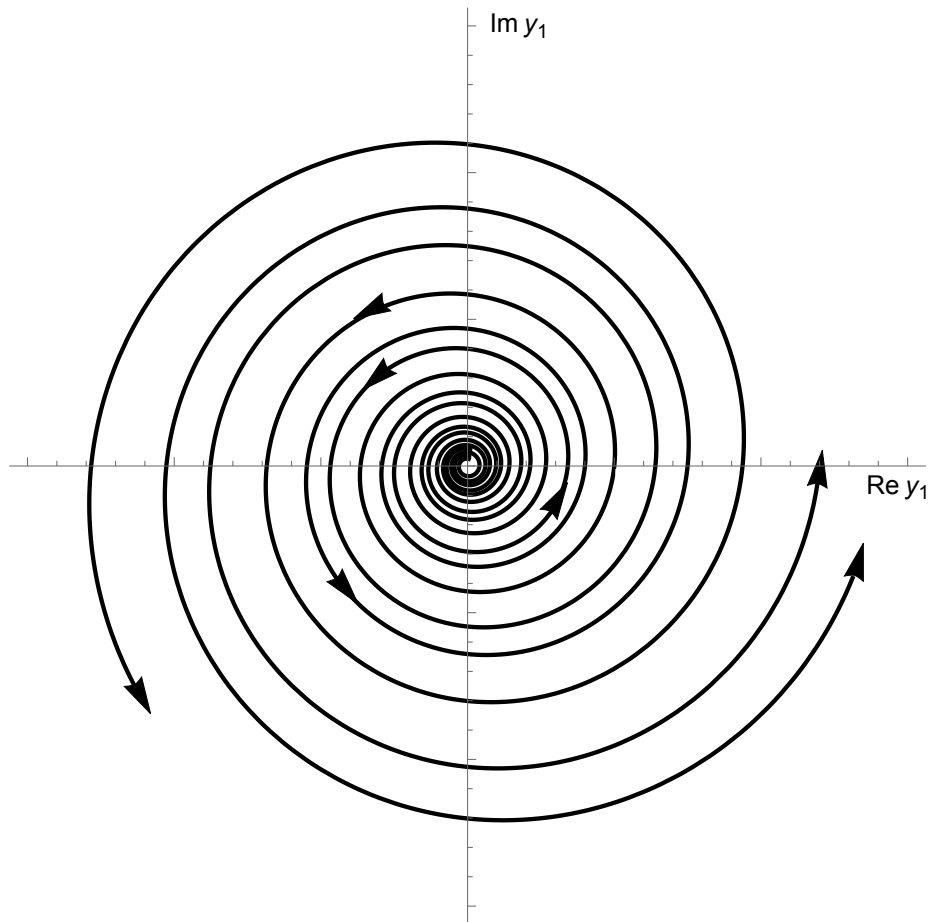


Рис. 8.6. Вид траекторий комплексного уравнения (8.17) ($\alpha > 0$)

екторий определяется знаком величины $\alpha = \operatorname{Re} \lambda_1$. Из (8.19) следует, что если $\alpha < 0$, то $\rho(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ и нулевое положение равновесия системы (8.13) асимптотически устойчиво. Если же $\alpha > 0$, то $\rho(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ и нулевое положение равновесия неустойчиво.

Положение равновесия, в окрестности которого траектории имеют вид, изображенный на рис. 8.6, называется *фокусом*. Если $\alpha < 0$, то фокус называют устойчивым, а если $\alpha > 0$, то — неустойчивым.

На рис. 8.7 изображен вид траекторий исходной системы (8.11) в плоскости (x_1, x_2) .

4). $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, где $\omega > 0$. Действуя совершенно аналогично предыдущему случаю, приходим к выводу, что решения комплексного уравнения (8.17) в полярной системе координат имеют вид

$$\rho(t) \equiv c, \quad \varphi(t) = \omega t + \varphi_0, \quad (8.21)$$

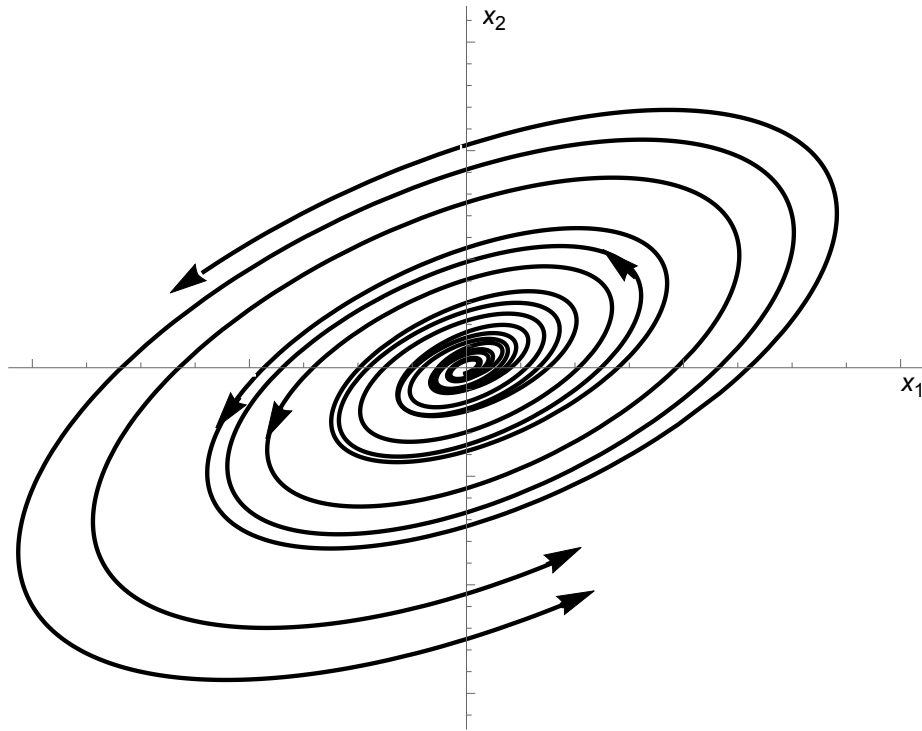


Рис. 8.7. Вид траекторий в окрестности неустойчивого фокуса системы (8.11)

где $c \geq 0$ и $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Формулы (8.21) задают семейство концентрических окружностей с центром в начале координат (см. рис. 8.8). Таким образом, все траектории системы (8.13) в рассматриваемом случае являются замкнутыми траекториями, т. е. циклами.

Положение равновесия, в окрестности которого траектории имеют вид, изображенный на рис. 8.8, называют *центром*. Из теоремы 7.1 следует, что нулевое решение системы (8.13) в случае центра является устойчивым положением равновесия.

Возвращаясь к исходной системе (8.11), можно показать, что ее траекториями в плоскости (x_1, x_2) являются эллипсы (рис. 8.9).

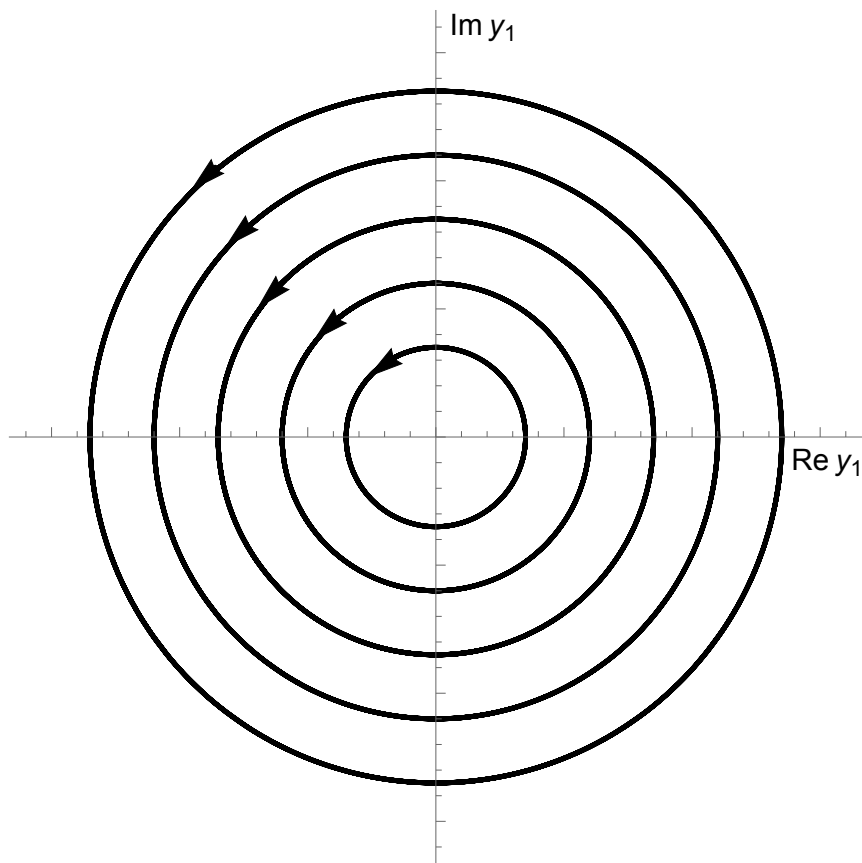


Рис. 8.8. Вид траекторий комплексного уравнения (8.17) ($\alpha = 0$)

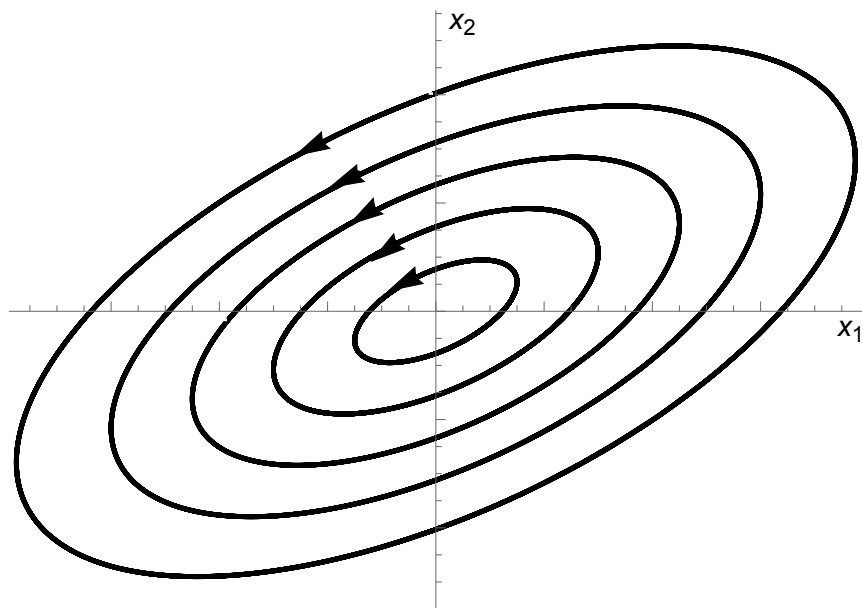


Рис. 8.9. Вид траекторий в окрестности центра системы (8.11)

Глава 9

Краевые задачи

9.1. Определение и общие свойства

Рассмотрим следующее уравнение второго порядка:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in [0, l], \quad (9.1)$$

где функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ принадлежат классу $C[0, l]$, т. е. непрерывны на отрезке $[0, l]$. Обозначая

$$Ly(x) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x), \quad (9.2)$$

уравнение (9.1) можно записать в операторной форме

$$Ly(x) = f(x). \quad (9.3)$$

Оператор L в этом случае называют дифференциальным оператором. Наряду с задачей Коши для уравнения (9.1)

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad (9.4)$$

в различных приложениях возникает задача нахождения решения этого уравнения, удовлетворяющего на краях отрезка $[0, l]$ определенным соотношениям. В общем виде подобного рода условия могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) &= y_0, \\ \alpha_2 y(l) + \beta_2 y'(l) &= y_l. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Здесь α_i , β_i ($i = 1, 2$), y_0 , y_l — заданные числа, некоторые из которых могут быть равны нулю, причем

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0, \quad i = 1, 2. \quad (9.6)$$

Условия (9.5) называются *краевыми* (или *граничными*) условиями, а задача (9.1), (9.5) — *краевой* (или *граничной*) задачей. Условия (9.5), в которых $\beta_1 = \beta_2 = 0$, называют краевыми условиями *первого* рода, а соответствующую задачу (9.1), (9.5) — *первой* краевой задачей. Если в (9.5) имеют место равенства $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то такие условия называют краевыми условиями *второго* рода, а соответствующую задачу (9.1), (9.5) — *второй* краевой задачей. В случае, когда в (9.5) коэффициенты α_i и β_i ($i = 1, 2$) одновременно отличны от нуля, такие условия называют *смешанными* краевыми условиями или краевыми условиями *третьего* рода, а соответствующую задачу (9.1), (9.5) — *смешанной* или *третьей* краевой задачей. Если в (9.5) выполнены равенства $y_0 = y_l = 0$, то такие условия называют *однородными* краевыми условиями. От рассмотрения краевой задачи (9.1), (9.5) с *неоднородными* краевыми условиями всегда можно перейти к рассмотрению однородной краевой задачи для видоизмененного уравнения (9.1). Для этого в (9.1), (9.5) достаточно перейти к новой неизвестной функции $z(x)$ с помощью замены

$$y(x) = Y(x) + z(x),$$

где $Y(x)$ — некоторая известная функция, которая удовлетворяет лишь заданным краевым условиям (9.5), а в остальном произвольна. Например, в случае краевых условий первого рода

$$y(0) = y_0, \quad y(l) = y_l$$

можно выбрать функцию

$$Y(x) = y_0 \frac{l-x}{l} + y_l \frac{x}{l}.$$

Если в (9.1) функция $f(x) \equiv 0$ для всех $x \in [0, l]$, то уравнение

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{9.7}$$

вместе с условиями (9.5) называется *однородной* краевой задачей, а в противном случае — *неоднородной*. Краевую задачу (9.1), (9.5) называют задачей типа Штурма–Лиувилля.

В дальнейшем будем рассматривать уравнение (9.1) вместе с однородными краевыми условиями

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) &= 0, \\ \alpha_2 y(l) + \beta_2 y'(l) &= 0. \end{aligned} \tag{9.8}$$

В отличие от задачи Коши (9.1), (9.4) (теорема 5.1) краевая задача (9.1), (9.8) не всегда разрешима. Справедлива следующая теорема.

Теорема 9.1. Краевая задача (9.1), (9.8) однозначно разрешима для любой функции $f(x) \in C[0, l]$ тогда и только тогда, когда соответствующая однородная краевая задача (9.7), (9.8) имеет только тривиальное (нулевое) решение.

Доказательство. Если краевая задача (9.1), (9.8) однозначно разрешима для любой непрерывной на отрезке функции $f(x)$, то она однозначно разрешима и для функции $f(x) \equiv 0$. Поскольку соответствующая однородная краевая задача (9.7), (9.8) всегда имеет нулевое решение, то оно тогда и является единственным решением этой задачи.

Предположим теперь, что однородная краевая задача (9.7), (9.8) имеет только нулевое решение. Рассмотрим решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ однородного уравнения (9.7), удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= \beta_1, & y_2(l) &= \beta_2, \\ y_1'(0) &= -\alpha_1, & y_2'(l) &= -\alpha_2. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Таким образом, решение $y_1(x)$ удовлетворяет краевым условиям (9.8) на левой границе, а $y_2(x)$ — на правой. Заметим, что $y_i(x) \not\equiv 0$ ($i = 1, 2$) в силу условия (9.6). Покажем, что решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы на отрезке $[0, l]$. В предположении противного найдутся такие числа c_1 и c_2 , что $|c_1| + |c_2| \neq 0$ и

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \equiv 0, \quad x \in [0, l].$$

Пусть для определенности $c_1 \neq 0$, тогда

$$y_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} y_2(x).$$

Заметим, что $y_1(x)$ является в этом случае нетривиальным решением краевой задачи (9.7), (9.8). Действительно, по определению $y_1(x)$ является решением однородного уравнения (9.7) и, кроме того, с учетом (9.9) оказываются выполненными краевые условия (9.8):

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1(0) + \beta_1 y_1'(0) &= \alpha_1 \beta_1 - \beta_1 \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 y_1(l) + \beta_2 y_1'(l) &= \alpha_2 \left(-\frac{c_2}{c_1} \beta_2 \right) + \beta_2 \left(-\frac{c_2}{c_1} (-\alpha_2) \right) = 0. \end{aligned}$$

Получили противоречие с нашим предположением о том, что краевая задача (9.7), (9.8) имеет только нулевое решение. Следовательно, решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы на отрезке $[0, l]$.

Любое решение неоднородного уравнения (9.1) может быть представлено в виде

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_0(x), \quad (9.10)$$

где c_1, c_2 — некоторые числа, а $y_0(x)$ — частное решение уравнения (9.1). На основании теоремы 5.5 это решение может быть определено с помощью формулы

$$y_0(x) = \int_0^x K(x, t) f(t) dt, \quad x \in [0, l],$$

где $K(x, t)$ — функция Коши для однородного уравнения (9.7). Подставим формулу (9.10) в краевые условия (9.8) и учтем (9.9). Получим следующую линейную систему для нахождения неизвестных c_1 и c_2 :

$$\begin{aligned} c_2(\alpha_1 y_2(0) + \beta_1 y_2'(0)) &= -\alpha_1 y_0(0) - \beta_1 y_0'(0), \\ c_1(\alpha_2 y_1(l) + \beta_2 y_1'(l)) &= -\alpha_2 y_0(l) - \beta_2 y_0'(l). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\alpha_1 y_2(0) + \beta_1 y_2'(0) \neq 0, \quad \alpha_2 y_1(l) + \beta_2 y_1'(l) \neq 0,$$

иначе решение $y_1(x)$ и (или) решение $y_2(x)$ однородного уравнения (9.7) удовлетворяли бы краевым условиям (9.8), а это не так в силу нашего предположения. Следовательно,

$$c_1 = -\frac{\alpha_2 y_0(l) + \beta_2 y_0'(l)}{\alpha_2 y_1(l) + \beta_2 y_1'(l)}, \quad c_2 = -\frac{\alpha_1 y_0(0) + \beta_1 y_0'(0)}{\alpha_1 y_2(0) + \beta_1 y_2'(0)}. \quad (9.11)$$

Таким образом, краевая задача (9.1), (9.8) имеет единственное решение для любой функции $f(x) \in C[0, l]$.

Теорема доказана. ■

Рассмотрим несколько примеров краевых задач и покажем, как могут быть устроены их решения.

Пример 1. Пусть краевая задача имеет вид:

$$y''(x) = 0, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

Поскольку общее решение этого уравнения определяется формулой $y(x) = c_1 x + c_2$, то подстановка этого выражения в краевые условия

приводит нас к следующим значениям для c_1 и c_2 : $c_1 = c_2 = 0$. Следовательно, эта однородная краевая задача имеет только нулевое решение.

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0, \quad x \in [0, \pi].$$

Подставляя формулу общего решения $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ в краевые условия, получаем континуум решений этой краевой задачи: $y(x) = c_1 \sin x$, $c_1 \in \mathbb{R}$.

Пример 3. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = y(\pi) = 0, \quad x \in [0, \pi].$$

Подстановка формулы общего решения $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + 1$ в краевые условия приводит нас к двум противоречивым равенствам: $c_2 = -1$ и $c_2 = 1$. Следовательно, эта краевая задача не имеет решений.

Упражнение 9.1. Найти решение краевой задачи:

а) $y'' + y' = 2$, $y(0) = 0$, $y(1) = 2$.

б) $y'' + y = 0$, $y(0) = y'(0)$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2$.

в) $x^2 y'' + 2xy' - 6y = x^3$, $y(x) = O(x^2)$ при $x \rightarrow 0$, $y(1) = 1$.

9.2. Функция Грина. Неоднородная краевая задача

Будем рассматривать краевую задачу (9.1), (9.8) в предположении, что соответствующая однородная краевая задача (9.7), (9.8) имеет только нулевое решение. Тогда в силу теоремы 9.1 краевая задача (9.1), (9.8) однозначно разрешима для любой функции $f(x)$ из класса $C[0, l]$. Построим решение краевой задачи (9.1), (9.8) в случае специальной функции $f(x) = f^\varepsilon(x)$. Именно, будем считать, что непрерывная на отрезке $[0, l]$ функция $f^\varepsilon(x)$ может принимать ненулевые значения лишь в ε -окрестности некоторой фиксированной точки $s \in (0, l)$:

$$f^\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \leq s - \varepsilon, \\ f_\varepsilon(x), & s - \varepsilon \leq x \leq s + \varepsilon, \\ 0, & x \geq s + \varepsilon, \end{cases} \quad (9.12)$$

где $f_\varepsilon(x) \geq 0$ — произвольная непрерывная на отрезке $[s - \varepsilon, s + \varepsilon]$ функция, удовлетворяющая условию нормировки

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} f_\varepsilon(x) dx = 1. \quad (9.13)$$

Решение краевой задачи (9.1), (9.8) с функцией $f(x)$ вида (9.12) будем обозначать как $y_\varepsilon(x, s)$.

Определение 9.1. Функцию

$$G(x, s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(x, s), \quad x \in [0, l], \quad s \in (0, l), \quad (9.14)$$

называют функцией Грина краевой задачи (9.1), (9.8).

Существование предела (9.14), конечно же, нуждается в обосновании. Основу доказательства составляет следующий известный результат.

Лемма 9.1. Предположим, что функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке и, кроме того, $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда на отрезке $[a, b]$ найдется такая точка ξ , что справедлива следующая формула (первая формула среднего значения):

$$\int_a^b g(t) f(t) dt = g(\xi) \int_a^b f(t) dt.$$

Доказательство этой формулы можно найти, например, в книге [8].

Лемма 9.2. Функция (9.14) корректно определена.

Доказательство. Из доказательства теоремы 9.1 следует, что

$$y_\varepsilon(x, s) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_{0,\varepsilon}(x), \quad (9.15)$$

где $y_1(x), y_2(x)$ — линейно независимые решения однородного уравнения (9.7), удовлетворяющие начальным условиям (9.9), а функция

$$y_{0,\varepsilon}(x) = \int_0^x K(x, t) f^\varepsilon(t) dt, \quad x \in [0, l], \quad (9.16)$$

есть частное решение уравнения (9.1). Наконец, числа c_1 и c_2 в представлении (9.15) выбраны так, что функция $y_\varepsilon(x, s)$ удовлетворяет краевым условиям (9.8). Эти числа определяются по формулам (9.11), где $y_0(x) = y_{0,\varepsilon}(x)$.

Предположим сначала, что $0 \leq x < s$. Тогда в силу формулы (9.16)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_{0,\varepsilon}(x) = 0, \quad x < s, \quad (9.17)$$

поскольку $f^\varepsilon(x) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для всех $x < s$. Рассмотрим теперь случай, когда $s \leq x$. В силу непрерывности функции Коши по своим переменным и неотрицательности функции $f_\varepsilon(x)$ из леммы 9.1 с учетом (9.13) следует, что

$$y_{0,\varepsilon}(x) = \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} K(x, t) f_\varepsilon(t) dt = K(x, \xi) \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} f_\varepsilon(t) dt = K(x, \xi),$$

где $\xi \in [s - \varepsilon, s + \varepsilon]$. Поскольку $K(x, \xi) \rightarrow K(x, s)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_{0,\varepsilon}(x) = K(x, s), \quad s \leq x. \quad (9.18)$$

Из (9.16) с учетом равенства $K(x, x) = 0$ выводим, что

$$y'_{0,\varepsilon}(x) = K(x, x) f^\varepsilon(x) + \int_0^x K'_x(x, t) f^\varepsilon(t) dt = \int_0^x K'_x(x, t) f^\varepsilon(t) dt.$$

Отсюда аналогично вышеизложенному следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y'_{0,\varepsilon}(x) = \begin{cases} 0, & x < s, \\ K'_x(x, s), & s \leq x. \end{cases} \quad (9.19)$$

Переходя в представлении (9.15) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и учитывая формулы (9.11), (9.17), (9.18) и (9.19) заключаем, что

$$G(x, s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(x, s) = c_1 y_1(x) + \begin{cases} 0, & 0 \leq x < s, \\ K(x, s), & s \leq x \leq l, \end{cases} \quad (9.20)$$

где

$$c_1 = -\frac{\alpha_2 K(l, s) + \beta_2 K'_x(l, s)}{\alpha_2 y_1(l) + \beta_2 y'_1(l)}.$$

Лемма доказана. ■

Установим основные свойства функции Грина.

Теорема 9.2. *Функция Грина $G(x, s)$ краевой задачи (9.1), (9.8) обладает следующими свойствами:*

1⁰. *По переменной x функция $G(x, s)$ удовлетворяет однородному уравнению (9.7) при всех $x \neq s$, $x \in [0, l]$.*

2⁰. *По переменной x функция $G(x, s)$ удовлетворяет краевым условиям (9.8).*

3⁰. *Функция $G(x, s)$ непрерывна при всех $x, s \in [0, l]$, а ее производная $G'_x(x, s)$ терпит разрыв первого рода в точке $x = s$, причем*

$$G'_x(s + 0, s) - G'_x(s - 0, s) = 1. \quad (9.21)$$

Доказательство. Свойство 1⁰ сразу же следует из представления (9.20) и того факта, что функция $y_1(x)$ и функция Коши $K(x, s)$ удовлетворяют однородному уравнению (9.7). Поскольку в (9.20) функция $y_\varepsilon(x, s)$ удовлетворяет по переменной x краевым условиям (9.8) при всех $0 < \varepsilon \ll 1$, то это же справедливо и для функции $G(x, s)$. Тем самым установлено и свойство 2⁰. Непрерывность функции $G(x, s)$ при всех $x, s \in [0, l]$ опять же есть следствие формулы (9.20) и непрерывности функций $y_1(x)$, $K(x, s)$ и $K'_x(l, s)$ с учетом равенства $K(s, s) = 0$. Наконец, проверим справедливость равенства (9.21). Из (9.20) с учетом равенства $K'_x(s, s) = 1$ выводим, что

$$G'_x(s - 0, s) = c_1 y'_1(s), \quad G'_x(s + 0, s) = c_1 y'_1(s) + 1.$$

Таким образом, свойство 3⁰ также обосновано. ■

Построим теперь функцию Грина $G(x, s)$, не вычисляя предел (9.14). Именно, будем искать функцию Грина в виде

$$G(x, s) = \begin{cases} a(s)y_1(x), & 0 \leq x \leq s, \\ b(s)y_2(x), & s \leq x \leq l. \end{cases} \quad (9.22)$$

Здесь $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения однородного уравнения (9.7), удовлетворяющие краевым условиям (9.8) на левом и на правом конце отрезка $[0, l]$ соответственно (т. е., например, начальным условиям (9.9)). Из теоремы 9.1 следует, что эти функции линейно независимы на отрезке $[0, l]$. Функции $a(s), b(s) \in C[0, l]$ в представлении (9.22) подлежат определению. Воспользуемся свойством 3⁰ из теоремы 9.2. Именно, условие непрерывности функции $G(x, s)$ в точке

$x = s$ и формула (9.21) приводят нас к следующей системе относительно неизвестных $a(s)$ и $b(s)$:

$$\begin{aligned} a(s)y_1(s) - b(s)y_2(s) &= 0, \\ b(s)y_2'(s) - a(s)y_1'(s) &= 1. \end{aligned}$$

Определителем этой системы является определитель Вронского $W(s)$ системы функций $y_1(s)$ и $y_2(s)$, поскольку в силу свойств определителя

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} y_1(s) & -y_2(s) \\ -y_1'(s) & y_2'(s) \end{pmatrix} &= -\det \begin{pmatrix} y_1(s) & -y_2(s) \\ y_1'(s) & -y_2'(s) \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) \end{pmatrix} = W(s). \end{aligned}$$

Лемма 5.6 из главы 5 гарантирует нам, что $W(s) \neq 0$ для всех $s \in [0, l]$. Следовательно, функции $a(s)$ и $b(s)$ единственным образом определяются. В частности, используя метод Крамера решения линейных систем алгебраических уравнений, заключаем, что

$$a(s) = \frac{y_2(s)}{W(s)}, \quad b(s) = \frac{y_1(s)}{W(s)}.$$

С помощью функции Грина может быть построено решение неоднородной краевой задачи (9.1), (9.8).

Теорема 9.3. *Предположим, что однородная краевая задача (9.7), (9.8) имеет только нулевое решение. Тогда единственное решение неоднородной краевой задачи (9.1), (9.8) может быть записано в следующем виде:*

$$y(x) = \int_0^l G(x, s)f(s)ds, \quad x \in [0, l]. \quad (9.23)$$

Доказательство. Заметим, что функция $y(x)$, определяемая формулой (9.23), удовлетворяет краевым условиям (9.8). Действительно, это следует из представления (9.23) и того факта, что этим условиям по переменной x удовлетворяет в силу свойства 2⁰ из теоремы 9.2 функция $G(x, s)$.

Покажем теперь, что функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению (9.1). Поскольку

$$y(x) = \int_0^x G(x, s)f(s)ds + \int_x^l G(x, s)f(s)ds,$$

то

$$\begin{aligned} y'(x) &= G(x, x)f(x) + \int_0^x G'_x(x, s)f(s)ds - G(x, x)f(x) + \\ &+ \int_x^l G'_x(x, s)f(s)ds = \int_0^x G'_x(x, s)f(s)ds + \int_x^l G'_x(x, s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} y''(x) &= G'_x(x, x-0)f(x) + \int_0^x G''_{x^2}(x, s)f(s)ds - G'_x(x, x+0)f(x) + \\ &+ \int_x^l G''_{x^2}(x, s)f(s)ds = (G'_x(x+0, x) - G'_x(x-0, x))f(x) + \\ &+ \int_0^l G''_{x^2}(x, s)f(s)ds = f(x) + \int_0^l G''_{x^2}(x, s)f(s)ds, \end{aligned}$$

где мы учли равенство (9.21). Наконец, с учетом установленных равенств заключаем, что

$$\begin{aligned} &y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = \\ &= f(x) + \int_0^l (G''_{x^2}(x, s) + p(x)G'_x(x, s) + q(x, s)G(x, s))f(s)ds = f(x). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались свойством 1^0 функции Грина из теоремы 9.2. ■

Упражнение 9.2. Построить функцию Грина $G(x, s)$ краевой задачи:

- а) $y'' - y = f(x)$, $y(0) = y(1) = 0$.
- б) $y'' + y = f(x)$, $y(0) = y'(1) = 0$.
- в) $x^2y'' - xy' - 3y = f(x)$, $y(0) = 0$, $y(x) = O(x^{-1})$ при $x \rightarrow +\infty$.

9.3. Собственные значения и собственные функции

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in [0, l], \quad (9.24)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) &= 0, \\ \alpha_2 y(l) + \beta_2 y'(l) &= 0, \end{aligned} \quad (9.25)$$

где α_i, β_i ($i = 1, 2$) удовлетворяют условию (9.6), а параметр λ является действительным или комплексным числом. Будем предполагать, что в уравнении (9.24) функции $p(x)$ и $q(x)$ действительны, причем функция $p(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, l]$, т. е. принадлежит классу $C_1[0, l]$, а функция $q(x) \in C[0, l]$.

Определение 9.2. Число λ называется собственным значением задачи (9.24), (9.25), если при данном λ существует нетривиальное решение $y(x) \not\equiv 0$ этой краевой задачи. Функция $y(x)$ в таком случае называется собственной функцией задачи (9.24), (9.25).

Уравнение (9.24) можно привести к более простому и удобному для дальнейшего исследования виду. Именно, произведем в уравнении (9.24) замену вида

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2} \int_0^x p(t) dt} z(x). \quad (9.26)$$

Имеем,

$$y'(x) = -\frac{1}{2}p(x)e^{-\frac{1}{2} \int_0^x p(t) dt} z(x) + e^{-\frac{1}{2} \int_0^x p(t) dt} z'(x)$$

и

$$\begin{aligned} y''(x) &= -\frac{1}{2}p'(x)e^{-\frac{1}{2} \int_0^x p(t) dt} z(x) + \frac{1}{4}p^2(x)e^{-\frac{1}{2} \int_0^x p(t) dt} z(x) - \\ &\quad - p(x)e^{-\frac{1}{2} \int_0^x p(t) dt} z'(x) + e^{-\frac{1}{2} \int_0^x p(t) dt} z''(x). \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (9.24) и сокращая на величину $e^{-\frac{1}{2} \int_0^x p(t) dt}$, приходим к уравнению

$$z''(x) + \left(q(x) - \frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}p^2(x) \right) z(x) = \lambda z(x),$$

в котором коэффициент при $z'(x)$ равен нулю. Заметим, что в результате замены (9.26) структура краевых условий (9.25) сохраняется, а изменение претерпевают лишь коэффициенты в этих условиях. Действительно, подставляя (9.26) в (9.25) и производя очевидные сокращения, получаем

$$\begin{aligned} \left(\alpha_1 - \frac{1}{2}p(0)\beta_1\right)z(0) + \beta_1z'(0) &= 0, \\ \left(\alpha_2 - \frac{1}{2}p(l)\beta_2\right)z(l) + \beta_2z'(l) &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, без ограничения общности можно изначально полагать, что рассматриваемая краевая задача состоит из уравнения

$$y''(x) + (q(x) + \lambda)y(x) = 0, \quad x \in [0, l], \quad (9.24')$$

где $q(x)$ — действительная функция из класса $C[0, l]$, и краевых условий (9.25).

Изучим далее некоторые свойства собственных значений и собственных функций краевой задачи (9.24'), (9.25).

Лемма 9.3. *Все собственные значения краевой задачи (9.24'), (9.25) действительны.*

Доказательство. Пусть λ_0 — собственное значение краевой задачи (9.24'), (9.25), а $y_0(x)$ — соответствующая этому значению собственная функция. Тогда наряду с равенством

$$y_0''(x) + (q(x) + \lambda_0)y_0(x) = 0$$

имеет место и комплексно сопряженное к нему равенство

$$\bar{y}_0''(x) + (q(x) + \bar{\lambda}_0)\bar{y}_0(x) = 0.$$

Умножая первое из этих равенств на $\bar{y}_0(x)$, а второе — на $y_0(x)$, и вычитая второе из первого, получаем

$$y_0''\bar{y}_0 - \bar{y}_0''y_0 = (\bar{\lambda}_0 - \lambda_0)|y_0|^2.$$

Проинтегрируем полученное выражение в промежутке от 0 до l , предварительно заметив, что

$$y_0''\bar{y}_0 - \bar{y}_0''y_0 = \frac{d}{dx}(y_0'\bar{y}_0 - \bar{y}_0'y_0).$$

Тогда

$$(\bar{\lambda}_0 - \lambda_0) \int_0^l |y_0(x)|^2 dx = y'_0(l)\bar{y}_0(l) - \bar{y}'_0(l)y_0(l) - \\ - y'_0(0)\bar{y}_0(0) + \bar{y}'_0(0)y_0(0). \quad (9.27)$$

Покажем, что выражение в правой части равенства (9.27) равно нулю.

Предположим, что в краевых условиях (9.25) коэффициент $\alpha_2 = 0$. В силу (9.6) отсюда следует, что $\beta_2 \neq 0$. Значит, $y'_0(l) = 0$, а следовательно, и $\bar{y}'_0(l) = 0$. Если, кроме того, в условиях (9.25) или $\alpha_1 = 0$ ($\beta_1 \neq 0$) или $\beta_1 = 0$ ($\alpha_1 \neq 0$), то будут выполнены либо равенства $y'_0(0) = 0$ и $\bar{y}'_0(0) = 0$, либо равенства $y_0(0) = 0$ и $\bar{y}_0(0) = 0$. Отсюда следует и равенство нулю правой части (9.27). Пусть $\alpha_1 \neq 0$ и $\beta_1 \neq 0$, тогда из (9.25) следует, что

$$y_0(0) = -\frac{\beta_1}{\alpha_1}y'_0(0), \quad \bar{y}_0(0) = -\frac{\beta_1}{\alpha_1}\bar{y}'_0(0).$$

Отсюда выводим, что

$$-y'_0(0)\bar{y}_0(0) + \bar{y}'_0(0)y_0(0) = \frac{\beta_1}{\alpha_1}y'_0(0)\bar{y}'_0(0) - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\bar{y}'_0(0)y'_0(0) = 0.$$

Следовательно, равенство нулю правой части (9.27) вновь установлено.

Предполагая, что в краевых условиях (9.25) коэффициент $\alpha_2 \neq 0$, заключаем, что

$$y_0(l) = -\frac{\beta_2}{\alpha_2}y'_0(l), \quad \bar{y}_0(l) = -\frac{\beta_2}{\alpha_2}\bar{y}'_0(l).$$

Дальнейшие рассуждения, аналогичные проведенным выше, позволяют установить равенство нулю правой части (9.27).

Таким образом, из (9.27) следует, что

$$(\bar{\lambda}_0 - \lambda_0) \int_0^l |y_0(x)|^2 dx = 0.$$

Поскольку, $y_0(x) \not\equiv 0$ при $x \in [0, l]$, то $\int_0^l |y_0(x)|^2 dx \neq 0$. Значит $\lambda_0 = \bar{\lambda}_0$,

т. е. $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Лемма доказана. ■

Лемма 9.4. Каждому собственному значению краевой задачи (9.24'), (9.25) соответствует только одна (с точностью до постоянного множителя) собственная функция.

Доказательство. Предположим, что одному собственному значению отвечают две линейно независимые на отрезке $[0, l]$ собственные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Из краевых условий (9.25) тогда следует, что

$$\begin{aligned}\alpha_1 y_1(0) + \beta_1 y_1'(0) &= 0, \\ \alpha_1 y_2(0) + \beta_1 y_2'(0) &= 0.\end{aligned}\tag{9.28}$$

Определителем этой системы относительно неизвестных α_1 и β_1 является определитель Вронского

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} y_1(0) & y_1'(0) \\ y_2(0) & y_2'(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{pmatrix}.$$

В силу линейной независимости функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ определитель $W(0) \neq 0$. Следовательно, система (9.28) имеет только нулевое решение $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Последнее противоречит условию (9.6). ■

Лемма 9.5. Собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$ краевой задачи (9.24'), (9.25), отвечающие собственным значениям $\lambda_n \neq \lambda_m$, ортогональны на отрезке $[0, l]$, т. е.

$$(y_n(x), y_m(x)) = \int_0^l y_n(x) y_m(x) dx = 0.\tag{9.29}$$

Доказательство. Имеем,

$$\begin{aligned}y_n''(x) + (q(x) + \lambda_n) y_n(x) &= 0, \\ y_m''(x) + (q(x) + \lambda_m) y_m(x) &= 0.\end{aligned}$$

Умножим первое из этих равенств на $y_m(x)$, второе — на $y_n(x)$ и вычтем второе из первого. Интегрируя затем полученное выражение в промежутке от 0 до l и учитывая, что

$$y_m'' y_n - y_n'' y_m = \frac{d}{dx} (y_m' y_n - y_n' y_m),$$

приходим к равенству

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^l y_n(x) y_m(x) dx = (y'_m(x) y_n(x) - y'_n(x) y_m(x)) \Big|_0^l.$$

Заметим, что выражение в правой части этого равенства равно нулю, поскольку функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$ удовлетворяют краевым условиям (9.25). Этот факт проверяется точно так же, как и при доказательстве леммы 9.3. Следовательно, учитывая, что $\lambda_n \neq \lambda_m$, устанавливаем справедливость формулы (9.29). ■

Фундаментальным результатом, описывающем то, как устроены собственные значения краевой задачи (9.24'), (9.25), является следующая теорема.

Теорема 9.4 (Штурма–Лиувилля). *Для краевой задачи (9.24'), (9.25) существует бесконечное счетное множество $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ собственных значений и соответствующих им собственных функций $\{y_n(x), n \in \mathbb{N}, x \in [0, l]\}$. Все собственные значения могут быть упорядочены в порядке возрастания*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots,$$

причем $\lambda_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство этой теоремы мы здесь не приводим. Любопытный читатель может найти его, например, в книгах [14, 25].

Упражнение 9.3. *Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи:*

- а) $y'' = \lambda y, y(0) = y(l) = 0$.
- б) $y'' = \lambda y, y'(0) = y'(l) = 0$.
- в) $y'' = \lambda y, y(0) = y'(l) = 0$.

Заключение

В завершение этой книги хотелось бы отметить, что ее основной уклон сделан в сторону овладения теоретическими основами курса обыкновенных дифференциальных уравнений. Практические задачи с примерами их решения читатель может найти в сборниках [19, 24], а также в пособии [6], часть задач из которых в качестве упражнений была включена и в этот учебник. Для дальнейшего и более глубокого освоения курса читателю могут быть рекомендованы, в частности, книги [1, 2, 10, 17, 18, 22, 23, 25, 27].

Литература

- [1] *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — 4-е изд. — Ижевск: Ред-я журн. «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — 368 с.
- [2] *Арнольд В.И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — 3-е изд. — М.: МЦНМО, 2002. — 400 с.
- [3] *Бор Г.* Почти периодические функции. — М.: Гостехиздат, 1934. — 130 с.
- [4] *Боровских А.В., Перов А.М.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013. — 550 с.
- [5] *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. — 5-е изд. — М.: Добросвет, МЦНМО, 1998. — 320 с.
- [6] *Глызин С.Д., Толбей А.О.* Практикум по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. — Ярославль, ЯрГУ, 2011. — 67 с.
- [7] *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
- [8] *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Начальный курс. — М.: Изд-во МГУ, 1985. — 662 с.
- [9] *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Продолжение курса. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — 358 с.
- [10] *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений — М.: ИЛ, 1958. — 475 с.

- [11] *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Высш. школа, 1978. — 288 с.
- [12] *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1968. — 431 с.
- [13] *Левитан Б.М.* Почти-периодические функции. — М.: Гостехиздат, 1953. — 396 с.
- [14] *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. — М.: Наука, 1988. — 432 с.
- [15] *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.: Гостехиздат, 1950. — 473 с.
- [16] *Матвеев Н.М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — Минск: Выш. шк., 1987. — 319 с.
- [17] *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974. — 331 с.
- [18] *Романко В.К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — 2-е изд. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — 344 с.
- [19] *Романко В.К. и др.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. — М.: ЮНИМЕДИА-СТАЙЛ, 2002. — 256 с.
- [20] *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения: примеры и задачи: учеб. пособие. — 2-е изд., перераб. — М.: Высш. шк., 1989. — 383 с.
- [21] *Сергеев И.Н.* Дифференциальные уравнения. — М.: Издательский центр «Академия», 2013. — 288 с.
- [22] *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. — 4-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 256 с.
- [23] *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — 3-е изд. — СПб: Лань, 2003. — 447 с.

- [24] *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.: Издательство ЛКИ, 2008. — 240 с.
- [25] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.
- [26] *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. — М.: Наука, 1990. — 176 с.
- [27] *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — 5-е изд. — М.: Едиториал УРСС, 2002. — 319 с.
- [28] *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972. — 720 с.
- [29] *Corduneanu C.* Almost periodic functions. — New York: Chelsea Publishing, 1989. — 257 p.

У ч е б н о е и з д а н и е

**Глызин Сергей Дмитриевич
Нестеров Павел Николаевич**

Обыкновенные дифференциальные уравнения

У ч е б н о е п о с о б и е

Корректор А.А. Аладьева
Компьютерный набор, верстка П.Н. Нестеров

Подписано в печать 12.09.2016. Формат 60 × 84/16.
Бумага тип. Усл. печ. л. 11,16. Уч.-изд. л. 9,0.
Тираж 60 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в Управлении научных исследований и инноваций ЯрГУ

150003, Ярославль, ул. Советская, 14.

Отпечатано в ИПК «Индиго».
150049, г. Ярославль, ул. Свободы, 97.