

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова

А. Н. Куликов, Д. А. Куликов

Дифференциальные уравнения.

Теоремы, примеры, задачи

Учебное пособие

Ярославль 2011

ББК В161.6я73
УДК 517.91/93
К90

Учебное издание

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2010-2011 учебного года

Рецензенты:

доктор тех. наук, профессор Д. О. Бытев;
кафедра математического анализа Ярославского государственного
педагогического университета им. К. Д. Ушинского

Куликов, А. Н. Дифференциальные уравнения. Теоремы, примеры, задачи: учебное пособие/ А. Н. Куликов, Д. А. Куликов;
Яросл. гос. ун.-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2011. – 139 с.
ISBN 978-5-8397-0831-0

В учебном пособии изложены четыре основных раздела курса "Обыкновенные дифференциальные уравнения". Авторы уделили основное внимание практическому освоению материала, умению решать задачи, применять теоремы для исследования тех или иных дифференциальных уравнений. Выбор материала согласован с новыми образовательными стандартами.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальностям: 010100.65 Математика, 010200.65 Прикладная математика и информатика, 090102.65 Компьютерная безопасность, Физика (дисциплина "Дифференциальные уравнения", блок ОПД, очная форма обучения).

Ил. 11. Библиогр.: 13 назв.

ISBN 978-5-8397-0831-0 © Ярославский государственный
университет им. П.Г. Демидова, 2011

Куликов Анатолий Николаевич
Куликов Дмитрий Анатольевич

Дифференциальные уравнения.

Теоремы, примеры, задачи

Учебное пособие

Редактор, корректор М. Э. Левакова
Компьютерная верстка Д. А. Куликов

Подписано в печать 20.09.2011. Формат 60 × 84/16.

Бумага офсетная. Усл. печ. л. 6,0.

Уч.-изд.л. 8,14. Тираж 70 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
редакционно-издательским отделом ЯрГУ.
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.
Отпечатано на ризографе.

Список литературы

1. Петровский, И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. – М.: Наука, 1970.
2. Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М.: Наука, 1970.
3. Смирнов, В. И. Курс высшей математики / В. И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – Т.2.
4. Эсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эсгольц. – М.: Наука, 1969.
5. Федорюк, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. В. Федорюк. – М.: Наука, 1980.

Сборники задач

6. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1967.
7. Самойленко, А. М. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. – М.: Высшая школа, 1989.
8. Матвеев, Н. М. Сборник задач и упражнений / Н. М. Матвеев. – М.: Высшая школа, 1989.

Дополнительная литература

9. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М.: Наука, 1967.
10. Арнольд, В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. – М.: Наука, 1971.
11. Арнольд, В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В. И. Арнольд. – М.: Наука, 1978.
12. Бибииков, Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибииков. – М.: Наука, 1991.
13. Куликов, А. Н. Применение метода инвариантных многообразий в локальных задачах устойчивости и теории колебаний / А. Н. Куликов. – Ярославль: ЯрГУ, 1982.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
----------------	---

Глава 1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Элементарные методы	7
--	---

1.1. Общие понятия, определения и примеры	7
1.2. Задача Коши	10
1.3. Автономные уравнения	12
1.4. Уравнения с разделяющимися переменными	16
1.5. Однородные уравнения	18
1.6. Линейные уравнения	24
1.7. Уравнения Бернулли и Риккати	27
1.8. Уравнения в полных дифференциалах	30
1.9. Понижение порядка уравнения	32
1.10. Задачи для самостоятельного решения	36

Глава 2. Дифференциальные уравнения высших порядков. Линейные дифференциальные уравнения	38
--	----

2.1. Дифференциальные уравнения высших порядков	38
2.2. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Общие свойства	41
2.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения	43
2.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	47
2.5. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	53
2.6. Уравнение Эйлера	56
2.7. Уравнение Лагранжа	57
2.8. Уравнение Чебышева	57
2.9. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами со специальной правой частью	59
2.10. Метод вариации произвольных постоянных для	

линейных уравнений второго порядка	68
2.11. Метод вариации произвольных постоянных в общем случае	72
2.12. Задачи для самостоятельного решения	74

Глава 3. Системы линейных дифференциальных уравнений

3.1. Определения и основные свойства	76
3.2. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений. Структура решений однородной и неоднородной линейных систем	78
3.3. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами	81
3.4. Матричная экспонента	89
3.5. Линейные однородные системы с периодическими коэффициентами	93
3.6. Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами	97
3.7. Задачи для самостоятельного решения	107

Глава 4. Устойчивость

4.1. Основные понятия теории устойчивости решений	108
4.2. Общие теоремы об устойчивости систем дифференциальных уравнений	113
4.3. Метод функций Ляпунова	120
4.4. Теорема об устойчивости по первому приближению	126
4.5. Задачи для самостоятельного решения	132

Примеры контрольных работ.....

Список литературы.....

Вариант 4

1. Для системы $\dot{y} = Ay$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- найти e^{At} ;
- исследовать на устойчивость нулевое решение;
- найти все $\alpha \in R$, при которых нулевое решение системы

$$\dot{y} = By + f(y)$$

асимптотически устойчиво. Здесь $B = A - \beta E$, E – единичная матрица, $f(y) = colon(y_3^2, y_1^2, y_2^3)$.

2. Найти все $l > 0$, при которых краевая задача

$$y'' + 2y = 2 \cos 2t, \quad y = y(t), \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0, \quad t \in [0, l]$$

- имеет единственное решение;
- имеет бесконечное множество решений;
- не имеет решений.

3. Решить уравнение

$$y'x^3 \sin y + 2y = xy'.$$

4. Найти фундаментальную матрицу уравнения

$$y'' + 4ay' - (4a^2 + 1)y = 0$$

и все a , при которых определитель Вронского стремится к 0, если $x \rightarrow -\infty$.

Вариант 3

1. Для системы $\dot{y} = Ay$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- а) найти e^{At} ;
- б) исследовать на устойчивость нулевое решение;
- с) найти все $\alpha \in R$, при которых нулевое решение системы

$$\dot{y} = By + f(y)$$

асимптотически устойчиво. Здесь $B = A + \alpha E$, E – единичная матрица, $f(y) = \text{colon}(0, y_1 y_2 y_3, y_1 y_3 \sin y_2^2)$.

2. Найти все $l > 0$, при которых краевая задача

$$y'' + 4y = \sin 2t, \quad y = y(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0, \quad t \in [0, l]$$

- а) имеет единственное решение;
- б) имеет бесконечное множество решений;
- с) не имеет решений.

3. Решить уравнение

$$y' + 2y = e^x y^2.$$

4. Найти фундаментальную матрицу уравнения

$$y'' + 4ay' + (4a^2 - 1)y = 0$$

и все a , при которых определитель Вронского стремится к 0, если $x \rightarrow -\infty$.

ВВЕДЕНИЕ

Data aequatione quocunque
fluentes quatuor involvente
fluxiones invenire et vice versa
I. Newton

Данное пособие предназначено студентам тех факультетов (специальностей, направлений), где курс "Обыкновенные дифференциальные уравнения" выделен в отдельную дисциплину (модуль). В Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова к таким относятся все направления математического факультета, большинство направлений факультета информатики и вычислительной техники, физического факультета. Оно не призвано заменить известные учебники и сборники задач, которые традиционно используют при чтении лекций и проведении практических занятий. Авторы надеются, что оно займет свою нишу среди учебников, учебных пособий и задачников, список которых приведен в конце данного издания.

В связи с переходом на двухуровневую систему появились новые федеральные государственные образовательные стандарты. По-видимому, они далеки от завершения и будут не раз пересматриваться, улучшаться, модернизироваться. Но ясно одно: в образовательном процессе должна увеличиваться доля самостоятельной работы студентов. Исходя из данной посылки, авторы попытались включить в пособие те фрагменты курса, которые не всегда можно найти в учебниках. Речь идет о примерах и упражнениях, поясняющих магистральное изложение курса. Такие упражнения и разбор примеров, несомненно, помогут студентам при подготовке к зачетам и экзаменам. В конце пособия приведены примеры зачетных и экзаменационных работ, которые можно использовать, особенно при проведении экзаменов в письменной форме. Письменные экзамены характерны для высших учебных заведений большинства стран, присоединившихся к Болонскому процессу.

Пособие состоит из четырех глав, включающих в себя материал, который является базовой частью курса. Объем пособия не позволяет включить ряд глав курса. Например, краевые задачи, метод малого параметра и т. д. Авторы надеются, что недостающие вопросы войдут в следующую часть аналогичного пособия.

Список литературы приведен в конце пособия и разделен на три части. В первой части – учебные пособия, каждое из которых может быть взято за обязательное.

Во второй части приведен список сборников задач. Наконец, в третьей части учебного пособия указана дополнительная литература. Она скорее предназначена для студентов, более глубоко интересующихся данным разделом математики.

Учебное пособие разделено на главы, а главы подразделяются на пункты. Нумерация формул, теорем, задач, упражнений двойная. Первая цифра указывает номер главы. Так, например, (3.11) означает, что речь идет об 11 формуле из третьей главы. В пособии используются стандартные обозначения основных математических понятий. Так, например, R – поле действительных чисел, а R^n – евклидово пространство размерности n над полем действительных чисел. C – поле комплексных чисел. $\|x\| = \|x\|_{R^n} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ – норма в R^n . Точнее, одна из норм.

Вариант 2

1. Для системы $\dot{y} = Ay$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- а) найти e^{At} ;
- б) исследовать на устойчивость нулевое решение;
- с) найти все $\alpha \in R$, при которых нулевое решение системы

$$\dot{y} = By + f(y)$$

асимптотически устойчиво. Здесь $B = A - \beta E$, E – единичная матрица, $f(y) = \text{colon}(y_1 \sin^2 y_3, y_1 y_2^2, y_3^4)$.

2. Найти все $l > 0$, при которых краевая задача

$$y'' + y = \sin t, \quad y = y(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0, \quad t \in [0, l]$$

- а) имеет единственное решение;
- б) имеет бесконечное множество решений;
- с) не имеет решений.

3. Решить уравнение

$$(x + y^2)dy = ydx.$$

4. Найти фундаментальную матрицу уравнения

$$y'' + 2ay' + (a^2 - 1)y = 0$$

и все a , при которых определитель Вронского стремится к 0, если $x \rightarrow +\infty$.

Примеры контрольных работ

Вариант 1

1. Для системы $\dot{y} = Ay$, где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- а) найти e^{At} ;
- б) исследовать на устойчивость нулевое решение;
- с) найти все $\alpha \in R$, при которых нулевое решение системы

$$\dot{y} = By + f(y)$$

асимптотически устойчиво. Здесь $B = A + \alpha E$, E – единичная матрица, $f(y) = \text{colon}(y_1^3, y_1 y_2, y_3^2)$.

2. Найти все $l > 0$, при которых краевая задача

$$y'' + y = \cos t, \quad y = y(t), \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad t \in [0, l]$$

- а) имеет единственное решение;
- б) имеет бесконечное множество решений;
- с) не имеет решений.

3. Решить уравнение

$$(2e^y - x)y' = 1.$$

4. Найти фундаментальную матрицу уравнения

$$y'' + 2ay' + (a^2 + 1)y = 0$$

и все a , при которых определитель Вронского стремится к 0, если $x \rightarrow +\infty$.

Глава 1

Дифференциальные уравнения первого порядка. Элементарные методы их интегрирования

1.1. Общие понятия, определения и примеры

Дифференциальным называется такое уравнение, в состав которого, помимо независимых переменных и неизвестных функций этих переменных, также входят производные неизвестных функций или их дифференциалы. Если функции, входящие в дифференциальное уравнение, зависят от одной независимой переменной, то это уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*. Если же в уравнение входят частные производные неизвестных функций по нескольким независимым переменным, то уравнение называют *дифференциальным уравнением с частными производными*. Ниже будем рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Будем обозначать независимые переменные буквой x , $y(x)$ – неизвестная функция этой переменной, а производные функции $y(x)$ – как обычно $y'(x)$, $y''(x)$, ..., $y^n(x)$. Через символ F обозначим известные функции.

Итак, обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0. \quad (1.1)$$

Наивысший порядок производных неизвестной функции, входящих в уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения*. Функция $y(x)$ называется *решением (интегралом) дифференциального уравнения* (1.1), если она n раз непрерывно дифференцируема на некотором интервале I и при $x \in I$ удовлетворяет уравнению (1.1). Задача нахождения решения дифференциального уравнения называется обычно задачей интегрирования дифференциального уравнения.

На первом этапе будем рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Общий вид таких уравнений будет

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1.2)$$

или, в разрешенной относительно y' форме,

$$y' = f(x, y). \quad (1.3)$$

Пользуясь другими обозначениями производной, это уравнение можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Если некоторая функция

$$y = \varphi(x)$$

удовлетворяет равенству (1.2) или (1.3), то она, естественно, называется решением этого дифференциального уравнения. Иногда $\varphi(x)$ называют частным решением соответствующего дифференциального уравнения.

Пример 1.1. Пусть $f(x)$ – непрерывная на интервале $I = (a, b)$ функция, $y(x)$ – её первообразная. Тогда

$$y'(x) = f(x) \quad (1.4)$$

и для нахождения первообразной мы получили дифференциальное уравнение первого порядка. Его решения могут быть найдены в следующем виде

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt + C, \quad (x_0 \in I), \quad (1.5)$$

где C – произвольная постоянная.

Обозначим

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Тем самым формула (1.5) перепишется в виде

$$y(x) = \varphi(x) + C.$$

Следовательно, уравнение (1.4) имеет семейство решений, зависящих от параметра $C \in R$. Придавая конкретное значение для C , получаем частные решения дифференциального уравнения (1.4). Формула (1.5), принято говорить, дает нам "общее решение".

Аналогичная ситуация может реализоваться и при рассмотрении уравнения общего вида (1.3). Решения такого уравнения можно записать в следующем виде

$$y = \varphi(x, C), \quad (1.6)$$

Исследовать устойчивость нулевого решения, построив функцию Ляпунова и применив теоремы Ляпунова и Четаева

$$\begin{aligned} 4.15. \quad & \begin{cases} \dot{x} = x^3 - y, \\ \dot{y} = x + y^3, \end{cases} & 4.16. \quad & \begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5, \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5. \end{cases} \\ 4.17. \quad & \begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x - y(x^2 + y^2), \end{cases} & 4.18. \quad & \begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3, \\ \dot{y} = 6x - 2y. \end{cases} \end{aligned}$$

Указание: В задачах 4.5 – 4.14 можно использовать теорему об устойчивости по линейному (первому) приближению (см. п. 4.4).

и корни его характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 14\lambda + 6 = 0$$

лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Упражнение 4.13. Исследовать свойства устойчивости состояний равновесия следующих систем дифференциальных уравнений

- а) $\dot{x}_1 = x_1 + 7x_2, \dot{x}_2 = x_1 + x_2,$
б) $\dot{x}_1 = x_1^2 - x_2, \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2,$
в) $\dot{x}_1 = -3x_1, \dot{x}_2 = -4x_1 + \sin x_2.$

4.5. Задачи для самостоятельного решения

С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному (первому) приближению исследовать на устойчивость нулевое решение систем дифференциальных уравнений

- 4.1. $\begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y, \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y, \end{cases}$ 4.2. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y, \end{cases}$
4.3. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y - x), \\ \dot{y} = 2^y - 2 \cos(\frac{\pi}{3} - x), \end{cases}$ 4.4. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + (1 - 6x)^{1/3}. \end{cases}$

Исследовать, при каких значениях параметров a и b асимптотически устойчиво нулевое решение систем дифференциальных уравнений

- 4.5. $\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy, \end{cases}$ 4.6. $\begin{cases} \dot{x} = x + ay + y^2, \\ \dot{y} = bx - 3y - x^2. \end{cases}$
4.7. $\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x, \\ \dot{y} = ax + by, \end{cases}$ 4.8. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(e + ax) - e^y, \\ \dot{y} = bx + \operatorname{tg} y. \end{cases}$

Найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость

- 4.9. $\begin{cases} \dot{x} = -2y(x - y), \\ \dot{y} = 2 + x - y^2, \end{cases}$ 4.10. $\begin{cases} \dot{x} = xy + 4, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 17, \end{cases}$
4.11. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 - y + y^2), \\ \dot{y} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}, \end{cases}$ 4.12. $\begin{cases} \dot{x} = (y - 1)(3x + y - 5), \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 5, \end{cases}$
4.13. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \sin(x + y), \end{cases}$ 4.14. $\begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x, \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2. \end{cases}$

где функция $\varphi(x, C_*)$ при каждом фиксированном $C = C_*$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.3). Такое семейство решений называют *общим решением* или *общим интегралом дифференциального уравнения*. Общий интеграл может оказаться записанным в неявном виде

$$\psi(x, y, C) = 0 \text{ или } \psi(x, y) = C.$$

Функцию $\psi(x, y, C)$ также называют интегралом соответствующего уравнения. Термин "решение" (в такой ситуации) не употребляют.

Рассмотрим теперь геометрическую интерпретацию решений дифференциального уравнения (1.3). На плоскости xOy равенство (1.6), при каждом фиксированном C , задает график кривой. Такая кривая носит название *интегральной кривой*, а формула (1.6) задает семейство интегральных кривых.

Ниже, на рисунках 1.1–1.6 представлены интегральные кривые для соответствующих уравнений. Методы интегрирования соответствующих уравнений будут приведены ниже.

Пусть в некоторой области $D \subset R^2 ((x, y) \in D)$ функция $f(x, y)$ отлична от нуля. Тогда уравнение (1.3) можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dy} = g(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$$

и решать уже последнее уравнение, считая y независимой переменной, а x функцией от y .

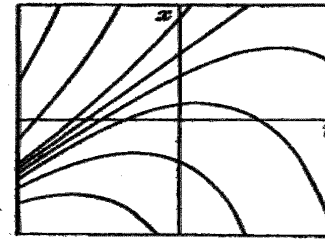


Рис. 1.1. $\dot{x} = x - t$.

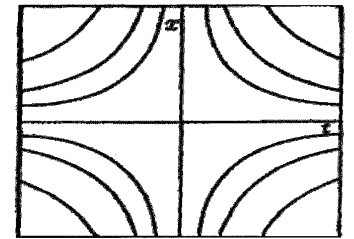


Рис. 1.2. $\dot{x} = -x/t, t \neq 0$.

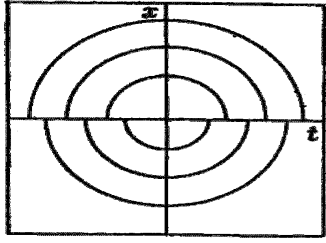


Рис. 1.3. $\dot{x} = -t/x$.

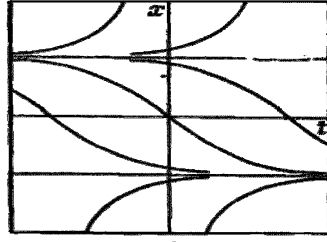


Рис. 1.4. $\dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.

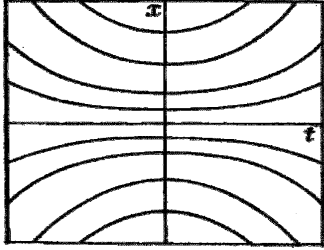


Рис. 1.5. $\dot{x} = 2xt$.

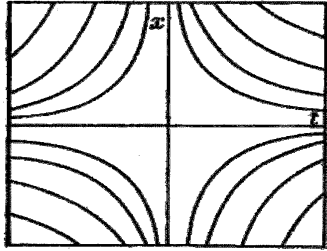


Рис. 1.6. $\dot{x} = -x/th$, $t \neq 0$.

1.2. Задача Коши

Напомним, что уравнение (1.3) имеет бесчисленное множество решений, поскольку в формулу (1.3), как правило, входит произвольная постоянная. Добавим теперь к уравнению (1.4) дополнительное условие

$$y(x_0) = y_0, \quad (1.7)$$

где $x_0, y_0 \in R$, т. е. заданные числа. Условия (1.7) принято называть *условиями (данными) Коши*, или *начальными условиями*. Задачу по нахождению функции $y = \varphi_0(x)$, удовлетворяющей уравнению (1.3) и условиям (1.7), называют *задачей Коши*. Если условие (1.7) отнести к уравнению (1.4) из примера 1.1, то соответствующее решение может быть задано следующей формулой

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t)dt$$

Пример 4.11. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_1^3 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - x_1^2 - x_2. \end{cases}$$

Состояния равновесия этой системы находим как решения следующей алгебраической системы уравнений

$$\begin{cases} -x_1 - x_1^3 + x_2 = 0, \\ 3x_1 - x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases}$$

или $3x_1 - x_1^2 - (x_1^3 + x_1) = 0$, т. е. $x_1^3 + x_1^2 - 2x_1 = 0$. Следовательно, рассматриваемая система имеет три состояния равновесия

$$\rho_1(0, 0), \rho_2(1, 2), \rho_3(-2, -10).$$

Исследуем их устойчивость по очереди.

Пусть выбрано $\rho_1(0, 0)$, тогда матрица

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Её собственные значения $\lambda_1 = \sqrt{3} - 1$ и $\lambda_2 = -\sqrt{3} - 1$. Следовательно, оно неустойчиво.

Во втором случае, т. е. при изучении устойчивости $\rho_2(1, 2)$ находим, что соответствующая матрица

$$B_2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Её характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0.$$

Все коэффициенты этого многочлена второй степени положительны. Следовательно, его корни лежат в левой полуплоскости и ρ_2 асимптотически устойчиво.

Состояние равновесия ρ_3 также асимптотически устойчиво. В этом случае соответствующая матрица

$$B_3 = \begin{pmatrix} -13 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим теперь случай, когда у системы дифференциальных уравнений (4.19), т. е.

$$\dot{x} = F(x)$$

есть состояние равновесия

$$x(t) = y, \quad y \neq 0.$$

Исследование его устойчивости заменами сведем к исследованию нулевого решения вспомогательной системы.

Пусть

$$B = \left\{ \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \right\} \Big|_{x=y}.$$

Из теорем 4.6, 4.7 вытекает, что справедливо утверждение.

Теорема 4.8. Пусть все собственные числа μ_k матрицы B лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством

$$\operatorname{Re} \mu_k < 0.$$

Тогда состояние равновесия $x(t) = y$ асимптотически устойчиво.

Теорема 4.9. Если у матрицы B существует хотя бы одно собственное значение μ_m , для которого $\operatorname{Re} \mu_m > 0$, то состояние равновесия $x(t) = y$ неустойчиво.

Замечание 4.3. В условиях теорем 4.6 и 4.8 можно дополнить вывод и доказать, что соответствующее состояние равновесия будет экспоненциально устойчиво (см. определение экспоненциальной устойчивости).

Рассмотрим примеры на использование теорем 4.8, 4.9.

Пример 4.10. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = (x-1)(x-2), \quad (F(x) = (x-1)(x-2)),$$

которое имеет два состояния равновесия $x = 1$ и $x = 2$. Матрица B состоит здесь из одного элемента b , где

$$b = F'(x)|_{x=1} = -1$$

в первом случае ($x = 1$) и $b = 1$ во втором. Откуда заключим, что состояние равновесия $x = 1$ асимптотически устойчиво, а $x = 2$ — неустойчиво.

и такое решение единственно, так как из курса математического анализа известно, что $\int_{x_0}^x f(t)dt$ будет одной из первообразных, а все первообразные

$f(x)$ определяются с точностью до произвольной постоянной.

Фундаментальным результатом теории обыкновенных дифференциальных уравнений является следующая теорема. Приведем один из вариантов формулировки этой теоремы.

Теорема 1.1. Пусть точка $(x_0, y_0) \in D \subset R^2$ и для всех точек этой области выполнены следующие два условия:

У1. Функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных.

У2. Существует непрерывная частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Тогда можно указать такую положительную постоянную δ , что при $|x - x_0| < \delta$ задача Коши (1.3), (1.7) имеет единственное решение.

Замечание 1.1. Условие У2 можно заменить на условие У2': в области D функция $f(x, y)$ по переменной y удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|,$$

где L — положительная константа, (x, y_1) и $(x, y_2) \in D$.

Замечание 1.2. При невыполнении условия У2(У2') можно утверждать, что задача Коши имеет решение, но нельзя утверждать что решение в такой ситуации единственно.

Пример 1.2. Рассмотрим задачу Коши

$$y' = 2 |y|^{\frac{1}{2}}, \quad y(x_0) = 0, \quad x_0 \geq 0.$$

У данной задачи есть решение $y(x) = 0$, а также семейство решений (проверяется подстановкой)

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; x_0), \\ (x - x_0)^2, & x \in [x_0; \infty) \end{cases}.$$

В данной ситуации решение задачи Коши не единственно. Причина неприменимости теоремы 1.1 состоит в том, что функция

$$f(x, y) = 2 |y|^{\frac{1}{2}}$$

в точке $y = 0$ не имеет производной (в окрестности этой точки она не удовлетворяет условию Липшица).

Упражнение 1.1. Показать, что задача Коши

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \quad y(x_0) = 0, \quad x_0 \geq 0$$

также имеет более одного решения при $x \geq x_0$.

Теорема гарантирует существование только в малой окрестности точки x_0 . Это замечание существенно, так как существуют такие уравнения, у которых при определенном выборе начальных условий решения за конечное время "уходят" в бесконечность.

Пример 1.3. Рассмотрим задачу Коши

$$y' = y^2, \quad y(0) = y_0, \quad y_0 > 0.$$

У нее, согласно теореме 1.1, существует единственное решение

$$y(x) = \frac{y_0}{1 - y_0 x}.$$

Это решение таково, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = \infty, \quad x_0 = \frac{1}{y_0}.$$

В приложениях, например в механике, используют иногда иные буквы для обозначения независимой и зависимой переменных. Пусть t – независимая переменная, а $x = x(t)$ функция, которая определяется из уравнения

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (1.8)$$

Здесь $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Через t обычно обозначают время.

1.3. Автономные уравнения

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(y) \quad (1.9)$$

называется *автономным*. Правая часть дифференциального уравнения не зависит явным образом от независимой переменной. Это название оправдано, в частности, тем, что производная $\frac{dy}{dx} = y'$ определяется лишь одним y и, таким образом, решение само управляет своим изменением.

При реализации критического случая теорема о первом приближении (линейном приближении) не позволяет дать ответ об устойчивости состояния равновесия и ответ зависит от нелинейных слагаемых ($G(x)$) правой части системы (4.19).

Пример 4.9. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon x_1 - x_2 + dx_1(x_1^2 + x_2^2) - Cx_2(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \varepsilon x_2 + dx_2(x_1^2 + x_2^2) + Cx_1(x_1^2 + x_2^2). \end{cases} \quad (4.24)$$

Здесь

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad G(x) = \|x\|^2 \begin{pmatrix} dx_1 - cx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что

$$\|G(x)\| = \sqrt{d^2 + c^2} \|x\|^3,$$

т. е. для исследования устойчивости решения $x_1 = x_2 = 0$ можно использовать теоремы 4.6, 4.7. Собственные значения матрицы $A(\varepsilon)$ обозначим $\lambda_{1,2}(\varepsilon)$. При этом

$$\lambda_{1,2} = \varepsilon \pm i.$$

При $\varepsilon < 0$ из теоремы 4.6 вытекает, что нулевое решение системы (4.24) асимптотически устойчиво, а при $\varepsilon > 0$ неустойчиво.

Если $\varepsilon = 0$, то $\lambda_{1,2}(0) = \pm i$, т. е. реализуется критический случай двух чисто мнимых корней. Ответ здесь уже зависит от коэффициента d . Положим

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Стандартным образом (см. упражнения из предыдущего параграфа) можно найти, что

$$D_t V = d(x_1^2 + x_2^2)^2.$$

Откуда с использованием двух теорем Ляпунова и теоремы Четаева замечаем, что при $d < 0$ нулевое решение асимптотически устойчиво, при $d > 0$ – неустойчиво, а при $d = 0$ система (4.24) имеет первый интеграл. В частности, нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.

Откуда получаем на основании леммы 4.2, что

$$\varphi(t) \leq K \|a\| e^{\varepsilon t}$$

или

$$\|x(t, a)\| \leq K \|a\| e^{(-\gamma + \varepsilon)t}. \quad (4.23)$$

Если ε выбрано так, что $\varepsilon < \gamma$, то неравенство (4.23) показывает, что

$$\varphi(t) \leq K \|a\|,$$

если только $\varphi(t) \leq \delta$. Таким образом, если $\|a\| < \delta/k$, то неравенство (4.23) выполнено при всех $t > 0$. Более того, неравенство (4.23) означает, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, a)\| = 0.$$

Теорема 4.7. Пусть матрица A имеет хотя бы одно собственное значение λ_1 , для которого выполнено неравенство

$$Re \lambda_1 > 0.$$

Тогда нулевое решение системы дифференциальных уравнений (4.22) неустойчиво.

Доказательство может быть выполнено с помощью теоремы Четаева и имеется в многих учебниках по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если для собственных значений матрицы A выполнено неравенство

$$Re \lambda_k \leq 0$$

и для некоторых из них реализуется равенство

$$Re \lambda_j = 0,$$

то принято говорить, что в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия реализуется критический случай. Простейшими из них являются следующие

- 1) $\lambda_1 = 0, Re \lambda_j < 0, j = 2, \dots, n;$
- 2) $\lambda_{1,2} = \pm i\sigma, Re \lambda_j < 0, j = 3, \dots, n, a \sigma = const > 0.$

Решения автономных уравнений обладают важным свойством. Если $y = \varphi(x)$ – решение уравнения (1.9) с областью определения $x \in (a, b)$, то функция $y = \psi(x) = \varphi(x + C)$ также будет решением этого уравнения при $x \in (a - C, b - C)$. Это следует из того, что

$$\psi'(x) = \varphi'(x + C) = f(\varphi(x + C)) = f(\psi(x)).$$

Интегральная кривая $y = \psi(x)$ получается из интегральной кривой $y = \varphi(x)$ сдвигом по оси x на величину C влево, если $C > 0$. Вправо при $C < 0$.

Пусть $x \in I$, при которых $f(y(x)) \neq 0$. Пусть

$$\int \frac{dy}{f(y)} = F(y).$$

Тогда равенство

$$F(y) = x + C \quad (1.10)$$

задает интеграл уравнения (1.9). Действительно,

$$\frac{d}{dx}(F(y) + C) \equiv \frac{y'}{f(y)} = 1,$$

откуда $y' = f(y)$.

Пример 1.4. Найти решения уравнения

$$y' = y^3.$$

Интегрирование сводится к рассмотрению равенства

$$\frac{dy}{y^3} = dx.$$

Откуда получаем

$$-\frac{2}{y^2} = x + C$$

или $y^2 = -\frac{2}{x + C}$, где $C \in R$.

Пример 1.5. Рассмотрим уравнение

$$y' = ay, \quad a \in R, \quad a \neq 0. \quad (1.11)$$

Тогда $\frac{dy}{y} = adx$ или

$$\ln |y| = ax + C_1, \quad C_1 = \text{const} > 0.$$

Откуда получаем

$$|y| = e^{C_1} e^{ax}.$$

Окончательно получаем, что

$$y = Ce^{ax}, \quad |C| = e^{C_1}.$$

– общее решение уравнения (1.11).

Пусть $f(y_0) = 0, y_0 \in R$. Тогда $y(x) = y_0$ будет решением уравнения (1.9). Такое решение в этом и более общих случаях называют *состоянием равновесия* или *неподвижной точкой*.

Перепишем уравнение (1.9) в других обозначениях

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.12)$$

где $x = x(t) \in R$. В приложениях независимая переменная t интерпретируется как время. В механике и других разделах физики, а также приложениях к другим естественным наукам интерес представляет поведение решений (1.12) при $t \rightarrow +\infty$. Если $f(x) \neq 0$, то $\dot{x} \neq 0$. Следовательно, решения этого уравнения либо возрастают, либо убывают. Если же $f(C) = 0$, то существует решение $x(t) = C$.

Эти свойства решений удобнее изображать на оси $x(x = x(t))$, чем на плоскости t, x . Если $f(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$, то на этом интервале рисуется стрелка, показывающая направления изменения $x = x(t)$. Это геометрическое изображение качественного поведения уравнения (1.12) называется *фазовым портретом*. неподвижные точки отмечаются "точками". На рис. 1.7 – 1.10 изображено несколько фазовых портретов для конкретных функций $f(x)$.

Доказательство теоремы базируется на двух утверждениях.

Лемма 4.1. *Справедливо неравенство*

$$\|e^{At}\| \leq Me^{-\gamma t}, \quad M, \gamma = \text{const} > 0,$$

где $\gamma = \max(\text{Re} \lambda_k) + \gamma_0$, а γ_0 – достаточно малая положительная постоянная. Постоянная $M = M(\gamma_0)$. Доказательство леммы вытекает из свойств матричной экспоненты, которая была определена и изучена в главе 3.

Лемма 4.2 (Гронуола – Беллмана). *Пусть $\varphi(t), \psi(t)$ – две неотрицательные функции при $t \in [t_0, \infty)$, причем при $t \geq t_0$ выполнено неравенство*

$$\varphi(t) \leq C + \int_{t_0}^t \psi(s) \varphi(s) ds, \quad C = \text{const} > 0.$$

Тогда при $t \geq t_0$ имеем

$$\varphi(t) \leq C \exp \int_{t_0}^t \psi(s) ds.$$

Упражнение 4.12. Доказать лемму Гронуола – Беллмана.

Доказательство теоремы 4.6. Пусть $x(0) = a$. Тогда решение уравнения (4.22), удовлетворяющее данному начальному условию, можно искать как решение следующего интегрального уравнения

$$x(t, a) = \exp(At)a + \int_{t_0}^t \exp A(t-s)G(x(s, a))ds.$$

Откуда

$$\|x(t, a)\| \leq \|\exp(At)\| \|a\| + \int_{t_0}^t \|\exp A(t-s)\| \|G(x(s, a))\| ds.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что

$$\|G(x(s, a))\| \leq \varepsilon \|x(s, a)\| / M,$$

если $\|x\| \in K_\delta$ – шару радиуса δ . Напомним, что $\|\exp At\| \leq Me^{-\gamma t}$. Положим $\varphi(t) = \|x(t, a)\|e^{\gamma t}$. Последнее неравенство можно переписать в следующей форме

$$\varphi(t) \leq K \|a\| + \varepsilon \int_{t_0}^t \varphi(s) ds.$$

Пусть $V(y_1, y_2) = (1 - \cos y_1) + \frac{y_2^2}{2}$ и рассмотрим в качестве D шар K_ε , а $D_1 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq \varepsilon^2, x_1 > 0, 0 < x_2 < \eta x_1\}$. Тогда

$$D_t V = 2x_2 \sin x_1 - gx_2^2 = x_2(2 \sin x_1 - gx_2) > 0,$$

если η — достаточно малая положительная постоянная.

Упражнение 4.11. Показать, что нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) + cx_2(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) - cx_1(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

асимптотически устойчиво, если $\alpha \leq 0$, и неустойчиво при $\alpha > 0$.

Указание: положить $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

4.4. Теорема об устойчивости по линейному приближению

Рассмотрим систему (4.19), предполагая, что $F(0) = 0$, т. е. она имеет нулевое состояние равновесия. Обозначим через $A = D_x F(x)$ матрицу Якоби вектор-функции $F(x)$, вычисленную в точке $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 (x = 0)$. Как хорошо известно из курса математического анализа, справедливо равенство

$$F(x) = Ax + G(x), \quad (4.22)$$

где, как принято говорить, вектор-функция $G(x)$ имеет в нуле порядок малости выше первого. Последний термин означает, что для $G(x)$ справедливо неравенство

$$\|G(x)\| \leq \varphi(r)\|x\|,$$

если $\|x\| \leq r$, а $\lim_{r \rightarrow 0} \varphi(r) = 0$. Иной вариант: матрица Якоби, вычисляемая в точке $x = 0$, является нулевой, т. е. $D_x G(x)|_{x=0} = 0$.

Теорема 4.6. Пусть все собственные значения матрицы A таковы, что

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0.$$

Тогда состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (4.22) асимптотически устойчиво.

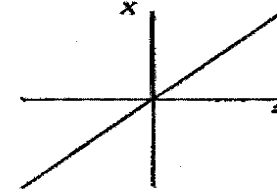


Рис. 1.7. $\dot{x} = x$, $x = 0$ — неподвижная точка.

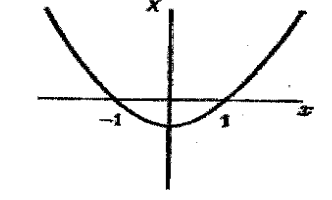


Рис. 1.8. $\dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$, $x = \pm 1$ — неподвижные точки.

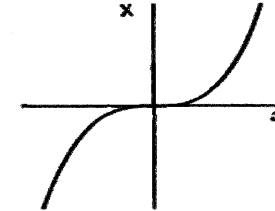


Рис. 1.9. $\dot{x} = x^3$, $x = 0$ — неподвижная точка.

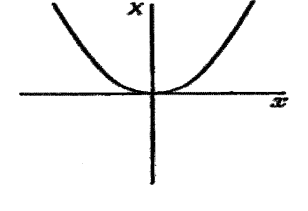


Рис. 1.10. $\dot{x} = x^2$, $x = 0$ — неподвижная точка.

Пусть система (1.12) такова, что уравнение $f(x) = 0$ имеет один корень $x = C$. На каждой из полупрямых $x < C$ или $x > C$ функция $f(x)$ сохраняет свой знак и может быть положительной или отрицательной. Следовательно, фазовый портрет должен соответствовать одному из четырех случаев, изображенных на рис. 1.11.

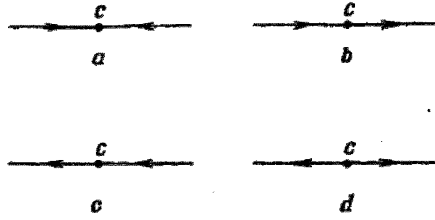


Рис. 1.11. Четыре возможных фазовых портрета для одной изолированной неподвижной точки. Неподвижная точка называется аттрактором в случае (а), шунтом в случаях (б) и (с) и репеллером в случае (д).

Так, уравнение $\dot{x} = -x$ порождает фазовый портрет (а). Если рассмотреть уравнения $\dot{x} = x^2$ и $\dot{x} = -x^2$, то реализуются случаи (б) и (с). Наконец, уравнению $\dot{x} = x$ соответствует случай (д).

1.4. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение с разделяющимися переменными – это уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x)g(t) \quad (1.13)$$

или в других переменных

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x). \quad (1.14)$$

Уравнение (1.13) запишем в виде

$$\frac{dx}{f(x)} = g(t)dt.$$

Откуда после интегрирования находим

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{f(x)} = \int_{t_0}^t g(t)dt + C. \quad (1.15)$$

Равенство определяет $x(t)$ как неявную функцию от t . Равенство (1.15) получено при условии, что $f(x) \neq 0$. Пусть $f(C) = 0$. Тогда $x(t) = C$ будет решением (особым решением).

тающая функция. Следовательно, $V(x(t, a)) < m$ при всех t и поэтому траектория $x(t, a)$ не может пересечь ∂K_ε . Теорема доказана.

Доказательство этой и двух оставшихся теорем можно найти во многих учебниках и учебных пособиях по дифференциальным уравнениям. Ссылки на них можно найти в списке цитируемой литературы данного пособия. Приведем некоторые примеры использования этих теорем.

Пример 4.7. Пусть система (4.19) имеет первый интеграл $V(x)$, положительно определенный в окрестности состояния равновесия $x = 0$. Тогда положение равновесия $x = 0$ устойчиво.

Действительно, $D_t V(x) \equiv 0$, и поэтому все условия теоремы об устойчивости выполнены. В примере 4.5 приведена одна из таких систем, у которой существует первый интеграл $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Пример 4.8. Как ранее отмечалось, уравнения физического (и математического) маятника может быть записано в виде системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1 - g x_2, \quad g \geq 0.$$

Рассмотрим функцию

$$V(x_1, x_2) = (1 - \cos x_1) + \frac{x_2^2}{2}.$$

Отметим, $V(x_1, x_2) > 0$, если $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ и, конечно, $V(0, 0) = 0$. Наконец, $D_t V = x_2 \sin x_1 + x_2(-\sin x_1 - g x_2) = -g x_2^2 < 0$, если $x_2 \neq 0$. Но в любом случае $D_t V \leq 0$, т. е. нулевое состояние равновесия устойчиво. При $g < 0$ нулевое состояние равновесия асимптотически устойчиво, но это непосредственно из теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости не вытекает.

Упражнение 4.10. Пусть $g < 0$. Доказать, что нулевое решение системы, описывающей колебания маятника асимптотически устойчиво.

Рассматриваемая в рамках данного примера система дифференциальных уравнений имеет также состояние равновесия $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$. Заменаи $z_1 = x_1 - \pi$, $z_2 = x_2$ систему удастся переписать в следующей форме

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = \sin y_1 - g y_2, \end{cases}$$

у которой следует изучать устойчивость уже нулевого состояния равновесия $y_1 = 0$, $y_2 = 0$.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Пусть в окрестности $x = 0$ существует положительно определенная функция $V(x_1, \dots, x_n)$, производная которой в силу системы (4.19) $W(x) = D_t V(x)$ отрицательно определена. Тогда нулевое состояние равновесия системы дифференциальных уравнений асимптотически устойчиво.

Пусть D некоторая окрестность точки $x = 0$, а $D \subseteq U$ и $x = 0$ является граничной точкой для U_1 (см. рис. 4.2).

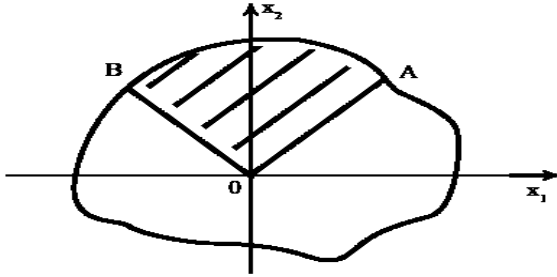


Рис. 4.2.

На рисунке заштрихована область D_1 , ∂D_1 — часть её границы, состоящая из внутренних точек области D (дуги OB , OA).

Теорема Четаева о неустойчивости. Пусть существует непрерывно дифференцируемая функция $V(x)$ такая, что

- 1) $V(x)|_{\partial D_1} = 0$;
- 2) в области D_1 справедливы неравенства $V(x) > 0$, $D_t V(x) > 0$ при $x \neq 0$.

Тогда состояние равновесия $x = 0$ неустойчиво.

Докажем первую из этих теорем. Пусть ε такое, что шар $K_\varepsilon = \{x : \|x\| \leq \varepsilon\}$ целиком принадлежит области D . Его граница $\partial K_\varepsilon = \{x : \|x\| = \varepsilon\}$. Так как ∂K_ε — замкнутое ограниченное множество, то существует

$$\min_{x \in \partial K_\varepsilon} V(x) = m > 0 \quad (V(x) > 0, x \neq 0).$$

Рассмотрим теперь шар $K_\delta = \{x : \|x\| \leq \delta\}$ радиуса δ . Величину δ можно выбрать достаточно малой так, чтобы было справедливо неравенство $V(x) < m$. Пусть теперь $x(0) = a$, $a \in K_\delta$. Тогда решение $x(t, a)$ остается теперь в шаре K_ε . Действительно, рассмотрим функцию $W(t) = V(x(t, a))$. Её производная $\dot{W}(t) = D_t V \leq 0$, т. е. $W(t)$ не возрас-

Пример 1.6. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = xt.$$

Это уравнение имеет особое решение $x \equiv 0$. Если $x \neq 0$, то получим равенство

$$\frac{dx}{x} = t dt$$

или

$$\ln |x| = \frac{1}{2} t^2 + C, \quad C \in R.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$x(t) = C e^{\frac{1}{2} t^2}.$$

Особое решение входит в данную формулу, если положить $C = 0$.

Пример 1.7. Уравнение

$$\dot{x} = -tx^2$$

имеет общее решение

$$x = \left(\frac{1}{2} t^2 + C\right)^{-1},$$

а также особое решение $x = 0$, которое не попадает в семейство функций $(\frac{1}{2} t^2 + C)^{-1}$ ни при каком выборе постоянной C .

Уравнение с разделяющимися переменными иногда записывают в симметричной форме

$$M_1(x) N_1(t) dt + M_2(x) N_2(t) dx = 0.$$

Уравнение, записанное в таком виде, не связывает нас выбором неизвестной функции. За таковую мы можем принять как $y = y(x)$, так и $x = x(y)$. Разделив это уравнение на $M_1(x) N_2(t)$, получаем равенство

$$\frac{N_1(t) dt}{N_2(t)} + \frac{M_2(x) dx}{M_1(x)} = 0$$

и, как следствие, общий интеграл

$$\int_{t_0}^t \frac{N_1(t)}{N_2(t)} dt + \int_{x_0}^x \frac{M_2(x)}{M_1(x)} dx = C.$$

Иначе общий интеграл может быть записан в виде

$$Q_1(x) + Q_2(t) = C,$$

где $Q_1(x)$ – первообразная функции $\frac{M_2(x)}{M_1(x)}$, а $Q_2(t)$ – первообразная $\frac{N_1(t)}{N_2(t)}$.

Пример 1.8. Рассмотрим уравнение

$$\cos t(1+x^2)dt - (\sin t)x dx = 0.$$

После преобразований получаем равенство

$$\frac{\cos t}{\sin t} dt - \frac{x}{1+x^2} dx = 0$$

или

$$\int \frac{\cos t}{\sin t} dt = \int \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Откуда получаем

$$\ln |\sin t| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

После упрощений интеграл приобретает следующий вид

$$\sin t = C(1+x^2)^{\frac{1}{2}},$$

где $C \in R$. Отметим, что при рассмотрении этого уравнения мы пока нашли общее решение в форме общего интеграла. При $C = 0$ получаем особые решения $t = \pi k, k \in Z$.

1.5. Однородные уравнения

К уравнениям с разделяющимися переменными приводят так называемые однородные уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right).$$

Введем функцию $y = \frac{x}{t}$, тогда $\frac{dx}{dt} = t \frac{dy}{dt} + y$. Отсюда получаем уравнение

$$t \frac{dy}{dt} + y = f(y)$$

Положим $U(x_1) = - \int_{\alpha}^{x_1} f(\xi) d\xi$, ($U'(x_1) = -f(x_1)$). Тогда

$V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + U(x_1)$ – первый интеграл последней системы дифференциальных уравнений. Действительно,

$$D_t V(x_1, x_2) = \frac{dU}{dx_1} x_2 + x_2 f(x_1) = -f(x_1) x_2 + x_2 f(x_1) = 0.$$

В механике функция

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + U(x_1) = \frac{x_2^2}{2} - \int_{\alpha}^{x_1} f(\xi) d\xi$$

обычно интерпретируется как полная энергия, а равенство

$$D_t V \equiv 0$$

одна из форм записи закона сохранения энергии.

Функция $V(x_1, \dots, x_n)$ в окрестности начала координат ($x_j = 0, j = 1, \dots, n$) называется *положительно определенной*, если $V(x) > 0, x \neq 0, V(0) = 0$. Функция $V(x)$ называется *отрицательно определенной*, если $-V(x)$ положительно определена.

Функция $V(x)$ называется *положительной (неотрицательной) в окрестности начала координат*, если $V(x) \geq 0$ для всех x из этого множества. Наконец, $V(x)$ *отрицательная (не положительная)*, если $V(x) \leq 0$.

Примеры:

- 1) $V_1(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ – положительно определена;
- 2) $V_1(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$ – неотрицательно определена.

Функция $V_2(x_1, \dots, x_n) \geq 0$, но обращается в 0 не только при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, а и на гиперплоскости $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$;

- 3) $V_3(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ – знакопеременная функция, т. е. не входит в определенные выше классы.

Теорема Ляпунова об устойчивости. Если в некоторой окрестности тривиального состояния равновесия ($\alpha = 0$) системы (4.19) существует положительно определенная функция $V(x)$, производная которой в силу системы такая, что $D_t V \leq 0$, то состояние равновесия $x = 0$ устойчиво по Ляпунову.

Последнее равенство вытекает из того, что в силу системы (4.19)

$$\dot{x}_j = F_j(x_1, \dots, x_n).$$

Определение 4.4. Равенством

$$D_t V(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} F_j(x_1, \dots, x_n)$$

определим производную в силу системы (4.19) функции $V(x) = V(x_1, \dots, x_n)$. Если

$$D_t V \equiv 0,$$

то функцию $V(x_1, \dots, x_n)$ принято называть её *первым интегралом* системы дифференциальных уравнений (4.19).

Пример 4.5. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \end{cases}$$

а также функции

$$\begin{aligned} V_1(x_1, x_2) &= x_1 + x_2, \quad V_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \\ D_t V_1(x_1, x_2) &= -x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) + x_1 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ D_t V_2(x_1, x_2) &= 2x_1(-x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)) + 2x_2(x_1 + x_1(x_1^2 + x_2^2)) \equiv 0. \end{aligned}$$

Функция $V_2(x_1, x_2)$ – первый интеграл рассматриваемой в данном примере системы.

Пример 4.6. В механике консервативной системой с одной степенью свободы называется система, описываемая уравнением

$$\ddot{x} = f(x),$$

где $f(x)$ – некоторая дифференцируемая функция. Это уравнение, как обычно, можно переписать в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f(x_1), \quad (x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}).$$

или

$$\frac{dy}{dt} = \frac{f(y) - y}{t}.$$

Последнее уравнение – это уравнение с разделяющимися переменными. Откуда имеем интеграл

$$\int \frac{dy}{f(y) - y} = \int \frac{dt}{t} + C, \quad C \in R.$$

Однородным называют и следующее уравнение, имеющее несколько более общий вид

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

в котором M и N – однородные функции одной и той же степени m .

Напомним, что функция $M(x, y)$ называется *однородной степени m* , если при всех λ выполнено тождество

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m M(x, y).$$

Это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными, если положить

$$y = ux.$$

Отметим, что $dy = xdu + udx$, поэтому

$$x^m \{M(1, u)dx + N(1, u)udx + N(1, u)xdu\} = 0.$$

Общее решение находится из уравнения

$$F(u)dx + G(u)xdu = 0,$$

где $F(u) = M(1, u) + N(1, u)u$, $G(u) = N(1, u)$.

Пример 1.9. Рассмотрим уравнение

$$(x + 2y)dx - xdy = 0.$$

Здесь $M(x, y) = x + 2y$, $N = -x$, т. е. однородные функции первой степени ($m = 1$). Положим $y = ux$. Сначала получаем, что справедливо равенство

$$x(1 + 2u)dx - x(xdu + udx) = 0.$$

После упрощений получаем

$$(1 + u)dx = xdu$$

или

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{1+u}.$$

Откуда находим, что

$$x = C(1+u), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем $x = C(1 + \frac{y}{x})$

или $y = \frac{x^2 - Cx}{C}$.

Пример 1.10. Решим уравнение

$$(x - y \cos \frac{y}{x})dx + x \cos \frac{y}{x}dy = 0.$$

Сделаем замену $y = ux$. Получаем

$$(x - xu \cos u)dx + x \cos u(xdu + udx) = 0$$

или

$$\frac{dx}{x} + \cos udu = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln |x| + \sin u = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

или

$$\ln |x| + \sin \frac{y}{x} = C.$$

К однородным уравнениям приводятся уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Пусть система алгебраических уравнений

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

имеет единственное решение $x = x_0, y = y_0$. Тогда замена

$$x = x_0 + u, \quad y = y_0 + v$$

В случае б) система имеет состояние равновесия $x_1 = x_2 = 0$ (нулевое состояние равновесия), а также семейство состояний равновесия $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Их находим из рассмотрения системы уравнений

$$\begin{cases} x_1(1 - (x_1^2 + x_2^2)) = 0, \\ x_2(1 - (x_1^2 + x_2^2)) = 0. \end{cases}$$

Уравнение в пункте в) называется *уравнением физического маятника*, если $g > 0$, а при $g = 0$ – уравнением математического маятника. Как обычно, его можно переписать в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - gx_2, \end{cases}$$

у которой есть состояния равновесия $x_1 = \pi k, n \in \mathbb{Z} (n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots)$ и $x_2 = 0$. С точки зрения физических интерпретаций интерес представляют два из них

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0(x = 0); \quad x_1 = \pi, \quad x_2 = 0(x = \pi).$$

Замена $z(t) = x(t) - y$ сводит систему дифференциальных уравнений к аналогичной

$$\dot{x} = F(z + y),$$

у которой уже есть нулевые состояния равновесия. Так что без нарушения общности можно считать, что система дифференциальных уравнений (4.19) имеет нулевые состояния равновесия, а изучение устойчивости произвольно свести к аналогичным вопросам для нулевого состояния равновесия.

Рассмотрим непрерывно дифференцируемую функцию

$$V(x) = V(x_1, \dots, x_n).$$

Пусть $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ – решение системы дифференциальных уравнений (4.19). Положим $W(t) = V(x(t))$. Тогда

$$\frac{d}{dt}W(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} F_j(x_1, \dots, x_n).$$

4.3. Метод функций Ляпунова

В этом разделе ограничимся рассмотрением случая, когда система дифференциальных уравнений автономна. Изложенная ниже методика исследования, конечно, допускает обобщение на не автономный случай, но, как правило, эти обобщения носят чисто математический характер и редко используются в традиционных приложениях.

Итак, рассмотрим систему

$$\dot{x} = F(x), \quad (4.19)$$

где, как и ранее, $x = colon(F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$. Компоненты вектор-функции $F(x)$, т. е. $F_j(x_1, \dots, x_n)$, непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных (существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial F_j}{\partial x_k}$).

Если уравнение (4.19) дополнить начальными условиями

$$x(0) = a, \quad a \in R^n, \quad (4.20)$$

то указанные выше условия характеризуют локальную разрешимость задачи Коши. Иначе говоря, можно указать такое $T = T(a)$, что задача Коши имеет эквивалентное решение при $t \in (-T(a), T(a))$.

Пусть $x(t) = y$ ($y \in R^n, y = colon(y_1, \dots, y_n), y_j = const$) – решение уравнения (4.19). Такое решение называют *состоянием равновесия*, и его координаты следует находить как решения следующей системы уравнений

$$F(y) = 0 \quad (4.21)$$

Пример 4.4. Рассмотрим дифференциальные уравнения и системы

$$\begin{aligned} \text{а) } \dot{x} &= x - x^3, \quad x = x(t) \in R, \\ \text{б) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2), \end{cases} \\ \text{в) } \ddot{x} + g\dot{x} + \sin x &= 0, \quad g \geq 0. \end{aligned}$$

В случае а) уравнение имеет три состояния равновесия $x = 0$, $x = 1, x = -1$, которые находятся как корни уравнения $x - x^3 = 0$.

сводит данное уравнение к однородному

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right).$$

Если указанная выше система линейных алгебраических уравнений не имеет решений, то

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$$

и, следовательно, замена

$$a_2x + b_2y + c_2 = v$$

приводит его к уравнению с разделяющимися переменными

$$v' = b_2 f\left(\frac{\lambda v + c_1 - \lambda a_2}{v}\right) = g(v).$$

Наконец, исключительный вариант наличия у системы алгебраических уравнений семейства решений, эквивалентного пропорциональности коэффициентов: $a_1 = \lambda a_2, b_1 = \lambda b_2, c_1 = \lambda c_2$. Следовательно, уравнение на самом деле имеет следующий вид

$$\frac{dy}{dx} = f(\lambda),$$

решение

$$y = f(\lambda)x + C, \quad C \in R,$$

где $f(\lambda)$ – постоянная.

Пример 1.11. Решить уравнение

$$(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0.$$

Система уравнений

$$2x - 4y + 6 = 0, \quad x + y - 3 = 0$$

имеет единственное решение $x_0 = 1, y_0 = 2$. Замена

$$x = u + 1, \quad y = v + 2$$

приводит данное уравнение к однородному

$$(2u - 4v)du + (u + v)dv = 0,$$

которое имеет интеграл (проверить самостоятельно)

$$u \frac{(v-2)^3}{(v-1)^2} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

В исходных переменных получаем

$$(y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2.$$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

называется *квазиоднородным*, если функция $f(x, y)$ оказалась квазиоднородной функцией степени $\beta - \alpha$ переменных x, y (с весами α и β соответственно). Напомним, что функция $f(x, y)$ называется *квазиоднородной степени k с весами α и β* , если при некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$f(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y) = \lambda^k f(x, y).$$

Квазиоднородное уравнение заменой

$$y = ux^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

приводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$xu' + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)u = f(1, u)$$

или

$$xu' = g(u) \equiv f(1, u) - \frac{\beta}{\alpha}u.$$

Пример 1.12. Убедиться, что уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^6 - y^4}{2x^4y}$$

является квазиоднородным, и решить его.

На главной диагонали этой матрицы стоят числа c_1, c_2, \dots, c_n . Числа c_j с индексами $j > n$ или $j < 0$ заменяются 0.

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\Delta_1 = c_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_0 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ c_5 & c_4 & c_3 \end{vmatrix}, \dots$$

Упражнение 4.7. Для многочленов

$$P_1(\lambda) = c_1\lambda + c_0, \quad P_2(\lambda) = c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

условие положительности их коэффициентов является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы они были многочленами Гурвица.

Начиная с $n = 3$, необходимые условия уже отличаются от условий Рауса – Гурвица. Можно привести пример многочлена, у которого все коэффициенты положительны, но тем не менее у него есть корни в правой полуплоскости

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 40,$$

у которого есть корни $\lambda_1 = -4$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 3i(Re\lambda_{2,3} > 0)$.

Упражнение 4.8. Пусть

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r.$$

Показать, что данный многочлен будет многочленом Гурвица, если

$$p, q, r > 0, \quad pq - r > 0.$$

Упражнение 4.9. Пусть

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 + p\lambda^3 + q\lambda^2 + r\lambda + s.$$

Показать, что этот многочлен будет многочленом Гурвица, если

$$p, q, r, s > 0, \quad p(rq - ps) - r^2 > 0.$$

Последнее неравенство можно переписать в иной форме

$$p(pq - r) - p^2s > 0.$$

$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, которые линейно независимы. В этом случае система приобретает вид $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$ и все решения таковы

$$x_1 = C_1, \quad x_2 = C_2, \quad C_1, C_2 = \text{const},$$

и поэтому система устойчива.

Для приложений дифференциальных уравнений особенно характерна ситуация, когда требуется проверить условия теоремы 4.3. Если рассмотреть характерное уравнение

$$\det|A - \lambda E| = 0,$$

то после преобразований данное уравнение можно переписать в следующем виде

$$P_n(\lambda) = c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + c_0 = 0, \quad (4.17)$$

где $c_j \in R$ ($c_n = 1$). Проверка условий этой теоремы, следовательно, сводится к рассмотрению алгебраической задачи о расположении корней уравнения (4.17) на комплексной плоскости.

Если n велико, то прямой способ: нахождение корней многочлена (4.17) – трудно реализуем. Поэтому представляет интерес косвенный способ проверки неравенства

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0. \quad (4.18)$$

При выполнении этого неравенства корни многочлена (4.17) лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости, а соответственный многочлен называется *многочленом (полиномом) Гурвица*. Будем говорить, что полином имеет стандартный вид, если $c_n > 0$ ($c_n = 1$).

Критерий Рауса – Гурвица отрицательности вещественных частей уравнения (4.17)

Необходимое условие: все $c_j > 0$. Необходимое и достаточное условие: положительность всех главных диагональных миноров матрицы Гурвица

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_0 & 0 & & & & \dots & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 & & \dots & 0 \\ c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & \dots & 0 \\ 0 & & & & & & \dots & 0 & c_n \end{pmatrix}.$$

Пусть x имеет вес α , а y имеет $-\beta$. Чтобы это уравнение было квазиоднородным, необходимо, чтобы было справедливо тождество

$$\frac{4\lambda^{6\alpha}x^6 - \lambda^{4\beta}y^4}{2\lambda^{4\alpha+\beta}x^4y} = \lambda^{\beta-\alpha} \frac{4x^6 - y^4}{2x^4y}.$$

Это тождество будет выполнено, если

$$6\alpha - 4\alpha - \beta = 4\beta - 4\alpha - \beta = \beta - \alpha.$$

Последняя система имеет решение, если $\beta = \alpha^{\frac{3}{2}}$. Поэтому положим

$$y = ux^{\frac{3}{2}}.$$

Получаем

$$\frac{du}{dx} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} u = \frac{4x^6 - u^4 x^6}{2x^4 u x^{\frac{3}{2}}}$$

или

$$x \frac{du}{dx} + \frac{3}{2} u = \frac{4 - u^4}{2u}.$$

После преобразований получаем

$$\frac{2udu}{(u^2 + 4)(u^2 - 1)} + \frac{dx}{x} = 0$$

и уже после интегрирования имеем

$$\ln \left| \frac{u^2 - 1}{u^2 + 4} \right| + 5 \ln |x| = C, \quad C \in R,$$

$$\left(\frac{u^2 - 1}{u^2 + 4} \right) x^5 = C.$$

Возвращаясь к старым переменным (x, y) , окончательно получаем

$$\frac{y^2 - x^3}{y^2 + 4x^3} x^5 = C.$$

1.6. Линейные уравнения

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x) \quad (1.16)$$

называется *линейным неоднородным уравнением*. Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y \quad (1.17)$$

называется *линейным однородным уравнением*. Для того, чтобы найти общее решение уравнения (1.16), нужно найти решение уравнения (1.17) и найти частное решение уравнения (1.16).

Уравнение (1.17) есть уравнение с разделяющимися переменными. Как известно из §1.4, оно интегрируется в следующем виде

$$\frac{dy}{y} = a(x)dx, \quad \frac{dy}{y} = a(x)dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(x)dx, \quad \ln |y| = \int a(x)dx + C.$$

Откуда решение (1.17) может быть записано в следующем виде

$$y(x) = Ce^{\int a(x)dx}, \quad (1.18)$$

где C – произвольная постоянная.

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения (1.16) мы применим метод вариации произвольной постоянной. Суть данного метода заключается в следующем. Пусть $C = C(x)$, т. е. временно будем считать, что произвольная постоянная будет варьироваться на некотором отрезке. Подставив (1.18) в (1.16) с учетом вышесказанного для C , получаем

$$y' = C'e^{\int a(x)dx} + Ce^{\int a(x)dx}a(x) = a(x)Ce^{\int a(x)dx} + b(x),$$

$$C'e^{\int a(x)dx} = b(x), \quad C = \int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx + C_1.$$

Итак, в окончательной форме общая формула решения уравнения (1.16) может быть записана в следующем виде

$$y = e^{\int a(x)dx} \left[C_1 + \int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx \right], \quad (1.19)$$

Действительно, в таком случае система дифференциальных уравнений (4.16) имеет неограниченное решение

$$x(t) = \exp(\lambda_m t)h_m,$$

где h_m собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_m , т. е. $Ah_m = \lambda_m h_m, h_m \neq 0$.

Теорема 4.5. Пусть для всех собственных чисел λ_k матрицы A справедливы неравенства

$$\operatorname{Re} \lambda_k = \alpha_k \leq 0$$

и для тех λ_m , для которых имеет место равенство

$$\operatorname{Re} \lambda_m = 0,$$

выполнено дополнительное условие. Будем предполагать, что алгебраическая кратность r_m собственного числа λ_m совпадает с его геометрической кратностью g_m . Тогда можно утверждать, что система дифференциальных уравнений (4.16) устойчива. При выполнении условия $r_m \neq g_m$ можно утверждать, что система (4.16) неустойчива.

Упражнение 4.6. Доказать теорему 2.5.

Проиллюстрируем вторую часть последнего утверждения. Рассмотрим систему (4.16) в случае, когда

$$x(t) \in R^2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь собственное значение $\lambda_1 = 0$, оно двукратно и имеет собственный вектор $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и присоединенный $h = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. В данном случае есть неограниченное решение

$$x(t) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если же выбрана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то и она имеет двукратное собственное значение $\lambda_1 = 0$, ему соответствуют два собственных вектора

так как

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \pi.$$

Если при изучении системы (4.12) оказалось, что для всех $E_j(t)$ выполнено дополнительное условие

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E_j(t) = 0,$$

то нулевое решение и все остальные асимптотически устойчивы. Здесь $\{E_j(t)\}$ – фундаментальная система решений.

Более детально удастся рассмотреть вопрос об устойчивости системы однородных дифференциальных уравнений в частном, но важном для приложений случае, когда матрица $A(t)$ постоянная, т. е. $A(t) = A$ или $A(t) = \{a_{jk}\}$, $a_{jk} \in R$, где $j, k = 1, \dots, n$. Итак, рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax. \quad (4.16)$$

Обозначим через λ_k собственные значения матрицы A . Через r_k обозначим алгебраическую кратность этих собственных значений. Если собственное значение λ_k простое, то $r_k = 1$.

Теорема 4.3. Пусть для всех собственных значений λ_k справедливы неравенства $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, тогда система дифференциальных уравнений (4.16) асимптотически устойчива.

Из результатов главы 2 вытекает, что решения, входящие в фундаментальную систему $E_j(t) = \exp(\lambda_j t) P_j(t)$, где

$$P_j(t) = q_{jm_j} t^{m_j} + \dots + q_0, \quad q_j \in C^n,$$

т. е. векторы, компонентами которых в общем случае являются комплексные числа. Степень многочлена $P_j(t)$ равна $m_j \leq N$. Осталось вспомнить, что $|\exp(\lambda_j t)| = e^{\alpha_j t}$, где $\alpha_j = \operatorname{Re} \lambda_j$ и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\alpha_j t} t^{m_j} = 0$$

при $\alpha < 0$ и любом m_j .

Теорема 4.4. Пусть среди собственных чисел λ_k матрицы A можно указать одно или несколько таких, что $\operatorname{Re} \lambda_m = \alpha_m > 0$. Тогда система (4.12) неустойчива (вполне неустойчива).

которую можно переписать в виде

$$y = \varphi_1(x) C_1 + \varphi_2(x),$$

где $\varphi_1(x) = e^{\int a(x) dx}$ – решение линейного однородного уравнения, а $\varphi_2(x) = e^{\int a(x) dx} \int b(x) e^{-\int a(x) dx} dx$ – частное решение уравнения (1.16).

Пример 1.13. Решить следующее линейное неоднородное уравнение

$$x(y' - y) = e^x.$$

Легко показать, что данное уравнение является линейным неоднородным уравнением (1.16). Действительно, поделив обе части уравнения на x , приходим к следующему

$$y' = y + \frac{e^x}{x}$$

Далее, применив формулу (1.19), получаем

$$\varphi_1(x) = e^{\int dx} = e^x,$$

$$\varphi_2(x) = e^x \int \frac{e^x}{x} \cdot \frac{1}{e^x} dx = e^x \ln |x|.$$

Ответ: $y(x) = e^x [C + \ln |x|]$.

Замечание 1.3. Не всегда линейное неоднородное уравнение (1.16) может быть записано в "стандартном виде" (1.16). Иногда имеет смысл попробовать другим типом перехода от одной независимой переменной к другой. Покажем это на примере.

Пример 1.14. Решить следующее линейное неоднородное уравнение

$$(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y) y' = 1.$$

Легко убедиться, что данное уравнение относительно переменной y не является уравнением вида (1.16). После смены y на x имеем уравнение вида (1.16), но уже относительно другой переменной. Итак,

$$(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y) \frac{dy}{dx} = 1, \quad \frac{dx}{dy} = \sin^2 y + x \operatorname{ctg} y,$$

$$x' = x \operatorname{ctg} y + \sin^2 y.$$

Применяя формулу (1.19), где

$$\varphi_1(y) = e^{\int \operatorname{ctg} y dy} = \sin y,$$

$$\varphi_2(y) = \sin y \int \sin^2 y \cdot \frac{1}{\sin y} dy = -\cos y \sin y.$$

Ответ: $x(y) = \sin y(C - \cos y \sin y)$.

Решения уравнений (1.16) и (1.17) можно записать и иной, отличной от формул (1.18) и (1.19), форме. Иная форма записи удобна, если уравнения (1.16) и (1.17) рассматриваются вместе с начальным условием

$$y(x_0) = y_0.$$

Тогда формулу для решения уравнения (1.17), с учетом начального условия, можно переписать в виде

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x a(t) dt}. \quad (1.18a)$$

А формулу (1.19) в следующем виде:

$$y = e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} \left[y_0 + \int_{x_0}^x b(z) e^{-\int_{x_0}^z a(t) dt} dz \right]. \quad (1.19a)$$

При выводе формул (1.18a), (1.19a) используют хорошо известное утверждение математического анализа о том, что интеграл с переменным верхним пределом

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^x \varphi(t) dt$$

является одной из первообразных функции $\varphi(x)$.

Пример 1.15. Решить задачу Коши

$$y' + y \cos x = e^{-\sin x}, y(0) = 0.$$

Применим формулу (1.19a)

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int_0^x \cos t dt} \left[\int_0^x e^{\sin z} e^{\int_0^z \cos t dt} dz \right] = \\ &= e^{-\int_0^x \cos t dt} \left[\int_0^x e^{-\sin z + \sin z} dz \right] = x e^{-\sin x}. \end{aligned}$$

Упражнение 4.3. Проверить указанное выше утверждение. Проверка этих последовательных фактов базируется на формулах для общего решения данного уравнения

$$x(t) = \frac{1}{C \exp(-t) - 1}, \quad C \in R.$$

Решение $x(t) = 0$ – особое решение рассматриваемого уравнения.

Теорема 4.2. Для асимптотической устойчивости решения $y(t)$ неоднородной системы дифференциальных уравнений (4.11) необходимо и достаточно, чтобы было асимптотически устойчиво нулевое решение системы однородных уравнений.

Упражнение 4.4. Доказать теорему 4.2.

Упражнение 4.5. Показать, что устойчивость системы дифференциальных уравнений (4.12) эквивалентно ограничению всех её решений при $t \geq t_0$. Напомним определение.

Определение 4.4. Решение $x(t, t_0, a)$ ограничено при $t \geq t_0$, если существует такая положительная постоянная M , что при $t \geq 0$ выполнено неравенство

$$||x(t, t_0, a)|| \leq M.$$

Замечание 4.1. Для проверки условий устойчивости системы (4.12) полезно отметить, что при этом достаточно изучить вопрос об ограниченности решений составляющих фундаментальную систему $\{E_j(t)\}$, $j = 1, \dots, n$, так как остальные решения могут быть представлены в виде линейной комбинации указанных решений $E_j(t)$.

Замечание 4.2. Эквивалентность ограниченности решений устойчивости, например нулевого решения системы (4.12), характерна для линейных однородных уравнений. В иных вариантах выбора дифференциальных уравнений этот факт не имеет места.

Рассмотрим уравнение $\dot{x} = -x + t$, общее решение которого имеет вид $x(t) = C \exp(-t) + t - 1$. При $t \geq 0$ все решения неограниченны, но все они устойчивы.

Второй пример – это нелинейное уравнение

$$\dot{x} = \sin^2 x.$$

Пусть $x(0) = a$. Тогда при $a \in (0, \pi)$ решение этой задачи Коши $x(t) = \arcsctg(ctga - t)$ – все ограничены, но решение $x(t) \equiv 0$ неустойчиво,

Теорема 4.1. *Решение $y(t)$ устойчиво тогда и только тогда, если у системы (4.12) устойчиво нулевое решение.*

Докажем сначала необходимые условия теоремы. Устойчивость решения $y(t)$ системы (4.11) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, для которых выполнены неравенства

$$||x(t) - y(t)|| < \varepsilon \quad (4.13)$$

при $t \geq t_0$, если только

$$||x(t_0) - y(t_0)|| < \delta. \quad (4.14)$$

Но, как известно, вектор-функция

$$z(t) = x(t) - y(t) \quad (4.15)$$

удовлетворяет однородной системе дифференциальных уравнений (4.12), причем любое её решение может быть представлено в виде (4.15). Из неравенств (4.13), (4.14) вытекают неравенства

$$||z(t)|| < \varepsilon, \quad ||z(t_0)|| < \delta.$$

Из последних двух замечаний вытекает справедливость и второй части теоремы 4.1, т. е. если устойчиво нулевое решение системы (4.12), то устойчиво и соответствующее решение $y(t)$ системы (4.11).

Как вытекает из данной теоремы, решения линейных дифференциальных систем либо все одновременно устойчивы, либо неустойчивы. Поэтому допустимой терминологией может быть понятие: "устойчивая линейная система" и "неустойчивая линейная система" ("вполне неустойчивая линейная система").

В случае нелинейных уравнений устойчивость – это индивидуальное свойство того или иного решения.

Пример 4.3. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = x + x^2,$$

у которого есть решение $x(t) = 0$ и $x(t) = -1$ (такие решения принято называть состояниями равновесия). Можно показать, что решение $x(t) = 0$ неустойчиво, а решение $x(t) = -1$ асимптотически устойчиво.

1.7. Уравнения Бернулли и Риккати

Обобщением уравнения (1.16) может служить следующее уравнение

$$y' = a(x)y + b(x)y^n, \quad n \neq 0, 1. \quad (1.20)$$

Это уравнение называется *уравнением Бернулли*. Понятно, что при $n = 0$ данное уравнение есть линейное неоднородное уравнение, а при $n = 1$ имеем дело с уравнением с разделяющимися переменными.

Выполнив замену

$$z = \frac{1}{y^{n-1}},$$

мы приведем (1.20) к линейному неоднородному уравнению (1.16). Покажем этот переход

$$\frac{z'y^n}{1-n} = a(x)y + b(x)y^n, \quad z' = z(1-n) + b(x)(1-n).$$

Мы пришли к линейному неоднородному уравнению относительно переменной z . Проводя обратную замену, мы получим общее решение уравнения (1.20).

Пример 1.16. Решить уравнение

$$y' + 2y = y^2 e^x.$$

Данное уравнение является уравнением Бернулли. Проводя замену

$z = \frac{1}{y}$, мы приходим к следующему линейному неоднородному уравнению

$$z' = 2z - e^x,$$

решение которого можно записать в виде

$$z = e^{2x}(C + e^{-x}), \quad C \in \mathbb{R}.$$

А решение исходного уравнения выглядит следующим образом

$$y = \frac{1}{e^{2x}(C + e^{-x})}.$$

Пример 1.17. Решить уравнение

$$y'x^3 \sin y = xy' - 2y.$$

Будем решать уравнение относительно x , после преобразований получаем

$$x' = \frac{x}{2y} - x^3 \frac{\sin y}{2y}.$$

Замена $z = \frac{1}{x^2}$ приводит нас к уравнению

$$z' = -\frac{z}{y} + \frac{\sin y}{y}.$$

Применив формулу (1.19), получаем общее решение

$$z = \frac{1}{y}(C - \cos y), \quad C \in R.$$

Проводя обратную замену, приходим к окончательной формуле решения

$$x^2 = \frac{y}{C - \cos y}.$$

Замечание 1.4. Из последнего примера видно, что искомая функция неоднозначная и решение задается в виде двух ветвей. Выбор ветви будет зависеть от задания начальных условий (задача Коши). Как только задача Коши будет поставлена, мы уже можем взять конкретное единственное решение.

Уравнение вида

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x) \quad (1.21)$$

называется *уравнением Риккати*, которое не интегрируется при произвольных коэффициентах к квадратурам. Уравнение (1.21) можно привести к уравнению Бернулли, если известно какое-либо частное решение. Частное решение может быть угадано исходя из вида свободного члена, в данном случае из вида $c(x)$.

Замечание 1.5. В качестве частного решения можно попробовать решение либо в формуле экспоненты, но в общем виде, либо в виде квазимногочлена.

вместе с начальными условиями

$$z(t_0) = a_1, \quad z'(t_0) = a_2, \dots, z^{(n-1)}(t_0) = a_n. \quad (4.8)$$

Здесь $z^{(j)} = \frac{dz(t)}{dt}$, $j = 1, 2, \dots$

Напомним, что стандартными заменами от уравнения порядка n можно перейти к рассмотрению системы из n уравнений первого порядка

$$\dot{x} = F(t, x), \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned} x &= colon(x_1, \dots, x_n), \quad x_1 = z, \quad x_2 = z', \dots, x_n = z^{(n-1)}, \\ F(t, x) &= colon(F_1, \dots, F_n), \quad F = x_1, \dots, F_{n-1} = x_n, \\ F_n &= -f(t, x_1, \dots, x_n), \quad x(0) = a, \quad a = colon(a_1, \dots, a_n). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Пусть $u(t, t_0, b)$ решение уравнения (4.7), удовлетворяющее условиям

$$u(t_0) = b_1, \dots, u^{(n-1)}(t_0) = b_n, \quad b = (b_1, \dots, b_n).$$

Будем говорить, что данное решение уравнения (4.7) устойчиво (неустойчиво, асимптотически устойчиво), если устойчиво (неустойчиво, асимптотически устойчиво) соответствующее решение вспомогательной системы дифференциальных уравнений (4.9).

4.2. Общие теоремы об устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad (4.11)$$

где

$$A(t) = \{a_{jk}(t)\}, \quad j, k = 1, \dots, n, \quad f(t) = colon(f_1(t), \dots, f_n(t)).$$

Пусть

$$\dot{x} = A(t)x \quad (4.12)$$

соответствующая однородная система дифференциальных уравнений, а $y(t)$ – какое-либо решение системы (4.11). Справедливо утверждение.

Упражнение 4.2. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову выяснить, не устойчивы ли решения данных уравнений с указанными начальными условиями

- 1) $\dot{x} = \frac{\alpha x}{t}, x(1) = 0;$
- 2) $\dot{x} = 1 + t - x, x(0) = 0;$
- 3) $\dot{x} = \sin x^2, x(0) = 0.$

Указание. В первом случае ответ зависит от параметра α . Решение задачи Коши

$$\dot{x} = \frac{\alpha x}{t}, x(1) = \beta$$

имеет вид $x(t) = \beta t^\alpha$ (проверить самостоятельно).

Полезно отметить, что определению асимптотической устойчивости нельзя отказаться от первой части определения. Даже если все решения при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к нулю, это не означает, что нулевое решение устойчиво. Поясним на примере. Для этого рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_1}{t} - t^3 x_1 x_2^2, & \dot{x}_2 &= -\frac{x_2}{t}, \\ x_1(t_0) &= a_1, & x_2(t_0) &= a_2, & t_0 > 0. \end{aligned}$$

Для простоты будем считать, что $t_0 = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(t, 1, a_1, a_2) = a_1 t \exp -a_2^2(t-1) = a_1 t \exp -a_1^2(t-1), \\ x_2(t) &= x_2(t, 1, a_1, a_2) = \frac{a_2}{t}. \end{aligned}$$

Очевидно, что при $t \rightarrow +\infty$ предел $x_1(t), x_2(t)$ равен 0 (проверить самостоятельно).

Однако для любого $\delta > 0$ при $a_1 = \delta^2, a_2 = \delta$ будем иметь, что функция $x_1(t)$ достигает своего максимума при $t = \delta^2$ (показать это). При этом $x_1(\delta^2) = \delta^4 \exp \frac{1}{\delta^2} e^{-1} > e^{-1}$, если δ достаточно мало. Следовательно, при $t = t_\delta = \delta^2$ имеем неравенство

$$||x(t)|| = \sqrt{x_1^2(t_\delta) + x_2^2(t_\delta)} \geq e^{-1}.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение порядка n , разрешимое относительно производной

$$z^{(n)} = f(t, z, z', \dots, z^{(n-1)}) \quad (4.7)$$

После нахождения частного решения введем в рассмотрение новую функцию y_1

$$y = y_1 + y_*, \quad (1.22)$$

где y_* – частное решение. Подставим (1.22) в (1.21), учитывая, что y_* найдено, получаем уже известное уравнение Бернулли для новой введенной переменной y_1 . Далее делая замену, свойственную этому классу уравнений, мы приходим к линейному неоднородному дифференциальному уравнению, изученному в §1.6. Восстанавливая все переходы, мы получаем решение исходного уравнения (1.21). Продемонстрируем сказанное на примере.

Пример 1.18. Решить уравнение

$$x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4.$$

Поделив обе части уравнения на x^2 , получаем

$$y' + \frac{y}{x} + y^2 = \frac{4}{x^2}.$$

Здесь свободный коэффициент равен $\frac{4}{x^2}$. Частное решение следует искать в виде $y_* = \frac{c}{x}$ ($c \in R$). Подставим его в исходное уравнение, откуда находим, что $c = \pm 2$, т. к. нам нужно частное решение, мы выберем любую константу, пусть для определенности $c = 2$. Сделав замену (1.22), в нашем случае мы придем к ее следующему виду

$$y = y_1 + \frac{2}{x}.$$

В свою очередь, для y_1 получаем уравнение Бернулли

$$y_1' = -\frac{5y_1}{x} - y_1^2.$$

Выполняя замену $z = \frac{1}{y_1}$, получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно z , решение которого может быть записано в виде

$$z = Cx^5 - \frac{x}{4}, \quad C \in R.$$

Для y_1 соответствующее решение выглядит как

$$y_1 = \frac{4}{Cx^5 - x}.$$

Окончательный ответ: $y = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx^5 - x}$.

1.8. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1.23)$$

или

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если левая часть его есть дифференциал некоторой функции

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = df(x, y) \quad (1.24)$$

и в этом случае данное дифференциальное уравнение (1.23) легко интегрируется

$$f(x, y) = C, \quad (1.25)$$

где C , как и ранее, произвольная постоянная. Полученное соотношение определяет y как неявную функцию от x . Напомним, что решение, записанное в виде (1.25), называется *решением, записанным в форме интеграла*.

Теорема 1.2. Пусть функции $M(x, y), N(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в области D . Для того, чтобы уравнение (1.23) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (x, y) \in D. \quad (1.26)$$

Если область D — односвязная, то условие (1.26) является достаточным.

Доказательство можно найти во многих учебниках по математическому анализу.

Пусть $x(0) = a, a \in R$. Данное уравнение имеет нулевое решение, если $a = 0$. Элементарно проверяется, что здесь

$$x(t, a) = a \exp(\alpha t).$$

Из последней формулы вытекает, что при $\alpha \leq 0$ справедливо неравенство $|x(t, a)| \leq |a|$, если, конечно, $t > 0$. Поэтому в рамках рассматриваемых вариантов выбора α нулевое решение устойчиво. Если же дополнительно потребовать, что $\alpha < 0$, то нулевое решение будет асимптотически устойчиво, так как $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

Более того, нулевое решение будет и экспоненциально устойчиво, так как решения, отличные от тривиального, стремятся к нулю со скоростью экспоненты с показателем $\alpha < 0$.

При $\alpha > 0$ нулевое решение уже неустойчиво, так как можно утверждать существование такого $t_a > 0$, при котором $|x(t_a, a)| \geq 1$ вне зависимости от выбора a . Действительно, последнее неравенство можно переписать в следующем виде $|a| \exp(t) \geq 1$, то есть $\exp(t) \geq \frac{1}{|a|}$.

Окончательно, при $t \geq t_0 = \ln |a|^{-1}$ справедливо указанное неравенство (если $|a| > 0$, то $t_a = 0$).

Упражнение 4.1. Показать, что отмеченные утверждения остаются в силе и по отношению к любому решению $x(t, a_*)$

- 1) при $\alpha \leq 0$ оно устойчиво;
- 2) при $\alpha < 0$ — асимптотически и даже экспоненциально устойчиво;
- 3) при $\alpha > 0$ рассматриваемое решение неустойчиво.

Пример 4.2. Рассмотрим уравнение $\dot{x} = \alpha x^3$ вместе с начальным условием $x(0) = a$. Интегрируя последнее уравнение как уравнение с разделяющимися переменными, находим, что

$$x(t, a) = a(1 - 2\alpha a^2 t)^{-\frac{1}{2}}.$$

Если $\alpha < 0$, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, a) = 0$ и, конечно, $|x(t, a)| \leq |a|$. Последнее означает, что нулевое решение при таком выборе α асимптотически устойчиво, но, конечно, не экспоненциально.

Если $\alpha > 0$, то при любом достаточно малом $a > 0$ соответствующие решения непродолжаемы на интервале $(0, +\infty)$.

Просто проверяется наличие у функции $x = a(1 - 2\alpha a^2 t)^{-\frac{1}{2}}$ вертикальной асимптоты $t = \frac{1}{2\alpha a^2}$.

из неравенства $\|a\| < \delta$ вытекает неравенство

$$\|x(t, t_0, a)\| < \varepsilon.$$

Определение 4.2. Решение $y(t, t_0, b)$ будем называть *неустойчивым по Ляпунову*, если существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ можно указать такое δ и такой момент времени t_δ , для которых выполняются неравенства

$$\|a_\delta - b\| < \delta, \quad \|x(t_\delta, t_0, a_\delta) - y(t_0, t, b)\| \geq \varepsilon_0.$$

Из отрицания определения 4.1 следует считать также неустойчивым решение $y(t, t_0, b)$, которое непродолжаемо при $t \rightarrow +\infty$, или такое, для которого в любой окрестности точки b найдется такая точка a_* , что решение $x(t, t_0, a_*)$ непродолжаемо на весь интервал $[t_0, \infty)$.

Определение 4.3. Решение $y(t, t_0, b)$ назовем *асимптотически устойчивым*, если

- 1) это решение устойчиво по Ляпунову и
- 2) для любого $\Delta(t_0)$ при выполнении неравенства

$$\|y(t, t_0, b) - x(t, t_0, a)\| < \Delta$$

справедливо следующее предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t, t_0, b) - x(t, t_0, a)\| = 0. \quad (4.6)$$

Таким образом, асимптотическая устойчивость – это устойчивость по Ляпунову с дополнительным условием. Отметим, что если условие (4.6) заменено на следующее

$$\|y(t, t_0, b) - x(t, t_0, a)\| \leq M \exp(-\alpha t),$$

то решение $y(t, t_0, b)$ принято называть *экспоненциально устойчивым*.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих определения этого раздела.

Пример 4.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \alpha x, \quad \alpha \in R, \quad x = x(t) \in R.$$

Пример 1.19. Рассмотрим уравнение

$$ydx + xdy = 0.$$

Данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Действительно, проверим для этого условия теоремы 1.2

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1.$$

Итак, $d(xy) = 0$ – полный дифференциал рассматриваемого уравнения. Следовательно, все решения задаются формулой $xy = C$. Отметим, что при $C \neq 0$ интегральные кривые – гиперболы, при $C = 0$ имеем $y \equiv 0$.

Замечание 1.6. Не всегда легко удастся обнаружить полный дифференциал, зная, что данное дифференциальное уравнение такого типа. Опишем алгоритм для нахождения полного дифференциала.

Итак, пусть нам известно, что выписанное уравнение есть уравнение в форме полного дифференциала. Возьмём интеграл по переменному верхнему пределу от следующей функции

$$\int_0^x M(x, y) dx = G(x, y) + \varphi(y), \quad (1.27)$$

где $G(x, y)$ – некоторая полученная функция, а $\varphi(y)$ – неизвестная функция только по переменной y . Напомним, что полный дифференциал будет записываться

$$dF = G(x, y) + \varphi(y). \quad (1.28)$$

Для отыскания $\varphi(y)$ продифференцируем правую часть (1.27) по y и приравняем полученное выражение к $N(x, y)$

$$G'_y(x, y) + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Отыскав $\varphi(y)$, мы получим полный дифференциал. Следовательно, затем не составит труда выписать решение (1.24) в форме первого интеграла.

Пример 1.20. Решить уравнение

$$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

Самостоятельно проверить необходимое условие существования полного дифференциала. Найдём теперь его с помощью вышеуказанного алгоритма.

$$\int_0^x M(x, y) = \int_0^x 2xy dx = x^2 y|_0^x + \varphi(y) = x^2 y + \varphi(y).$$

Продифференцировав полученное выражение по y и приравняв его $N(x, y)$, получим

$$x^2 + \varphi'(y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \varphi(y) = -\frac{y^3}{3}.$$

Итак, $dF = x^2 y - \frac{y^3}{3}$. Ответ: $F = x^2 y - \frac{y^3}{3} = C$.

1.9. Понижение порядка уравнения

1. Пусть уравнение не содержит исходной функции

$$F(x, y', y'') = 0. \quad (1.29)$$

Замена $y' = u$, где u – новая неизвестная функция, приведет уравнение (1.29) к уравнению первого порядка

$$F(x, u, u') = 0.$$

Его решение имеет вид $u = u(x, C)$, после чего исходная функция y находится интегрированием.

2. Пусть уравнение явно не содержит неизвестной переменной

$$F(y, y', y'') = 0 \quad (1.30)$$

Порядок уравнения (1.30) понижается на единицу заменой $y' = p$, где $p = p(y)$ – новая неизвестная функция. Поэтому

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Замечание 1.7. В результате указанной замены возможна потеря решений $y = \text{const}$, что проверяется непосредственно подстановкой.

3. Пусть уравнение $F(x, y, y', y'') = 0$ однородно относительно y, y' , что означает выполнение условия

$$F(x, ty, ty', ty'') = t^m F(x, y, y', y'').$$

Решение задачи (4.3), (4.4) будем обозначать через $x(t, t_0, a)$. Если $t_0 = 0$, то будем писать $x(t, a) \equiv x(t, 0, a)$. Очень часто в приложениях рассматривают частный случай системы (4.3)

$$\dot{x} = F(x), \quad (4.5)$$

где $F(x)$ не зависит явным образом от t . Такие системы называются автономными (динамическими системами). Если $x(t)$ решение системы (4.5) при $t \in (\alpha, \beta)$, то $x(t - t_0)$ решение той же системы при $t \in (\alpha + t_0, \beta + t_0)$. Поэтому для автономных дифференциальных уравнений выбор t_0 в начальном условии не играет принципиальной роли и без нарушения общности можно считать, что $t_0 = 0$.

Определение 4.1. Решение $y(t, t_0, b)$ системы (4.3) называется *устойчивым по Ляпунову* при $t \rightarrow +\infty$, если для любых $\varepsilon > 0, t_0 \in R$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ такое, что

1) все решения системы (4.3), включая решение $y(t, t_0, b)$, удовлетворяющие условию $\|a - b\| < \delta$, определены в промежутке $[t_0, \infty)$;

2) для этих решений справедливо неравенство

$$\|x(t, t_0, a) - y(t, t_0, b)\| < \varepsilon,$$

при всех $t \geq t_0$.

Иными словами, решение $y(t, t_0, b)$ устойчиво, если достаточно близкие к нему решения при t_0 целиком погружаются в сколь угодно малую ε -трубу, построенную около исследуемого решения $y(t, t_0, b)$ (см. на рис. 4.1).

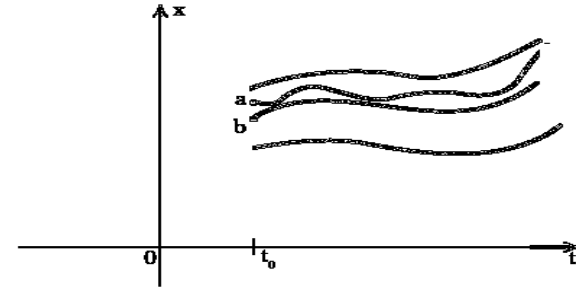


Рис. 4.1.

Из определения вытекает, что всегда можно выбрать $\delta \leq \varepsilon$.

Если $F(t, x)|_{x=0} = 0$, то система (4.3) имеет тривиальное решение $x(t, t_0, 0) \equiv 0$. Оно устойчиво, если существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что

Глава 4

Устойчивость

4.1. Основные понятия теории устойчивости решений дифференциальных уравнений

В данной главе будем рассматривать системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_j = F_j(t, x_1, \dots, x_n), \quad j = 1 \dots n, \quad (4.1)$$

где функции $F_j(t, x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяют следующим условиям:

1. Функции $F_j(t, x_1, \dots, x_n)$ непрерывны по совокупности переменных при всех $t \geq t_0$ ($t_0 \in R$).

2. Функции $F_j(t, x_1, \dots, x_n)$ непрерывно-дифференцируемы по совокупности переменных $x_1 \dots x_n$ при всех $t \geq t_0$ (функции $F_j(t, x_1, \dots, x_n)$ имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial F_j}{\partial x_k}$ при всех $t \geq t_0$ и всех рассматриваемых $x_k, j, k = 1 \dots n$).

Систему (4.1) будем рассматривать вместе с начальными условиями

$$x_k(t_0) = a_k, \quad (4.2)$$

где $a_k \in R$. Положим

$$x = colon(x_1, \dots, x_n), \quad a = colon(a_1, \dots, a_n), \\ F(t, x) = colon(F_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(t, x_1, \dots, x_n)).$$

В более привычной записи $a = colon(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Эти обозначения позволяют записать исходную систему в векторной форме

$$\dot{x} = F(t, x), \quad (4.3)$$

а условия (4.2) могут быть теперь записаны таким образом

$$x(t_0) = a. \quad (4.4)$$

Порядок такого уравнения понижается на единицу подстановкой $y' = yu$, где u — новая неизвестная функция.

4. Уравнение $F(x, y, y') = 0$ однородно в обобщенном смысле относительно x и y . В этом случае вид уравнения должен сохраняться при замене x на tx и y на $t^m y$. При этом в соответствующие выражения перейдут дифференциалы и производные

$$dx \rightarrow tdx, \quad dy \rightarrow t^m dy, \quad d^2y \rightarrow t^m d^2y.$$

Таким образом, для сохранения вида уравнением должно выполняться условие

$$F(tx, t^m y, t^{m-1} y', t^{m-1} y'') = t^m F(x, y, y', y''),$$

которое может выполняться не при любом m . Для получения искомого значения m надо приравнять друг другу суммы показателей степеней t в каждом слагаемом уравнения, в результате чего получается, вообще говоря, переопределенная система. Если искомое значение m существует, то делается замена переменных

$$x = e^t, \quad y = ue^{mt},$$

где t — новая независимая переменная, а $u(t)$ — новая неизвестная функция. Получается уравнение, не содержащее явно независимой переменной t и допускающее понижения порядка согласно случаю 2.

Пример 1.21. Решить уравнение

$$y'' = y^2.$$

Способ 1. Это уравнение не содержит y , поэтому заменой $y' = u$, $u = u(x)$ оно приводится к уравнению $u' = u^2$, равносильному совокупности уравнений $u = 0$ и $\frac{du}{u^2} = dx$. Из последнего находим $u = \frac{1}{C_1 - x}$,

$C_1 \in R$. Так как $u = \frac{dy}{dx}$, то, интегрируя найденные соотношения, получаем для $y(x)$

$$y = C, \quad y = C_2 - \ln(C_1 - x), \quad C, C_2 \in R. \quad (1.31)$$

Способ 2. Уравнение $y'' = y^2$ относится также к типу, не содержащему явно независимой переменной x . Поэтому порядок уравнения

понижается на единицу заменой $y' = p$, где $p = p(y)$ – новая неизвестная функция. Действительно,

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dy}p$$

и уравнение сводится к уравнению первого порядка

$$\frac{dp}{dy}p = p^2,$$

равносильному совокупности уравнений $p = 0$ и $\frac{dp}{p} = dy$. Из последнего находим $C_1 p = e^y$, $C_1 \in R$. Возвращаясь к функции $y(x)$, получаем $y' = 0$, а также уравнение с разделяющимися переменными

$$C_1 \frac{dy}{dx} = e^y.$$

Интегрируя эти уравнения, находим для $y(x)$

$$y = C, \quad y = \ln C_1 - \ln(C_2 - x), \quad C, C_2 \in R. \quad (1.32)$$

Результаты (1.31) и (1.32) совпадают с точностью до обозначений произвольных постоянных.

Пример 1.22. Решить уравнение

$$yy'' = y'^2.$$

Уравнение является однородным, так как сохраняет свой вид после замены y, y' и y'' на ty, ty' и ty'' соответственно. Следовательно, можно понизить его порядок на единицу, полагая $y' = yu$, где u – новая неизвестная функция. Для производных y' и y'' имеем

$$y' = yu, \quad y'' = y'u + yu' = y(u^2 + u'),$$

после чего исходное уравнение приобретает вид

$$y^2(u^2 + u') = y^2u^2,$$

откуда $y = 0$ и $u' = 0$. Интегрируя последнее равенство, получаем

$$u = C_1 = \frac{y'}{y}, \quad C_1 \in R,$$

3.7. Задачи для самостоятельного решения

Решить системы, записанные в векторной форме $\dot{x} = Ax$

$$3.1. \dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad 3.2. \dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$3.3. \dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad 3.4. \dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Найти e^A

$$3.5. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad 3.6. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},$$

$$3.7. \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3.8. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

Решить систему уравнений с начальными условиями

$$3.9. \quad \begin{cases} \dot{x} = y + \cos t, \\ \dot{y} = 1 - x, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1,$$

$$3.10. \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 7te^{-t} - 3, \\ \dot{y} = 2y - x - 1, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1,$$

$$3.11. \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 8, \\ \dot{y} = 3x + 6y + t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1,$$

$$3.12. \quad \begin{cases} \dot{x} = -y + \cos t, \\ \dot{y} = -x + \sin t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

Указание: В задачах 3.1 – 3.4 можно применить метод из п. 3.4. Особое внимание следует обратить на случай, когда у матрицы есть кратные собственные значения.

В задачах 3.6 – 3.9 при нахождении матричной экспоненты удобнее и быстрее использовать метод второй части п. 3.4, где используется прием, связанный с решением задач Коши.

В задачах 3.9 – 3.12 следует воспользоваться методами из п. 3.6.

Иногда результата можно достигнуть посредством введения новых вспомогательных неизвестных.

Пример 3.13. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + 2e^t, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 - 3e^t. \end{cases}$$

Если их сложить, то получим уравнение

$$\frac{d}{dt}(x_1 + x_2) = 3x_1 + 3x_2 - e^t.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем равенство

$$\frac{d}{dt}(x_1 - x_2) = x_1 - x_2 + 5e^t.$$

Положив $u_1 = x_1 + x_2, u_2 = x_1 - x_2$, получим два отдельных уравнения первого порядка

$$\dot{u}_1 = 3u_1 - e^t, \quad \dot{u}_2 = u_2 + 5e^t,$$

откуда $u_1(t) = C_1 e^{3t} + \frac{1}{4}e^t, u_2(t) = C_2 e^t + 5te^t$.

После чего приходим к следующей системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = C_1 e^{3t} + \frac{1}{4}e^t, \\ x_1 - x_2 = C_2 e^t + 5te^t. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 e^{3t} + \alpha_2 e^t + \frac{1}{8}e^t + \frac{5}{2}te^t, \\ x_2 = \alpha_1 e^{3t} - \alpha_2 e^t + \frac{1}{8}e^t - \frac{5}{2}te^t, \end{cases}$$

где $\alpha_1 = \frac{C_1}{2}, \alpha_2 = \frac{C_2}{2}$, то есть по-прежнему произвольные постоянные.

после чего возвращаемся к переменной $y(x)$

$$y = 0, \quad y = C_2 e^{C_1 x} \quad (C_2 \neq 0).$$

Решение $y = 0$ можно включить в последнюю формулу, "разрешив" C_2 принимать значение, равное нулю.

Пример 1.23. Решить уравнение

$$y^2 = x^3 y''.$$

Уравнение не является однородным относительно y и производных. Но при переходе

$$x \rightarrow tx, \quad y \rightarrow t^m y, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} \rightarrow \frac{t^m d^2 y}{t^2 dx^2} = t^{m-2} \frac{d^2 y}{dx^2},$$

приравнивая суммы показателей степеней t в левой и правой частях уравнения, находим

$$2m = 3 + (m - 2),$$

откуда $m = 1$. Уравнение оказывается однородным в обобщенном смысле. Замена переменных

$$x = e^t, \quad y = ue^t$$

приводит к уравнению $\ddot{u} + u - u^2 = 0$. Это уравнение не содержит явно независимой переменной t и поэтому может быть решено разными способами, в том числе и понижением порядка согласно случаю 2.

Пример 1.24. Решить задачу Коши для математического маятника

$$y'' + \omega^2 \sin y = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0.$$

Уравнение не содержит явно независимой переменной x , поэтому можно понизить его порядок, полагая $y' = p$, где $p = p(y)$ — новая неизвестная функция. Далее находим

$$y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p, \quad p dp + \omega^2 \sin y dy = 0,$$

$$\frac{p^2}{2} = \omega^2 (\cos y - \cos y_0), \quad p = \pm \omega \sqrt{2(\cos y - \cos y_0)},$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \pm \omega \sqrt{2(\cos y - \cos y_0)}.$$

Наконец, получаем

$$x = \frac{1}{\omega\sqrt{2}} \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{\cos y - \cos y_0}}.$$

Интеграл выражается в так называемых *эллиптических* функциях, которые не входят в широко известный класс элементарных функций. Их относят к специальным функциям.

1.10. Задачи для самостоятельного решения

Найти решения уравнений или решение задачи Коши:

1.1. $y' = \sin y$.

1.2. $y' = x + y + 1$.

1.3. $y' = \sqrt{4y^2 - 1}$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

1.4. $y(x) = 1 + \int_0^x y(t)dt$.

1.5. $(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0$.

1.6. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.

1.7. $(3x - 7y - 3)y' + (7x - 3y - 7) = 0$.

1.8. $xy' = y \cos(\ln \frac{y}{x})$.

1.9. $y' = y$, $y(0) = 1$.

1.10. $y' = -y$, $y(0) = 2$.

1.11. $y' = -y^2$, $y(0) = 1$.

1.12. $(1 - x)dy - ydx = 0$, $y(0) = 1$.

1.13. $xdy - ydx = 0$, $y(1) = 1$.

1.14. $(y^4 - 3x^2)dy + xydx = 0$.

1.15. $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0$, $y(1) = 2$.

1.16. $y' + \frac{1}{x}y = 3x$, $y(1) = 1$.

1.17. $y' + \frac{y}{x} = \frac{2}{x^3}$, $y(1) = 1$.

1.18. $y' - \frac{2xy}{x} = 2x^3y^2$, $y(0) = 1$.

1.19. $y' + \frac{y}{1-x^2} = x\sqrt{y}$.

может, в этом случае с вычислительной точки зрения более экономичен метод вариации произвольных постоянных.

Некоторые замечания. В п. 3.6 представлены два метода интегрирования систем линейных неоднородных дифференциальных уравнений. Выбор способа решения конкретной задачи мотивируется вычислительной сложностью его применения. Но при рассмотрении конкретных систем невысокой размерности, как правило, в случае систем, состоящих из двух неоднородных уравнений, иногда целесообразно применять иные, менее универсальные приемы, связанные с элементарными преобразованиями уравнений. Например, в простых случаях достаточно часто используется метод сведения систем, состоящих из двух уравнений, к одному скалярному дифференциальному уравнению второго порядка. Этот метод далеко не универсален и применяется в тех случаях, когда сведение "получается". Проиллюстрируем этот прием на частных примерах.

Пример 3.12. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = -x_2 + e^t, \quad \dot{x}_2 = x_1 + 1.$$

Конечно, она может быть решена с помощью одного из указанных ранее способов. Но если продифференцировать первое уравнение системы по t , то получим равенство $\ddot{x}_1 = -\dot{x}_2 + e^t$. Теперь \dot{x}_2 можно исключить с помощью второго уравнения исходной системы. В итоге получаем, что

$$\ddot{x}_1 = -(x_1 + 1) + e^t$$

или

$$\ddot{x}_1 + x_1 = e^t - 1.$$

Общее решение последнего уравнения

$$x_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2}e^t - 1.$$

Тогда из первого уравнения системы находим, что

$$x_2(t) = e^t - (-C_1 \sin t + C_2 \cos t + \frac{1}{2}e^t).$$

Итак, получили решение в координатной форме

$$\begin{cases} x_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2}e^t + 1, \\ x_2 = C_1 \sin t - C_2 \cos t + \frac{1}{2}e^t. \end{cases}$$

Аналогичный алгоритм может быть использован, если $f(t)$ векторный квазимногочлен.

Пусть

$$f(t) = \left(\sum_{k=0}^m p^{(k)} t^k \right) e^{\gamma t},$$

где m – натуральное число,

$$p^{(k)} = \begin{pmatrix} \beta_{k1} \\ \dots \\ \beta_{kn} \end{pmatrix}, \quad \beta_{kj} \in R(C).$$

Если γ не является корнем характеристического многочлена

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

то частные решения можно искать в аналогичной форме

$$v(t) = \left(\sum_{k=1}^m Q^{(k)} t^k \right) e^{\gamma t}, \quad Q^{(k)} = \begin{pmatrix} \psi_{k1} \\ \dots \\ \psi_{kn} \end{pmatrix}, \quad \psi_{kj} \in R(C).$$

Компоненты ψ_{kj} подлежат определению при подстановке вектор-функции $v(t)$ в систему (3.36) и приравнянии слагаемых при одинаковых степенях t . С учетом нерезонансности γ компоненты векторов $Q^{(k)}$ находятся однозначно.

Случай, когда γ является корнем характеристического уравнения, сложнее. Пусть $\gamma = \lambda_s$, где λ_s корень кратности k_s характеристического уравнения.

Упражнение 3.1. Показать, что частное решение можно найти в форме

$$v(t) = \left(\sum_{k=0}^{m+s} Q^{(k)} t^k \right) e^{\lambda_s t},$$

т. е. квазимногочлена степени $m + s$, где m – степень квазимногочлена

$$f(t) = \sum_{k=0}^m (p^{(k)} t^k) e^{\lambda_j t}.$$

Отметим, что резонансный случай приводит часто к отысканию коэффициентов векторного многочлена достаточно высокой степени t . Быть

$$1.20. \quad xy' + y = y^2 \ln x, \quad y(1) = 1.$$

$$1.21. \quad y' = -y^2 + 1 + x^2.$$

$$1.22. \quad y' = y^2 - xy - x.$$

$$1.23. \quad y' = y^2 - (2x + 1)y + x^2 + 2x.$$

Указание: В последних двух уравнениях можно найти частное решение следующего вида

$$y = ax + b, \quad a, b \in R.$$

$$1.24. \quad (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

$$1.25. \quad xdx + ydy = 0.$$

$$1.26. \quad \frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = 0.$$

$$1.27. \quad xdx + ydy + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0.$$

$$1.28. \quad y' = y - y^3.$$

Глава 2

Дифференциальные уравнения высших порядков. Линейные дифференциальные уравнения

2.1. Дифференциальные уравнения n -го порядка

Дифференциальное уравнение n -го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

или в разрешенном относительно старшей производной $y^{(n)}$ виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (2.2)$$

Любая функция $y(x)$, имеющая непрерывные частные производные до порядка n включительно и удовлетворяющая уравнению (2.1) или (2.2), называется *решением этого уравнения*. Процесс нахождения решения называется интегрированием соответствующего уравнения.

В качестве примера рассмотрим прямолинейное движение точки массы m под воздействием силы $F = F(t, x, x')$, зависящей от момента t , положения x и скорости точки \dot{x} . Это даёт нам дифференциальное уравнение движения

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t, x, \frac{dx}{dt})$$

– простейший вариант уравнений Ньютона. Интегрирование этого уравнения второго порядка определяет зависимость x от t , т. е. движение точки под воздействием силы. Для получения определенного решения задачи мы должны задать еще начальные условия движения, а именно положение и ее скорость в некоторый начальный момент времени $t = t_0$

$$x \Big|_{t=t_0} = x_0, \quad \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_0} = \dot{x}_0.$$

Для уравнения n -го порядка (2.1) или (2.2) начальные условия состоят в задании функции $y = y(x)$ и её производных до $(n-1)$ -го порядка включительно при $x = x_0$

$$y \Big|_{x=x_0} = y_0, \quad y' \Big|_{x=x_0} = y_0^{(1)}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} \Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \quad (2.3)$$

Здесь

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = f_1(t) + f_2(t), \quad f_1(t) = -\frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{it}, \\ f_2(t) = -\frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-it}.$$

Характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$, которым соответствуют собственные элементы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородного уравнения $\dot{x} = Ax$ имеет вид

$$x(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Найдем $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$, где $v_p(t)$ – частные решения неоднородного уравнения $\dot{x} = Ax + f_p(t), p = 1, 2$.

Положим $v_1(t) = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} e^{it}$. Для определения H_1, H_2 получим систему с отличным от 0 определителем

$$iH_1 = H_2 - \frac{5}{2}, \quad iH_2 = 2H_1 + H_2, \quad H_1 = -\frac{1}{2}(1 - 2i), \quad H_2 = \frac{1}{2}(7 - i).$$

Откуда

$$v_1(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 + 2i \\ 3 - i \end{pmatrix} \exp(it).$$

Понятно, что $v_2(t) = \overline{v_1(t)}$, т. е. комплексно сопряжена к первому.

Поэтому

$$v(t) = \begin{pmatrix} -\cos t - 2 \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

При выводе окончательной версии для частного решения были использованы формулы

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad e^{-it} = \cos t - i \sin t.$$

Итак, общее решение рассматриваемой системы имеет вид

$$x(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - \cos t - 2 \sin t \\ -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} + 3 \cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

где $H \in R^n(C^n)$, т. е. $H = colon(H_1, \dots, H_n)$. Подстановка $v(t)$ в (3.36) показывает, что для вектора H получаем уравнение

$$AH = \gamma H + h$$

или

$$(A - \gamma E)H = h.$$

Последняя система алгебраических уравнений для нахождения H_1, \dots, H_n имеет единственное решение, так как

$$\det(A - \lambda E) \neq 0.$$

Если

$$f(t) = \sum_{j=1}^m h^{(j)} e^{\gamma_j t},$$

то применим тот же метод, если ни одно из чисел γ_j не удовлетворяет характеристическому уравнению. Понятно, что частное решение можно искать в форме

$$v(t) = \sum_{j=1}^m v_j(t), \quad v_j(t) = H^{(j)} e^{\gamma_j t}.$$

Замечание 3.5. В рассматриваемый класс неоднородностей входят вектор-функции вида

$$h \sin \gamma t, \quad h \cos \gamma t, \quad h \in R^n(C^m).$$

В этом случае задача может быть сведена к предыдущей, если воспользоваться формулами Эйлера

$$\sin \gamma t = \frac{e^{i\gamma t} - e^{-i\gamma t}}{2i}, \quad \cos \gamma t = \frac{e^{i\gamma t} + e^{-i\gamma t}}{2}.$$

Предложенный ранее вариант выбора частного решения допустим, если $\pm i\gamma$ не удовлетворяют характеристическому уравнению (нерезонансный случай).

Пример 3.11. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2 - 5 \cos t, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2.$$

В этих условиях $y_0, y_0^{(1)}, y_0^{(n-1)}$ – определенные числа. Для уравнения (2.2) имеет место теорема существования и единственности решения, совершенно аналогичная теореме 1.1 из первой главы данного пособия.

Теорема 2.1. Если $f(x, y_1, \dots, y_{n-1})$ – непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y_j} \quad j = 1, \dots, n-1$ по совокупности переменных в окрестности точки $(x_0, y_0, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)})$, то задача (2.1) – (2.2) имеет единственное решение $y(x)$, если $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta = \text{const} > 0$.

Напомним еще раз, что задачу определения функции $y(x)$, удовлетворяющей уравнению (2.2) и начальным условиям (2.3), традиционно называют задачей Коши.

Изменяя в начальных условиях (2.3) постоянные $y_0, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)}$, получим семейство решений, зависящее от n произвольных постоянных. Эти произвольные постоянные могут входить в решение и не как начальные условия

$$y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n). \quad (2.4)$$

Такое решение (2.4), содержащее n произвольных постоянных, называется общим интегралом уравнения (2.1). Оно может быть записано в неявной форме

$$\psi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0.$$

Придавая определенные числовые значения для C_1, \dots, C_n , получим частные решения уравнения (2.1). Дифференцируя (2.4) по переменной x и подставляя в полученные равенства $x = x_0$, постоянные C_1, \dots, C_n можно обычно определить из начальных условий (2.3). Продемонстрируем это замечание на примере.

Пример 2.1. Рассмотрим задачу Коши

$$y'' = 1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1.$$

Уравнение $y'' = 1$ интегрируется очень просто

$$y' = x + C_1,$$

откуда имеем

$$y = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + C_1 + C_2 = 1, \\ 1 + C_1 = 1. \end{cases}$$

Откуда находим $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{2}$. Итак, решением задачи Коши из данного примера служит функция

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

Запишем условие из предыдущего примера в более общей форме. Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} = f(x), \quad (2.5)$$

где $f(x)$ – заданная непрерывная функция при $x \in (a, b)$. Уравнение (2.5) дополним начальными условиями (2.3), считая, конечно, что $x_0 \in (a, b)$. Решение задачи (2.5), (2.3) будем искать в следующем виде

$$y(x) = u(x) + v(x),$$

где $u(x)$ решение задачи

$$u^{(n)} = f(x), \quad u(x_0) = \frac{du}{dx}\Big|_{x=x_0} = \dots = \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\Big|_{x=x_0} = 0, \quad (2.6)$$

а

$$v^{(n)} = 0, \quad v(x_0) = y_0, \quad \frac{dv}{dx}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(1)}, \quad \frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \quad (2.7)$$

Поскольку производная порядка n функции $v(x)$ равна 0, то $v(x)$ есть многочлен с произвольными постоянными

$$v(x) = C_0 + C_1x + \dots + C_{n-1}x^{n-1},$$

где постоянные C_0, C_1, \dots, C_{n-1} однозначно находятся из начальных условий в задаче (2.7). Это вытекает из того, что при определении постоянных C_0, C_1, \dots, C_{n-1} мы получим систему линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей, где на главной диагонали находятся элементы, отличные от нуля.

Поэтому

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} ds.$$

В координатной форме записи получаем

$$x_1(t) = 1 + 2t + \frac{t^3}{6}, \quad x_2(t) = 1 + \frac{t^2}{2}.$$

В данном случае система может быть изначально записана в координатной форме

$$\dot{x}_1 = x_2 + 1, \quad \dot{x}_2 = t.$$

После чего для ее интегрирования не обязательно применять какие-либо общие методы. Сначала можно найти решение второго уравнения, затем подставить найденное решение в первое и непосредственным интегрированием найти $x_1(t)$. Произвольные постоянные интегрирования могут быть найдены из начальных условий.

Замечание 3.4. Если начальное условие задано не при $t = 0$, а при $t = t_0$, где t_0 произвольно, то формула (3.43) может быть модифицирована

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}q + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(s)ds.$$

2. Система со специальной неоднородностью. В этой части параграфа рассмотрим частный случай выбора $f(t)$, при котором не обязательно использовать метод вариации произвольных постоянных.

Пусть сначала

$$f(t) = he^{\gamma t}, \quad h = colon(h_1, \dots, h_n), \quad h_j \in R(C), \quad \gamma \in R(C)$$

и γ не является корнем характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Такой случай называется *нерезонансным*. Тогда частное решение системы (3.36) можно искать в следующей форме

$$v(t) = He^{\gamma t},$$

В нашем случае

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} \quad (\text{почему?}).$$

Следовательно,

$$x(t) = e^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A(t-s)} \begin{pmatrix} \gamma_1 e^s \\ \gamma_2 e^{-s} \end{pmatrix} ds,$$

$$e^{A(t-s)} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t-s) & \operatorname{sh}(t-s) \\ \operatorname{sh}(t-s) & \operatorname{ch}(t-s) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $g(t, s)$ вектор-функцию под знаком интеграла. Поэтому

$$G(t) = \begin{pmatrix} G_1(t) \\ G_2(t) \end{pmatrix}, \quad G_1(t) = \int_0^t (\gamma_1 \operatorname{ch}(t-s)e^s + \gamma_2 \operatorname{sh}(t-s)e^{-s}) ds,$$

$$G_2(t) = \int_0^t (\gamma_1 \operatorname{sh}(t-s)e^s + \gamma_2 \operatorname{ch}(t-s)e^{-s}) ds.$$

Стандартные вычисления интегралов позволяют найти $G_1(t)$ и $G_2(t)$

$$\begin{aligned} G_1(t) &= \frac{\gamma_1}{2}(te^t + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})) + \frac{\gamma_2}{2}(-te^{-t} + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})) = \\ &= \frac{\gamma_1}{2}(te^t + \operatorname{sh} t) + \frac{\gamma_2}{2}(-te^t + \operatorname{sh} t), \\ G_2(t) &= \frac{\gamma_1}{2}(-te^t + \operatorname{sh} t) + \frac{\gamma_2}{2}(te^t + \operatorname{sh} t). \end{aligned}$$

Итак, в нашем случае

$$x_1(t) = \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t + \frac{\gamma_1}{2}(te^t + \operatorname{sh} t) + \frac{\gamma_2}{2}(\operatorname{sh} t - te^{-t}),$$

$$x_2(t) = \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t + \frac{\gamma_1}{2}(\operatorname{sh} t - te^t) + \frac{\gamma_2}{2}(\operatorname{sh} t + te^{-t}).$$

Пример 3.10. Рассмотрим еще пример системы (3.36). Пусть $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{A(t-s)} = \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$u_1(x) = \int_{x_0}^x u(s) ds, \quad u_2(x) = \int_{x_0}^x u_1(s) ds, \quad \dots, \quad u_n(x) = \int_{x_0}^x u_{n-1}(s) ds.$$

По индукции проверяется, что функция $y(x) = u_n(x)$ есть решение задачи Коши (2.6).

Мы привели два самых простых варианта уравнения (2.2), где задача нахождения общего решения или задача Коши сводится к многократному интегрированию. Естественно, что в ситуации общего положения задача интегрирования уравнения (2.2) в явном виде не всегда имеет столь простое решение. В следующем параграфе мы рассмотрим некоторый класс таких уравнений, где хотя бы в частном случае удастся написать формулу, задающую общее решение.

2.2. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Общие свойства

Линейным дифференциальным уравнением порядка n называется дифференциальное уравнение вида

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t), \quad (2.8)$$

где

$$x = x(t), \quad x^{(j)} = \frac{d^j x(t)}{dt^j}, \quad j \in N.$$

Коэффициенты $a_k(t), b(t)$ -непрерывные действительные функции, определенные на некотором множестве $J \subset \mathbb{R}$. Иногда рассматриваются комплекснозначные функции в качестве коэффициентов дифференциального уравнения (2.8).

Замечание 2.1. Функция $\varphi(t)$ комплекснозначная, если мы можем её записать в виде

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t),$$

где $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ уже действительные функции переменного t .

Наряду с уравнением (2.8) рассматривают его частный вид

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) называют линейным однородным уравнением порядка n , а уравнение (2.8), если $b(t) \neq 0$, называют *линейным неоднородным уравнением порядка n* .

Пусть в уравнении (2.8) $a_j(t) = a_j = \text{const} \in R$ (или C), тогда уравнение (2.8) будем называть *уравнением с постоянными коэффициентами*, несмотря на то, что свободный член может быть функцией, отличной от постоянной.

Уравнение n -го порядка (2.8) с помощью замены

$$x = z_1, \quad x' = z_2, \quad \dots, \quad x^{(n-1)} = z_n$$

может быть сведено к системе линейных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} z'_1 = z_2, \\ \dots \\ z'_{n-1} = z_n, \\ z'_n = -a_{n-1}(t)z_n - \dots - a_0(t)z_1 + b(t). \end{cases} \quad (2.10)$$

С теоретической точки зрения иногда удобней рассматривать систему (2.10) вместо дифференциального уравнения (2.8). Например, для доказательства теоремы существования и единственности решения задачи Коши. С практической точки зрения удобней находить решения именно уравнения порядка n .

Введем обозначение

$$Lx \equiv x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x.$$

Тогда уравнение (2.8) может быть кратко записано в виде

$$Lx = b(t), \quad (2.8)'$$

а уравнение (2.9) как

$$L(x) = 0. \quad (2.9)'$$

Отметим, что дифференциальный оператор L линейный. Последнее означает, что выполнены следующие два свойства:

1. $L(\varphi_1 + \varphi_2) = L\varphi_1 + L\varphi_2$, $\varphi_j = \varphi_j(t)$.
2. $L(\lambda\varphi) = \lambda L\varphi$, $\varphi = \varphi(t)$, $\lambda \in R(C)$.

Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ два некоторых решения уравнения (2.8). Тогда очевидно, что функция $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.9). Действительно,

$$L\varphi_1 = b, \quad L\varphi_2 = b.$$

или

$$\dot{u} = e^{-At}f(t). \quad (3.41)$$

Следовательно,

$$u(t) = \beta + \int e^{-At}f(t)dt,$$

где $\beta \in R^n$ – произвольный вектор, а интегрирование во втором слагаемом последнего равенства (3.41) производится покомпонентно для вектор-функции

$$g(t) = e^{-As}f(t) : \int g(s)ds = G(t), \quad G(t) = \text{colon}(G_1(t), \dots, G_n(t)), \\ \dot{G}_j = g_j(t), \quad j = 1, \dots, n.$$

Окончательно получаем

$$x(t) = e^{At}(\beta + G(t)) = e^{At}\beta + e^{At}\left(\int e^{-At}f(t)dt\right). \quad (3.42)$$

Первое векторное слагаемое в последнем равенстве – решение линейной однородной системы (3.37), а второе – частное решение (3.36).

Если речь идет о нахождении решения задачи Коши (3.36), (3.38) при $t_0 = 0$, то формула (3.42) допускает следующую модификацию

$$x(t) = e^{At}q + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds. \quad (3.43)$$

Действительно, $x(0) = q$, а второе в ней слагаемое

$$\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds = e^{At}\left(\int_0^t e^{-As}f(s)ds\right),$$

где в правой части последнего равенства выписана одна из первообразных вектор-функций $g(t) = e^{-At}f(t)$.

Пример 3.9. Рассмотрим систему (3.36) в частном случае $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1 e^t \\ \gamma_2 e^{-t} \end{pmatrix}$, где $\gamma_1, \gamma_2 \in R$. Наконец, $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, $q_1 = 1$, $q_2 = -1$.

В принципе, как уже хорошо известно из п. 3.1, для того чтобы найти общее решение системы (3.36), достаточно уметь находить частное решение $v(t)$ этой системы. Действительно, справедливо представление

$$x(t) = u(t) + v(t),$$

где $u(t)$ – общее решение системы линейных однородных уравнений (3.37). Поэтому при реализации любого из методов решения системы (3.36) центральное значение приобретает методика (фрагмент этой методики) нахождения частного решения $v(t)$.

1. Метод вариации произвольных постоянных. Этот метод наиболее прост в теоретическом изложении и достаточно понятен при его применении. Он применим при любой $f(t)$. Основным его недостатком следует, по-видимому, считать большой объем вычислений при его реализации.

Пусть общее решение (3.37) записано в следующей форме

$$x(t) = e^{At}\alpha, \quad (3.39)$$

где $\alpha = colon(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, а α_j – произвольные действительные постоянные. Тогда общее решение неоднородной системы (3.36) можно искать в форме

$$x(t) = e^{At}u(t), \quad (3.40)$$

где произвольный вектор α из формулы (3.39) заменяется на неизвестную вектор-функцию $u(t)$

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_n(t) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, остается определить его компоненты $u_j(t)$. Подставим вектор-функцию (3.40) в систему (3.36). Получаем равенство

$$\frac{d}{dt}(e^{At}u) + e^{At}\frac{du}{dt} = Ae^{At}u + f(t).$$

Напомним, что $\frac{d}{dt}(e^{At}u) = Ae^{At}u$. Поэтому последнее равенство приобретает следующий вид после упрощений

$$e^{At}\dot{u} = f(t)$$

Отсюда имеем

$$L(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

Пусть $\psi(t)$ решение уравнения (2.9), а $\varphi(t)$ – решение (частное решение) неоднородного дифференциального уравнения (2.8), тогда функция $\varphi(t) + \psi(t)$ также удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению (2.8). В силу этих замечаний при отыскании решений (общего решения) важную роль приобретает рассмотрение однородного уравнения (2.8).

2.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения

Теорема 2.2. Множество решений дифференциального уравнения (2.9) образует векторное (линейное) пространство.

Утверждение из теоремы означает, что из предположения о принадлежности двух функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ множеству решений однородного дифференциального уравнения (2.9) вытекает утверждение о включении в множество решений линейной их комбинации

$$\lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in R(C).$$

Это утверждение было ранее проверено.

Основной целью данного параграфа является дополнительное утверждение о том, что пространство решений образует линейное пространство размерности n .

Определение 2.1. Функции $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ называются *линейно независимыми*, если при всех $t \in (a, b)$ тождество

$$C_1f_1(t) + \dots + C_nf_n(t) = 0, \quad C_j \in R(C), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

возможно лишь в случае

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0.$$

В противном случае эти функции $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ называются *линейно зависимыми*.

Пример 2.2. Функции $1, t, \dots, t^n$ линейно независимы, так как линейная комбинация

$$\lambda_0 + \lambda_1 t + \dots + \lambda_n t^n$$

при ненулевых коэффициентах $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ может обратиться в ноль лишь в конечном числе точек числовой прямой (самостоятельно доказать).

Пусть функции $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$ дифференцируемы k раз. Тогда равенство, фигурирующее в определении 2.1 можно заменить на следующие

$$\begin{cases} C_1 f_1'(t) + \dots + C_m f_m'(t) = 0, \\ C_1 f_1''(t) + \dots + C_m f_m''(t) = 0, \\ \dots \\ C_1 f_1^{(k)}(t) + \dots + C_m f_m^{(k)}(t) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим n решений $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ уравнения (2.9). Составим определитель

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Его называют *определителем Вронского (Вронскианом) решений* $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$.

Теорема 2.3. Следующие утверждения эквивалентны:

1. $W(t) \equiv 0$ при всех $t \in (a, b)$.
2. $W(t_0) = 0$ при некотором $t_0 \in (a, b)$.
3. Решения $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ линейно зависимы.

Достаточно доказать, что

$$1) \Rightarrow 2), \quad 2) \Rightarrow 3), \quad 3) \Rightarrow 1).$$

Импликация $1) \Rightarrow 2)$ очевидна. Пусть теперь $W(t_0) = 0$ при некотором $t_0 \in (a, b)$. Рассмотрим алгебраическую систему

$$\begin{cases} C_1 \varphi_1(t_0) + \dots + C_n \varphi_n(t_0) = 0, \\ C_1 \varphi_1'(t_0) + \dots + C_n \varphi_n'(t_0) = 0, \\ \dots \\ C_1 \varphi_1^{(n-1)}(t_0) + \dots + C_n \varphi_n^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases}$$

с неизвестными C_1, \dots, C_n . Её определитель есть $W(t_0)$. Поэтому данная система имеет нетривиальные решения: C_{10}, \dots, C_{n0} . Функция

$$\varphi(t) = C_{10} \varphi_1(t) + \dots + C_{n0} \varphi_n(t) = 0$$

удовлетворяет уравнению (2.9) и начальным условиям

$$\varphi(t_0) = \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{t=t_0} = \dots = \frac{d^{n-1}\varphi}{dt^{n-1}} \Big|_{t=t_0} = 0.$$

3.6. Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами

В п. 3.6 речь пойдет о методах решения систем следующего вида

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k + f_j(t), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.33)$$

где $a_{jk} \in R$ (допустим вариант, когда $a_{jk} \in C$ – полю комплексных чисел), а $f_j(t)$ – известные непрерывные функции независимой переменной $t \in I \subseteq R$. В системе (3.33) коэффициенты соответствующей однородной линейной системы

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \quad (j = 1, \dots, n) \quad (3.34)$$

не зависят от t и, следовательно, для системы (3.34) был рассмотрен стандартный алгоритм нахождения общего решения, если система (3.33) дополнена условиями

$$x_j(t_0) = q_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.35)$$

где $t_0, q_j \in R$, то, как обычно, речь идет о задаче (начальной задаче Коши).

Системы (3.33), (3.34) иногда удобнее переписывать в векторной форме. Если положить

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то система (3.33) примет вид

$$\dot{x} = Ax + f(t). \quad (3.36)$$

Линейную однородную систему (3.34) аналогично можно записать следующим образом

$$\dot{x} = Ax. \quad (3.37)$$

Наконец, условия (3.35) приобретают следующую форму записи

$$x(t_0) = q \in R, \quad t_0 \in R. \quad (3.38)$$

Доказательство теоремы. Пусть $B(t)$ – фундаментальная матрица уравнения (3.25). Тогда и матрица $Q(t) = B(t + \omega)$ также является фундаментальной матрицей уравнения (3.32). Действительно,

$$\dot{B}(t + \omega) = A(t + \omega)B(t + \omega),$$

а в силу ω -периодичности $A(t)$ и определения $Q(t)$ отсюда следует, что

$$\dot{Q}(t) = A(t)Q(t).$$

Кроме того, матрица $Q(t)$ – неособая при всех t , так как $B(t)$ – неособая матрица. Следовательно, существует неособая матрица V порядка $n \times n$, что при всех t

$$B(t + \omega) = B(t)V.$$

Известно, что в таком случае матрица V имеет логарифм. Более детально с понятием матричного логарифма читатель может познакомиться в ряде учебников (см., например [9]).

Положим

$$P = \frac{1}{\omega} \ln V, \quad B_0(t) = L(t)e^{-tP}.$$

Тогда (3.32) выполняется автоматически, и остается доказать, что $B(t + \omega) = B(t)$.

Имеем

$$B_0(t + \omega) = B(t + \omega)e^{-(t+\omega)P} = B(t)Ve^{-\omega P}e^{-tP}.$$

Так как $Ve^{-P} = E$, то

$$B(t + \omega) = L(t)e^{-tP} = B(t).$$

Теорема доказана.

Отметим, что собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы P называются *характеристическими показателями*. Из определения P можно вывести соотношение между мультипликаторами и характеристическими показателями

$$\lambda_j = \frac{1}{\omega} \ln \mu_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

При этом простым мультипликаторам соответствуют простые характеристические показатели, а кратным мультипликаторам – характеристические показатели с элементарным делителем той же кратности.

С другой стороны, уравнение (2.9) с нулевыми начальными условиями имеет решение $x(t) \equiv 0$. В силу единственности на (a, b) имеем равенство

$$C_{10}\varphi_1(t) + \dots + C_{n0}\varphi_n(t) = 0.$$

При этом не все C_{j0} равны нулю. Это и означает, что функции $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ линейно зависимы. Импликация 2) \Rightarrow 3) доказана. Импликация 3) \Rightarrow 1) очевидна.

Линейная зависимость $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ означает, что один из столбцов $W(t)$ при каждом $t \in (a, b)$ является линейной комбинацией остальных. Теорема доказана.

Имеет место формула Лиувилля – Остроградского

$$W(t) = W(t_0) \exp \left\{ - \int_{t_0}^t a_{n-1}(s) ds \right\}.$$

Её доказательство проще привести, переходя к системе.

Из приведенных рассуждений, в частности, вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.4. *Любые n линейно независимых решений уравнения (2.9) образуют базис в линейном пространстве решений данного уравнения.*

Утверждение теоремы означает, что любое решение $\varphi(t)$ дифференциального уравнения (2.9) представимо в виде

$$\varphi(t) = C_1\varphi_1(t) + \dots + C_n\varphi_n(t),$$

где $\{\varphi_j(t)\}$ – указанная линейно независимая система, а постоянные C_j могут быть выбраны единственным образом.

Из теоремы вытекает, что для решения уравнения (2.9) (нахождения его общего решения) достаточно найти n линейно независимых частных решений.

Пример 2.3. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$t \frac{d}{dt} \left(t \frac{dx}{dt} \right) - x = 0,$$

у которого, как легко доказывается, есть два частных решения $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = t^{-1}$. Эти функции линейно независимы, так как равенство $C_1t +$

$C_2 t^{-1} = 0$ при всех $t > 0$, имеет место лишь при $C_1 = C_2 = 0$. Поэтому общее решение данного уравнения имеет следующий вид $x(t) = C_1 t + C_2 t^{-1}$, где $C_1, C_2 \in R$.

Пример 2.4. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0, \quad y = y(x).$$

У этого уравнения есть частное решение $\varphi_1(x) = x$. Для того чтобы получить базис, необходимо найти второе решение. В этом нам может помочь формула Лиувилля – Остроградского. Пусть $\psi(x)$ – второе частное решение. Тогда имеем

$$\begin{vmatrix} \psi & x \\ \psi' & 1 \end{vmatrix} = C e^{-\int \frac{4s}{2s+1} ds}, \quad C \in R.$$

После упрощений получаем

$$\psi - x\psi' = C.$$

Последнее уравнение – это линейное уравнение первого порядка. Его решение имеет вид

$$\psi(x) = Cx \left(C_1 - \frac{e^{-2x}}{x} \right).$$

Отсюда находим второе частное решение

$$\psi(x) = e^{-2x}.$$

Следовательно, общее решение уравнения, рассматриваемого в данном примере, имеет вид

$$y(x) = C_1 x + C_2 e^{-2x}.$$

В более общей форме, если уравнение (2.9) имеет частное решение $x(t) = \varphi_1(t)$, подстановка

$$x(t) = \varphi_1(t)y(t)$$

приводит уравнение (2.9) к уравнению для $y(t)$, порядок которого меньше на 1. Этот приём носит название *понижение порядка дифференциального уравнения*. К сожалению, он применим только если известно хотя бы одно решение.

Доказательство теоремы.

Необходимость. Пусть ρ – мультипликатор системы уравнений (3.25), тогда существует такой вектор $x_0 \neq 0$, что

$$B(\omega)x_0 = \rho x_0.$$

Рассмотрим следующее нетривиальное решение системы уравнений (3.25)

$$\varphi(t) = B(t)x_0.$$

В силу (3.27)

$$\varphi(t + \omega) = B(t + \omega)x_0 = B(t)B(\omega)x_0 = B(t)\rho x_0 = \rho B(t)x_0 = \rho\varphi(t).$$

Следовательно, необходимость доказана.

Достаточность. Из соотношения (3.29) при $t = 0$ получим

$$\varphi(\omega) = \rho\varphi(0). \quad (3.30)$$

В силу теоремы единственности

$$\varphi(t) = B(t)\varphi(0), \quad (3.31)$$

причем $\varphi(0) \neq 0$, так как в противном случае решение $\varphi(t)$ было бы тривиальным.

Из равенства (3.31) в силу (3.30) следует, что

$$B(\omega)\varphi(0) = \varphi(\omega) = \rho\varphi(0).$$

Следовательно, $\varphi(0)$ – собственный вектор матрицы $B(\omega)$, а ρ – мультипликатор системы уравнений (3.25). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.2. Линейная однородная система уравнений (3.25) имеет нетривиальное решение с периодом ω в том и только том случае, когда один из её мультипликаторов равен единице.

Теорема Флоке. Каждую фундаментальную матрицу уравнения (3.24) можно представить в виде

$$B(t) = B_0(t)e^{Pt}, \quad (3.32)$$

где $B_0(t)$ – периодическая матрица с периодом ω , а P – постоянная матрица.

Пусть $x_1(t), \dots, x_n(t)$ – фундаментальная система решений для системы уравнений (3.25), определяемая начальными условиями

$$x_j(0) = e_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.26)$$

где $e_j = \delta_{j1}, \dots, \delta_{jn}$. Поскольку матрица $A(t)$ периодическая, и $x_1(t + \omega), \dots, x_n(t + \omega)$ также образуют фундаментальную систему решений. Следовательно, каждая из функций $x_j(t + \omega)$ будет линейной комбинацией $x_k(t)$, $(k = 1, \dots, n)$ с постоянными коэффициентами, поэтому

$$x(t + \omega) = \sum_{k=1}^n c_{jk} x_k(t), \quad j = 1, \dots, n,$$

где c_{jk} , $j, k = 1, \dots, n$ – постоянные. Полученное соотношение можно записать в виде

$$B(t + \omega) = B(t)C, \quad (3.27)$$

где $B(t)$ – фундаментальная матрица решений $x_j(t)$ $j = 1, \dots, n$, а $C = \{c_{jk}\}$ – постоянная матрица.

В силу (3.25) и (3.26) матрица $A(t)$ удовлетворяет условиям

$$\dot{B} = A(t)B, \quad B(0) = E.$$

Полагая в равенстве (3.27) $t = 0$, получим

$$B(\omega) = C.$$

Таким образом,

$$B(t + \omega) = B(t)B(\omega). \quad (3.28)$$

Матрица $B(\omega)$ называется *матрицей монодромии* системы уравнений (3.25). Очевидно, что $|B(\omega)| \neq 0$. Собственные значения μ_1, \dots, μ_n матрицы $A(\omega)$ называются *мультипликаторами* системы уравнений (3.25).

Замечание 3.3. Если матрица $B(t)$ действительная, то матрица монодромии также действительна, однако мультипликаторы будут, вообще говоря, комплексными числами.

Теорема 3.13. Для того чтобы комплексное число ρ было мультипликатором системы уравнений (3.25), необходимо и достаточно, чтобы существовало такое непрерывное решение $\varphi(t)$ системы (3.25), для которого

$$\varphi(t + \omega) = \rho \varphi(t). \quad (3.29)$$

Приведем доказательство применимости этого приема для уравнения второго порядка. Рассмотрим уравнение

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0. \quad (2.11)$$

Пусть $x(t) = \varphi_1(t)$ его частное решение, т. е. справедливо равенство

$$\varphi_1'' + a_1(t)\varphi_1' + a_0(t)\varphi_1 = 0.$$

Положим теперь $x(t) = \varphi_1(t)y(t)$. Откуда имеем

$$x' = \varphi_1' y + \varphi_1 y', \quad x'' = \varphi_1'' y + 2\varphi_1' y' + \varphi_1 y''.$$

После подстановки в уравнение (2.11) и группировки мы получаем

$$\varphi_1 y'' + (a_1 \varphi_1 + 2\varphi_1') y' + (\varphi_1'' + a_1 \varphi_1' + a_0 \varphi_1) y = 0,$$

однако коэффициент при y обращается в 0. Следовательно для $y' = z$ получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$\varphi_1 z' + \psi z = 0,$$

где $\psi = (a_1 \varphi_1 + 2\varphi_1')$.

Упражнение 2.1. Доказать справедливость утверждения о возможности понижения порядка уравнения в общем случае.

2.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейным однородным дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение (2.9), если $a_j(t) \equiv a_j$ – действительные или комплексные постоянные. Имеем

$$L_0 x \equiv x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = 0, \quad (2.12)$$

где $a_j \in R(C)$. Если положить $x(t) = e^{\lambda t}$, то подстановка такого частного решения в уравнение (2.12) приводит к следующему равенству

$$M(\lambda) \equiv \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (2.13)$$

Алгебраическое уравнение степени n (2.13) принято называть *характеристическим уравнением* для дифференциального уравнения (2.12). Из

курса высшей алгебры хорошо известно, что оно имеет n корней с учетом кратности. Обозначим корни уравнения (2.13) через $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, а через r_1, \dots, r_k их соответствующие кратности, $r_1 + \dots + r_k = n$. Но во всяком случае есть решение уравнения (2.12) (частное решение)

$$x_m(t) = e^{\lambda_m t}, \quad \lambda_m \in R(C).$$

Замечание 2.1. Напомним, что если $\lambda_m \in C$, т. е. $\lambda_m = \alpha_m + i\beta_m, \beta_m \neq 0$, тогда экспонента с комплексным показателем определяется следующим образом

$$e^{(\alpha_m + i\beta_m)t} = e^{\alpha_m t}(\cos \beta_m t + i \sin \beta_m t) = e^{\alpha_m t} \cos \beta_m t + i e^{\alpha_m t} \sin \beta_m t.$$

Например, $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Лемма 2.1. *Какова бы ни была n раз дифференцируемая функция $f(t)$, имеет место следующая формула*

$$Le^{\lambda t} f(t) = e^{\lambda t} \left(M(\lambda) f + \frac{M'(\lambda)}{1!} f' + \dots + \frac{M^{(n)}(\lambda)}{n!} f^{(n)} \right). \quad (2.14)$$

Доказательство. Пусть $Lz = z^k$ ($0 \leq k \leq n$). Тогда $M(\lambda) = \lambda^k$ и поскольку $M^{(l)}(\lambda) = 0$ при $l > k$, то мы имеем

$$\begin{aligned} Le^{\lambda t} f(t) &= \frac{d^k}{dt^k} (e^{\lambda t} f(t)) = \sum_{l=0}^k C_k^l \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} (e^{\lambda t}) f^{(l)}(t) = \\ &= \sum_{l=0}^k \frac{k(k-1)\dots(k-l+1)}{l!} \lambda^{k-l} f^{(l)}(t) = e^{\lambda t} \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\lambda^l} (\lambda^k) f^{(l)}(t) = \\ &= e^{\lambda t} \sum_{l=0}^k \frac{M^{(l)}(\lambda)}{l!} f^{(l)}(t). \end{aligned}$$

Здесь использовалась формула Лейбница для нахождения k -ой производной произведения двух функций. Итак, формула (2.14) доказана для частного случая $Lz = z^{(k)}$. Справедливость формулы (2.14) в общем случае следует из того, что линейный оператор Lz представляется в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами операторов вида $Lz = z^k$ ($0 \leq k \leq n$).

Лемма доказана.

Найти e^A .

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = Ax.$$

У матрицы A двукратное собственное значение $\lambda = 2$. Ему отвечает собственный вектор $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а т. к. число линейно независимых векторов равно 1 (см. § 3), то в нашем случае есть присоединенный вектор $h = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Поэтому общее решение этой системы равно

$$x(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Выберем C_1, C_2 так, чтобы $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, тогда $C_1 = 1, C_2 = 0$. Решение приобретает вид $B_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, и поэтому $B_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$.

Окончательно получаем, что

$$e^{At} = (B_1(t), B_2(t)) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

но $e^A = e^{A \cdot 1}$ ($t = 1$). Следовательно,

$$e^A = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

3.5. Линейные однородные системы с периодическими коэффициентами

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in (-\infty; +\infty), \quad (3.25)$$

где $A(t)$ – непрерывная периодическая матрица с периодом ω

$$A(t + \omega) = A(t).$$

тогда

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя метод математический, можно показать, что

$$A^{4k+1} = A, \quad A^{4k+2} = -E, \quad A^{4k+3} = -A, \quad A^{4k+4} = E,$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому

$$e^{At} = E + tA - \frac{t^2}{2!}E - \frac{t^3}{3!}A + \frac{t^4}{4!}E + \dots$$

Откуда находим, что в этом случае

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Иной вариант основан на реализации следующего алгоритма для нахождения матричной экспоненты. Рассмотрим последовательность задач Коши

$$\dot{x} = Ax, \quad (3.23)$$

$$x(0) = b_k. \quad (3.24)$$

Здесь $k = 0, 1, 2, \dots, n$,

$$b_k = \begin{pmatrix} b_{k1} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{pmatrix}, \quad b_{kj} = \begin{pmatrix} 0, k \neq j, \\ 1, k = j \end{pmatrix}.$$

Решение (3.23), (3.24) при выбранном k обозначим $B_k(t)$. Составим матрицу

$$B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_n(t)),$$

где столбцы матрицы – решения $B_1(t), B_2(t), \dots, B_n(t)$. Матрица $B(t)$ – фундаментальная матрица системы (3.23) (вспомните почему) и, кроме того, $B(0) = E$. Поэтому $B(t) = e^{At}$.

Пример 3.8. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.2. Пусть λ_m – корень характеристического многочлена $M(\lambda)$ кратности k . Тогда функции

$$x_1 = e^{\lambda_m t}, \quad x_2 = te^{\lambda_m t}, \dots, x_k = t^{k-1}e^{\lambda_m t}$$

являются решениями уравнения (2.12).

Доказательство. Напомним, что λ_m – корень характеристического многочлена $M(\lambda)$ кратности k , если

$$M(\lambda_m) = M'(\lambda_m) = \dots = M^{(k-1)}(\lambda_m) = 0, \quad M^{(k)}(\lambda_m) \neq 0.$$

Применяя формулу (2.14) к функции $x_{j+1} = t^j e^{\lambda t}$ ($0 \leq j \leq k-1$), получим

$$Le^{\lambda t} t^j = e^{\lambda t} \left(\frac{M^{(k)}(\lambda)}{k!} \frac{d^k}{dt^k}(t^j) + \dots + \frac{M^{(n)}(\lambda)}{n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^j) \right) \equiv 0,$$

так как $\frac{d^l}{dt^l}(t^j) = 0$, $l > j$.

Лемма доказана.

Можно доказать и обратное утверждение (предлагается доказать самостоятельно).

Лемма 2.3. Пусть $Lt^r e^{\lambda t} \Big|_{t=0} = 0$ при $r = 0, 1, \dots, k-1$. Тогда λ – корень характеристического многочлена, имеющий кратность, не меньшую k .

Вернемся теперь к уравнению (2.12). Пусть его характеристический многочлен имеет m ($m \leq n$) различных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Обозначим через k_1, \dots, k_m их кратности. В силу лемм функции

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = te^{\lambda_1 t}, \quad \dots, \quad x_{k_1} = t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\ x_{k_1+1} &= e^{\lambda_2 t}, \quad x_{k_1+2} = te^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad x_{k_1+k_2} = t^{k_2-1}e^{\lambda_2 t}, \\ &\dots \\ &\dots \\ x_{k_1+\dots+k_{m-1}+1} &= e^{\lambda_m t}, \quad \dots, \quad x_{k_1+\dots+k_m} = t^{k_m-1}e^{\lambda_m t} \end{aligned} \quad (2.15)$$

будут решениями однородного уравнения (2.12). Их количество равно n . Можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2.5. Система функций (2.15) образует систему из n линейно независимых функций, и, следовательно, любое решение может быть представлено в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^n C_j x_j, \quad (2.16)$$

где x_j – решения определяемые формулами (2.15), а C_j – некоторые постоянные.

Отметим, что если характеристическое уравнение имеет n различных корней, то формула (2.16) приобретает следующий вид

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}.$$

Наиболее просто доказывается линейная независимость фундаментальной системы (2.15), если корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ различны. Действительно, пусть при некоторых C_1, \dots, C_n и при $t \in (-T, T)$ справедливо тождество

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} \equiv 0.$$

Продифференцировав его, получаем следующее тождество

$$C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n \lambda_n e^{\lambda_n t} \equiv 0,$$

а проделав последовательно данную процедуру $n - 1$ раз, получаем

$$\begin{aligned} C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n \lambda_n^2 e^{\lambda_n t} &\equiv 0, \\ \dots\dots\dots \\ C_1 \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} &\equiv 0. \end{aligned}$$

При $t = 0$ приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} C_1 + \dots + C_n &= 0, \\ \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_1^{n-1} C_1 + \dots + \lambda_n^{n-1} C_n &= 0, \end{aligned}$$

у которой есть ненулевые решения C_1, \dots, C_n . Следовательно, определитель данной системы должен быть равен 0. Но, с другой стороны, её определитель

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & \dots\dots\dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots\dots\dots & \lambda_n \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots\dots\dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – различные числа. Последний определитель хорошо известен из курса высшей алгебры под названием *определитель Ван дер Монда*.

что и требовалось доказать.

Отметим другие важные свойства матричной экспоненты:

1. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$,
2. $e^{A_0} = E$, если A_0 – нулевая матрица,
3. Если A_1 – квадратная матрица, подобная матрице A , т. е.

$$A_1 = SAS^{-1} \quad (\det S \neq 0),$$

то имеем

$$e^{A_1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (SAS^{-1})^p = S \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} A^p \right) S^{-1} = S e^A S^{-1}.$$

Окончательно получаем, что

$$\exp(SAS^{-1}) = S e^A S^{-1}. \quad (3.21)$$

Наряду с определением матричной экспоненты (3.17) для матрицы A , можно определить матричную экспоненту для матрицы tA

$$e^{At} = E + \frac{t}{1!} A + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!} A^n + \dots \quad (3.22)$$

Отметим три важных свойства матричной экспоненты уже для матрицы tA

1. $e^{t_1 A} \cdot e^{t_2 A} = e^{(t_1+t_2)A}$,
2. $(e^{tA})' = A e^{tA} = e^{tA} A$,
3. $(e^{0A}) = E$.

Нахождение матричной экспоненты, основанное на использовании вида ряда, является трудоемким и поэтому легко может быть применимо, если матрица приведена к нормальной жордановой форме. Детально с этим методом можно познакомиться в различных учебниках. Ниже рассмотрим несколько примеров нахождения матричной экспоненты.

Пример 3.6. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, тогда $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $n \geq 2$.

Поэтому здесь

$$e^{At} = E + At = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.7. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

что и доказывает наше утверждение.

В частности, на основании формулы (3.18), используя одну из нижестоящих норм

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_k |a_{jk}|,$$

$$\|A\|_2 = \max_k \sum_j |a_{jk}|,$$

где $\|E\| = 1$, имеем

$$\|e^A\| \leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\|A\|^p}{p!} = e^{\|A\|}.$$

Лемма 3.1. Пусть матрицы A и B коммутируют, т. е. $AB = BA$. Тогда

$$e^A e^B = e^{A+B}. \quad (3.19)$$

Доказательство: Действительно, в силу абсолютной сходимости разложения (3.17) имеем

$$e^A e^B = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} \cdot \sum_{q=0}^{\infty} \frac{B^q}{q!} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{A^p B^q}{p! q!}.$$

Положим $p + q = s$ ($s = 0, 1, 2, 3, \dots$), тогда $q = s - p \geq 0$, т.е. $p \leq s$, и следовательно

$$e^x e^y = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^s \frac{A^p B^{s-p}}{p!(s-p)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{p=0}^s C_s^p A^p B^{s-p}, \quad (3.20)$$

где $C_s^p = \frac{s!}{p!(s-p)!}$ — число сочетаний из s элементов по p .

Так как матрицы A и B коммутируют, то

$$\sum_{p=0}^s C_s^p A^p B^{s-p} = (A + B)^s.$$

Отсюда на основании формул (3.20) и (3.17) получаем

$$e^A e^B = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} (A + B)^s = e^{A+B},$$

Упражнение 2.2. Показать, что

$$V_n = \prod_{j,k(j < k)} (\lambda_k - \lambda_j).$$

Впрочем, проверку этого факта можно найти в многих учебниках и задачниках, относящихся к курсу "Алгебра".

В общем случае доказательство теоремы можно найти во многих фундаментальных учебниках по курсу дифференциальных уравнений.

Формулу (2.16) можно записать в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^m p_j(t) e^{\lambda_j t}, \quad (2.17)$$

где $p_j(t)$ — многочлен степени $k_j - 1$ соответственно. Правую часть формулы (2.17) принято называть *квазимногочленом*.

Если, как и ранее, уравнение (2.12) дополнено начальными условиями

$$x(t_0) = \alpha_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1}, \quad (2.18)$$

то речь идет о задаче Коши (2.12), (2.18).

Рассмотрим примеры задач, где требуется либо найти общее решение уравнения (2.12), либо решить задачу Коши (2.12), (2.18).

Пример 2.5. Решить задачу Коши

$$\ddot{x} - x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Выпишем характеристическое уравнение для данного дифференциального уравнения, которое будет иметь следующий вид $\lambda^2 - 1 = 0$. Откуда следует, что последнее уравнение имеет два корня $-1, +1$. Следовательно, решение может быть выписано в следующем виде $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^t$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Чтобы найти конкретные значения произвольных постоянных C_1, C_2 , нужно после выписывания окончательного решения в общем виде решить уравнение с начальными условиями. Итак, из условий $x(0) = 0$ следует, что $C_1 + C_2 = 0$, а из условия $\dot{x}(0) = 1$ следует, что $-C_1 + C_2 = 1$. Из получившихся систем для C_1, C_2 находим, что $C_1 = -\frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$.

Пример 2.6. Найти решение задачи Коши

$$x^{(IV)} - \ddot{x} = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -1, \quad \ddot{x}(0) = 0.$$

В этом примере характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^4 - \lambda^2 = 0$. Корни последнего $\lambda_1 = 0$ – кратности 2 и $\lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$. Так как среди корней данного характеристического уравнения есть корень кратности 2, то решение будет записано в следующем виде $x(t) = C_1 e^{0 \cdot t} + C_2 t e^{0 \cdot t} + C_3 e^{-t} + C_4 e^t$. Отметим, что второе слагаемое в решении выписано с учетом того, что кратность корня $\lambda = 0$ равна 2. Итак $x(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^{-t} + C_4 e^t$. После вычисления значений постоянных C_i , $= 1, 4$ получаем окончательный ответ для данной задачи

$$x(t) = 2 + t - \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = 2 + t + \operatorname{ch} t.$$

Пример 2.7. Найти общее решение уравнения

$$\ddot{x} + x = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$, корни которого $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. Следовательно, решение в комплексной форме может быть выписано в следующем виде $x(t) = C_1 e^{-it} + C_2 e^{it}$. Чтобы переписать уравнение в действительной форме, требуется выделить линейно независимые решения данного уравнения. Легко показать, что в данном случае линейно независимыми решениями будут $\sin t, \cos t$. Отметим также, что число линейно независимых решений должно равняться порядковому числу уравнения. Итак, решение в действительной форме $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Здесь была использована формула Эйлера

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

а также то обстоятельство, что для линейных однородных дифференциальных уравнений с действительными коэффициентами действительная и мнимая части комплекснозначного решения также удовлетворяют этому уравнению.

Пример 2.8. Найти общее решение

$$x^{(IV)} + 2\ddot{x} + x = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$. Решая уравнение, находим корни уравнения $\lambda_1 = i$ кратности 2, $\lambda_2 = -i$ кратности 2. Решение в комплексной форме будет записано в следующем виде

Матрица A имеет трехкратное собственное число $\lambda_1 = 2$, которому отвечает собственный вектор $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Остальные векторы – это присоединенные векторы. Присоединенный вектор A находится из уравнения $(A - \alpha_1 E)h_1 = e_1$. В нашем случае для нахождения компонентов вектора h_1 требуется решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_3 = 1. \end{cases}$$

откуда $h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Соответственно h_2 – одно из решений системы

$(A - \lambda_1 E)h_2 = h_1$, откуда $h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Общее решение

$$x(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] + C_3 e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

3.4. Матричная экспонента

Пусть $A = \{a_{jk}\}$ – квадратная матрица порядка n .

Определение 3.6. Под матричной экспонентой квадратной матрицы X понимается матричная функция

$$\exp A \equiv e^A = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!}. \quad (3.17)$$

Матричный ряд (3.17) сходится для любой квадратной матрицы A и притом абсолютно. Проверка этого факта достаточно очевидна. Составляя соответствующий ряд норм, в результате приходим

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\|A\|^p}{p!} \leq \|A\| + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\|A\|^p}{p!} < \infty, \quad (3.18)$$

... + $q_s = n$ линейно независимы, то определитель Вронского при $t = 0$ отличен от нуля ($W(0) \neq 0$), что в силу теоремы 3.6 и определения 3.2 доказывает линейную независимость (3.16).

В этом случае общее решение можно представить в виде

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_k t} l_k^{(1)} + C_2 e^{\lambda_k t} (l_k^{(2)} + t l_k^{(1)}) + \dots + C_k e^{\lambda_k t} (l_k^{(q_k)} + t l_k^{(q_k-1)} + \dots + \frac{t^{q_k-1} l_k^{(1)}}{(q_k-1)!}),$$

где C_j – произвольные постоянные.

Для собственного вектора $l_k^{(1)}$ выписывается цепочка присоединенных векторов $l_k^{(1)}, \dots, l_k^{(q_k)}$.

Пример 3.4. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

у которой есть простое собственное число $\lambda_1 = 2$ и двукратное – $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$. Собственному числу $\lambda_1 = 2$ соответствует собственный вектор

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ а собственному числу } \lambda = 3 \text{ отвечают собственные векторы}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ попарно линейно независимы}$$

($n = 3, r = 1, k = n - r = 2$).

Поэтому общее решение может быть записано в следующем виде:

$$x(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.5. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$x(t) = C_1 e^{-it} + C_2 t e^{-it} + C_3 e^{it} + C_4 t e^{it}$. Выделяя линейно независимые действительные решения, получаем $\sin t, t \sin t, \cos t, t \cos t$. Выпишем решение в действительной форме $x(t) = C_1 \sin t + C_2 t \sin t + C_3 \cos t + C_4 t \cos t$.

Пример 2.9. Найти общее решение

$$\ddot{x} + 2ix = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2i = 0$, корни которого $\lambda_1 = 1 - i, \lambda_2 = -1 + i$. Решение в комплексной форме может быть записано в виде суммы $x(t) = C_1 e^{(1-i)t} + C_2 e^{(-1+i)t}$.

Замечание 2.2. Если в уравнении

$$x^{(n)} + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \dots + a_n \dot{x} + a_0 x = 0$$

$a_j \in C$, но $a_j \notin R$, то общее решение может быть записано только в комплексной форме.

2.5. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + bx = 0, \quad (2.19)$$

где a, b – вещественные постоянные. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$ равны

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}.$$

В зависимости от соотношения между числами a, b возможно несколько вариантов решений уравнения (2.19), а следовательно, и поведения решений. Разберем разные случаи по отдельности.

1⁰. Затухающие гармонические колебания. Пусть $a > 0, a^2 < b$, тогда $\lambda_{1,2} = -a \pm i\sqrt{b - a^2}$ и все вещественные решения уравнения (2.19) имеют вид

$$x = e^{-at} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t), \quad \omega = \sqrt{b - a^2},$$

где C_1, C_2 – произвольно вещественные постоянные. Решения можно записать в ином виде

$$x(t) = A e^{-at} \cos(\omega t - \varphi), \quad (2.20)$$

где $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\cos \varphi = \frac{C_1}{A}$, $\sin \varphi = \frac{C_2}{A}$. Функция, записанная в виде формулы (2.20), – непериодическая, но её нули, а также максимумы и минимумы периодически повторяются, с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Колебания, которые описываются формулой (2.20), – затухающие, так как $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$. Величина Ae^{-at} называется *амплитудой колебания*. Величина $\delta = a$ называется *коэффициентом затухания*. Она равна $\delta = \frac{1}{\tau}$, где τ – промежуток времени, за который амплитуда колебания уменьшается в a раз. Величина $d = \delta\tau$ (то есть $d = \frac{2\pi\delta}{\omega}$) называется *логарифмическим декрементом затухания*. Эта величина показывает, насколько убывает амплитуда функции $\cos(\omega t - \varphi)$ за один период.

2⁰. Аперидический процесс.

2.1. Пусть $b > 0$, $a > 0$, $-b + a^2 > 0$.

Решение имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} (\lambda_{1,2} < 0)$$

и не колеблется. Это отвечает наличию большого трения и больших потерь в системе.

2.2. Пусть $b < 0$. Тогда корни $\lambda_{1,2}$ оба вещественны, но разных знаков. В данном случае, как и в случае 2.1, решение не колеблется и это отвечает наличию большого трения и больших потерь в системе.

3⁰. Рассмотрим теперь случай $a < 0$. В этом случае решения имеют вид

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-at} \cos(\omega t - \varphi) (a^2 < b), \\ x(t) &= Ae^{-at} (C_1 e^{t\sqrt{a^2-b}} + C_2 e^{-t\sqrt{a^2-b}}). \end{aligned}$$

В первом случае амплитуда колебаний Ae^{-at} неограниченно возрастает со временем. Такой процесс может описываться линейным уравнением только на конечном промежутке времени, так как колебания с большими амплитудами нелинейны. Во втором случае при $b > 0$ амплитуда колебаний так же неограниченно возрастает. При $b < 0$ имеется единственное (с точностью до множителя) убывающее решение

$$x(t) = e^{(-a-\sqrt{a^2-b})t}.$$

Сформулируем важный результат, касающийся структуры фундаментальной системы решений.

Теорема 3.11. *Существует система из n линейно независимых векторов $l_k^{(j)}$ ($j_k = 1, \dots, q_k, k = 1, \dots, s$), удовлетворяющих следующим соотношениям*

$$\begin{aligned} Al_k^{(1)} &= \lambda_k l_k^{(1)}, \\ Al_k^{(2)} &= \lambda_k l_k^{(2)} + l_k^{(1)}, \\ &\vdots \\ Al_k^{(q_k)} &= \lambda_k l_k^{(q_k)} + l_k^{(q_k-1)}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где сумма q_k , отвечающих одинаковым λ_k , равна алгебраической кратности этого корня.

Векторы $l_k^{(2)}, \dots, l_k^{(q_k)}$ называют *присоединенными векторами*, порожденными собственным вектором $l_k^{(1)}$. Отметим, что корни λ_k при разных k могут быть одинаковыми.

Итак, рассмотрим корень λ_k . Ему отвечает решение $x_k^{(1)} = l_k^{(1)} e^{\lambda_k t}$. Также ему отвечают еще $(q_k - 1)$ решений.

Теорема 3.12. *Каждому корню λ_k , отвечает q_k решений вида*

$$\begin{aligned} x_k^{(1)} &= l_k^{(1)} e^{\lambda_k t}, \\ x_k^{(2)} &= (l_k^{(2)} + t l_k^{(1)}) e^{\lambda_k t}, \\ &\vdots \\ x_k^{(q_k)} &= (l_k^{(q_k)} + t l_k^{(q_k-1)} + \dots + \frac{t^{q_k-1} l_k^{(1)}}{(q_k-1)!}) e^{\lambda_k t}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Так как каждому λ_k , $k = 1, \dots, s$ отвечает q_k решений вида (3.15), то всего имеется $q_1 + q_2 + \dots + q_s = n$ решений

$$x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(q_1)}, \dots, x_s^{(1)}, \dots, x_s^{(q_s)}. \quad (3.16)$$

Теорема 3.13. *Решения (3.16) образуют фундаментальную систему решений однородной системы линейных ОДУ (3.10).*

Доказательство: Поскольку $x_k^{(1)} = l_k^{(1)}, \dots, x_k^{(q_k)} = (l_k^{(q_k)} + t l_k^{(q_k-1)} + \dots + \frac{t^{q_k-1} l_k^{(1)}}{(q_k-1)!}) e^{\lambda_k t}$ ($k = 1, \dots, s$) при $t = 0$ и, согласно теореме k , векторы $l_k^{(2)}, \dots, l_k^{(q_k)}$ в количестве $q_1 + q_2 + \dots + q_s = n$

получим

$$u(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2 \sin 2t \end{pmatrix} e^{3t}, \quad v(t) = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - 2 \cos 2t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Так как функции $u(t)$ и $v(t)$ образуют фундаментальную систему решений для рассматриваемой системы, то общее решение будет иметь следующий вид

$$x(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2 \sin 2t \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - 2 \cos 2t \end{pmatrix} e^{3t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Случай кратных корней. В этом случае есть 2 варианта выбора фундаментального решения системы (3.10). Это будет зависеть от определения количества линейно зависимых решений, а также от алгебраической и геометрической кратности.

Замечание 3.2. Напомним, что если у матрицы A есть единственное число $\lambda = \lambda_1$ кратности n (алгебраическая кратность равна n), то число собственных векторов k (геометрическая кратность), которые линейно независимы, определяют по формуле

$$k = n - r,$$

где r – ранг матрицы $(A - \lambda_1 E)$.

Пусть $\lambda = \lambda_k$ – корень кратности $m > 1$ характеристического уравнения (3.10) и этому корню соответствуют ровно m собственных векторов матрицы A (алгебраическая кратность = геометрической кратности). В этом случае корню λ отвечают m частных решений системы (3.10) вида

$$\alpha_1 e^{\lambda_k t}, \alpha_2 e^{\lambda_k t}, \dots, \alpha_m e^{\lambda_k t}. \quad (3.13)$$

Решение (3.13) образует линейно независимую систему решений однородной системы линейных ОДУ (3.10).

Пусть λ_k собственное значение матрицы A , а значит – корень характеристического уравнения (3.10). Предположим, что его кратность равна $m > 1$, но этому собственному значению соответствует $m_1 < m$ собственных векторов. Тогда его алгебраическая кратность $m > m_1$ – геометрической кратности. Из курса алгебры известно, что в такой ситуации у матрицы A есть $m - m_1$ присоединенных векторов.

Теперь рассмотрим частные случаи уравнения (2.10), важные с точки зрения приложений. Среди частных случаев отметим в первую очередь случай $a = 0$, который применим во многих физических и механических приложениях и задачах. Итак, рассмотрим случай $a = 0$ более подробно.

4⁰. Гармонические колебания. Пусть $a = 0$. Тогда уравнение (2.19) может быть переписано в следующем виде

$$\ddot{x} + bx = 0. \quad (2.21)$$

4.1. Пусть $b < 0$. Данный случай не представляет интереса, так как он совпадает со случаем 2.2, когда корни $\lambda_{1,2}$ оба вещественны и разных знаков. Ответ относительно решений аналогичен как и в случае 2.1, так и в случае 2.2.

4.2. Пусть $b > 0$. Характеристическое уравнение есть $\lambda^2 + b = 0$, так что $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{b}$ и всякое вещественное решение уравнения (2.19) имеет вид

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t), \quad \omega^2 = b$$

или записанное в несколько другом виде

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi),$$

где $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\cos \varphi = C_1/A$, $\sin \varphi = C_2/A$. Число A называется *амплитудой колебаний*. Колебания совершаются с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Механическая или другая физическая система, которая описывается уравнением (2.21), называется *гармоническим осциллятором*. Примеры таких систем: 1) малые колебания маятника, 2) малые колебания груза, подвешенного на упругой пружине, под действием силы тяжести, 3) электрические колебания в контуре, состоящем из емкости C и индуктивности L .

5⁰. Случай кратных корней. Пусть $a^2 - b = 0$. В данном случае характеристическое уравнение имеет корень $\lambda_{1,2} = -a$ кратности 2.

5.1. Пусть $a > 0$. Тогда решение будет выглядеть следующим образом

$$x(t) = C_1 e^{-at} + C_2 t e^{-at}.$$

В этом случае по амплитуде решение убывает.

5.2. Пусть $a < 0$. Тогда решение уже будет записано в следующем виде

$$x(t) = C_1 e^{at} + C_2 t e^{at}.$$

Решение в этом случае по амплитуде возрастает.

2.6. Уравнение Эйлера

Линейное уравнение вида

$$x^{(n)} y^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \quad (2.22)$$

где $a_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, n$ называется *уравнением Эйлера*. Ниже, для определенности, будем считать, что $x > 0$. Делая замену $x = e^t$, уравнение Эйлера можно привести к уравнению с постоянными коэффициентами, так как справедливы равенства

$$\begin{aligned} \dot{y} &= y' \cdot \dot{x} = e^t y', \quad y' = \frac{\dot{y}}{e^t}, \\ \ddot{y} &= y' e^t + y'' e^{2t}, \quad y'' = \frac{\ddot{y}}{e^{2t}} - \frac{\dot{y}}{e^{2t}}, \dots \end{aligned}$$

Здесь точкой обозначена производная по t , а штрихом производная по x . Аналогично можно показать, что $x^k y^{(k)}$ есть линейная комбинация производных функции y по переменной t с постоянными коэффициентами.

Более эффективный способ интегрирования уравнения Эйлера состоит в том, что решение ищется в виде $y = x^\lambda$. После подстановки этой функции в (2.22) получается характеристическое уравнение для определения λ

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda-1) \cdot \dots \cdot (\lambda-n+1) + a_1 \lambda(\lambda-1) \times \dots \\ \times (\lambda-n+2) + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Вид общего решения уравнения (2.22) определяется видом корней характеристического уравнения (характеристическими числами) и их кратностью. Разберем по отдельности различные случаи корней характеристического уравнения.

1. Случай простых корней. Корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения (2.23) различны. Это означает, что каждому простому корню λ_i отвечает частное решение x^{λ_i} уравнения (2.22).

Используя формулу Эйлера

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

преобразуем функцию $x(t)$ к виду

$$x(t) = (p+iq)e^{at}(\cos bt + i \sin bt) = e^{at}(p \cos bt - q \sin bt) + i e^{at}(q \cos bt + p \sin bt),$$

или $x(t) = u(t) + i v(t)$, где

$$u(t) = e^{at}(p \cos bt - q \sin bt), \quad v(t) = e^{at}(q \cos bt + p \sin bt).$$

Если $\alpha = p + iq$ — собственный вектор, соответствующий корню $\lambda = a + ib$ характеристического уравнения (3.12), то комплексно сопряженному корню $\bar{\lambda} = a - ib$ будет соответствовать комплексно сопряженное решение $\bar{\alpha} = p - iq$. Так как $\bar{x}(t) = \bar{\alpha} e^{\bar{\lambda}t}$ также будет решением системы (3.10), то в силу линейности системы (3.10) ей будут удовлетворять и вектор-функции $u(t) = \frac{1}{2}(x(t) + \bar{x}(t))$ и $v(t) = \frac{1}{2}i(\bar{x}(t) - x(t))$, принимающие значения в R^n .

Таким образом, вектор-функции $u(t)$ и $v(t)$ являются действительной и мнимой частями комплекснозначной функции $x(t) = \alpha e^{\lambda t}$ и решениями системы (3.10). Отметим, что функции $u(t)$ и $v(t)$ линейно независимы в R . Значит пара простых комплексно сопряженных корней $\lambda = a \pm ib$ характеристического уравнения соответствует пара действительных линейно независимых решений системы (3.10).

Упражнение 3.2. Проверить, что $u(t)$ и $v(t)$ линейно независимы.

Пример 3.3. Рассмотрим систему (3.10) при $n = 2$, а

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1 = 3 + 2i$, $\lambda_2 = 3 - 2i$. Корням λ_1, λ_2 соответствуют собственные вектора

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + 2i \end{pmatrix}.$$

Выделяя действительную и мнимую части для вектор-функции

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix} e^{(3+2i)t},$$

или в координатной форме

$$\begin{aligned}x_1(t) &= C_1 e^{3t} + C_2 e^{-it}, \\x_2(t) &= C_1 e^{3t} - C_2 e^{-it}.\end{aligned}$$

Пример 3.2. Рассмотрим систему (3.10) в случае $n = 2$, а

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение в данном случае имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Собственному значению λ_1 соответствует собственный вектор e_1 , а λ_2 — e_2 , где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение

$$x(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

а C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные.

2. Случай комплексных корней. Пусть среди простых корней характеристического уравнения есть комплексные. Такие корни разделяются на пару комплексно сопряженных корней $\lambda = a + ib$, $\bar{\lambda} = a - ib$, поскольку характеристическое уравнение (3.12) является уравнением степени n с действительными коэффициентами. Как в данном случае, так и в более общей ситуации общее решение будет выглядеть в форме (3.11). При наличии комплексных собственных значений, как в нашем случае, решение в форме (3.11) называют решением в комплексной форме. Можно получить решение в действительной форме, т. е. из вида комплексных решений выделить линейно независимые действительные решения. Действительно, каждому комплексному корню $\lambda = a + ib$ соответствует собственный комплексный вектор $\alpha = p + iq$, $p, q \in R^n$. Для полученных λ и α рассмотрим комплекснозначную вектор-функцию

$$x(t) = \alpha e^{\lambda t} = (p + iq)e^{(a+ib)t}.$$

Следовательно, всякое решение уравнения Эйлера имеет вид

$$y = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2} + \dots + C_n x^{\lambda_n},$$

где C_1, C_2, \dots, C_n — произвольные постоянные.

2. Случай комплексных корней. Если коэффициенты уравнения (2.22) вещественны, то комплексные корни уравнения (2.23) будут парно комплексно-сопряженными: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. В этом случае паре простых комплексных корней $\alpha \pm i\beta$ могут соответствовать два вещественных частных решения: $x^\alpha \cos(\beta \ln x)$, $x^\alpha \sin(\beta \ln x)$ (это следует из определения $x^\lambda = e^{\lambda \ln x}$). Соответственно решения уравнения Эйлера в случае комплексных корней в действительной форме имеет вид

$$y = C_1 x^\alpha \cos(\beta \ln x) + C_2 x^\alpha \sin(\beta \ln x).$$

3. Случай кратных корней. Характеристическое уравнение (2.23) имеет корни $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ кратности R_1, \dots, R_s соответственно. Тогда всякое решение уравнения Эйлера имеет вид

$$y = P_1(\ln x) x^{\lambda_1} + P_2(\ln x) x^{\lambda_2} + \dots + P_s(\ln x) x^{\lambda_s},$$

где $P_j(t)$ — произвольный многочлен от t степени $R_j - 1$.

Отметим также еще два типа уравнений, являющихся близкими к уравнениям типа Эйлера, которые с помощью замен сводятся к уравнениям с постоянными коэффициентами.

2.7. Уравнение Лагранжа

Это уравнение вида

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax + b)y' + a_n y = 0,$$

где $a, b, a_j = \text{const}$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Замена $ax + b = e^t$ сводит уравнение Лагранжа к линейному уравнению с постоянными коэффициентами.

2.8. Уравнение Чебышева

Это уравнение вида

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0 \quad (n = \text{const}).$$

С помощью замены $x = \cos t$ (при $|x| < 1$) уравнение Чебышева сводится к уравнению

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + n^2 y = 0.$$

Ниже приведем несколько примеров на каждый тип уравнений, изученных в этом параграфе.

Пример 2.10. Проинтегрировать следующее уравнение

$$x^2 y'' + 6xy' + 4y = 0.$$

В данном случае это уравнение Эйлера, решения которого будем искать в виде $y = x^\lambda$. Тогда получаем

$$x^2 \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2} + 6x\lambda x^{\lambda-1} + 4x^\lambda = 0, \lambda(\lambda - 1) + 6\lambda + 4 = 0, \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4$. Поэтому $y = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-4}$.

Пример 2.11. Проинтегрируйте следующее уравнение

$$x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0.$$

Это уравнение относится к такому же типу, что и уравнение в примере 1. После подстановки и преобразований мы приходим к следующему характеристическому уравнению $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = -2 - \text{двукратный корень}$. Поэтому общее решение имеет вид

$$y = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-2} \ln x.$$

Пример 2.12. Проинтегрировать следующее уравнение

$$x^2 y'' + 3xy' + 2y = 0.$$

В результате подстановок приходим, что характеристическое уравнение будет выглядеть следующим образом $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Поэтому решение может быть записано таким образом:

$$y = C_1 x^{-1} \cos \ln x + C_2 x^{-1} \sin \ln x.$$

Пример 2.13. Проинтегрировать следующее уравнение

$$(x+1)^2 y'' + 4(x+1)y' + 2y = 0.$$

или $\det(A - \lambda E) = 0$, называется *характеристическим уравнением*. Корни уравнения (3.12) называются *собственными значениями* матрицы A .

Вид общего решения системы (3.10) определяется количеством корней характеристического уравнения, их кратностью, а также тем, какое количество собственных векторов матрицы A соответствует кратным корням уравнения (3.12).

Рассмотрим возможные случаи.

1. Случай простых корней. Пусть все корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения (3.10) действительны и различны, как уже было отмечено, можно сформировать n -различных линейно независимых решений $E_j(t)$, а формула (3.11) интерпретируется как общее решение системы дифференциальных уравнений (3.10). Или, согласно определению 3.4, образуют фундаментальную систему решений этой однородной системы.

Рассмотрим два примера для этого случая.

Пример 3.1. Найдём общее решение системы ОДУ.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2. \end{cases}$$

Матрица A и характеристическое уравнение (3.12) системы ОДУ в данном случае имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем квадратное уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, имеющее два действительных различных корня $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$. Они являются собственными значениями матрицы A .

Найдём собственные векторы матрицы A , отвечающие этим собственным значениям. Собственным числам $\lambda = \lambda_1 = 3$ ($(A - \lambda_1 E)e_1 = 0$) и $\lambda = \lambda_2 = -1$ ($(A - \lambda_2 E)e_2 = 0$) соответствуют собственные векторы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, общее решение нашей системы в векторной форме может быть записано в следующем виде

$$x(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in R.$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}, \quad A = \{a_{jk}\}, \quad j, k = 1, 2, \dots, n,$$

то есть A – квадратная матрица порядка n , а a_{jk} – постоянные (вообще говоря, они могут быть и комплексными).

Пусть λ_j – одно из собственных значений матрицы A , а e_j – собственный вектор, отвечающий этому собственному значению ($e_j \neq 0$).

Это означает, что

$$Ae_j = \lambda_j e_j.$$

Тогда система (3.10) имеет нетривиальное решение $E_j(t) = \exp(\lambda_j t) e_j$.

Упражнение 3.1. Проверить, что $E_j(t)$ – решение.

Необходимо отметить, что $C_j E_j(t)$ также будет решением системы (3.10), где C_j – произвольная постоянная.

Пусть матрица A имеет n различных собственных значений λ_j ($j = 1, \dots, n$). Тогда система (3.10) имеет n линейно независимых решений

$$E_j(t) = \exp(\lambda_j t) e_j.$$

Линейная комбинация этих решений

$$x(t) = \sum_{j=1}^n C_j E_j(t) \quad (3.11)$$

также будет решением системы (3.10). Здесь, как и ранее, C_j – произвольные постоянные. Они могут быть не только действительными, но и комплексными.

Напомним, что система функций называется линейно независимой, если тождество

$$\sum_{j=1}^n C_j E_j(t) \equiv 0$$

влечет равенства $C_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

Определение 3.5. Уравнение n -й степени

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad (3.12)$$

Видно, что это уравнение Лагранжа. Делая замену $x + 1 = e^t$, мы сводим исходное уравнение к уравнению с постоянными коэффициентами. Решение последнего уравнения имеет вид $y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}$. Следовательно, решение всего уравнения имеет следующий вид

$$y = C_1(x + 1)^{-2} + C_2(x + 1)^{-1}.$$

Пример 2.14. Проинтегрировать следующее уравнение

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 3y = 0.$$

Из вида уравнения замечаем, что это уравнение Чебышева. Проведем замену переменной по формуле $x = \cos t$ ($t \in (0, \pi)$). Имеем

$$y' = \dot{y} \left(-\frac{1}{\sin t} \right), \quad y'' = \ddot{y} \frac{1}{\sin^2 t} - \dot{y} \frac{\cos t}{\sin t},$$

где, как и ранее, штрихом обозначена производная по x , а точкой – по t . Подставив полученные выражения в уравнения, имеем в итоге

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3y = 0,$$

откуда $y = C_1 \cos \sqrt{3}t + C_2 \sin \sqrt{3}t = C_1 \cos(\sqrt{3} \arccos x) + C_2 \sin(\sqrt{3} \arcsin x)$.

2.9. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами со специальной правой частью

В этом параграфе будем рассматривать неоднородные дифференциальные уравнения

$$Lx = x^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x' + a_0x = f(t), \quad (2.24)$$

где $a_j \in R$, $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $x^{(k)} = \frac{d^k x}{dt^k}$, $k \in N$. Наконец, неоднородность $f(t)$ будем выбирать в некотором специальном классе функций переменного t_0 .

Определение 6.1. Функцию $f(t)$ будем называть *квазиполиномом*, если

$$f(t) = \exp \mu t Q_m(t),$$

где $Q_m(t)$ – полином степени m ($m = 0, 1, 2, \dots$), то есть

$$Q_m(t) = q_m t^m + q_{m-1} t^{m-1} + \dots + q_1 t + q_0,$$

где μ, q – действительные или комплексные постоянные.

Специальный класс функций будут составлять те из них, для которых справедливо представление

$$f(t) = \sum_{j=1}^l \exp(\mu_j t) Q_{mj}(t),$$

то есть $f(t)$ – конечная сумма квазиполиномов.

Пример 2.15. $f(t) = e^{2t}(t^2 + t + 1) + 2e^{-t}(2t - 3)$.

Пример 2.16. $f(t) = (\cos \omega t)(t^2 + 1) + \sin \omega t(2t + 1)$, $\omega \in R$.

Данная функция может быть преобразована к такому виду, который позволяет включить в специальный класс функций. Действительно, справедливы равенства

$$\cos \omega t = \frac{\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)}{2}, \quad \sin \omega t = \frac{\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t)}{2i}.$$

Поэтому справедливо равенство

$$f(t) = \frac{1}{2} \exp(i\omega t)[t^2 + 1 + \frac{1}{2i}(2t + 1)] + \frac{1}{2} \exp(-i\omega t)[t^2 + 1 - \frac{1}{2i}(2t + 1)].$$

Напомним, что для того, чтобы найти общее решение уравнения (2.24), можно сначала найти общее решение $y(t)$ соответствующего однородного уравнения

$$Lx = x^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x' + a_0x = 0.$$

Тогда общее решение уравнения (2.24) можно записать в следующем виде

$$x(t) = y(t) + u(t),$$

где $u(t)$ – частное решение дифференциального уравнения (2.24). Способы нахождения общего решения однородного дифференциального уравнения были рассмотрены в предыдущих разделах учебного пособия. Центральным моментом следует считать рассмотрение характеристического уравнения

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad (2.25)$$

Теорема 3.9. Если вектор-функции

$$x_k(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n,$$

определенные в промежутке T числовой прямой R , образуют в нем фундаментальную систему решений однородной системы линейных ОДУ (3.3), то общее решение этой системы имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=1}^n C_k x_k(t) \quad (3.9)$$

с некоторыми постоянными коэффициентами C_k ($k = 1, \dots, n$).

Теорема 3.10. Общее решение неоднородной системы (3.2) есть сумма общего решения соответствующей ей однородной системы (3.3) и частного решения неоднородной системы (3.2)

$$x(t) = x_*(t) + \sum_{k=1}^n C_k x_k(t),$$

где $x_*(t)$ – частное решение неоднородной системы (3.2), определенное на промежутке T , $x_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, – фундаментальная система решений соответствующей однородной системы (3.3), определенная в том же промежутке, C_k , $k = 1, \dots, n$ – некоторые постоянные.

Важно отметить, что теоремы 3.9, 3.10, несмотря на достаточный общий характер, не только играют важнейшую роль в теории ОДУ, но и указывают путь решения систем линейных ОДУ с переменными коэффициентами.

3.3. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

Системой линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами названа система

$$\dot{x} = Ax, \quad (3.10)$$

Определение 3.4. Линейно независимую в промежутке $T \subseteq R$ систему из n вектор-функций вида (3.8), каждая из которых является в нем решением однородной системы n линейных ОДУ (3.3), называют *фундаментальной системой решений* для (3.3) в этом промежутке.

Из данного утверждения вытекает следующая теорема.

Теорема 3.8. *Фундаментальные системы решений существуют.*

Доказательство: Пусть $i, k = 1, \dots, n$ и числа

$$b_{ik} = \begin{pmatrix} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{pmatrix}$$

образуют единичную матрицу $E = (b_{ik})$ размера n , определитель которой равен 1.

Рассмотрим n решений однородной системы (3.3)

$$x_k(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n,$$

которые определены в некотором промежутке $T \subseteq R$ и в точке $t_0 \in T$ удовлетворяют начальным условиям $x_i^{(k)}(t_0) = b_{ik}$, $i, k = 1, \dots, n$. Тогда получим $W(t_0) = \det E = 1 \neq 0$, т. е. $W(t) \neq 0$ в промежутке T . На основании (3.5) и определения 3.1 следует, что эти решения линейно независимы в промежутке T и, согласно определению 3.2, образуют в нем фундаментальную систему решений для системы (3.3).

Определив понятие фундаментальной системы решений, мы можем сформулировать теорему о структуре общего решения как системы (3.1), так и системы линейных неоднородных ОДУ вида (3.2), которую также называют нормальной неоднородной системой линейных ОДУ вида (3.2) с переменными коэффициентами.

Общее решение нормальной системы из n ОДУ включает n произвольных постоянных C_k ($k = 1, \dots, n$). Аналогичная ситуация уже отмечалась при изучении уравнений n -го порядка (см. гл. 2). Следующая теорема позволяет не только указать структуру общего решения однородной системы вида (3.3), но и установить, что в случае задачи Коши для системы линейных ОДУ эти постоянные определяются однозначно.

Приступим к основной задаче данного параграфа – алгоритму отыскания частного решения $u(t)$. Здесь следует различать два основных случая.

Случай 1. "Отсутствие резонанса". Этот случай определяется условием: μ не является корнем характеристического уравнения (2.25).

Случай 2. "Резонанс" определяется условием $\mu = \lambda_j$, где λ_j – корень характеристического уравнения (2.25). Здесь следует различать два подслучая.

2a) $\mu = \lambda_j$, λ_j – простой корень характеристического уравнения;

2b) $\mu = \lambda_j$, λ_j – корень кратности k_j характеристического уравнения (2.25).

Разберем последовательно эти способы. При этом сначала достаточно рассмотреть тот вариант, если

$$f(t) = e^{\mu t} Q_m(t),$$

где, как и ранее, $Q_m(t)$ – многочлен степени m . Действительно, если

$f(t) = \sum_{j=1}^k f_j(t)$, то частное решение $u(t)$ уравнения (2.24) с такой правой частью можно написать в виде

$$u(t) = \sum_{j=1}^k u_j(t),$$

где $u_j(t)$ – частное решение уравнения $Lx = f_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Нерезонансный случай

Теорема 2.6. *Частное решение уравнения (2.24), если $f(t) = e^{\mu t} Q_m(t)$, $P(\mu) \neq 0$, $m \in N$, можно искать в следующем виде*

$$u(t) = e^{\mu t} B_m(t),$$

где $B_m(t)$ – многочлен той же степени, что и $Q_m(t)$

$$B_m(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \dots + b_1 t + b_0,$$

$b_0, b_1, \dots, b_m \in R(C)$ и подлежат определению после подстановки в уравнение (2.24).

Иногда этот метод называют методом неопределенных коэффициентов. Теорему 2.6 удобно доказывать, используя метод математической индукции.

Пусть $m = 0$, т. е. $Q_0(t) = q_0 e^{\mu t}$, частное решение будем искать в виде $u_0(t) = b_0 e^{\mu t}$. Элементарно проверяется, что $u^{(j)}(t) = \mu^j b_0 e^{\mu t}$ и поэтому

$$Lu_0 = b_0 P(\mu) e^{\mu t} = q_0 e^{\mu t}.$$

Откуда находим, что

$$b_0 = \frac{q_0}{P(\mu)}, \quad P(\mu) \neq 0.$$

Пусть теперь утверждение теоремы верно при некотором $m = k$. Покажем, что этот способ отыскания частного решения будет справедлив и при $m = k + 1$.

Замечание 2.2. Пусть $v(t) = t^k e^{\mu t}$. Тогда

$$Lv(t) = e^{\mu t} P(\mu) t^k + e^{\mu t} R_{k-1}(t),$$

где $R_{k-1}(t)$ – многочлен степени $k - 1$. Действительно,

$$(t^k e^{\mu t})^{(j)} = \mu^j e^{\mu t} t^k + \sum_{p=1}^j C_j^p (t^k)^{(p)} (e^{\mu t})^{j-p}.$$

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение

$$Lx = e^{\mu t} Q_{k+1}(t),$$

где $Q_{k+1}(t) = q_{k+1} t^{k+1} + Q_k(t)$. Будем искать частное решение в специальном виде

$$u(t) = b_{k+1} t^{k+1} e^{\mu t} + v(t).$$

При таком выборе $u(t)$ получаем

$$Lu(t) = b_{k+1} L(t^{k+1} e^{\mu t}) + Lv = q_{k+1} t^{k+1} e^{\mu t} + e^{\mu t} Q_k(t).$$

В силу замечания 1 последнее уравнение для определения $v(t)$ можно переписать в следующем виде

$$Lv = e^{\mu t} \overline{Q}_k(t),$$

Сформулируем в виде теоремы некоторые основные свойства определителя (3.7).

Теорема 3.6. Если система вектор-функций

$$x_k(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (3.8)$$

линейно зависима в некотором промежутке $T \subseteq R$, то определитель Вронского $W(t) \equiv 0$ для любого $t \in T$.

В качестве доказательства данного утверждения необходимо вспомнить условия линейной зависимости вектор-функций $x_k(t)$ ($k = \overline{1, n}$) в промежутке T , которые были сформулированы в определении 3.2. Согласно этому определению, один из коэффициентов в (3.5) отличается от нуля ($\lambda_j \neq 0$). Отсюда следует, что вектор-функция $x_j(t)$ будет линейной комбинацией остальных вектор-функций

$$x_j = \alpha_1 x_1(t) + \dots + \alpha_{j-1} x_{j-1}(t) + \alpha_{j+1} x_{j+1}(t) + \dots + \alpha_n x_n(t), \quad t \in T,$$

где соответствующие α_j будут пересчитываться через λ_j по следующей формуле

$$\alpha_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_j}.$$

Отсюда j -й столбец определителя $W(t)$ будет линейной комбинацией остальных столбцов. Откуда следует справедливость утверждения.

Можно сформулировать еще одно утверждение, которое вытекает из определения 3.2 и определения 3.3.

Теорема 3.7. Если определитель $W(t)$ для системы вектор-функций (3.8), являющихся в промежутке $T \subseteq R$ решениями однородной системы линейных ОДУ (3.3), равен нулю хотя бы в одной точке $t_0 \in T$, то эта система вектор-функций линейно зависима в промежутке T .

Из утверждения данной теоремы вытекает следующее.

Следствие 3.1. Если определитель $W(t)$, составленный из вектор-функций, являющихся решениями однородной системы линейных однородных дифференциальных уравнений (3.3) в некотором промежутке T , равен нулю в одной точке $t_0 \in T$, т. е. $W(t_0) = 0$, то он тождественно равен нулю в этом промежутке ($W(t) \equiv 0$ для любого $t \in T$).

Одним из важнейших понятий в теории однородных систем линейных ОДУ является понятие фундаментальной системы решений.

Если же такой системы чисел не существует, то систему вектор-функций (3.4) называют *линейно независимой* в промежутке T .

3.2. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений. Структура решений однородной и неоднородной линейных систем

Если требуется найти решение системы (3.2), удовлетворяющее условию $y(t_0) = y_0$, то говорят, что для системы (3.2) поставлена начальная задача или задача Коши и записывают ее в виде

$$\begin{aligned} X' &= A(t)x + g(t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Теорема 3.5. Пусть матрица $A(t)$ и вектор-функция $g(t)$ зависят от t непрерывно, где $t \in (t_0 - a; t_0 + a)$. Тогда задача Коши (3.6) имеет единственное решение.

Замечание 3.1. Вспомним, что матрица $A(t)$ непрерывно зависит от t , если любой элемент матрицы $A(t)$ является непрерывной функцией переменной t . Аналогичным образом определяется непрерывность вектор-функции $g(t)$.

Пусть задана система n вектор-функций

$$x_1(t), \dots, x_k(t), \dots, x_n(t), \quad x_k(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n},$$

определенная в промежутке $T \subseteq R$ числовой прямой R . Здесь первый индекс у скалярной функции $x_{ik}(t)$ означает номер координатной функции функции вектор-функции x_k , а второй – номер этой вектор-функции.

Определение 3.3. Определитель

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

называют *определителем Вронского* системы вектор-функций $x_1(t), \dots, x_k(t), \dots, x_n(t)$.

где $\overline{Q}_k(t)$ – многочлен степени k . Действительно, в силу замечания

$$b_k L(t^{k+1}e^{\mu t}) = b_k t^{k+1}e^{\mu t} P(\mu) + e^{\mu t} R_k(t),$$

и если теперь положить

$$b_{k+1} = \frac{q_k}{P(\mu)},$$

то останутся лишь слагаемые вида $\alpha_j t^j e^{\mu t}$, где $j < k + 1$. Слагаемые, содержащие члены $t^{k+1}e^{\mu t}$, сократятся. Для неоднородного уравнения, получившегося после такого сокращения, справедливо предположение.

Проиллюстрируем этот метод на примерах.

Пример 2.17. Рассмотрим уравнение

$$Lx = \ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^t(t + 1) + 2 \cos t,$$

у которого требуется найти общее решение.

Для этого рассмотрим сначала соответствующее однородное уравнение

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0.$$

Соответствующее ему характеристическое уравнение имеет следующий вид

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Оно имеет двукратный корень $\lambda = -1$. Общее решение однородного дифференциального уравнения может быть записано в виде

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t} \text{ (почему?)},$$

где $C_1, C_2 \in R$.

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения $u(t)$ рассмотрим два вспомогательных уравнения

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^t(t + 1), \quad (2.26)$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 2 \cos t. \quad (2.27)$$

Рассмотрим уравнение (2.26). Частное решение этого уравнения, следуя методу изложенному выше, будем искать в следующем виде

$$u_1(t) = e^t(b_1t + b_0), \quad b_1, b_0 \in R.$$

Подчеркнем, что здесь $\mu = 1$, т. е. μ отлично от корня характеристического уравнения. В таком случае

$$\dot{u}_1(t) = e^t(b_1t + b_1 + b_0), \quad \ddot{u}_1(t) = e^t(b_1t + 2b_1 + b_0).$$

Подстановка $u_1(t)$, $\dot{u}_1(t)$, $\ddot{u}_1(t)$ в уравнение (2.26) и сокращение на e^t приводит к равенству

$$b_1t + (2b_1 + b_0) + 2(b_1t + b_1 + b_0) + b_1t + b_0 = t + 1,$$

которое должно быть выполнено при всех $t \in R$. Следовательно,

$$4b_1 = 1, \quad 4b_1 + 4b_0 = 1,$$

то есть $b_1 = \frac{1}{4}$, $b_0 = 0$. Итак,

$$u_1(t) = \frac{1}{4}te^t.$$

Найдем теперь частное решение уравнения (2.27). Его правую часть можно переписать в виде $e^{it} + e^{-it}$. Понятно, что числа $\pm i$ не являются корнями характеристического уравнения. Поэтому частое решение уравнения

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{it}$$

можно написать в виде

$$u_{21}(t) = \alpha e^{it}.$$

При этом неопределенный коэффициент α можно найти из уравнения

$$2i\alpha = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i.$$

Частное решение второго

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-it}$$

Доказательство: Пусть $x_1(t), x_2(t)$ – решения системы (3.3), т. е.

$$x'_1 = A(t)x_1, \quad x'_2 = A(t)x_2.$$

Рассмотрим линейную комбинацию этих решений

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t), \quad \alpha, \beta \in R.$$

В результате получаем, что $x' = \alpha x'_1 + \beta x'_2 = \alpha A x_1 + \beta A x_2 = A(\alpha x_1 + \beta x_2)$, следовательно $\alpha x_1 + \beta x_2$ также являются решением системы (3.3).

Теорема 3.2. Разность любых двух решений неоднородной системы ОДУ (3.2) есть решение однородной системы (3.3).

Теорема 3.3. Сумма решений неоднородной системы (3.2) и решений соответствующей ей однородной системы (3.3) есть решение неоднородной системы (3.2).

Теорема 3.4. Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – решения системы линейных ОДУ соответственно $x'_1 = A(t)x_1 + g(t)$ и $x'_2 = A(t)x_2 + f(t)$, то $x = x_1 + x_2$ является решением системы линейных ОДУ

$$x' = A(t)x + g(t) + f(t).$$

Доказательства теорем 3.2 – 3.4 производятся непосредственной постановкой и проверкой условий теоремы.

Рассмотрим вектор-функции

$$x_1(t), \dots, x_i(t), \dots, x_n(t), \quad (3.4)$$

не обязательно являющиеся решениями систем (3.2) или (3.3).

Определение 3.2. Систему вектор-функций (3.4) называют *линейно зависимой* в некотором промежутке $T \subseteq R$ числовой прямой R , если существует такая система чисел

$$\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n \in R, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \neq 0,$$

что имеет место тождество

$$\lambda_1 x_1(t) + \dots + \lambda_i x_i(t) + \dots + \lambda_n x_n(t) \equiv 0 \quad \forall t \in T. \quad (3.5)$$

Глава 3

Системы линейных дифференциальных уравнений

3.1. Определение и основные свойства решений

Определение 3.1. Системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) называют систему вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + g_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.1)$$

где $x_i(t)$ – неизвестные функции, $a_{ij}(t)$ и $g_i(t)$ – известные функции аргумента $t \in T$, непрерывные в некотором промежутке $T \in R$. Для линейной системы (3.1) в области $D = T \times R^n$ выполнены все условия теоремы Коши о существовании и единственности решения.

Системы (ОДУ) (3.1) допускают более короткую и простую форму записи в векторно-матричных обозначениях. Введем обозначения

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

Здесь $x(t)$ и $g(t)$ – вектор-функции, $A(t)$ – квадратная матрица, называемая матрицей системы ОДУ. Обозначим также $x' = \frac{dx}{dt}$. Тогда систему (3.1) можно записать в виде векторного уравнения

$$x' = A(t)x + g(t). \quad (3.2)$$

Если $g(t) \equiv 0$ в T , то

$$x' = A(t)x. \quad (3.3)$$

Систему (3.3) называют *нормальной однородной системой линейных ОДУ*.

Ниже приведем утверждения, устанавливающие основные свойства однородных и неоднородных систем ОДУ.

Теорема 3.1. *Линейная комбинация решений однородной системы (3.3) также является решением этой системы.*

обозначим через $u_{22}(t)$. При этом $u_{22}(t) = \overline{u_{21}(t)}$, т. е. комплексносопряженная функция. Итак,

$$u_2(t) = u_{21}(t) + u_{22}(t) = -\frac{1}{2}ie^{it} + \frac{1}{2}ie^{it}$$

в действительной форме

$$u_2(t) = \sin t.$$

Итак, общее решение уравнения, рассмотренного в данном примере,

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t} - \frac{t}{4}e^t + \sin t.$$

Резонансный случай

Теорема 2.7. Пусть в уравнении (2.24) $f(t) = e^{\mu t}Q_m(t)$, где μ – простой корень характеристического уравнения (2.13) ($P(\mu) = 0$, $P'(\lambda)|_{\lambda=\mu} \neq 0$). Тогда частное решение данного неоднородного уравнения можно искать в следующем виде

$$u(t) = e^{\mu t}tB_m(t),$$

где $B_m(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \dots + b_1 t + b_0$, т. е. $B_m(t)$ – многочлен той же степени, что и $Q_m(t)$.

В доказательстве теоремы 2.7, как и теоремы 2.6, можно использовать метод математической индукции.

Пусть сначала $m = 0$, т. е. правая часть имеет вид $q_0 e^{\mu t}$. Тогда $u(t) = b_0 t e^{\mu t}$. При этом

$$u^{(k)}(t) = b_0 e^{\mu t}(\mu^k t + k\mu^{k-1}), \quad L(b_0 t e^{\mu t}) = b_0 e^{\mu t}(P(\mu)t + P'(\mu)).$$

Учитывая, что $P(\mu) = 0$, а $P'(\mu) \neq 0$, находим $b_0 = \frac{q_0}{P'(\mu)}$.

Пусть утверждение теоремы 2.7 справедливо при некотором натуральном $m = k$. Тогда оно остается верным и при $m = k + 1$.

Действительно, рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение

$$Lx = e^{\mu t}Q_{k+1}(t), \quad (2.28)$$

где $Q_{k+1}(t) = q_{k+1}t^{k+1} + Q_k(t)$, а $Q_k(t)$ – многочлен степени k . Частное решение будем искать в виде

$$u(t) = b_{k+1}t^{k+2}e^{\mu t} + v.$$

Уравнение (2.28) принимает вид

$$Lv + b_{k+1}L(t^{k+2}e^{\mu t}) = q_{k+1}e^{\mu t}t^{k+1} + e^{\mu t}Q_k(t).$$

При этом $(t^{k+2}e^{\mu t})^j = \sum_{p=0}^j C_j^p(t^{k+2})^{(p)}(e^{\mu t})^{j-p}$ в силу формулы Лейбница для производной произведения. Поэтому

$$Lv + b_{k+1}e^{\mu t}P(\mu)t^{k+2} + b_{k+1}e^{\mu t}P'(\mu)t^{k+1} + e^{\mu t}P_k(t) = q_{k+1}e^{\mu t}t^{k+1} + e^{\mu t}Q_k(t).$$

Если теперь положить $b_{k+1} = \frac{q_{k+1}}{P'(\mu)}$, то $v(t)$ получим уравнение вида

$$Lv = e^{\mu t}Q_k(t),$$

где $Q_k(t)$ – многочлен уже степени k и в силу индукционного предположения теорема доказана.

Теорема 2.8. Пусть в уравнении (2.24) $f(t) = e^{\mu t}Q_m(t)$, где $Q_m(t)$ – многочлен степени m , а μ – корень кратности k . Тогда частное решение уравнения (2.24) можно искать в следующей форме

$$u(t) = e^{\mu t}t^k B_m(t),$$

где $B_m(t)$ – многочлен степени m .

Доказательство теоремы 2.7 повторяет основные моменты доказательства теоремы 2.6. При его реализации следует учесть справедливость равенств

$$P(\mu) = 0, \quad P'(\mu) = 0, \quad P^{(k-1)}(\mu) = 0,$$

но $P^{(k)}(\mu) \neq 0$, т. к. по предположению μ – корень кратности k характеристического уравнения (2.13).

Упражнение 1.6. Доказать теорему 2.7.

Пример 2.18. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = te^t.$$

$$2.12. \quad \ddot{x} - 2\dot{x} + x = \frac{2}{te^{-t}}.$$

$$2.13. \quad \ddot{x} + x = \frac{2}{\cos^2 t}.$$

$$2.14. \quad \ddot{x} - x = \frac{4t^2 + 1}{x\sqrt{t}}.$$

$$2.15. \quad \ddot{x} - 2\dot{x} + x = \frac{t^2 + 2t + 2}{t^3}.$$

$$2.16. \quad t^3(\ddot{x} - x) = t^2 - 2.$$

Указание: В задачах 2.1 – 2.8 можно применить метод п. 2.9, где частное решение находится в специальной форме. Напомним, что этот метод применим, когда правая часть является квазиполиномом. В остальных задачах правая часть не является квазиполиномом. Поэтому для решения данных задач следует применять метод вариации произвольных постоянных, изложенный в п. 2.10.

Интегрируя, имеем

$$C_1(t) = -\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \ln(e^t + 1) + C_1, \quad C_2(t) = -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2} \ln(e^t + 1) + C_2.$$

Подставляя выражение $C_1(t), C_2(t)$ в формулу для поиска решения, получаем окончательный ответ

$$x = -\frac{1}{2}[(t - \ln(e^t + 1))e^t + 1 - (\ln(e^t + 1))e^{-t}] + C_1e^t + C_2e^{-t}.$$

Пример 2.22. Решить следующее уравнение $\ddot{x} + x = \frac{1}{\sin x}$. Общее решение может быть записано в виде $x = C_1(t) \cos t + C_2 \sin t$. Соответствующая система

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 \cos t + \dot{C}_2 \sin t &= 0 \\ \dot{C}_2 \cos t - \dot{C}_1 \sin t &= \frac{1}{\sin t}. \end{aligned}$$

Откуда находим, что $C_2 = \ln |\sin t| + C_4$, $C_1 = -t + C_4$. Получаем ответ в окончательном виде: $x(t) = (-t + C_3) \cos t + (\ln |\sin t| + C_4) \sin t$.

2.12. Задачи для самостоятельного решения

Найти решения уравнений:

2.1. $x^{(III)} - 3\ddot{x} + 3\dot{x} - x = e^t + 2 \cos t$.

2.2. $x^{(III)} + x = te^{-t}$.

2.3. $x^{(IV)} - 2\ddot{x} + x = 2 \cos t$.

2.4. $x^{(IV)} + 2\ddot{x} + x = 2 \cos t$.

2.5. $\ddot{x} - 3\dot{x} = e^{3t} - 18t$.

2.6. $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = te^{-t}$.

2.7. $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 4te^t$.

2.8. $\ddot{x} - x = 4 \operatorname{sh}(t)$.

2.9. $\ddot{x} + 4x = \frac{1}{\cos 2t}$.

2.10. $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 3e^{-t}\sqrt{t+1}$.

2.11. $\ddot{x} + x = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$.

Здесь $\mu = 1$ корень кратности 2 характеристического уравнения $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Поэтому частное решение уравнения следует искать в виде

$$u(t) = e^t t^2 (b_1 t + b_0).$$

Уместно подчеркнуть, что здесь $Q_1(t) = t$, т. е. $q_1 = 1, q_0 = 0$. Поэтому $B_1(t)$ — это многочлен первой степени. Откуда получаем, что

$$\begin{aligned} \dot{u} &= e^t (b_1 t^3 + (3b_1 + b_0)t^2 + 2b_0 t), \\ \ddot{u} &= e^t (b_1 t^3 + (6b_1 + b_0)t^2 + (6b_1 + 4b_0)t + 2b_0). \end{aligned}$$

После подстановки и сокращения правой и левой части полученного равенства получаем, что

$$\begin{aligned} b_1 t^3 + (6b_1 + b_0)t^2 + (6b_1 + 4b_0)t + 2b_0 - 2b_1 t^3 - \\ - 2(3b_1 + b_0)t^2 - 4b_0 t + b_1 t^3 + b_0 t^2 = t. \end{aligned}$$

После элементарных преобразований в левой части получаем

$$2b_0 = 0, \quad 6b_1 + 4b_0 - 4b_0 = 1.$$

Откуда $b_0 = 0, b_1 = \frac{1}{6}$. Итак

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^t + \frac{1}{6}t^3 e^t.$$

Пример 2.19. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \alpha \cos t, \quad \omega, \alpha \in R_+.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

как известно, $x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$. Если $\omega \neq 1$, то частное решение

$$u(t) = (\omega^2 - 1)^{-1} \alpha \cos t.$$

Иная, ситуация возникает при резонансе, т. е. при $\omega = 1$. В этом случае

$$u(t) = \alpha t \sin t.$$

При $\omega = 1$ общее решение неоднородного уравнения

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \alpha t \sin t.$$

Пусть по-прежнему $\omega = 1$ и рассматриваемое уравнение дополнено начальными условиями

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

В этом случае задача Коши имеет решение

$$x(t) = \cos t + \alpha t \sin t.$$

Постоянные C_1, C_2 определяются из начальных условий

$$x(0) = C_1 = 1, \quad \dot{x}(0) = ((-C_1 \sin t + C_2 \cos t) + \alpha(\sin t + t \cos t))|_{t=0} = C_2 = 0.$$

2.10. Метод вариации произвольных постоянных для линейных уравнений второго порядка

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение второго порядка

$$Lx = \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = f(t), \quad (2.29)$$

где $p(t), q(t), f(t)$ – заданные функции переменного t . А также линейное однородное дифференциальное уравнение

$$Lx = \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0. \quad (2.30)$$

Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ – два линейно независимых решения уравнения (2.30). Тогда общее решение данного дифференциального уравнения (2.30)

$$x(t) = C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t), \quad (2.31)$$

где C_1, C_2 – произвольные действительные (или комплексные) постоянные. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (2.29) будем искать в форме (2.31), где произвольные постоянные C_1, C_2 заменяются на независимые функции $a_1(t), a_2(t)$.

$$x(t) = a_1(t) \varphi_1(t) + a_2(t) \varphi_2(t). \quad (2.32)$$

Так как $L_0(\varphi_1) = \dots = L_0(\varphi_n) = 0$, то окончательно $\dot{C}_1(t), \dots, \dot{C}_n(t)$ должны удовлетворять при $t \in (a, b)$ следующим условиям

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 \varphi_1 + \dots + \dot{C}_n \varphi_n &= 0, \\ \dots \\ \dot{C}_1 \varphi_1^{n-2} + \dots + \dot{C}_n \varphi_n^{n-2} &= 0, \\ \dot{C}_1 \varphi_1^{n-1} + \dots + \dot{C}_n \varphi_n^{n-1} &= b(t). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Данная система есть линейная алгебраическая система уравнений для определения $\dot{C}_1, \dots, \dot{C}_n$, определитель которой является определителем Вронского $W(t)$. Так как $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ линейно независимы, то $W(t) \neq 0$ при $t \in (a, b)$. Решая (2.32) по формулам Крамера, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.9. Дифференциальное уравнение (2.8) имеет решение

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \int_{t_0}^t \frac{W_{n_i}(t)}{W(t)} b(t) dt, \quad (t_0, t \in (a, b)), \quad (2.33)$$

где $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения; $W(t)$ – её определитель Вронского; W_{n_i} – алгебраическое дополнение элемента определителя Вронского на пересечении n -ой строки и i -го столбца.

Замечание 2.3. Хотелось бы отметить, что метод вариации применим для неоднородного уравнения, когда правая часть записана как в специальном виде, так и в общем случае. Данный метод является универсальным.

Ниже приведен ряд примеров на применение метода вариации произвольных постоянных.

Пример 2.21. Решить следующее уравнение $\ddot{x} - x = \frac{e^t}{e^t + 1}$. Соответствующее однородное уравнение $\ddot{x} - x = 0$ имеет фундаментальную систему решений $x_1 = e^t$, $x_2 = e^{-t}$. Следовательно, общее решение уравнения имеем в виде $x = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-t}$. Составим систему

$$\begin{aligned} \dot{C}_1(t)e^t + \dot{C}_2(t)e^{-t} &= 0, \\ \dot{C}_1(t)e^t - \dot{C}_2(t)e^{-t} &= \frac{e^t}{e^t + 1}. \end{aligned}$$

Решая её, находим

$$\dot{C}_1(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{e^t + 1}, \quad \dot{C}_2(t) = -\frac{1}{2} \frac{e^{2t}}{e^t + 1}.$$

2.11. Метод вариации произвольных постоянных в общей ситуации

В общем случае для построения частного решения уравнения (2.8) используют метод вариации произвольных постоянных, иногда называемый методом Лагранжа.

Общее решение однородного уравнения (2.9) может быть записано в следующем виде

$$x(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \dots + C_n\varphi_n(t),$$

где C_1, \dots, C_n – произвольные постоянные, а $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ – фундаментальная система решений однородного уравнения (2.9). Согласно этому методу будем предполагать, что произвольные постоянные C_1, \dots, C_n изменяются на некотором интервале (a, b) , то есть $C_1 = C_1(t)$, $C_2 = C_2(t), \dots, C_n = C_n(t)$. Вид $x(t)$ объясняет название метода. Вычисляем последовательно производные функции $x(t)$ до порядка n включительно, налагая дополнительные условия на первые производные функции $C_1(t), \dots, C_n(t)$. В результате имеем

$$\dot{x}(t) = C_1\dot{\varphi}_1 + \dots + C_n\dot{\varphi}_n + \dot{C}_1\varphi_1 + \dots + \dot{C}_n\varphi_n.$$

Полагаем $\dot{C}_1\varphi_1 + \dots + \dot{C}_n\varphi_n = 0$. Тогда

$$\ddot{x}(t) = C_1\ddot{\varphi}_1 + \dots + C_n\ddot{\varphi}_n + \dot{C}_1\dot{\varphi}_1 + \dots + \dot{C}_n\dot{\varphi}_n$$

и снова полагаем $\dot{C}_1\dot{\varphi}_1 + \dots + \dot{C}_n\dot{\varphi}_n = 0$. Приравнявая при вычислении каждой производной до порядка $n-1$ включительно члены, содержащие $\dot{C}_1, \dots, \dot{C}_n$ нулю, получим

$$\begin{aligned} x^{n-1} &= C_1\varphi_1^{n-1} + \dots + C_n\varphi_n^{n-1}, \\ x^n &= C_1\varphi_1^n + \dots + C_n\varphi_n^n + \dot{C}_1\varphi_1^{n-1} + \dots + \dot{C}_n\varphi_n^{n-1}. \end{aligned}$$

Так как $x(t)$ должна быть решением уравнения (2.8), то, учитывая полученные выражения, находим

$$L_0(x) = C_1L_0(\varphi_1) + \dots + C_nL_0(\varphi_n) + \dot{C}_1\varphi_1^{n-1} + \dots + \dot{C}_n\varphi_n^{n-1} = b(t).$$

Следовательно,

$$\dot{x}(t) = \dot{a}_1(t)\varphi_1(t) + \dot{a}_2(t)\varphi_2(t) + a_1(t)\dot{\varphi}_1(t) + a_2(t)\dot{\varphi}_2(t).$$

Будем считать, что $a_1(t), a_2(t)$ выбираются таким образом, чтобы при всех рассматриваемых t было выполнено равенство

$$a_1(t)\dot{\varphi}_1(t) + \dot{a}_2(t)\varphi_2(t) = 0.$$

Поэтому в нашем случае

$$\ddot{x}(t) = a_1(t)\ddot{\varphi}_1(t) + a_2(t)\ddot{\varphi}_2(t) + \dot{a}_1(t)\dot{\varphi}_1(t) + \dot{a}_2(t)\dot{\varphi}_2(t).$$

Подстановка функции (2.31) и её производных в уравнение приводит к равенству

$$a_1(t)[\ddot{\varphi}_1(t) + p(t)\dot{\varphi}_1(t) + q(t)\varphi_1(t)] + a_2(t)[\ddot{\varphi}_2(t) + p(t)\dot{\varphi}_2(t) + q(t)\varphi_2(t)] + \dot{a}_1(t)\dot{\varphi}_1(t) + \dot{a}_2(t)\dot{\varphi}_2(t) = f(t).$$

Выражения в обеих квадратных скобках равны 0, так как $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ – решения однородного дифференциального уравнения (2.30). Поэтому получим систему для определения $\dot{a}_1(t), \dot{a}_2(t)$ следующего вида

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1(t)\dot{a}_1(t) + \dot{\varphi}_2(t)\dot{a}_2(t) = 0, \\ \dot{\varphi}_1(t)\dot{a}_1(t) + \dot{\varphi}_2(t)\dot{a}_2(t) = f(t). \end{cases}$$

Определитель данной системы

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \dot{\varphi}_1(t) & \dot{\varphi}_2(t) \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ линейно независимы. Используя правило Крамера, находим, что

$$\begin{aligned} \dot{a}_1(t) &= \psi_1(t), \quad \dot{a}_2(t) = \psi_2(t), \\ \psi_1(t) &= -\frac{f(t)\varphi_2(t)}{W}; \quad \psi_2(t) = \frac{f(t)\varphi_1(t)}{W}, \end{aligned}$$

откуда

$$a_1(t) = \int_{t_0}^t \psi_1(s)ds + \beta_1, \quad a_2(t) = \int_{t_0}^t \psi_2(s)ds + \beta_2.$$

Формулу (2.32) с учетом данных замечаний можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned}x(t) &= u(t) + v(t), \\u(t) &= \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t), \\v(t) &= \varphi_1(t) \int_{t_0}^t \psi_1(s) ds + \varphi_2(t) \int_{t_0}^t \psi_2(s) ds.\end{aligned}$$

При таком варианте записи формулы (2.32) функция $u(t)$ – общее решение однородного дифференциального уравнения (2.30), а $v(t)$ – частное решение неоднородного уравнения (2.29).

Метод вариации обычно используется при решении неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f(t),$$

где $p, q \in R(C)$, а $f(t)$ – известная функция, но не обязательно квазиполином.

Пример 2.19. При $t > 0$ решить неоднородное уравнение

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \frac{e^t}{t}.$$

Однородное уравнение $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$ имеет два линейно независимых решения $\varphi_1(t) = e^t$, $\varphi_2(t) = te^t$. Решение неоднородного дифференциального уравнения будем искать в форме (2.32)

$$x(t) = a_1(t)e^t + a_2(t)te^t.$$

Для $\dot{a}_1(t), \dot{a}_2(t)$ получаем систему из двух уравнений

$$\begin{aligned}\dot{a}_1(t)e^t + \dot{a}_2(t)te^t &= 0, \\ \dot{a}_1(t)e^t + \dot{a}_2(t)(te^t + e^t) &= -\frac{e^t}{t}.\end{aligned}$$

Вычитая из второго уравнения первое, находим

$$\begin{aligned}\dot{a}_2(t) &= \frac{1}{t}, \quad a_2(t) = \ln t + \alpha_2, \\ \dot{a}_1(t) &= -1, \quad a_1(t) = -t + \alpha_1.\end{aligned}$$

Итак,

$$x(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2 te^t - te^t + te^t \ln t$$

– общее решение данного уравнения.

Этот метод может применяться не только для неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пример 2.20. Пусть $t > 0$. Рассмотрим уравнение

$$t^2 \ddot{x} + t\dot{x} - 4x = \frac{4}{t^3}.$$

Соответствующее однородное уравнение

$$t^2 \ddot{x} + t\dot{x} - 4x = 0$$

– уравнение Эйлера, у которого есть два линейно независимых решения

$$\varphi_1(t) = t^2, \quad \varphi_2(t) = t^{-2}.$$

Его общее решение

$$x(t) = C_1 t^2 + C_2 t^{-2}.$$

Решение неоднородного уравнения ищем в форме (2.31)

$$x(t) = a_1(t)t^2 + a_2(t)t^{-2},$$

где $a_1(t), a_2(t)$ определяются как решения системы

$$\begin{aligned}\dot{a}_1(t)t^2 + \dot{a}_2(t)t^{-2} &= 0, \\ t^2(2\dot{a}_1(t)t - 2\dot{a}_2(t)\frac{1}{t^3}) &= \frac{4}{t^3}.\end{aligned}$$

Откуда находим

$$\begin{aligned}\dot{a}_1(t) &= \frac{1}{t_0}, \quad \dot{a}_2(t) = -\frac{1}{t^2}, \\ a_1(t) &= -\frac{1}{5t^5} + \alpha_1, \quad a_2(t) = \frac{1}{t} + \alpha_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in R.\end{aligned}$$

Итак,

$$x(t) = \alpha_1 t^2 + \alpha_2 t^{-2} + \frac{4}{5} t^{-3}.$$