

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

И. П. Иродова

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ОПЕРАТОРЫ В КУРСЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

*Рекомендовано
научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальности Математика*

Ярославль 2010

УДК 517
ББК В162я73
И 83

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2010 года*

Рецензенты:

кандидат физ.-мат. наук, доцент Е. Р. Матвеев;
кафедра математического анализа Ярославского государственного
педагогического университета им. К. Д. Ушинского

Иродова, И. П. Линейные функционалы и операторы в курсе функцио-
И 83 нального анализа: Учеб. пособие / И. П. Иродова; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Де-
мидова. — Ярославль: ЯрГУ, 2010. — 124 с.
ISBN 978-5-8397-0724-5

Пособие содержит основные и наиболее важные понятия теории линейных функционалов и операторов. Изложение ведется в форме задач и упражнений. Приводится достаточно большое число примеров с подробными решениями.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 010100.62 Математика, по специальности 010101.65 Математика (дисциплина "Функциональный анализ и интегральные уравнения", блок ОПД), очной формы обучения.

Сборник подготовлен с использованием издательской системы L^AT_EX.

Библиогр.: 9 назв.

ISBN 978-5-8397-0724-5

© Ярославский
государственный
университет
им. П. Г. Демидова, 2010

Оглавление

Предисловие	2
1. Линейные нормированные пространства	5
2. Непрерывные линейные функционалы	13
3. Норма функционала	18
4. Общий вид функционалов в различных пространствах	23
5. Сопряженные пространства	31
6. Сильная и слабая сходимость последовательности функционалов	35
7. Теорема Хана–Банаха	37
8. Линейные непрерывные операторы	45
9. Норма оператора и примеры ее вычисления	50
10. Пространство линейных ограниченных операторов	58
11. Обратные операторы	66
12. Сопряженные операторы	76
13. Компактные операторы	81
14. Спектр оператора	89
Приложение. Тестовые задания	88
Литература	119

Предисловие

Соединение идей и методов алгебры, геометрии, топологии и анализа дало новую отрасль математической науки — функциональный анализ. Как отмечается в [6], "его методы с успехом используются во многих разделах современной теоретической и прикладной математики. Более того, развитие таких дисциплин, как дифференциальные уравнения, теория управления, методы вычислений и др. вряд ли было бы столь успешным, если бы при этом не использовались идеи и методы функционального анализа." Это объясняет то обстоятельство, что функциональный анализ - одна из базовых дисциплин, которую изучают студенты, обучающиеся по специальности "Математика".

Курс "Функциональный анализ и интегральные уравнения" довольно сложен. Это связано с высокой степенью абстракции вводимых понятий. Именно абстрактность позволяет исследовать далекие на первый взгляд друг от друга вопросы. Поэтому необходимо научиться применять методы функционального анализа, а также освоить методику решения задач.

Настоящее учебное пособие отличается от учебной литературы, опубликованной по этой теме. Главное отличие состоит в том, что в пособии кроме необходимого кратко изложенного теоретического материала собрано большое число задач с подробными решениями. Следует отметить, что хотя задачи подобраны разной степени сложности, предпочтение отдается вычислительным задачам. Причина такого выбора заключается в желании помочь студенту научиться решать задачи. Здесь уместно напомнить высказывание А.Нивена - "Математику нельзя изучать, наблюдая, как это делает сосед".

Учебное пособие разделено на параграфы. Каждый параграф начинается с необходимых определений. Часть теоретического материала содержится в задачах. В пособии отсутствуют полные математические доказательства, но приведены ссылки на литературу, где их можно найти.

В приложении даны индивидуальные задания, которые помогут проверить качество полученных знаний.

§ 1.

Линейные нормированные пространства

Множество L называется **линейным нормированным пространством**, если

1) L – линейное пространство с умножением на вещественные (комплексные) числа;

2) каждому элементу $x \in L$ ставится в соответствие вещественное число $\|x\|$, называемое **нормой**, причем предполагается, что выполняются следующие три условия:

1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ только при $x = 0$;

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ для любого $x \in L$ и любого вещественного или комплексного числа λ ;

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in L$.

Приведем примеры наиболее часто встречающихся нормированных пространств.

1. Пространство l_p^n , $1 \leq p < \infty$. Элементами этого пространства являются упорядоченные наборы из n действительных чисел $x = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 1$. Норма определяется с помощью равенства

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Заметим, что в случае $p = 2$ мы получаем евклидово пространство R^n .

2. Пространство l_∞^n . Элементами пространства, так же как в предыдущем примере, являются упорядоченные наборы из n действительных чисел. Норма определяется по формуле

$$\|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

3. Пространство l_p последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ ($x_k \in R$), удовлетворяющих условию $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, $1 \leq p < \infty$ с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

4. Пространство l_{∞} (иногда обозначают m) последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, удовлетворяющих условию $\sup_k |x_k| < \infty$ с нормой

$$\|x\| = \sup_k |x_k|.$$

5. Пространство сходящихся последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с нормой

$$\|x\| = \sup_k |x_k|.$$

Обозначается это пространство символом c .

6. Пространство c_0 . Элементами этого пространства являются последовательности $x = (x_1, x_2, \dots)$, сходящиеся к нулю. Норма задается как в предыдущем примере.

Продолжим список нормированных пространств. Теперь элементами пространства будут функции (и даже классы функций), а не последовательности.

7. Пространство $C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|.$$

Эта норма называется **равномерной**.

8. Пространство $C^k[a, b]$ k раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \sum_{i=0}^k \max_{t \in [a, b]} |x^{(i)}(t)|.$$

9. Пространство $M[a, b]$ всех ограниченных на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|.$$

10. Пространство $\widetilde{L}_p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$ непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

11. Рассмотрим множество всех функций x , заданных на $[a, b]$, для которых интеграл Лебега

$$\int_{[a,b]} |x(t)|^p dt$$

конечен. Здесь $1 \leq p < \infty$.

Две функции, отличающиеся только на множестве меры нуль, будем считать тождественными. Напомним, что такие функции называются эквивалентными. Положим

$$\|x\| = \left(\int_{[a,b]} |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Полученное пространство обозначается $L_p[a, b]$ и называется пространством Лебега. Отметим, что в отличие от пространства $\widetilde{L}_p[a, b]$ элементами пространства являются не отдельные функции, а классы эквивалентных функций.

12. Пространство $L_\infty[a, b]$. Так же, как в предыдущем примере, будем считать две функции тождественными, если они отличаются лишь на множестве меры нуль. Для функции $x \in L_\infty[a, b]$ определим истинный (или существенный) супремум по формуле

$$vrai \sup_{t \in [a,b]} |x(t)| := \inf_{\alpha} (\mu \{t \in [a, b] : |x(t)| > \alpha\} = 0).$$

Заметим, что для непрерывной функции истинный супремум совпадает с ее максимумом.

Норма в $L_\infty[a, b]$ вводится по формуле

$$\|x\| = vrai \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

Как показывают приведенные выше примеры, на одном и том же линейном пространстве можно по-разному вводить норму. Сравните пространства l_p^n , а также пространства $C[a, b]$ и $\widetilde{L}_p[a, b]$.

Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, заданные на линейном пространстве L , называются **эквивалентными**, если существуют такие константы $a, b > 0$, что $a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$ для всех $x \in L$.

Задача 1.1. Доказать, что если X – конечномерное пространство, то любые две нормы в нем эквивалентны.

В частности, доказать следующее неравенство

$$a\|x\|_{l_q^n} \leq \|x\|_{l_p^n} \leq b\|x\|_{l_q^n}.$$

Указать наилучшие значения констант $a = a(p, q, n)$ и $b = b(p, q, n)$.

Нормированное пространство X называется **непрерывно вложенным** в нормированное пространство Y (пишется $X \hookrightarrow Y$), если

- 1) $X \subset Y$;
- 2) существует такая постоянная $\gamma > 0$, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство

$$\|x\|_Y \leq \gamma \|x\|_X.$$

Постоянная γ называется **константой вложения**.

Задача 1.2. Доказать, что

- 1) $l_1 \hookrightarrow l_p \hookrightarrow l_q \hookrightarrow l_\infty$;
 - 2) $C[a, b] \hookrightarrow L_\infty[a, b] \hookrightarrow L_q[a, b] \hookrightarrow L_p[a, b] \hookrightarrow L_1[a, b]$;
- здесь $q > p$.

В каждом случае найти константу вложения.

Указание: использовать неравенство Гельдера (см. (2.2) или (3.3)).

Пример 1.1. Можно ли на множестве дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций взять за норму следующую величину

$$\|x\| = |x(a)| + |x'(a)| + |x''(a)|?$$

Решение. Чтобы решить эту задачу, нужно проверить свойства нормы. Можно заметить, что первое свойство нормы не выполняется. Действительно, пусть $\|x\| = 0$. Тогда

$$|x(a)| = |x'(a)| = |x''(a)| = 0. \quad (1.1)$$

Отсюда не следует, что $x(t) = 0$. Например, функция $x(t) = (t - a)^3$ удовлетворяет условиям (1.1). Таким образом, ответ на задачу 1.3 является отрицательным.

Пример 1.2. Можно ли на числовой прямой в качестве нормы взять функцию $\|x\| = |x^3|$?

Решение. Покажем, что не выполняется второе свойство нормы. Действительно, пусть $\lambda = 2, x = 1$. Тогда $\|\lambda x\| = 2^3 = 8$, а $\lambda \|x\| = 2 \cdot 1 = 2$.

Пример 1.3. Можно ли на плоскости в качестве нормы взять функцию $\|x\| = \left(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|} \right)^2$?

Решение. Несложно проверить (сделать самостоятельно), что первые два свойства нормы выполняются. Докажем, что не выполняется третье свойство. Возьмем $x = (\frac{1}{4}, 0)$, $y = (0, \frac{1}{4})$. Тогда $\|x\| = \|y\| = \frac{1}{4}$. С другой стороны, $x + y = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ и $\|x + y\| = 1$. Получаем $\|x + y\| \geq \|x\| + \|y\|$.

Замечание. Линейное пространство называется **квазинормированным**, если третье свойство нормы (неравенство треугольника) заменяется на более слабое условие $\|x + y\| \leq c(\|x\| + \|y\|)$. Докажите, что пространство l_p^n при $0 < p < 1$ является квазинормированным.

Задача 1.3. Можно ли на множестве непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций взять за норму следующую величину

$$1) \|x\| = \min_{t \in [a, b]} |x(t)| + |x(a)|;$$

$$2) \|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|;$$

$$3) \|x\| = \int_a^b |x'(t)| dt;$$

$$4) \|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x'(t)| + |x(a)|.$$

$$5) \|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x'(t)| + |x(a) - x(b)|.$$

С понятием нормы тесно связано понятие сходимости. Пусть x_1, x_2, \dots — последовательность точек в нормированном пространстве L . Говорят, что эта последовательность сходится к $x^* \in L$, если $\|x_n - x^*\|_L \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Приведем несколько задач на сходимость последовательностей.

Пример 1.4. Будет ли последовательность $x^{(n)} = (\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_n, 0, 0, \dots)$

сходиться в пространстве l_1 ?

Решение. Предположим, что последовательность $\{x^{(n)}\}$ сходится к $x^* \in l_1$. Тогда последовательность $\{x^{(n)}\}$ сходится к x^* покоординатно. Так как $x_i^{(n)} = \frac{1}{n}$, если $n \geq i$, то $x_i^{(n)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (i - фиксировано). Следовательно, $x^* = (0, 0, 0, \dots)$. С другой стороны,

$$\|x^{(n)} - x^*\|_{l_1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1.$$

Полученное противоречие показывает, что последовательность $\{x^{(n)}\}$ не сходится в пространстве l_1 .

Пример 1.5. Будет ли последовательность $x_n(t) = t^n \sin(1 - t) + t^2$ сходиться в пространстве $C[0, 1]$?

Решение. Предположим, что последовательность сходится к функции $x^* \in C[0, 1]$. Так как сходимость в пространстве $C[0, 1]$ равносильна равномерной сходимости, то $\{x_n\}$ сходится к x^* и поточечно. Заметим, что

$x_n(t) \rightarrow t^2$ для любого $t \in [0, 1]$. Тогда $x^*(t) = t^2$. Но из поточечной сходимости не следует равномерной сходимости, поэтому необходимо проверить сходится ли последовательность к x^* равномерно. Обозначим $\Phi = x_n - x^*$. Так как $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$ и $\Phi(t) > 0$ при $t \in (0, 1)$, то максимум непрерывной функции Φ достигается во внутренней точке отрезка $[0, 1]$. Чтобы найти точку максимума, вычислим производную функции Φ . Имеем

$$\Phi'(t) = nt^{n-1} \sin(1-t) - t^n \cos(1-t).$$

Для нахождения точки максимума t^* получим уравнение

$$n = \frac{t^* \cos(1-t^*)}{\sin(1-t^*)}.$$

Это уравнение имеет решение на $(0, 1)$. Действительно, правая часть уравнения является непрерывной функцией, область значения которой совпадает с $[0, +\infty)$. Таким образом,

$$\|x_n - x^*\|_{C[0,1]} = \frac{(t^*)^{n+1} \cos(1-t^*)}{n}.$$

Так как $t^* \in (0, 1)$, то $\|x_n - x^*\|_{C[0,1]} \leq \frac{1}{n}$ и последовательность сходится в пространстве $C[0, 1]$.

Пример 1.6. Будет ли последовательность $x_n(t) = \sin \frac{t}{n}$ сходиться в пространстве $L_1[0, 1]$?

Решение. Докажем, что $\|x_n\|_{L_1[0,1]} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Имеем

$$\|x_n\|_{L_1[0,1]} = \int_0^1 \sin \frac{t}{n} dt = n(1 - \cos \frac{1}{n}).$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \cos \frac{1}{n}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 0.$$

Здесь в первом переходе выполнили замену переменных, во втором – использовали правило Лопиталя, а в третьем переходе учли непрерывность функции $\sin t$. Итак, последовательность сходится.

Задача 1.4. Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится в пространстве $C[a, b]$, то она сходится и в пространстве $L_p[a, b]$.

Задача 1.5. Будет ли последовательность $\{x_n\}$ сходиться в пространстве X

1) $x^{(n)} = (e^{-1}, e^{-2}, \dots, e^{-n}, 0, 0, \dots), \quad X = l_3;$

2) $x_n(t) = \left(\frac{t}{3}\right)^n - \left(\frac{t}{3}\right)^{3n}, \quad X = C[0, 1], \quad X = L_2[0, 1];$

3) $x_n(t) = e^{\frac{t}{n}} + \sin t, \quad X = C[0, 1], \quad X = L_4[0, 1];$

4) $x_n(t) = \begin{cases} t^n, & t \in [0, 1) \\ e^t, & t \in [-1, 0] \end{cases}, \quad X = L_2[0, 1].$

5) $x_n(t) = \begin{cases} t, & t - \text{рационально} \\ e^{\frac{t}{n} + \sin t}, & t - \text{иррационально} \end{cases}, \quad X = L_2[0, 1].$

Среди всех нормированных пространств выделим пространства, которые называются **полными (банаховыми)**. Для этого напомним определение фундаментальной последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ точек нормированного пространства L называется **фундаментальной** (сходящейся в себе), если она удовлетворяет условию Коши, то есть если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon)$, что $\|x_k - x_m\|_L < \varepsilon$ для всех $k, m > N$.

Нетрудно проверить, что любая сходящаяся последовательность является фундаментальной. Для этого достаточно использовать неравенство треугольника. Однако обратное утверждение неверно. Существуют фундаментальные последовательности, которые не сходятся. Используя понятие фундаментальности, можно решать задачи, в которых требуется проверить сходимость последовательности.

Пример 1.7. Будет ли последовательность $x^{(n)} = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n, 0, 0, \dots)$ сходиться в пространствах $l_p, p \geq 1$?

Решение. Так как $\|x^{(n)} - x^{(n+1)}\|_{l_p} = 1$, то можно сделать вывод, что последовательность $\{x^{(n)}\}$ не является фундаментальной, а значит, не может сходиться в пространстве l_p .

Пример 1.8. Будет ли последовательность $x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$ сходиться в пространстве l_1 ?

Решение. Если, как в предыдущем примере, вычислить расстояние между $x^{(n)}$ и $x^{(n+1)}$, то получим

$$\|x^{(n)} - x^{(n+1)}\|_{l_1} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

Но отсюда нельзя сделать вывод о том, что это фундаментальная последовательность (эту ошибку часто делают студенты). Последовательность

фундаментальна, если $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_{l_1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$. А мы взяли частный случай $m=n+1$. Если взять $m=2n$, то

$$\|x^{(n)} - x^{(2n)}\|_{l_1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, последовательность не может сходиться, так как она даже не фундаментальна.

После того, как мы напомним определения сходящейся и фундаментальной последовательностей, мы можем дать определение банахова пространства.

Линейное нормированное пространство L называется **банаховым**, если любая фундаментальная последовательность этого пространства сходится. Отметим, что все пространства, приведенные в начале этого раздела (кроме пространства $\widetilde{L}_p[a, b]$), являются банаховыми.

Задача 1.6. Пусть L – банахово пространство. Доказать, что подпространство L_0 является банаховым тогда и только тогда, когда L_0 замкнуто.

Задача 1.7. Доказать, что c, c_0 – банаховы пространства.

Указание: использовать задачу 1.6 и то, что $c_0 \subset c \subset l_\infty$.

Отметим, что некоторые задачи и примеры, которые приведены в настоящем пособии, взяты из учебных пособий [1],[2],[4],[7],[9].

§ 2.

Непрерывные линейные функционалы

Пусть L – линейное нормированное пространство. Отображение f , действующее из L в R , будем называть **функционалом**.

Функционал f называется **линейным**, если он аддитивен, то есть для всех l_1, l_2 из L

$$f(l_1 + l_2) = f(l_1) + f(l_2),$$

и однороден, то есть для всех $l \in L$ и любых вещественных чисел λ

$$f(\lambda l) = \lambda f(l).$$

Множество $\ker f = \{x \in L : f(x) = 0\}$ называется **ядром** функционала f .

Функционал f называется **непрерывным** в точке $x_0 \in L$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех x таких, что $\|x - x_0\|_L < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Дадим более удобное в применении определение непрерывного функционала, которое в линейном нормированном пространстве эквивалентно определению, данному ранее.

Функционал f называется **непрерывным** в точке $x_0 \in L$, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 , $f(x_n)$ сходится к $f(x_0)$.

Если функционал непрерывен в каждой точке пространства L , то его будем называть **непрерывным на L** .

Приведем простейшие свойства линейных непрерывных функционалов.

Задача 2.1. Доказать, что если линейный функционал непрерывен в какой-либо одной точке $x_0 \in L$, то он непрерывен на L .

Задача 2.2. Доказать, что если линейный функционал задан на конечномерном пространстве, то он непрерывен.

Задача 2.3. Пусть f – линейный функционал. Доказать, что если $|f(x)| \leq c\|x\|$, то f – непрерывный функционал.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2.1. Доказать, что функционал f , заданный на $C[-2, 2]$ и определяемый формулой

$$f(x) = x(2) + \int_{-2}^2 tx(t)dt,$$

является непрерывным.

Решение. Легко проверить (используя свойства интеграла), что это линейный функционал. Покажем, что он является непрерывным. Учитывая свойство линейного функционала (задача 2.1), непрерывность достаточно проверить в нуле. Выберем любую последовательность $\{x_n\}$ такую, что $\|x_n\|_{C[-2,2]} \rightarrow 0$. Так как $f(0) = 0$, то нам нужно доказать, что $f(x_n) \rightarrow 0$. Напишем цепочку неравенств:

$$|f(x_n)| \leq |x_n(2)| + \int_{-2}^2 |t||x_n(t)|dt \leq \|x_n\|_{C[-2,2]} + \left(\int_{-2}^2 |t|dt \right) \|x_n\|_{C[-2,2]}.$$

В первом переходе использовали неравенство треугольника для чисел и следующее свойство интеграла:

$$\left| \int_a^b g(x)dx \right| \leq \int_a^b |g(x)|dx. \quad (2.1)$$

Во втором переходе учли определение нормы в пространстве $C[a, b]$, из которого следует, что $|x(t)| \leq \|x\|_{C[a,b]}$ для любого $t \in [a, b]$.

Вычислив интеграл, получаем неравенство

$$|f(x_n)| \leq 5\|x_n\|_{C[-2,2]}.$$

Так как $\|x_n\|_{C[-2,2]} \rightarrow 0$, то $f(x_n) \rightarrow 0$.

Этим мы доказали непрерывность функционала f .

Пример 2.2. Пусть функционал f , заданный на l_3 , определяется формулой

$$f(x) = x_1 - 4x_2.$$

Доказать, что это непрерывный функционал.

Решение. Линейность функционала очевидна. Чтобы доказать неравенство $|f(x)| \leq c\|x\|_{l_3}$, используем неравенство Гельдера:

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (2.2)$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $p, q \geq 1$.

Взяв $p = 3, q = \frac{3}{2}, a_1 = x_1, a_2 = x_2, b_1 = 1, b_2 = -4, a_i = b_i = 0, i \geq 3$, получим

$$|f(x)| = |x_1 - 4x_2| \leq \left(|1|^{\frac{3}{2}} + |-4|^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} (|x_1|^3 + |x_2|^3)^{\frac{1}{3}} \leq 9^{\frac{2}{3}} \|x\|_{l_3}.$$

Непрерывность функционала доказана.

Замечание. Можно предложить другое решение этой задачи. Функционал f можно считать заданным на конечномерном (двумерном) подпространстве $\{x \in l_3 : x_i = 0, i \geq 3\}$. Тогда из линейности функционала следует его непрерывность (см. задачу 2.2).

Пример 2.3. Рассмотрим функционал $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$, заданный на подмножестве пространства l_2 , в которое входят такие последовательности, что $\sum_{i=1}^{\infty} x_i < \infty$. Функционал f является линейным. Выберем последовательность $x^{(n)} = (\underbrace{\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_n, 0, 0, \dots)$. Нетрудно проверить, что $\|x^{(n)} - x^*\|_{l_2} = \sqrt{n^{-1}}$,

где $x^* = (0, 0, \dots)$. С другой стороны, $f(x^{(n)}) = 1 \not\rightarrow 0$.

Таким образом, мы привели пример линейного функционала, который не является непрерывным.

Как показывает пример 2.3, если функционал задан на бесконечномерном пространстве, то из линейности функционала не всегда следует его непрерывность. Чтобы это свойство выполнялось, на функционал нужно наложить дополнительные ограничения.

Линейный функционал f , заданный на нормированном пространстве L , называется **ограниченным**, если существует такая постоянная $c > 0$, что для всех элементов $x \in L$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq c\|x\|_L.$$

Если указанной постоянной не существует, то f называется **неограниченным** функционалом.

Есть тесная связь между ограниченностью и непрерывностью функционала.

Задача 2.4. В нормированном пространстве линейный функционал непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.

Задача 2.5. Доказать, что функционал $f(x) = x'(0)$, заданный на множестве дифференцируемых функций пространства $C[-1, 1]$, является линейным и неограниченным.

Задача 2.6. Доказать, что линейный функционал, не принимающий в некотором шаре нормированного пространства хотя бы одно значение, непрерывен.

Приведем геометрический смысл линейного функционала, заданного в линейном пространстве. Для этого дадим определение гиперподпространства.

Пусть L – линейное пространство, L_0 – линейное подпространство L . L_0 называется **гиперподпространством**, если существует элемент $x_0 \notin L_0$ такой, что $L = \text{lin}(x_0, L_0)$. Говорят, что L_0 имеет коразмерность 1. Например, если L – n -мерное пространство, то гиперподпространство – это $(n-1)$ -мерное подпространство.

Задача 2.7. Доказать, что ядро функционала $\ker f$ является гиперподпространством. Здесь f – линейный функционал.

Задача 2.8. Пусть f_1, f_2 – линейные функционалы, заданные на L . Доказать, что если $\ker f_1 = \ker f_2$, то $f_1 = \lambda f_2$ для некоторого числа λ .

Пусть L_0 – гиперподпространство в L . Множество $L_1 = L_0 + x$ называется **гиперплоскостью**. Здесь $x \notin L_0$. Иными словами, гиперплоскость – это множество, получающееся из гиперподпространства параллельным переносом (сдвигом) на какой-нибудь вектор $x \in L$. Например, если $L = R^3$, то гиперплоскость – это плоскость, не проходящая через начало координат.

Задача 2.9. Доказать, что множество $M = \{x \in L : f(x) = c, c \neq 0\}$ является гиперплоскостью.

Утверждение 2.1. Множество $M \subset L$ является гиперплоскостью тогда и только тогда, когда M можно представить в виде $M = \{x \in L : f(x) = 1\}$, где f – линейный функционал, причем f определяется однозначно.

Таким образом, можно установить взаимно однозначное соответствие между всеми нетривиальными линейными функционалами, определенными на L , и всеми гиперплоскостями в L .

Задача 2.10. Доказать, что линейный функционал в нормированном пространстве непрерывен тогда и только тогда, когда его ядро замкнуто.

Задача 2.11. Доказать, что всякая гиперплоскость в линейном нормированном пространстве или замкнута, или плотна в нем.

Задача 2.12. Доказать, что любая гиперплоскость в линейном нормированном пространстве является выпуклым множеством.

Задача 2.13. Пусть f – линейный функционал, определенный на линейном нормированном пространстве L . Доказать, что f непрерывен тогда и только тогда, когда множества $\{x \in L : f(x) < c\}$ и $\{x \in L : f(x) > c\}$ являются открытыми в пространстве L .

§ 3.

Норма функционала

Пусть f – линейный непрерывный функционал, заданный на нормированном пространстве L . Так как f является ограниченным функционалом (см. задачу 2.4), то существует постоянная M такая, что

$$|f(x)| \leq M\|x\|. \quad (3.1)$$

Наименьшая из постоянных M , удовлетворяющая неравенству (3.1), называется **нормой** и обозначается $\|f\|$.

Таким образом,

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\|. \quad (3.2)$$

Отметим некоторые свойства нормы функционала.

Задача 3.1. Доказать, что

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Задача 3.2. Доказать, что

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

Задача 3.3. Доказать, что норма функционала обладает всеми свойствами нормы, а именно

- 1) $\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0 \iff f = 0$;
- 2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$;
- 3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Приведем примеры вычисления нормы функционала.

Пример 3.1. Вычислить норму функционала $f(x) = x(1) - 2x(2)$, заданного в пространстве $C[0, 2]$.

Решение. Используя неравенство треугольника и определение нормы в пространстве $C[a, b]$, имеем

$$|f(x)| \leq |x(1)| + 2|x(2)| \leq 3\|x\|_{C[0,2]}.$$

Так как $\|f\|$ — это наименьшая константа, то $\|f\| \leq 3$. Чтобы получить противоположное по знаку неравенство, воспользуемся тем, что $\|f\| \geq \frac{|f(x)|}{\|x\|_{C[0,2]}}$ для любого $x \neq 0$. Тогда

$$\|f\| \geq \frac{|x(1) - 2x(2)|}{\max_{t \in [0,2]} |x(t)|}.$$

Выберем непрерывную функцию x так, чтобы $\max_{t \in [0,2]} |x(t)| = 1$ и $x(1) = 1$, $x(2) = -1$. Такие функции существуют. Для этого нужно соединить точки $(1, 1)$ и $(2, -1)$ так, чтобы не выйти за пределы полосы, определяемой прямыми $y = 1$, $y = -1$. Тогда $\|f\| \geq 3$ и вместе с ранее полученным неравенством имеем $\|f\| = 3$.

Пример 3.2. Вычислить норму функционала $f(x) = 2x_1 - 3x_3$, заданного в пространстве l_4 .

Решение. Используя неравенство Гельдера (см. (2.2)), получим

$$|f(x)| \leq \left(2^{\frac{4}{3}} + 3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot (|x_1|^4 + |x_3|^4)^{\frac{1}{4}} \leq c \cdot \|x\|_{l_4}.$$

$$\text{Здесь } c = \left(2^{\frac{4}{3}} + 3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Из определения нормы функционала следует, что $\|f\| \leq c$.

С другой стороны, для любого $x \in l_4$ ($x \neq 0$) выполняется неравенство $\|f\| \geq \frac{|f(x)|}{\|x\|_{l_4}}$ (см. (3.2)). Подберем последовательность \hat{x} так, чтобы $\frac{|f(\hat{x})|}{\|\hat{x}\|_{l_4}} = c$. Для этого учтем, что неравенство Гельдера (2.2) обращается в равенство, если $b_i = |a_i|^{p-1} \operatorname{sgn} a_i$. Взяв $p = \frac{4}{3}$, $q = 4$, $a_1 = 2$, $a_3 = -3$, $a_i = 0$, $i \neq 1, 3$ и

$$\hat{x}_i = \begin{cases} 2^{\frac{1}{3}}, & i = 1; \\ -3^{\frac{1}{3}}, & i = 3; \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

получим $f(\hat{x}) = 2^{\frac{4}{3}} - 3^{\frac{4}{3}}$, $\|\hat{x}\|_{l_4} = \left(2^{\frac{4}{3}} + 3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$. Тогда $\frac{|f(\hat{x})|}{\|\hat{x}\|_{l_4}} = c$. Окончательно имеем $\|f\| = c$.

Пример 3.3. Вычислить норму функционала $f(x) = \int_{[-1,1]} tx(t)dt$, заданного в пространстве $L_3[-1, 1]$.

Решение. Используем интегральное неравенство Гельдера:

$$\left| \int_{[a,b]} y(t)x(t)dt \right| \leq \left(\int_{[a,b]} |y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{[a,b]} |x(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3.3)$$

Здесь $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $p, q \geq 1$.

Взяв $p = \frac{3}{2}, q = 3, y(t) = t$, получим

$$|f(x)| \leq \left(\int_{[-1,1]} |t|^{\frac{3}{2}} dt \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_{[-1,1]} |x(t)|^3 dt \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Вычислив первый интеграл, получим $\|f\| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$. С другой стороны, учтем, что неравенство Гельдера (3.3) обращается в равенство, если $x(t) = |y(t)|^{p-1} \operatorname{sgn} y(t)$. Выберем $\hat{x}(t) = |t|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} t$. Тогда $f(\hat{x}) = \int_{[-1,1]} |t|^{\frac{3}{2}} dt = \frac{4}{5}$, а $\|\hat{x}\|_{L_3[-1,1]} = \left(\int_{[-1,1]} |t|^{\frac{3}{2}} dt \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$. Так как $\|f\| \geq \frac{|f(\hat{x})|}{\|\hat{x}\|} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$, то вместе с доказанным ранее неравенством получим $\|f\| = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Пример 3.4. Вычислить норму функционала $f(x) = \int_{-1}^1 tx(t)dt$, заданного в пространстве $C[-1, 1]$.

Решение. Оценивая так же, как это было сделано в примере 2.1, получим $\|f\| \leq \|x\|_{C[-1,1]}$. Тогда $\|f\| \leq 1$. Для получения противоположного по знаку неравенства попробуем подобрать непрерывную функцию \hat{x} так, чтобы $\frac{|f(\hat{x})|}{\|\hat{x}\|_{C[-1,1]}} = 1$. Все попытки найти такую непрерывную функцию оказываются безуспешными. Это объясняется тем, что она не существует. Однако если взять функцию $\hat{x}(t) = \operatorname{sgn}(t)$ и рассмотреть функционал f на пространстве $M[-1, 1]$, то $\frac{|f(\hat{x})|}{\|\hat{x}\|_{M[-1,1]}} = 1$. Но функция \hat{x} разрывна, а значит, не принадлежит пространству $C[-1, 1]$.

Поступим следующим образом. Найдем последовательность непрерывных функций x_n таких, что $x_n(t) \rightarrow \hat{x}(t)$ для каждого $t \in [-1, 1]$. Для построения

последовательности x_n нужно "подправить" функцию $\hat{x}(t) = \operatorname{sgn}(t)$ в месте разрыва. Имеем

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1; \\ nt, & -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n}; \\ -1, & -1 \leq t \leq -\frac{1}{n}. \end{cases}$$

Вычислим $f(x_n)$. Воспользуемся тем, что функция $tx_n(t)$ является четной. Тогда

$$f(x_n) = 2 \left(\int_0^{\frac{1}{n}} nt^2 dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 t dt \right) = 1 - \frac{1}{3n^2}.$$

Так как $\|x_n\|_{C[-1,1]} = 1$, то

$$\|f\| \geq \frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|} = 1 - \frac{1}{3n^2}.$$

Если n устремить к бесконечности, то получим $\|f\| \geq 1$. Итак, $\|f\| = 1$.

В отличие от предыдущих примеров мы не смогли найти функцию \hat{x} такую, что $\|f\| = \frac{|f(\hat{x})|}{\|\hat{x}\|}$.

Дадим геометрическую интерпретацию нормы функционала.

Утверждение 3.1. Пусть f – линейный непрерывный функционал, заданный на нормированном пространстве L . Тогда

$$\|f\| = \frac{1}{\inf_{x \in L_f} \|x\|}; \quad (3.4)$$

здесь $L_f = \{x \in L : f(x) = 1\}$.

Таким образом, чтобы найти норму функционала, нужно построить гиперплоскость L_f и найти расстояние d от нуля до этой гиперплоскости. Тогда $\|f\| = \frac{1}{d}$.

Покажем, как можно найти норму функционала, используя формулу (3.4).

Пример 3.5. Вычислить норму функционала $f(x) = 3x_1 - 4x_2$, заданного в пространстве l_∞^2 .

Решение. На плоскости построим прямую $3x_1 - 4x_2 = 1$. Чтобы найти расстояние от нуля до этой прямой, нарисуем шар с центром в нуле радиуса r так, чтобы шар не пересекал данную прямую. Теперь увеличиваем размер шара до тех пор, пока он не коснется прямой. Радиус этого шара – это и есть

расстояние от нуля до L_f . Напомним, что $\|x\|_{l_\infty^2} = \max(|x_1|, |x_2|)$, поэтому шар $B[0, r]$ – это квадрат с центром в нуле, стороны которого параллельны координатным осям. Длина стороны квадрата равна $2r$. В нашем случае касание произойдет в точке с координатами $(r, -r)$. Так как эта точка лежит на прямой, то $3r + 4r = 1$ и $d = \frac{1}{7}$. Окончательно имеем $\|f\| = 7$.

§ 4.

Общий вид функционалов в различных пространствах

Ранее мы приводили примеры различных функционалов и показывали, как можно вычислить их нормы. В этом разделе для некоторых пространств будет указан общий вид линейных функционалов, определенных на этих пространствах.

Начнем с пространств l_p^n , $1 \leq p \leq \infty$.

Теорема 4.1. Пусть f – линейный функционал, заданный на l_p^n , $1 \leq p \leq \infty$. Тогда существует единственный элемент $a \in l_q^n$ такой, что

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad (4.1)$$

и

$$\|f\| = \|a\|_{l_q^n}, \quad (4.2)$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Для доказательства утверждения 4.1 нужно воспользоваться неравенством Гельдера так, как это было сделано в примере 3.2.

Теорема 4.2. Пусть f – линейный непрерывный функционал, заданный на l_p , $1 \leq p < \infty$. Тогда существует единственный элемент $a \in l_q$ такой, что

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \quad (4.3)$$

и

$$\|f\| = \|a\|_{l_q},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказательство этого утверждения можно найти в [5] или [6].

Хотя приведенные выше утверждения очень похожи, доказательство второго существенно сложнее первого. Это объясняется тем, что в теореме 4.2 фигурирует бесконечномерное пространство, а значит, нужно проверять сходимость всех рядов, встречающихся при доказательстве утверждения. Покажем это на примере сравнения (4.1) и (4.3).

Пусть f – линейный функционал, заданный на l_p^n . Выберем базис e_1, \dots, e_n . Тогда $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. В силу линейности функционала f имеем $f(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) e_i$. Обозначив $a_i = f(x_i)$, получим (4.1).

Пусть теперь f – линейный непрерывный функционал, заданный на l_p , $1 \leq p < \infty$ и $e_k = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1}, 1, 0, 0, \dots)$. Покажем, что любой элемент $x \in l_p$ можно записать в виде $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$. Для этого заметим, что

$\left\| x - \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_{l_p} = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. Так как $x \in l_p$, то ряд $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ сходится, а, значит, остаток этого ряда $\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ стремится к нулю. Этим мы доказали, что $\left\| x - \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_{l_p} \rightarrow 0$, а, значит, $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$.

Покажем теперь, что $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f(e_i) x_i$. Здесь нужно использовать свойства функционала f (линейности недостаточно!). Имеем

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^n f(e_i) x_i \right| \leq \left| f \left(x - \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \right| \leq \|f\| \left\| x - \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_{l_p}.$$

В первом переходе учли линейность функционала f , а во втором – его ограниченность. Устремляя n к бесконечности, получим (4.3).

Заметим, что теорема 4.2 неверна для $p = \infty$. Однако можно получить аналог этого утверждения, если заменить l_{∞} на более узкое пространство.

Задача 4.1. Доказать, что любой линейный непрерывный функционал, заданный на c_0 , имеет вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$$

и

$$\|f\| = \|a\|_{l_1}.$$

Напомним, что $c_0 \subset l_\infty$, а элементами c_0 являются последовательности, сходящиеся к нулю.

Теорема 4.3. Пусть f – линейный непрерывный функционал, заданный на $L_p[a, b]$, $1 < p < \infty$. Тогда f можно представить в виде

$$f(x) = \int_{[a,b]} \varphi(t)x(t)dt,$$

где $\varphi \in L_q[a, b]$ и

$$\|f\| = \|\varphi\|_{L_q[a,b]},$$

здесь $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказательство теоремы 4.3 можно найти, например, в [5]. Прежде чем дать общий вид функционала, заданного на пространстве $C[a, b]$, попробуем его угадать. Нетрудно проверить, что функционал $f(x) = \int_a^b \varphi(t)x(t)dt$, где φ – непрерывная функция, является линейным непрерывным на $C[a, b]$. Однако функционал $f(x) = x(a)$ также обладает этими свойствами. Можно ли $f(x) = x(a)$ записать в виде интеграла Римана? Предположим, что нам удалось это сделать, то есть мы нашли непрерывную функцию g такую, что

$$f(x) = \int_a^b g(t)x(t)dt.$$

Так как это должно быть верно для любой функции x из $C[a, b]$, то возьмем

$\hat{x}(t) = (t - a)^2 g(t)$. Имеем $f(\hat{x}) = \hat{x}(a) = 0$, а с другой стороны, $f(\hat{x}) = \int_a^b (t - a)^2 g^2(t)dt > 0$. Получаем противоречие. Значит, записать любой функционал f в виде интеграла Римана не удалось.

Однако это можно сделать с помощью интеграла Римана–Стилтьеса. Он вводится как предел интегральных сумм, аналогичных обычным интегральным суммам Римана. Напомним это определение (см. также [5]).

Начнем с определения функции с ограниченным изменением. Функция Φ , заданная на отрезке $[a, b]$, называется функцией с ограниченным изменением, если существует такая постоянная C , что, каково бы ни было разбиение отрезка $[a, b]$ точками

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b,$$

выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^n |\Phi(t_k) - \Phi(t_{k-1})| \leq C.$$

Полным изменением (или полной вариацией) функции Φ называется следующая величина

$$V_f^b[\Phi] := \sup \sum_{k=1}^n |\Phi(t_k) - \Phi(t_{k-1})|.$$

Здесь верхняя грань берется по всевозможным конечным разбиениям отрезка $[a, b]$.

Перейдем теперь к определению интеграла Римана–Стилтьеса. Пусть Φ – функция с ограниченным изменением, заданная на $[a, b]$, и x – произвольная функция на этом же отрезке. Рассмотрим некоторое разбиение

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b.$$

Выбрав в каждом $[t_{i-1}, t_i)$ произвольную точку ξ_i , составим сумму

$$\sum_{i=1}^n x(\xi_i) [\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})]. \quad (4.4)$$

Если при $\max(t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$ суммы (4.4) стремятся к некоторому пределу и не зависят от способа разбиения $[a, b]$ и выбора точек ξ_i , то этот предел называется **интегралом Римана–Стилтьеса от функции x по функции Φ** и обозначается символом

$$\int_a^b x(t) d\Phi(t).$$

Заметим, что если $\Phi(t) = t$, то интеграл Римана–Стилтьеса совпадает с интегралом Римана.

В дальнейшем мы будем работать с интегралом Римана–Стилтьеса только от непрерывных функций x . Отметим несколько свойств интеграла в предположении, что x – непрерывная функция.

1. Если Φ_1, Φ_2 – две функции с ограниченным изменением на $[a, b]$, совпадающие всюду, кроме конечного или счетного числа внутренних точек отрезка, то

$$\int_a^b x(t) d\Phi_1(t) = \int_a^b x(t) d\Phi_2(t).$$

2. Если $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, то

$$\int_a^b x(t) d\Phi(t) = \int_a^b x(t) d\Phi_1(t) + \int_a^b x(t) d\Phi_2(t).$$

3. Если Φ – функция скачков, то есть Φ – кусочно-постоянная функция с разрывами в точках ξ_i и $\Phi(\xi_i + 0) - \Phi(\xi_i - 0) = h_i$, то

$$\int_a^b x(t) d\Phi(t) = \sum_i x(\xi_i) h_i.$$

4. Если Φ – абсолютно непрерывная функция, то

$$\int_a^b x(t) d\Phi(t) = \int_a^b x(t) \Phi'(t) dt.$$

Теперь мы сформулируем теорему об общем виде функционала в пространстве $C[a, b]$.

Теорема 4.4 (Ф. Рисс). *Всякий линейный непрерывный функционал f в пространстве $C[a, b]$ представим единственным способом в виде*

$$f(x) = \int_a^b x(t) d\Phi(t),$$

где Φ – функция с ограниченным изменением, $\Phi(a) = 0$ и Φ непрерывна справа на $(a, b]$.

При этом

$$\|f\| = V_a^b[\Phi].$$

Вернемся к примеру, который мы рассматривали выше. Представим функционал $f(x) = x(a)$ в виде интеграла Римана–Стилтьеса. Для этого нужно выбрать функцию Φ , заданную формулой

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1, & a < t \leq b; \\ 0, & t = a. \end{cases}$$

Тогда сумма (4.4) состоит только из одного слагаемого $x(\xi_1)$, где $a \leq \xi_1 < t_1$. Так как $\max(t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$, то $t_1 \rightarrow a$. Остается учесть, что x – непрерывная функция, а, значит, $x(\xi_1) \rightarrow x(a)$ и $x(a) = \int_a^b x(t) d\Phi(t)$.

Перечислим некоторые свойства полной вариации функции.

1. $V_a^b[\Phi] = 0 \iff \Phi(x) = c.$

2. Если α – постоянное число, то

$$V_a^b[\alpha\Phi] = |\alpha|V_a^b[\Phi].$$

3. Если Φ_1, Φ_2 – функции с ограниченным изменением, то

$$V_a^b[\Phi_1 + \Phi_2] \leq V_a^b[\Phi_1] + V_a^b[\Phi_2].$$

4. Если $a < c < b$, то

$$V_a^c[\Phi] + V_c^b[\Phi] = V_a^b[\Phi].$$

5. Если Φ – монотонная функция на $[a, b]$, то

$$V_a^b[\Phi] = |\Phi(a) - \Phi(b)|.$$

6. Если Φ – ступенчатая функция, и $\Phi(\xi_i + 0) - \Phi(\xi_i - 0) = h_i$, где ξ_i – точки разрыва функции Φ , то $V_a^b[\Phi] = \sum_i |h_i|$.

7. Если Φ – дифференцируемая функция на $[a, b]$, то

$$V_a^b[\Phi] = \int_a^b |\Phi'(t)| dt.$$

8. Функция $v(x) = V_a^x[f]$ является монотонно неубывающей.

Используя теорему Ф. Рисса об общем виде функционала и свойства полной вариации, можно получить более простые формулы для вычисления нормы функционала.

Задача 4.2. Пусть f – линейный непрерывный функционал, заданный на $C[a, b]$, и $f(x) = \int_a^b x(t)\varphi(t)dt$, где $\varphi \in [a, b]$. Доказать, что

$$\|f\| = \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

Задача 4.3. Пусть f – линейный непрерывный функционал, заданный на $C[a, b]$, и $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x(t_i)$, где t_i – точки из отрезка $[a, b]$. Доказать,

$$\text{что } \|f\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|.$$

Приведем общий вид функционала в пространстве $C^1[a, b]$ (см., например, [3]).

Теорема 4.5. Любой линейный непрерывный функционал f в пространстве $C^1[a, b]$ можно представить одним и только одним способом в виде

$$f(x) = \lambda \cdot x(a) + \int_a^b x'(t) d\Phi(t),$$

где λ – число, и Φ удовлетворяет тем же условиям, что и в теореме 4.1.

Приведем примеры, в которых для вычисления нормы функционала будем использовать теорему Ф. Рисса.

Пример 4.1. Представить функционал $f : C[-1, 1] \rightarrow R$, заданный формулой

$$f(x) = \int_{-1}^1 tx(t)dt,$$

в виде интеграла Римана–Стилтьеса и вычислить его норму.

Решение. Используя свойства интеграла Римана–Стилтьеса, получим

$$f(x) = \int_{-1}^1 x(t) d\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\right).$$

Функция $\Phi(t) = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.1. Поэтому

$$\|f\| = V_{-1}^1[\Phi].$$

Чтобы вычислить полную вариацию функции Φ , можно использовать свойство 7. Но мы выберем другой, более универсальный способ. Разобьем $[0, 1]$ на отрезки, где функция Φ монотонна. Тогда, используя четвертое и пятое свойства, получим

$$V_{-1}^1[\Phi] = V_{-1}^0[\Phi] + V_0^1[\Phi] = |\Phi(-1) - \Phi(0)| + |\Phi(1) - \Phi(0)| = 1.$$

Итак, $\|f\| = 1$.

Пример 4.2. Вычислить норму функционала f , заданного в $C[-1, 1]$ формулой

$$f(x) = x(0) + \int_{-1}^1 tx(t)dt.$$

Решение. Разобьем функционал f на сумму функционалов $f_1(x) = x(0)$ и $f_2(x) = \int_{-1}^1 tx(t)dt$. Тогда $f_i(x) = \int_{-1}^1 x(t)d\Phi_i(t)$, где $\Phi_1(t) = 0$ при $-1 \leq t < 0$ и $\Phi_1(t) = 1$ при $0 \leq t \leq 1$, а $\Phi_2(t) = (\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2})$. По свойствам интеграла Римана–Стилтьеса

$$f(x) = \int_{-1}^1 x(t)d\Phi(t);$$

здесь $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. Заметим, что функция Φ удовлетворяет условиям теоремы 4.1. Тогда $\|f\| = V_{-1}^1[\Phi]$.

По свойствам полной вариации

$$V_{-1}^1[\Phi] \leq V_{-1}^1[\Phi_1] + V_{-1}^1[\Phi_2].$$

Используем свойство 6 полной вариации, тогда $V_{-1}^1[\Phi_1] = 1$. Полную вариацию функции Φ_2 вычислили в примере 4.1. Тогда $V_{-1}^1[\Phi] \leq 2$. С другой стороны, из определения полной вариации следует, что

$$V_{-1}^1[\Phi] \geq |\Phi(-1) - \Phi(0 - \varepsilon)| + |\Phi(0 - \varepsilon) - \Phi(0)| + |\Phi(0) - \Phi(1)|.$$

Учтем, что $\Phi(-1) = 0$, $\Phi(0) = \frac{1}{2}$, $\Phi(1) = 1$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(0 - \varepsilon) = -\frac{1}{2}$, а $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\Phi(0 - \varepsilon) - \Phi(0)| = \frac{1}{2}$.

Устремив ε к нулю, получим $V_{-1}^1[\Phi] \geq 2$. Итак, $V_{-1}^1[\Phi] = 2$ и $\|f\| = 2$.

Последний результат этого раздела связан с общим видом функционала в гильбертовом пространстве.

Теорема 4.6. Пусть H – действительное гильбертово пространство. Для любого непрерывного линейного функционала f на H существует единственный элемент $a \in H$ такой, что

$$f(x) = (a, x), \quad x \in H,$$

причем $\|f\| = \|a\|$.

Напомним, что $L_2[a, b]$ и l_2 – гильбертовы пространства. В этих случаях теорема 4.6 следует из теоремы 4.2 и теоремы 4.3, так как скалярное произведение в l_2 и $L_2[a, b]$ задается с помощью следующих формул

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

и

$$(x, y) = \int_{[a, b]} x(t)y(t)dt.$$

§ 5.

Сопряженные пространства

В этом разделе будет дано определение сопряженного пространства, указаны его свойства и приведены примеры сопряженных пространств.

Пусть L – линейное нормированное пространство. Множество всех линейных непрерывных функционалов, определенных на L , называется **сопряженным** к L и обозначается L^* . Введем в L^* операции сложения и умножения на число. Суммой функционалов f_1, f_2 назовем функционал $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Произведением αf_1 линейного функционала f_1 на число α назовем функционал $f(x) = \alpha f_1(x)$.

Нетрудно проверить, что L^* – линейное пространство. Действительно, пусть f_1, f_2 – два линейных непрерывных функционала. Обозначим $f = f_1 + f_2$. Проверим, что f – линейный функционал. Используя линейность функционалов f_1 и f_2 , получим

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= f_1(\alpha x + \beta y) + f_2(\alpha x + \beta y) = \\ &= \alpha f_1(x) + \beta f_1(y) + \alpha f_2(x) + \beta f_2(y) = \\ &= \alpha(f_1(x) + f_2(x)) + \beta(f_1(y) + f_2(y)) = \alpha f(x) + \beta f(y). \end{aligned}$$

Теперь докажем, что f – непрерывный функционал. Напомним (см. задачу 2.4), что для линейного функционала понятия непрерывности и ограниченности совпадают. Из неравенства треугольника $\|f\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$ следует ограниченность, а значит, и непрерывность функционала f . Итак, мы доказали, что $f_1 + f_2$ – линейный непрерывный функционал. Линейность и непрерывность функционала αf_1 доказывается аналогично.

Для непрерывных линейных функционалов мы ввели понятие нормы. Напомним, что норму функционала можно вычислить по формуле

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Примем $\|f\|$ за норму элемента $f \in L^*$. Так как эта величина удовлетворяет всем требованиям нормы (см. задачу 3.3), то L^* становится линейным нормированным пространством.

В сформулированной ниже теореме приведено важное свойство сопряженного пространства.

Теорема 5.1. *Пространство L^* является банаховым.*

Заметим, что пространство L^* является банаховым независимо от того, каким было пространство L .

Пользуясь общим видом линейных непрерывных функционалов, определенных в предыдущем разделе, приведем (с точностью до изоморфизма) примеры сопряженных пространств.

Напомним, что два линейных нормированных пространства называются **изоморфными**, если между ними можно установить взаимно однозначное линейное изометричное отображение.

Пример 5.1. *Доказать, что $(l_p^n)^* \stackrel{is}{=} l_q^n$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$.*

Решение. Равенство $(l_p^n)^* \stackrel{is}{=} l_q^n$ означает, что мы должны прежде всего установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех непрерывных линейных функционалов, заданных на l_p^n , и множеством l_q^n .

Воспользуемся результатом теоремы 4.1, из которого следует, что любой функционал $f \in (l_p^n)^*$ можно единственным способом представить в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i. \quad (5.1)$$

С другой стороны, для любого элемента $a \in l_q^n$ функционал f , который задается с помощью формулы (5.1), является линейным и непрерывным. Таким образом, мы можем отождествить функционалы $f \in (l_p^n)^*$ с элементами $a \in l_q^n$. Кроме того, как следует из теоремы 4.1, $\|f\| = \|a\|_{l_q^n}$. Следовательно, это отображение является изометричным. Этим мы доказали, что сопряженное к пространству l_p^n изоморфно пространству l_q^n .

Задача 5.1. *Доказать, что*

$$(l_p)^* \stackrel{is}{=} l_q,$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $1 \leq p < \infty$.

Задача 5.2. *Доказать, что*

$$c_0^* \stackrel{is}{=} l_1,$$

Задача 5.3. Пусть L – банахово пространство. Если L^* сепарабельно, то L сепарабельно.

Задача 5.4. Доказать, что

$$(l_\infty)^* \neq l_1.$$

Указание. Использовать результат задачи 5.3.

Задача 5.5. Доказать, что

$$(L_p[a, b])^* \stackrel{is}{=} L_q[a, b],$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $1 \leq p < \infty$.

Обозначим через $V^0[a, b]$ множество всех функций с ограниченным изменением на $[a, b]$, равных нулю в точке a и непрерывных справа на $(a, b]$. Норма на $V^0[a, b]$ определяется с помощью формулы

$$\|g\|_{V^0[a, b]} := V_a^b[g].$$

Отметим, что при этом все свойства нормы выполняются (см. раздел 4 свойства 1–3 полной вариации).

Задача 5.6. Доказать, что

$$(C[a, b])^* \stackrel{is}{=} V^0[a, b].$$

Если $L = L^*$, то пространство называется **самосопряженным**.

Задача 5.7. Привести примеры самосопряженных пространств.

Перейдем к определению **рефлексивного** пространства.

Пусть, как обычно, L – линейное нормированное пространство. Так как L^* также является линейным нормированным пространством, то можно построить второе сопряженное $L^{**} = (L^*)^*$.

Утверждение 5.1. Имеет место изометричное вложение

$$L \subset L^{**}.$$

Доказательство. Рассмотрим функционал $f(x)$, определенный на L . Ранее мы считали, что f фиксирован, а x – переменный элемент из L . Но можно изменить подход к выражению $f(x)$, считая $x \in L$ фиксированным, а f

– переменным элементом из L^* . В этом случае выражение $f(x)$ можно рассматривать как функционал F_x , определенный на L^* . Таким образом,

$$F_x(f) = f(x).$$

Заметим, что в некоторых книгах по функциональному анализу пишут не $f(x)$, а (f, x) , подчеркивая этим равнозначность элементов f и x .

Нетрудно доказать, что F_x – линейный непрерывный функционал. Действительно,

$$F_x(\alpha f_1 + \beta f_2) = (\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = \alpha F_x(f_1) + \beta F_x(f_2)$$

и

$$|F_x(f)| \leq \|x\| \cdot \|f\|.$$

Из последнего неравенства следует, что $\|F_x\| \leq \|x\|$. Используя следствия теоремы Хана–Банаха (см. задачу 7.1), можно доказать, что $\|F_x\| = \|x\|$.

Таким образом, всякому $x \in L$ ставится в соответствие функционал $F_x \in L^{**}$, причем

$$\|F_x\| = \|x\|$$

и

$$\begin{aligned} F_{x_1+x_2}(f) &= f(x_1 + x_2) = F_{x_1}(f) + F_{x_2}(f); \\ F_{\lambda x}(f) &= \lambda F_x(f). \end{aligned}$$

Утверждение 5.1 доказано.

Мы доказали, что для любого L выполняется вложение L в L^{**} . Если $L = L^{**}$, то L называется **рефлексивным пространством**.

Задача 5.8. Доказать, что l_p , $1 < p < \infty$ – рефлексивное пространство.

Задача 5.9. Доказать, что $L_p[a, b]$, $1 < p < \infty$ – рефлексивное пространство.

Задача 5.10. Доказать, что $C[a, b]$ нерефлексивно.

Задача 5.11. При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ функционал

$$f_\alpha(x) = \int_0^1 \frac{x(t)}{t^\alpha} dt$$

принадлежит пространству $L_3^*[0, 1]$?

§ 6.

Сильная и слабая сходимость последовательности функционалов

В пространстве линейных непрерывных функционалов L^* была введена норма

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_L}.$$

Сходимость по норме называют **сильной** сходимостью функционалов.

Последовательность $\{f_n\}$ называется **слабо** сходящейся к $f \in L^*$, если для каждого $x \in L$ выполняется соотношение

$$f_n(x) \rightarrow f(x).$$

Очевидно, что если последовательность функционалов сходится сильно, то она сходится и слабо. Это сразу следует из неравенства

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\| \cdot \|x\|.$$

Обратное утверждение в общем случае неверно.

Пример 6.1. Доказать, что последовательность $f_n(x) = x_n$ сходится слабо, но не сходится сильно в l_2 .

Решение. Так как $f_n(x) = (x, e_n)$, то, как следует из теоремы 4.6 об общем виде функционала, $\|f_n\| = \|e_n\| = 1$. С другой стороны, так как $x \in l_2$, то $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$, а, значит, $x_n \rightarrow 0$. Таким образом, последовательность f_n слабо сходится к нулевому функционалу, но не сходится сильно.

Задача 6.1. Доказать, что в пространстве $C[0, 1]$ последовательность функционалов

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos ntdt$$

сходится слабо, но не сходится сильно к нулевому функционалу.

Указание. Вычислить норму функционала f_n , используя задачу 4.2, а также учесть, что для непрерывной функции x последовательность ее коэффициентов Фурье сходится к нулю.

Замечание 6.1. Пространство L^* можно рассматривать двояко. С одной стороны, это сопряженное к пространству L , а с другой – L^* – самостоятельное пространство, а значит, с ним можно связать пространство L^{**} . В связи с этим мы можем в L^* вводить слабую топологию двумя способами.

Последовательность $\{f_n\}$ из L^* называют **слабо сходящейся** к $f \in L^*$, если $F(f_n) \rightarrow F(f)$ для любого $F \in L^{**}$. Топология, порожденная этой сходимостью, называется **слабой** топологией в L^* (порожденной пространством L^{**}). Наряду с ней в пространстве L^* рассматривается так называемая **слабая*** топология (топология, порожденная пространством L). В этом случае последовательность $\{f_n\}$ называется **слабо*** **сходящейся** к f , если $f_n(x) \rightarrow f(x)$ для любого $x \in L$.

Если следовать этой терминологии, то слабую сходимости функционалов нужно было бы называть слабой* сходимостью. Однако мы не будем менять определения, так как такое определение слабой сходимости функционалов принято во многих книгах по функциональному анализу.

Задача 6.2. Доказать, что в конечномерном пространстве понятия сильной и слабой сходимости функционалов эквивалентны.

Задача 6.3. Пусть в пространстве $C^1[-1, 1]$ задана последовательность функционалов

$$f_n(x) = \frac{n}{2} \left[x \left(\frac{1}{n} \right) - x \left(-\frac{1}{n} \right) \right].$$

Доказать, что f_n – линейные непрерывные функционалы и $f_n(x) \rightarrow f(x)$, где $f(x) = x'(0)$.

§ 7.

Теорема Хана–Банаха

Пусть L – линейное нормированное пространство, L_0 – некоторое его подпространство. Пусть далее на L_0 задан линейный непрерывный функционал f_0 . Функционал f называется **продолжением** функционала f_0 , если

$$f(x) = f_0(x)$$

для всех $x \in L_0$.

Задача о продолжении линейного функционала часто встречается в анализе. Центральное место в этой теме занимает следующая теорема

Теорема 7.1 (Хана–Банаха). *Пусть f_0 – линейный непрерывный функционал, заданный на подпространстве L_0 , $L_0 \subset L$. Тогда функционал f_0 может быть продолжен до некоторого линейного непрерывного функционала f на всем пространстве L без увеличения нормы, то есть так, что*

$$\|f_0\|_{L_0} = \|f\|_L.$$

Можно дать геометрическую интерпретацию теореме Хана–Банаха. Как следует из утверждения 2.1, уравнение $f_0(x) = 1$ определяет в L_0 гиперплоскость, лежащую на расстоянии $\frac{1}{\|f_0\|}$ до нуля. Продолжая f_0 без увеличения нормы до функционала на всем L , мы проводим через эту частичную гиперплоскость ”большую” гиперплоскость на всем L , причем расстояние до нуля остается прежним.

Приведем примеры построения продолжения линейного функционала на плоскости и в трехмерном пространстве.

Пример 7.1. Пусть L_0 – подпространство l_1^2 , определяемое формулой

$$L_0 = \{x \in l_1^2 : x_1 + x_2 = 0\}.$$

На L_0 задан функционал $f_0(x) = x_1 - 2x_2$. Найти продолжение функционала f_0 , чтобы выполнялись условия теоремы Хана–Банаха.

Решение. Вычислим норму функционала f_0 . По определению имеем:

$$\|f_0\|_{L_0} = \sup_{x_1+x_2=0} \frac{|x_1 - 2x_2|}{|x_1| + |x_2|} = \frac{3}{2}.$$

Из теоремы 4.1 следует, что искомый функционал f имеет вид

$$f(x) = a_1x_1 + a_2x_2$$

и

$$\|f\|_{l_1^2} = \max(|a_1|, |a_2|).$$

Так как функционал f является продолжением f_0 , то

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $(a_1 - a_2)x_1 = 3x_1$. Так как это верно для любого $x_1 \in R$, то $a_1 - a_2 = 3$.

Учитывая, что $\|f\|_L = \|f_0\|_{L_0}$, получаем второе условие на числа a_1, a_2 : $\max(|a_1|, |a_2|) = \frac{3}{2}$. Таким образом, нужно решить уравнение $\max(|a_1|, |a_1 - 3|) = \frac{3}{2}$. Построив график $y = \max(|a_1|, |a_1 - 3|)$, находим, что $a_1 = \frac{3}{2}$. Итак, искомый функционал имеет вид

$$f(x) = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2.$$

Приведем пример, показывающий, что функционал f_0 может иметь множество продолжений.

Пример 7.2. Пусть подпространство L_0 пространства l_∞^2 определяется формулой

$$L_0 = \{x \in l_\infty^2 : x_1 = x_2\}.$$

а

$$f_0(x) = x_1 + 3x_2.$$

Найти продолжение f_0 .

Решение. Используем геометрический подход. Вычислим норму f_0 , используя утверждение 3.1. Сейчас гиперплоскость $A_{f_0} = \{x \in L_0 : x_1 + 3x_2 = 1\}$ состоит из одной точки $M = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Так как расстояние от A_{f_0} до 0 равно $\frac{1}{4}$, то $\|f_0\| = 4$. Построим теперь гиперплоскость (а сейчас это прямая) $A_f = \{x \in L : f(x) = 1\}$ так, чтобы она прошла через точку M и расстояние до нуля было равно $\frac{1}{4}$. Напомним, как находить

расстояние от точки до прямой. Берем маленький шар с центром в заданной точке и "раздуваем" его до первого касания с прямой. В нашем случае мы должны нарисовать шар с центром в нуле и радиусом $\frac{1}{4}$. Выясним, как выглядит шар в пространстве l_∞^2 . Вспоминая, как задается норма в l_∞^2 , получаем формулу

$$B[0, \frac{1}{4}] = \left\{ x \in l_\infty^2 : \max(|x_1|, |x_2|) = \frac{1}{4} \right\}.$$

Таким образом, шар в пространстве l_∞^2 – это квадрат со сторонами, параллельными осям координат. Заметим, что точка M попала в "вершину" шара $B[0, \frac{1}{4}]$. Это означает, что можно проводить любую прямую, которая проходит через M и заключена между прямыми $x_1 = \frac{1}{4}$ и $x_2 = \frac{1}{4}$ (прямая не должна пересекать шар). Уравнение любой такой прямой имеет вид

$$a_1 \left(x_1 - \frac{1}{4} \right) + a_2 \left(x_2 - \frac{1}{4} \right) = 0, \quad a_1, a_2 \geq 0.$$

Это уравнение можно записать по-другому

$$\frac{4}{a_1 + a_2} (a_1 x_1 + a_2 x_2) = 1.$$

Итак, функционал

$$f(x) = \frac{4}{a_1 + a_2} (a_1 x_1 + a_2 x_2),$$

где $a_1, a_2 \geq 0$ и $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, является искомым.

Заметим, что если точка попадает на грань шара (как в задаче 7.1), то продолжение единственное, а если в вершину (как в задаче 7.2), то продолжений множество. В частности, отсюда следует, что в евклидовом пространстве l_2^2 продолжение единственно, так как шар в l_2^2 круглый.

Пример 7.3. Пусть подпространство L_0 пространства l_1^3 определяется формулой

$$L_0 = \{ x \in l_\infty^2 : x_1 = t, x_2 = 2t, x_3 = 3t \}.$$

а

$$f_0(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3.$$

Найти продолжение f_0 .

Решение. Вычислим норму функционала f_0 . Имеем

$$\|f_0\| = \sup_t \frac{|2t + 6t - 3t|}{|t| + |2t| + 3t} = \frac{5}{6}.$$

Функционал f имеет вид

$$f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3.$$

Так как f является продолжением f_0 и их нормы совпадают, то получаем следующую систему:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ x_1 = t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 3t \\ \max(|a_1|, |a_2|, |a_3|) = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Первые четыре условия дают равенство $a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 5$. Итак, остается решить такую задачу:

$$\max(|5 - 2a_2 - 3a_3|, |a_2|, |a_3|) = \frac{5}{6}.$$

Можно просто перебрать варианты, когда одно из чисел равно $\frac{5}{6}$, а два других не превосходят $\frac{5}{6}$. Мы решим задачу по-другому. Так как $|5 - 2a_2 - 3a_3| \leq \frac{5}{6}$, то $\frac{25}{6} \leq 2a_2 + 3a_3 \leq \frac{35}{6}$. С другой стороны, $a_2 \leq \frac{5}{6}$ и $a_3 \leq \frac{5}{6}$, а значит, $2a_2 + 3a_3 \leq \frac{25}{6}$. Следовательно, существует единственное решение задачи $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{5}{6}$.

Приведем несколько следствий из теоремы Хана–Банаха.

Задача 7.1. Доказать, что если x_0 – ненулевой элемент в нормированном пространстве L , то существует такой линейный непрерывный функционал f на L , что

$$\|f\| = 1 \quad \text{и} \quad f(x_0) = \|x_0\|.$$

Указание. Рассмотреть подпространство $L_0 = \text{lin}\{x_0\}$ и функционал $f_0(tx_0) = t\|x_0\|$, заданный на L_0 .

Задача 7.2. Пусть $x_1, x_2 \in L$, причем $x_1 \neq x_2$. Доказать, что тогда существует линейный непрерывный функционал f на L такой, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Задача 7.3. Пусть e_1, \dots, e_k – линейно независимая система в L . Доказать, что существует биортогональная система функционалов в L^* , то есть существуют функционалы f_1, \dots, f_k такие, что $f_n(x_i) = \delta_{ni}$.

Напомним, что расстояние от элемента x_0 до множества P определяется следующим образом:

$$\rho(x_0, P) = \inf_{p \in P} \|x_0 - p\|.$$

Задача 7.4. Пусть \widehat{L} – подпространство (замкнутое), $x_0 \notin \widehat{L}$, и d – это расстояние от x_0 до \widehat{L} . Доказать, что существует линейный непрерывный функционал f на L такой, что выполняются следующие условия:

- 1) $f(x) = 0$ для $x \in \widehat{L}$;
- 2) $f(x_0) = 1$;
- 3) $\|f\| = \frac{1}{d}$.

Указание. Ввести подпространство $L_0 = \text{lin}(\widehat{L}, x_0)$ и функционал $f_0 : L_0 \rightarrow R$, который задается формулой

$$f_0(\widehat{l} + tx_0) = t.$$

Формулу, которую предлагается доказать в следующей задаче, иногда называют формулой двойственности.

Задача 7.5. Доказать, что

$$\rho(x_0, \widehat{L}) = \max \left\{ \frac{f(x_0)}{\|f\|} : f \in L^*, f|_{\widehat{L}} = 0 \right\}.$$

Здесь сохранены обозначения задачи 7.4.

Задача 7.6. Доказать, что

$$\rho(x_0, \ker g) = \frac{|g(x_0)|}{\|g\|};$$

здесь g – линейный непрерывный функционал.

Указание. Доказать, используя задачу 2.8, что все функционалы f , которые на гиперплоскости $\widehat{L} = \ker g$ обращаются в нуль, пропорциональны g .

Задача 7.7. Доказать, что

$$\rho(x_0, M_g) = \frac{|g(x_0) - c|}{\|g\|};$$

здесь $M_g = \{m \in L : g(m) = c\}$ и $g \in L^*$.

Указание. Пусть $\tilde{m} \in M_g$, то есть $g(\tilde{m}) = c$. Доказать, что

$$\rho(x_0, M_g) = \rho(x_0 - \tilde{m}, \ker g).$$

Далее применить результат задачи 7.6.

В примерах, которые будут рассмотрены ниже, нужно не только найти расстояние от элемента x_0 до множества $P \subset L$, но и найти элемент наилучшего приближения. Напомним, что $p^* \in P$ называется **элементом наилучшего приближения** для x_0 , если

$$\|x_0 - p^*\| = \rho(x_0, P).$$

Элемент наилучшего приближения может не существовать. В этом случае следует указать минимизирующую последовательность. Последовательность $\{p_n\}$ точек из P называется **минимизирующей**, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_0 - p_n\| = \rho(x_0, P).$$

Отметим, что в отличие от элемента наилучшего приближения минимизирующая последовательность всегда существует.

В том случае, когда $P = \ker f$, элемент наилучшего приближения p^* (если он существует) может быть найден по формуле

$$p^* = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(m)}m, \quad (7.1)$$

где $m \in L$, $\|m\| = 1$ и $f(m) = \|f\|$.

Действительно, $f(p^*) = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{f(m)} \cdot f(m) = 0$, то есть $p^* \in \ker f$. Кроме того,

$$\|p^* - x_0\| = \frac{|f(x_0)|}{f(m)}\|m\| = \frac{|f(x_0)|}{\|f\|} = \rho(x_0, P).$$

Если не существует элемента m такого, что $\|m\| = 1$ и $f(m) = \|f\|$, то не существует и элемента наилучшего приближения. В этом случае можно найти последовательность m_n , такую что $\|m_n\| = 1$ и $f(m_n) \rightarrow \|f\|$. Тогда минимизирующая последовательность определяется по формуле

$$p_n = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(m_n)}m_n. \quad (7.2)$$

Если P – гиперплоскость, то есть $P = \{x \in L : f(x) = c\}$, то элемент наилучшего приближения для x_0 можно найти по формуле (сравните с (7.1)).

$$p^* = x_0 - \frac{f(x_0) - c}{f(m)}m, \quad (7.3)$$

где $m \in L$, $\|m\| = 1$ и $f(m) = \|f\|$.

Пример 7.4. Вычислить расстояние в пространстве $C[-1, 1]$ от элемента $x_0(t) = t^2$ до ядра функционала $f(x) = \int_{-1}^1 t^2 x(t) dt$. Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность.

Решение. Используя результат задачи 7.6, имеем

$$\rho(x_0, \ker f) = \frac{|f(x_0)|}{\|f\|}.$$

Так как $f(x_0) = \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{2}{5}$, то остается вычислить норму функционала. Из следствия теоремы Ф. Рисса об общем виде функционала (задача 4.1) получаем, что $\|f\| = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$. Итак, $\rho(x_0, \ker f) = \frac{3}{5}$.

Найдем теперь элемент наилучшего приближения p^* . Как следует из формулы (7.1), для этого нужно найти функцию $m \in C[-1, 1]$, удовлетворяющую условиям $\|m\| = 1$ и $f(m) = \|f\|$. В этом нам поможет подход, который мы использовали при вычислении нормы функционала (см. третий раздел). Когда мы оценивали $\|f\|$ снизу, мы по существу находили функцию m , для которой выполнялись необходимые условия. В данном примере $m(t) = 1$, тогда $p^*(t) = t^2 - \frac{3}{5}$.

Пример 7.5. Вычислить расстояние в пространстве $C[-1, 1]$ от элемента $x_0(t) = t$ до ядра функционала $f(x) = \int_{-1}^1 tx(t) dt$. Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность.

Решение. Поступим аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере. Так как $f(x_0) = \frac{2}{3}$ и $\|f\| = \int_{-1}^1 |t| dt = 1$, то $\rho(x_0, \ker f) = \frac{2}{3}$.

Докажем, что не существует непрерывной функции m , норма которой равна 1 и $f(m) = \|f\|$. Предположим, что такая функция существует и пусть найдется $t^* \in (0, 1)$, что $m(t^*) < 1$. Так как m – непрерывная функция, то найдется число $\delta > 0$ такое, что $m(t) < 1$ для любого $t \in (t^* - \delta, t^* + \delta) \cap (0, 1)$.

Тогда, учитывая неравенство $-1 \leq m(t) \leq 1$, получим $f(m) = \int_{-1}^1 tm(t) dt < 1$.

С другой стороны, $\|f\| = 1$. Это противоречие доказывает, что $m(t) = 1$ для любой точки $t \in (0, 1)$. Аналогично доказывается, что $m(t) = -1$ для любой точки $t \in (-1, 0)$. Но функция, удовлетворяющая таким условиям, не может быть непрерывной в нуле. Итак, мы доказали, что функции m не существует, а значит, не существует элемента наилучшего приближения.

Найдем тогда минимизирующую последовательность. Рассмотрим функционал $f(x) = \int_{-1}^1 tx(t)dt$ на более широком, чем $C[a, b]$, пространстве ограниченных функций $M[a, b]$. Тогда функция $\hat{m}(t) = \operatorname{sgnt}$ удовлетворяет условиям: $\|\hat{m}\|_{M[a, b]} = 1$ и $f(\hat{m}) = \|f\| = 1$. Так как \hat{m} не является непрерывной, то ее нужно "подправить" (см. пример 3.4). Подправим функцию \hat{m} в нуле, где у нее есть разрыв. Непрерывные функции m_n определим по формуле

$$m_n(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1; \\ nt, & -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n}; \\ -1, & 0 \leq t \leq -\frac{1}{n}. \end{cases}$$

Тогда минимизирующая последовательность p_n может быть найдена по формуле (7.2). Имеем

$$p_n(t) = t - \frac{2}{3\left(1 - \frac{1}{3n^2}\right)}m_n(t).$$

Пример 7.6. Найти расстояние от точки $x_0 = (1, -2, 3, 0, 0, 4)$ до гиперплоскости $P = \{x \in l_1^6 : 2x_1 + x_2 - 3x_6 = 6\}$, а также элемент наилучшего приближения.

Решение. Рассмотрим функционал $f(x) = 2x_1 + x_2 - 3x_6$ на пространстве l_1^6 . Используя теорему 4.1 об общем виде функционала, получим $\|f\| = \|a\|_{l_\infty^6}$, где $a = (2, 1, 0, 0, 0, -3)$. Учитывая определение нормы в пространстве l_∞^6 , имеем $\|a\|_{l_\infty^6} = \max(2, 1, |-3|) = 3$. Используя задачу 7.7, получим

$$\rho(x_0, P) = \frac{|f(x_0) - 6|}{\|f\|} = \frac{|2 \cdot 1 - 2 - 4 \cdot 3 - 6|}{3} = 6.$$

Теперь найдем элемент наилучшего приближения. Для этого сначала найдем вектор $m \in l_1^6$, для которого $\|m\|_{l_1^6} = 1$ и $f(m) = \|f\| = 3$. Несложно проверить, что вектор $m = (0, 0, 0, 0, 0, -1)$ удовлетворяет этим требованиям. Тогда элемент наилучшего приближения находим по формуле (7.3). Имеем

$$p^* = (1, -2, 3, 0, 0, 4) - \frac{-18}{3}(0, 0, 0, 0, 0, -1) = (1, -2, 3, 0, 0, -2).$$

§ 8.

Линейные непрерывные операторы

Пусть L и L_1 – два линейных нормированных пространства. **Линейным** оператором, действующим из L в L_1 , называется отображение A , удовлетворяющее условию

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Линейный функционал является частным случаем линейного оператора.

Совокупность всех $x \in L$, для которых оператор A определен, называется **областью определения** A и обозначается $D(A)$. **Областью значений** оператора A называется множество

$$J(A) = \{y \in L_1 : y = Ax, x \in D(A)\}.$$

Оператор называется непрерывным в точке $x_0 \in D_A$, если из $\|x_n - x_0\|_L \rightarrow 0$ следует, что $\|Ax_n - Ax_0\|_{L_1} \rightarrow 0$. Оператор называется **непрерывным**, если он непрерывен в каждой точке $x \in D(A)$.

Линейный оператор, действующий из L в L_1 , называется **ограниченным**, если существует такая постоянная C , что

$$\|Ax\|_{L_1} \leq C\|x\|_L$$

для любого $x \in L$.

Можно дать другое определение ограниченного оператора.

Линейный оператор $A : L \rightarrow L_1$ называется **ограниченным**, если он каждое ограниченное множество переводит в ограниченное.

Задача 8.1. Доказать равносильность двух определений ограниченного оператора.

Приведем некоторые простейшие свойства линейных непрерывных операторов (сравнить со свойствами линейных непрерывных функционалов, отмеченных во втором разделе).

Задача 8.2. Доказать, что если линейный оператор непрерывен в одной точке, то он непрерывен на всей области определения.

Задача 8.3. Доказать, что если линейный оператор ограничен, то он непрерывен.

Задача 8.4. Доказать, что если линейный оператор непрерывен, то он ограничен.

Задача 8.5. Привести пример линейного оператора, который не является непрерывным.

Задача 8.6. Доказать, что если линейный оператор действует в конечномерном пространстве, то он непрерывен.

Задача 8.7. Пусть L, L_1 – линейные пространства, A – линейный оператор, действующий из L в L_1 . Доказать, что если система x_1, x_2, \dots, x_n элементов из L линейно зависима, то и система Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n линейно зависима.

Задача 8.8. Пусть на линейном пространстве L заданы две эквивалентные нормы. A – линейный оператор, действующий в L . Доказать, что в обеих нормах он будет одновременно или ограниченным, или неограниченным.

Приведем примеры линейных непрерывных операторов.

Пример 8.1. Доказать, что оператор A , действующий в пространстве $C[-1, 2]$ и определенный формулой

$$Ax(s) = \int_{-1}^2 st^2 x(t) dt,$$

является линейным непрерывным.

Решение. Линейность оператора A очевидна. Докажем, что это ограниченный оператор. Напишем цепочку неравенств:

$$|Ax(s)| \leq \int_{-1}^2 |st^2 x(t)| dt \leq |s| \left(\int_{-1}^2 t^2 dt \right) \|x\|_{C[-1,2]} = 3|s| \|x\|_{C[-1,2]}.$$

В первом переходе модуль внесли под знак интеграла, во втором – использовали определение нормы в пространстве $C[-1, 2]$, в третьем переходе вычислили интеграл. Так как $s \in [-1, 2]$, то

$$\|Ax\|_{C[-1,2]} \leq 6\|x\|_{C[-1,2]}.$$

Итак, A – ограниченный оператор, а значит, и непрерывный.

Задача 8.9. Доказать, что оператор, действующий в пространстве $C[a, b]$ и определенный формулой

$$Ax(s) = \int_a^b K(s, t)x(t)dt, \quad (8.1)$$

является линейным непрерывным.

Здесь $K(s, t)$ – фиксированная непрерывная функция двух переменных. Функцию $K(s, t)$ называют **ядром** оператора A .

Указание. Доказать, что выполняется неравенство

$$\|Ax\|_{C[a,b]} \leq M\|x\|_{C[a,b]}; \quad (8.2).$$

здесь $M = \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |K(s, t)|dt$. Учесть непрерывность функции $K(s, t)$ при доказательстве того, что $M < \infty$.

Отметим, что операторы вида (8.1) часто встречаются в анализе и его приложениях. Например, интегралы Дирихле и Фейера являются примерами таких операторов.

Пример 8.2. Доказать, что оператор A , действующий в пространстве $L_1[-2, 3]$ и определенный формулой

$$Ax(s) = \int_{-2}^3 \sin(ts)x(t)dt,$$

является линейным непрерывным.

Решение. Линейность оператора A очевидна. Докажем, что это ограниченный оператор. Учитывая определение нормы в пространстве $L_1[-2, 3]$, получим

$$\|Ax\|_{L_1[-2,3]} = \int_{-2}^3 |Ax(s)|ds \leq \int_{-2}^3 \left(\int_{-2}^3 |\sin(ts)||x(t)|dt \right) ds.$$

Поменяем порядок интегрирования, используя теорему Фубини. Имеем

$$\|Ax\|_{L_1[-3,2]} \leq \int_{-2}^3 \left[\int_{-2}^3 |\sin(ts)|ds \right] |x(t)|dt.$$

Так как $|\sin(ts)| \leq 1$, то внутренний интеграл не превышает 5.

Окончательно получим

$$\|Ax\|_{L_1[-2,3]} \leq 5\|x\|_{L_1[-2,3]}.$$

Из ограниченности линейного оператора A следует его непрерывность.

Задача 8.10. Пусть ядро интегрального оператора (8.1) является непрерывной функцией. Доказать, что если этот оператор действует в пространстве $L_1[a, b]$, то он является непрерывным.

Указание. Доказать, что выполняется неравенство

$$\|Ax\|_{L_1[a,b]} \leq c\|x\|_{L_1[a,b]};$$

$$\text{здесь } c = \max_{t \in [a,b]} \int_a^b |K(s, t)| ds.$$

Задача 8.11. Доказать, что интегральный оператор (8.1), действующий из пространства $\widetilde{L}_1[a, b]$ в $C[a, b]$, является непрерывным, если ядро оператора – непрерывная функция.

Пример 8.3. Пусть интегральный оператор (8.1) действует из $L_2[a, b]$ в $L_2[a, b]$. Доказать, что он является непрерывным, если ядро оператора измеримо на квадрате $Q = [a, b] \times [a, b]$ и

$$N := \sqrt{\int_Q |K(s, t)|^2 ds dt} < \infty.$$

Решение. Для доказательства непрерывности оператора A используем неравенство Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned} \|Ax\|_{L_2[a,b]}^2 &= \int_a^b \left| \int_a^b K(s, t)x(t)dt \right|^2 ds \leq \\ &\leq \int_a^b \left[\int_a^b |K(s, t)|^2 dt \int_a^b |x(t)|^2 dt \right] ds = N^2 \|x\|_{L_2[a,b]}^2. \end{aligned}$$

Пример 8.4. Рассмотрим линейный оператор A , действующий из l_p в l_q , где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $1 < p < \infty$. Тогда оператор задается с помощью бесконечной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Доказать, что если

$$K := \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

то A будет ограниченным оператором.

Решение. Пусть $y = Ax$, то есть $y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k$. Из неравенства Гельдера (2.2) следует, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k \right|^q \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{q}{p}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q.$$

Учитывая определение нормы в пространстве l_p , получим

$$\|Ax\|_{l_q} \leq K \cdot \|x\|_{l_p}. \quad (8.3)$$

Ограниченность оператора A доказана.

Задача 8.12. Доказать, что оператор дифференцирования, действующий из $C^1[a, b]$ в $C[a, b]$, является линейным и непрерывным.

Задача 8.13. Доказать, что оператор дифференцирования, действующий из $C[a, b]$ в $C[a, b]$, не является непрерывным. Здесь областью определения оператора являются непрерывно дифференцируемые на $[a, b]$ функции.

§ 9.

Норма оператора и примеры ее вычисления

Пусть A – линейный непрерывный оператор, действующий из нормированного пространства L в нормированное пространство L_1 . Так как A ограниченный оператор, то существует такая постоянная c , что для любого $x \in L$

$$\|Ax\|_{L_1} \leq c\|x\|_L.$$

Наименьшее из чисел c , удовлетворяющих этому неравенству, называется **нормой** оператора A и обозначается $\|A\|$.

Задача 9.1. Доказать, что норму любого линейного ограниченного оператора, действующего из L в L_1 , можно вычислить по одной из следующих формул

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_L \leq 1} \|Ax\|_{L_1} = \sup_{\|x\|_L = 1} \|Ax\|_{L_1} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{L_1}}{\|x\|_L}.$$

Задача 9.2. Пусть H – гильбертово пространство, A – линейный ограниченный оператор, действующий в H . Доказать, что

$$\|A\| = \sup \frac{|(Ax, y)|}{\|x\|\|y\|};$$

здесь точная верхняя грань берется по всем $x, y \in H$ и $x \neq 0, y \neq 0$.

Задача 9.3. Пусть L, L_1 – банаховы пространства, A – линейный ограниченный оператор, действующий из L в L_1 . Всегда ли равенства

а) $\|x\|_1 = \|Ax\|_{L_1}$;

б) $\|x\|_2 = \|x\|_L + \|Ax\|_{L_1}$ задают в L норму? Будет ли в этой норме L банаховым пространством?

Пример 9.1. Вычислить норму оператора $A : C[-2, 1] \rightarrow C[-2, 1]$, заданного формулой

$$Ax(t) = x(0)t + x(1)t^2.$$

Решение. Из определения нормы в пространстве $C[a, b]$ следует, что $|x(0)| \leq \|x\|$, $|x(1)| \leq \|x\|$. Поэтому

$$|Ax(t)| \leq |x(0)||t| + |x(1)|t^2 \leq 6\|x\|.$$

Так как это верно для любого t , то $\|Ax\| \leq 6\|x\|$ и $\|A\| \leq 6$.

Чтобы получить противоположное по знаку неравенство, нужно подобрать непрерывную функцию $\hat{x} \in C[-2, 1]$ такую, что

$$\frac{\|A\hat{x}\|_{C[-1,2]}}{\|\hat{x}\|_{C[-1,2]}} = 6.$$

Нетрудно заметить, что $\hat{x}(t) \equiv 1$ удовлетворяет этому условию. Как следует из задачи 9.1, $\|A\| \geq \frac{\|A\hat{x}\|_{C[-1,2]}}{\|\hat{x}\|_{C[-1,2]}}$ для любой функции $x \in C[-1, 2]$. Тогда $\|A\| \geq 6$. Итак, $\|A\| = 6$.

Пример 9.2. Вычислить норму оператора $A : C[-1, 3] \rightarrow L_2[-1, 3]$, заданного формулой

$$Ax(t) = t \int_{-1}^3 x(s) ds.$$

Решение. Из определения нормы в пространстве $L_2[-1, 3]$ следует, что

$$\|Ax\|_{L_2[-1,3]}^2 = \int_{-1}^3 \left| t \int_{-1}^3 x(s) ds \right|^2 dt.$$

Оценку можно продолжить, если учесть, что $|x(s)| \leq \|x\|_{C[-1,3]}$. Имеем

$$\|Ax\|_{L_2[-1,3]}^2 \leq \left(\int_{-1}^3 |t \cdot 4|^2 dt \right) \|x\|_{C[-1,3]}^2.$$

Вычислив интеграл, получим

$$\|Ax\|_{L_2[-1,3]} \leq 8\sqrt{\frac{7}{3}}\|x\|_{C[-1,3]}.$$

Итак, $\|A\| \leq 8\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Теперь нужно подобрать непрерывную функцию \hat{x} так, чтобы $\frac{\|A\hat{x}\|_{L_2[-1,3]}}{\|\hat{x}\|_{C[-1,3]}} = 8\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Выберем $\hat{x}(t) \equiv 1$. Тогда $A\hat{x}(t) = 4t$ и $\|A\hat{x}\|_{L_2[-1,3]} = 8\sqrt{\frac{7}{3}}$. Так как $\|\hat{x}\|_{C[-1,3]} = 1$, то $\|A\| = 8\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Пример 9.3. Вычислить норму оператора A , действующего из l_1^3 в l_1^3 и заданного формулой

$$A(x) = (2x_1, 2x_1 - 4x_2, x_1 + x_2 - 3x_3).$$

Решение. Из определения нормы в пространстве l_1^3 следует, что

$$\|Ax\|_{l_1^3} = |2x_1| + |2x_1 - 4x_2| + |x_1 + x_2 - 3x_3|.$$

Используя неравенство треугольника, получим

$$\|Ax\|_{l_1^3} \leq 5|x_1| + 5|x_2| + 3|x_3| \leq 5\|x\|_{l_1^3}.$$

Итак, $\|A\| \leq 5$.

Выберем $\hat{x} = (0, 1, 0)$, тогда $\|A\hat{x}\|_{l_1^3} = 5$ и $\|\hat{x}\|_{l_1^3} = 1$. Так как $\|A\| \geq \frac{\|A\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|}$, то $\|A\| \geq 5$. Окончательно имеем $\|A\| = 5$.

Заметим, что можно было бы взять $\hat{x} = (1, 0, 0)$.

Задача 9.4. Доказать, что норму оператора A , действующего из l_1^m в l_1^n , можно вычислить по формуле

$$\|A\| = \max_{1 \leq k \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{jk}|.$$

Замечание. Если $n = 1$, то оператор A превращается в функционал, и мы получаем формулу (4.2) в случае $p = 1$.

Указание. Чтобы доказать неравенство

$$\|A\| \geq \max_{1 \leq k \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{jk}|,$$

нужно выбрать столбец k_0 , для которого

$$\sum_{j=1}^n |a_{jk_0}| = \max_{1 \leq k \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{jk}|.$$

Если таких столбцов несколько (как в примере 9.3), то можно взять любой из них. Проверить, что если координаты последовательности \hat{x} удовлетворяют условию $\hat{x}_{k_0} = 1, \hat{x}_i = 0$, если $i \neq k_0$, то $\|A\hat{x}\|_{l_1^n} = \max_{1 \leq k \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{jk}|$ и $\|\hat{x}\|_{l_1^m} = 1$.

Пример 9.4. Вычислить норму линейного оператора A , действующего из l_∞^m в l_∞^n .

Решение. Так как A – линейный оператор, то A можно задать с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $y = Ax$, тогда

$$y_j = \sum_{k=1}^m a_{jk} x_k \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Из определения нормы в пространстве l_∞^n следует, что

$$\|Ax\|_{l_\infty^n} = \max_j |y_j| \leq \max_j \sum_{k=1}^m |a_{jk}| |x_k| \leq \left(\max_j \sum_{k=1}^m |a_{jk}| \right) \|x\|_{l_\infty^m}.$$

То есть

$$\|A\| \leq \max_j \sum_{k=1}^m |a_{jk}| = L.$$

Выберем строку j_0 так, чтобы

$$\sum_{k=1}^m |a_{j_0 k}| = \max_j \sum_{k=1}^m |a_{jk}|.$$

Выберем последовательность $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m)$, полагая

$$\hat{x}_k = \operatorname{sign} a_{j_0 k} \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Тогда $\|\hat{x}\|_{l_\infty^m} = 1$ и

$$\|A\hat{x}\|_{l_\infty^n} = \max_j \left| \sum_{k=1}^m a_{jk} \hat{x}_k \right| \geq \left| \sum_{k=1}^m a_{j_0 k} \hat{x}_k \right| = \sum_{k=1}^m |a_{j_0 k}| = L.$$

Так как

$$\|A\| \geq \frac{\|A\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|} = \frac{L}{1},$$

то $\|A\| = L$.

Задача 9.5. Вычислить норму оператора A , действующего из l_∞^3 в l_∞^3 и заданного формулой

$$Ax = (x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 - 4x_3, x_1 + x_2 - 3x_3).$$

Задача 9.6. Найти λ , при котором норма оператора A , действующего из l_∞^3 в l_∞^3 , будет наименьшей

$$Ax = (\lambda x_1 - 2x_1 + x_3, x_1 + \lambda x_2, x_1 + \lambda x_2 + 4x_3).$$

Задача 9.7. Доказать, что норму оператора A , действующего из $C[a, b]$ в $C[a, b]$ и заданного формулой

$$Ax(s) = \int_a^b K(s, t)x(t)dt, \quad (9.1)$$

можно вычислить по формуле

$$\|A\| = \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |K(s, t)|dt;$$

здесь $K(s, t)$ – непрерывная функция двух переменных.

Указание. Использовать неравенство (8.2). Для доказательства неравенства

$$\|A\| \geq \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |K(s, t)|dt,$$

учесть, что из непрерывности функции $K(s, t)$ следует существование числа $s_0 \in [a, b]$ такого, что

$$\int_a^b |K(s_0, t)|dt = \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |K(s, t)|dt.$$

Далее ввести функционал

$$f(x) = \int_a^b K(s_0, t)x(t)dt$$

и доказать, что

$$\|A\| \geq \|f\|.$$

Для вычисления $\|f\|$ использовать теорему об общем виде линейного функционала в пространстве $C[a, b]$ (см. также задачу 4.2).

Пример 9.5. Доказать, что оператор, заданный формулой (9.1), действующий из $L_1[a, b]$ в $L_1[a, b]$, является ограниченным и его норму можно вычислить по формуле

$$\|A\| = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(s, t)| ds.$$

Здесь $K(s, t)$ – непрерывная функция по s и t .

Решение. Несложно доказать, что

$$\|A\| \leq \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(s, t)| ds = C.$$

Докажем противоположное по знаку неравенство. Так как $K(s, t)$ – непрерывная функция, то и функция $\int_a^b |K(s, t)| ds$ также непрерывна. Значит существует число $t_0 \in [a, b]$ такое, что

$$C = \int_a^b |K(s, t_0)| ds.$$

Из непрерывности функции $K(s, t)$ следует ее равномерная непрерывность. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$, что $|K(s', t') - K(s, t)| < \varepsilon$ как только $|s' - s| < \delta$, $|t' - t| < \delta$. Выберем отрезок $\Delta = [t_1, t_2] \subset [a, b]$, чтобы точка t_0 принадлежала отрезку Δ и длина Δ была меньше δ . Положим $\hat{x}(t) = \frac{1}{t_2 - t_1}$, если $t \in \Delta$, и $\hat{x}(t) = 0$ в остальных точках. Тогда

$$\|A\hat{x}\|_{L_1} = \int_a^b |A\hat{x}(s)| ds = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_a^b \left| \int_{t_1}^{t_2} K(s, t) dt \right| ds.$$

Здесь и всюду ниже $L_1 = L_1[a, b]$. Используя неравенство треугольника, получим

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} K(s, t) dt \right| \geq \left| \int_{t_1}^{t_2} K(s, t_0) dt \right| - \int_{t_1}^{t_2} |K(s, t_0) - K(s, t)| dt.$$

Так как $|t_0 - t| < \delta$ при $t \in [t_1, t_2]$, то $|K(s, t_0) - K(s, t)| < \varepsilon$. Поэтому

$$\int_{t_1}^{t_2} |K(s, t_0) - K(s, t)| dt < \varepsilon \cdot (t_2 - t_1).$$

Собирая три последние оценки, получим

$$\|A\hat{x}\|_{L_1} \geq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_a^b \left| \int_{t_1}^{t_2} K(s, t_0) dt \right| ds - \varepsilon \cdot (b - a).$$

Вычислив внутренний интеграл и учитывая выбор t_0 , имеем

$$\|A\hat{x}\|_{L_1} \geq C - \varepsilon \cdot (b - a).$$

В силу произвольности ε , получим

$$\|A\hat{x}\|_{L_1} \geq C.$$

Остается заметить, что $\|\hat{x}\|_{L_1} = 1$. Таким образом,

$$\|A\| \geq \frac{\|A\hat{x}\|_{L_1}}{\|\hat{x}\|_{L_1}} \geq C$$

и $\|A\| = C$.

Пример 9.6. Пусть оператор A действует из l_2^n в l_2^n и в некотором базисе задается матрицей $\{a_{ij}\}$, причем $a_{ij} = a_{ji}$. Доказать, что

$$\|A\| = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|;$$

где λ_i – собственные значения матрицы A .

Решение. Так как матрица A симметрична, то существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы A , то есть

$$Ae_i = \lambda_i e_i \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть $y = Ax$. Так как $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, то $Ax = \lambda_1 x_1 e_1 + \dots + \lambda_n x_n e_n$

и

$$\|y\|_{l_2^n}^2 = \|Ax\|_{l_2^n}^2 = |\lambda_1 x_1|^2 + \dots + |\lambda_n x_n|^2.$$

Имеем

$$\|Ax\|_{l_2}^2 \leq \left(\max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i| \right)^2 \|x\|_{l_2}^2.$$

Докажем противоположную оценку. Пусть $\max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i| = |\lambda_{i_0}|$. Возьмем $\hat{x} = e_{i_0}$. Тогда

$$\|A\hat{x}\|_{l_2} = |\lambda_{i_0}|.$$

Так как $\|\hat{x}\|_{l_2} = 1$, то

$$\|A\| \geq \frac{\|A\hat{x}\|_{l_2}}{\|\hat{x}\|_{l_2}} = |\lambda_{i_0}|.$$

Таким образом, $\|A\| = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|$.

Задача 9.8. Пусть оператор A действует из l_2^n в l_2^n . Доказать, что

$$\|A\| = \sqrt{\max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|};$$

где λ_i – собственные значения матрицы $A^\top \cdot A$.

§ 10.

Пространство линейных ограниченных операторов

Пусть A и B – два линейных ограниченных оператора, действующих из нормированного пространства X в нормированное пространство Y . Назовем их **суммой** $A + B$ оператор C , ставящий в соответствие элементу $x \in X$ элемент

$$y = Ax + Bx \in Y.$$

Таким образом, $Cx = Ax + Bx$.

Оператор C определен на $D(A) \cap D(B)$.

Легко проверить, что C – линейный оператор. Кроме того, так как

$$\|C\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Cx\|_Y}{\|x\|_X} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_Y}{\|x\|_X} = \|A\| + \|B\|,$$

то C – ограниченный оператор.

Произведение $k \cdot A$ оператора A на число k определяется как оператор, который элементу x ставит в соответствие элемент $k \cdot Ax$. То есть $(kA)x = k \cdot Ax$, кроме того, $\|k \cdot A\| = |k| \cdot \|A\|$.

Операторы можно не только складывать, но и умножать. Пусть A – линейный ограниченный оператор, действующий из Y в Z , а B – линейный ограниченный оператор, действующий из X в Y . **Произведением** AB операторов A и B называется оператор F , ставящий в соответствие элементу $x \in X$ элемент $z \in Z$ такой, что $z = A(Bx)$. Таким образом, оператор F действует из X в Z и $F(x) = A(Bx)$.

Задача 10.1. Доказать, что $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$. Привести пример операторов A и B , для которых $\|AB\| < \|A\| \cdot \|B\|$.

Обозначим через $L(X, Y)$ совокупность всех непрерывных линейных операторов, определенных на всем X и отображающих X в Y . Множество

$L(X, Y)$ образует линейное нормированное пространство (с тем же определением нормы оператора, которое было дано ранее).

Заметим, что если $Y = R$, то $L(X, Y) = X^*$.

Теорема 10.1. Пусть Y – банахово пространство, тогда $L(X, Y)$ тоже банахово.

Доказательство этой теоремы см., например, в [6], [8].

В пространстве $L(X, Y)$ можно определить разные виды сходимости. Будем говорить, что последовательность $\{A_n\}$ сходится **равномерно** (или по норме) к A , если

$$\|A_n - A\| \rightarrow 0.$$

Если же $\|A_n x - Ax\|_Y \rightarrow 0$, для любого $x \in X$, то сходимость будет называться **поточечной**.

Так как

$$\|A_n x - Ax\|_Y \leq \|A_n - A\| \cdot \|x\|_X,$$

то из равномерной сходимости следует поточечная. Приведем пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

Пример 10.1. Доказать, что последовательность операторов

$$A_n x(t) = n \int_t^{t+\frac{1}{n}} x(\tau) d\tau,$$

действующих в $C[0, 1]$, сходится поточечно к единичному оператору, но не сходится равномерно.

Решение. Так как $x(t) = n \int_t^{t+\frac{1}{n}} x(t) d\tau$, то

$$|A_n x(t) - x(t)| \leq n \int_t^{t+\frac{1}{n}} |x(\tau) - x(t)| d\tau \leq \sup_{\tau \in [t, t+\frac{1}{n}]} |x(\tau) - x(t)|.$$

Учтем, что x – непрерывная функция на отрезке $[0, 1]$. Значит, она является равномерно непрерывной. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любых точек $t_1, t_2 \in [0, 1]$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $|t_1 - t_2| < \delta$, то $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$. Так как $\tau \in [t, t + \frac{1}{n}]$, то $|t - \tau| \leq \frac{1}{n}$. Выберем n_0 так, чтобы $\frac{1}{n_0} < \delta$. Тогда $|t - \tau| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \delta$ для всех $n \geq n_0$. Итак,

$$|A_n x(t) - x(t)| \leq \sup_{\tau \in [t, t+\frac{1}{n}]} |x(\tau) - x(t)| \leq \varepsilon$$

для всех $n \geq n_0$. Так как это верно для всех $t \in [0, 1]$, то $\|A_n x - x\|_{C[0,1]} \leq \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$. А это и означает, что последовательность $\{A_n\}$ сходится к единичному оператору поточечно.

Докажем теперь, что нет равномерной сходимости. Пусть $x_n(t) = t^{n-1}$. Тогда

$$|A_n x_n(t) - x_n(t)| = \left| n \int_t^{t+\frac{1}{n}} \tau^{n-1} d\tau - t^{n-1} \right| = \left| \left(t + \frac{1}{n}\right)^n - t^n - t^{n-1} \right|.$$

Учитывая, что $\|x_n\|_{C[0,1]} = \max_{t \in [0,1]} t^{n-1} = 1$, получим

$$\|A_n - I\| \geq \frac{\|A_n x_n - x_n\|_{C[0,1]}}{\|x_n\|_{C[0,1]}} \geq |A_n x_n(1) - x_n(1)| = \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 2 \right|.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, то $\|A_n - I\|$ не сходится к нулю. Следовательно, мы доказали, что последовательность равномерно не сходится.

Приведем критерий поточечной сходимости операторов. Для этого сначала сформулируем принцип равномерной ограниченности.

Теорема 10.2 (Банах–Штейнгауз). *Если последовательность $\{A_n\}$ линейных непрерывных операторов, переводящих банахово пространство X в нормированное пространство Y , ограничена в каждой точке x , то есть*

$$\|A_n x\|_Y \leq M_x,$$

то нормы этих операторов ограничены в совокупности, то есть найдется такая константа M , что для любого $n \in N$

$$\|A_n\| \leq M.$$

Из теоремы Банаха–Штейнгауза сразу следует критерий поточечной сходимости.

Теорема 10.3. *Для того чтобы последовательность линейных непрерывных операторов $\{A_n\}$, отображающих банахово пространство X в банахово пространство Y , поточечно сходилась к линейному непрерывному оператору A , необходимо и достаточно, чтобы*

- 1) *последовательность $\{\|A_n\|\}$ была ограничена;*
- 2) *$A_n x \rightarrow Ax$ для любого x из некоторого всюду плотного в X множества.*

Теорема 10.3, которую в некоторой литературе называют теоремой Банаха–Штейнгауза, имеет многочисленные применения. Это объясняется тем, что многие конкретные задачи (например, исследование сходимости рядов Фурье и интерполяционных полиномов, исследования квадратурных формул, получение приближенных решений интегральных и дифференциальных уравнений) могут быть описаны с помощью последовательности линейных операторов.

Покажем на примере теории интерполирования, как может использоваться принцип равномерной ограниченности.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность точек

$$t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots < t_1^{(n)}. \quad (10.1)$$

По этой последовательности для заданной функции $x \in C[0, 1]$ строится интерполяционный многочлен Лангранжа

$$L_n x(t) = \sum_{k=1}^n x(t_k^{(n)}) \prod_{i \neq k} \frac{t - t_i^{(n)}}{t_i^{(n)} - t_k^{(n)}}.$$

Будет ли последовательность интерполяционных многочленов $L_n x$ сходиться к функции x в пространстве $C[a, b]$? Чтобы ответить на этот вопрос, будем считать L_n оператором, действующим из $C[a, b]$ в $C[a, b]$. Если бы для любой функции $x \in C[a, b]$

$$\|L_n x - x\|_{C[a, b]} \rightarrow 0,$$

то $\|L_n x\| \leq M_x$, так как любая сходящаяся последовательность ограничена. Используя принцип равномерной ограниченности, получим

$$\|L_n\| \leq M.$$

С другой стороны, имеет место неравенство С. Н. Бернштейна, в силу которого

$$\|L_n\| > \frac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}.$$

Получаем противоречие. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 10.4 (Фабер). *Для любой последовательности точек (10.1) существует непрерывная функция x , к которой последовательность интерполяционных многочленов $L_n x$ равномерно не сходится, то есть*

$$\|L_n x - x\|_{C[a, b]} \not\rightarrow 0. \quad (10.2)$$

Например, если взять последовательность $\{t_i^{(n)}, i = 1, \dots, n\}$, которая дает равномерное деление отрезка $[-1, 1]$, и построить интерполяционные многочлены $L_n x$ для функции Рунге $x(t) = \frac{1}{1+25t^2}$, то $\|L_n x - x\|_{C[-1,1]} \not\rightarrow 0$.

Задача 10.2 (Теорема Сёге). Пусть для приближенного вычисления интеграла используется квадратурная формула, имеющая вид

$$\int_a^b x(t)dt \approx \sum_{k=1}^n A_k^n x(t_k^n); \quad (10.3)$$

здесь $a \leq t_1^n < \dots < t_n^n \leq b$.

Доказать, что, для того чтобы квадратурные формулы (10.3) сходились для любой непрерывной функции, то есть

$$\left| \int_a^b x(t)dt - \sum_{k=1}^n A_k^n x(t_k^n) \right| \rightarrow 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$1) \sup_n \sum_{k=1}^n |A_k^n| \leq M;$$

2) сходимость этих формул выполнялась для каждого многочлена.

Задача 10.3. Доказать, что существует непрерывная периодическая функция, ряд Фурье которой равномерно к ней не сходится.

Указание. Ввести в рассмотрение оператор s_n , который является частной суммой ряда Фурье. Как известно, эта сумма выражается интегралом Дирихле:

$$s_n(x)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\tau) \frac{\sin((2n+1)\frac{\tau-t}{2})}{\sin\frac{\tau-t}{2}} d\tau.$$

Используя неравенства

$$|\sin t| \leq t, \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad \sin s \geq \frac{2}{\pi}s, \quad \left(0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

доказать, что

$$\|s_n\| \geq \frac{1}{8\pi} \ln n.$$

Задача 10.4. Пусть A_n – оператор кусочно-линейной интерполяции в $C[a, b]$ по n равноотстоящим узлам. Исследовать последовательность $\{A_n\}$ на сходимость (равномерную и поточечную).

Пример 10.2. Исследовать на равномерную и поточечную сходимость последовательность операторов $\{A_n\}$, действующих в l_1 и заданных с помощью формулы

$$A_n x = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots).$$

Решение. Покажем, что в пространстве l_1 последовательность $\{A_n\}$ сходится поточечно к единичному оператору.

Действительно,

$$\|A_n x - x\|_{l_1} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|.$$

Так как $x \in l_1$, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ сходится. Тогда остаток этого ряда $\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|$ стремится к нулю. Таким образом, $\{A_n\}$ сходится к единичному оператору поточечно.

Проверим, будет ли последовательность сходиться равномерно. Пусть, как обычно, $e_{n+1} = (\underbrace{0, \dots, 0}_n, 1, 0, \dots)$. Заметим, что $A_n e_{n+1} = 0$. Тогда

$$\|A_n e_{n+1} - e_{n+1}\|_{l_1} = \|e_{n+1}\|_{l_1} = 1.$$

Так как

$$\|A_n - I\| \geq \frac{\|A_n e_{n+1} - e_{n+1}\|_{l_1}}{\|e_{n+1}\|_{l_1}} = 1,$$

то отсюда следует, что равномерной сходимости нет.

Пример 10.3. Исследовать последовательность операторов $A_n : C[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ на равномерную и поточечную сходимость, если оператор A_n задан формулой

$$A_n x(t) = (t^n - \sin t)x(t).$$

Решение. Рассмотрим оператор $Ax(t) = (\sin t)x(t)$, действующий из $C[0, 1]$ в $L_2[0, 1]$. Используя определение нормы в пространстве $L_2[0, 1]$, получим

$$\|(A_n - A)x\|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 |t^n x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Оценку можно продолжить, так как $|x(t)| \leq \|x\|_{C[0,1]}$. Имеем

$$\left(\int_0^1 |t^n x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{1}{2n+1}} \|x\|_{C[0,1]}.$$

Тогда $\|A_n - A\| \leq \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$.

То есть последовательность операторов $\{A_n\}$ сходится к оператору A равномерно. Из равномерной сходимости всегда следует поточечная сходимость. Итак, заданная последовательность операторов сходится равномерно и поточечно к оператору A .

Пример 10.4. Доказать, что последовательность операторов $\{A_n\}$, действующих в $C[0, 1]$ и заданных формулой

$$A_n x(t) = (t^n(1-t) + e^{\frac{n-1}{n}})x(t),$$

сходится равномерно.

Решение. Покажем, что последовательность сходится равномерно к оператору

$$Ax(t) = e \cdot x(t).$$

Действительно,

$$\|(A_n - A)x\|_{C[0,1]} = \max_{t \in [0,1]} |(t^n(1-t) + e^{\frac{n-1}{n}} - e)x(t)|.$$

Продолжим оценку. Имеем

$$\|(A_n - A)x\|_{C[0,1]} \leq (\max_{t \in [0,1]} |t^n(1-t)| + |e - e^{\frac{n-1}{n}}|) \|x\|_{C[0,1]}.$$

Вычислим максимум. Он достигается в точке $t_n = \frac{n}{n+1}$. Тогда

$$\|A_n - A\| \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} + (e - e^{\frac{n-1}{n}}).$$

Остается заметить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (e - e^{\frac{n-1}{n}}) = 0$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)}\right)^n = 0.$$

Здесь учли, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)}\right)^n = e^{-1}$. Таким образом,

$$\|A_n - A\| \rightarrow 0,$$

и мы доказали равномерную сходимость последовательности операторов A_n к оператору A .

Задача 10.5. Пусть оператор A_n задан формулой

$$A_n e_k = \begin{cases} e_1, & \text{если } k = n; \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases}$$

Исследовать характер сходимости этой последовательности операторов в пространстве l_2 .

Задача 10.6. В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим последовательность операторов

$$A_n x(t) = x(t^{1+\frac{1}{n}}).$$

Доказать, что $A_n \in L(C[0, 1], C[0, 1])$ и $\{A_n\}$ сходится к единичному оператору поточечно. Будет ли сходимость к I равномерной?

Задача 10.7. Доказать, что если $\{A_n\}$ равномерно сходится к $A \in L(Y, Z)$, B_n равномерно сходится к $B \in L(X, Y)$, то $\|A_n B_n - AB\| \rightarrow 0$.

Задача 10.8. Пусть есть две последовательности операторов A_n и B_n , которые поточечно сходятся к A и B соответственно. Доказать, что $\|A_n B_n(x) - AB(x)\| \rightarrow 0$ для любого $x \in X$.

Здесь $A_n \in L(X, X)$, $B_n \in L(X, X)$.

§ 11.

Обратные операторы

Пусть задан линейный оператор A , действующий из X в Y , $D(A)$ – область определения, а $Im(A)$ – образ этого оператора.

Оператор называется **обратимым**, если для любого $y \in Im(A)$ уравнение

$$Ax = y \quad (11.1)$$

имеет единственное решение.

Если A обратим, то каждому $y \in Im(A)$ можно поставить в соответствие единственный элемент $x \in D(A)$, являющийся решением уравнения $Ax = y$. Оператор, осуществляющий это соответствие, называется **обратным** к A и обозначается A^{-1} .

Из определения обратного оператора следует, что

$$A^{-1}Ax = x$$

для любого $x \in D(A)$ и

$$AA^{-1}y = y$$

для любого $y \in Im(A)$.

Обозначим через I_E тождественный оператор, действующий из E в E , то есть $I_E(x) = x$ для всех $x \in E$. Пусть $X = D(A)$ и $Y = Im(A)$, тогда определение обратного оператора можно было бы дать следующим образом: $AA^{-1} = I_Y$ и $A^{-1}A = I_X$. Наиболее просто (и знакомо) это определение выглядит для $X = Y$. Тогда

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_X.$$

Введем определение левого и правого обратного оператора.

Оператор $C \in L(Y, X)$ называется **правым обратным** к A , если $AC = I_Y$. Аналогично, оператор $F \in L(Y, X)$ называется **левым обратным** к A , если $FA = I_X$. В дальнейшем правый обратный оператор к A будем обозначать A_r^{-1} , а левый обратный – A_l^{-1} . Таким образом, $AA_r^{-1} = I_Y$ и $A_l^{-1}A = I_X$.

Задача 11.1. Доказать, что если A имеет правый обратный оператор, то уравнение $Ax = y$ имеет решение.

Если же оператор A имеет левый обратный оператор, то уравнение $Ax = y$ может иметь не более одного решения.

Замечание. В первом случае говорят, что для уравнения (11.1) справедлива теорема существования, а во втором – теорема единственности.

Отметим, что к уравнениям (11.1) относятся линейные алгебраические системы, линейные интегральные и дифференциальные уравнения. Поэтому нахождение обратного оператора и установление условий, при которых этот оператор существует, является важной задачей.

Задача 11.2. Доказать, что если A – линейный оператор и A обратим, то A^{-1} также линейный оператор.

Если у оператора A существует непрерывный обратный оператор, то говорят, что A **непрерывно обратим**. Из линейности оператора A следует линейность обратного оператора. Однако, как показывает приводимый ниже пример, из непрерывности оператора A в общем случае не следует непрерывность обратного оператора.

Пример 11.1. Пусть $A : C[0, 2] \rightarrow C[0, 2]$ и A задается формулой

$$Ax(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau.$$

Доказать, что A – непрерывный оператор, а обратный оператор A^{-1} не является непрерывным.

Решение. Сначала докажем, что A – непрерывный оператор. Так как

$$\|Ax\|_{C[0,2]} \leq \max_{t \in [0,2]} \int_0^t |x(\tau)| d\tau \leq 2 \cdot \|x\|_{C[0,2]},$$

то $\|A\| \leq 2$. Следовательно, A – ограниченный оператор. В силу линейности оператора A из ограниченности следует его непрерывность.

Найдем теперь обратный оператор. Заметим, что область значений оператора A – это непрерывно дифференцируемые функции, которые в нуле равны нулю. Определим на области значений $Im(A)$ оператор

$$A^{-1}y(t) = y'(t).$$

Несложно проверить, что A^{-1} действительно будет обратным оператором. Докажем, что A^{-1} не является непрерывным оператором. Для этого рассмотрим последовательность $y_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$. Заметим, что последовательность $\{y_n\}$ принадлежит области значений оператора A . Из определения оператора A^{-1} следует, что $A^{-1}y_n(t) = \cos nt$. Так как $\|y_n\|_{C[0,2]} \leq \frac{1}{n}$, то последовательность y_n сходится к функции $y^*(t) = 0$. Если бы оператор A^{-1} был непрерывным, то величина $\|A^{-1}y_n - A^{-1}y^*\|_{C[0,2]}$ должна была бы стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$. Однако

$$\|A^{-1}y_n - A^{-1}y^*\|_{C[0,2]} = \|\cos nt\|_{C[0,2]} \not\rightarrow 0.$$

Итак, мы доказали, что хотя оператор A непрерывен, обратный оператор таковым не является.

Приведем два результата, которые дают достаточные условия существования обратного ограниченного оператора.

Теорема 11.1. Пусть линейный оператор A , отображающий нормированное пространство X на нормированное пространство Y , удовлетворяет условию

$$\|Ax\|_Y \geq m\|x\|_X, \quad m > 0$$

для всех $x \in X$. Тогда существует обратный линейный ограниченный оператор A^{-1} и

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m}.$$

Теорема 11.2. Пусть X – банахово пространство, $A \in L(X, X)$ и $\|A\| < 1$. Тогда оператор $I - A$ имеет обратный ограниченный оператор, который можно найти по формуле

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

и

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Перейдем к формулировке последнего результата этого раздела – теореме Банаха об обратном операторе. Это третий основной принцип линейного функционального анализа. Два других (теорема Хана–Банаха и теорема Банаха–Штейнгауза) были приведены ранее.

Теорема 11.3. Пусть X, Y – банаховы пространства и A – линейный непрерывный оператор, взаимно однозначно отображающий X на Y . Тогда обратный оператор $A^{-1} : Y \rightarrow X$ непрерывен.

Приведем несколько примеров вычисления обратного оператора.

Пример 11.2. Доказать, что оператор $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$

$$Ax(t) = x(t) + \int_0^1 e^{s+t} x(s) ds$$

непрерывно обратим, и найти оператор A^{-1} .

Решение. Оператор A определен на всем пространстве $C[0, 1]$ и

$$\|A\| \leq 1 + \max_{t \in [0, 1]} \int_0^1 e^{s+t} ds = 1 + (e - 1) \cdot e.$$

Так как $C[0, 1]$ – банахово пространство, то, как утверждается в теореме 11.3, для того чтобы доказать непрерывную обратимость оператора A , нужно показать, что при каждом $y \in C[0, 1]$ уравнение

$$Ax(t) = x(t) + e^t \int_0^1 e^s x(s) ds = y(t) \quad (11.2)$$

имеет единственное решение.

Обозначим $c = \int_0^1 e^s x(s) ds$, тогда из (11.2) следует, что решение уравнения нужно искать в виде

$$x(t) = y(t) - c \cdot e^t. \quad (11.3)$$

Умножим (11.3) на e^t и проинтегрируем по $[0, 1]$:

$$\int_0^1 e^t x(t) dt = \int_0^1 e^t y(t) dt - c \cdot \frac{e^2 - 1}{2}.$$

Так как $c = \int_0^1 e^t x(t) dt$, то

$$c \cdot \left(\frac{e^2 + 1}{2} \right) = \int_0^1 e^t y(t) dt.$$

Выразив отсюда c и подставив в (11.3), окончательно имеем

$$x(t) = y(t) - \frac{2}{e^2 + 1} \int_0^1 e^{t+s} y(s) ds \equiv A^{-1} y(t).$$

Несложно проверить, что x — решение исходного уравнения и $\|A^{-1}\| \leq 1 + \frac{2}{e^2+1}e(e-1)$.

Задача 11.3. Пусть оператор $A : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ определяется формулой

$$Ax(t) = x(t) - \lambda \int_0^1 \varphi(t)\psi(s)x(s)ds;$$

здесь $\varphi, \psi \in C[a, b]$ и φ, ψ не равны нулю тождественно. Кроме того,

$$\gamma = \int_0^1 \varphi(t)\psi(t)dt \neq \frac{1}{\lambda}.$$

Доказать, что оператор A непрерывно обратим и

$$A^{-1}y(t) = y(t) + \frac{\lambda}{1 - \lambda\gamma} \int_0^1 \varphi(t)\psi(s)y(s)ds.$$

Пример 11.3. Рассмотрим оператор $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, заданный формулой

$$Ax(t) = \int_0^t x(s)ds + x(t).$$

Доказать, что A непрерывно обратим, и найти оператор A^{-1} .

Решение. Рассмотрим уравнение

$$Ax(t) = x(t) + \int_0^t x(s)ds = y(t),$$

где $y \in C[0, 1]$.

Обозначим $g(t) = \int_0^t x(s)ds$. Заметим, что $g(0) = 0$ и g — непрерывно дифференцируемая функция, для которой $g'(t) = x(t)$.

Так как $x(t) = y(t) - g(t)$, то мы получаем дифференциальное уравнение

$$g'(t) = y(t) - g(t).$$

Сначала решим однородное уравнение $g'(t) + g(t) = 0$. Тогда $g(t) = c \cdot e^{-t}$. Используем метод вариации произвольной постоянной. Пусть $g(t) = c(t)e^{-t}$. Подставим $g(t)$ в неоднородное дифференциальное уравнение. Получим

$$c'(t) = e^t y(t).$$

Отсюда следует, что

$$c(t) = \int_0^t e^s y(s) ds + \gamma.$$

Так как $g(0) = 0$, то $c(0) = \gamma = 0$. Итак,

$$g(t) = \int_0^t e^{s-t} y(s) ds$$

и

$$x(t) = A^{-1}y(t) = y(t) - \int_0^t e^{s-t} y(s) ds.$$

Оценим норму оператора A^{-1} . Так как

$$\|A^{-1}y\|_{C[0,1]} \leq (1 + \max_{t \in [0,1]} \int_0^t e^{s-t} ds) \|y\|_{C[0,1]} = (2 - e^{-1}) \|y\|_{C[0,1]},$$

то $\|A^{-1}\| \leq 2 - e^{-1}$.

Задача 11.4. Пусть оператор $A : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ определяется формулой

$$Ax(t) = x(t) - \lambda \int_0^t \varphi(t) \psi(s) x(s) ds, \quad \lambda \neq 0;$$

здесь $\varphi, \psi \in C[a, b]$ и φ, ψ не равны нулю тождественно. Доказать, что A – непрерывно обратимый оператор и найти A^{-1} .

Пример 11.4. Рассмотрим оператор $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, заданный формулой

$$Ax(t) = x''(t) + x(t),$$

областью определения которого является множество дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций x таких, что $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. Доказать, что A непрерывно обратим, и найти оператор A^{-1} .

Решение. Рассмотрим уравнение

$$x''(t) + x(t) = y(t)$$

с начальными условиями $x(0) = x'(0) = 0$ и произвольной функцией $y \in C[0, 1]$. Известно, что эта задача (задача Коши) имеет единственное решение. Найдем его. Для этого рассмотрим сначала однородное уравнение

$$x''(t) + x(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $x(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$. Общее решение неоднородного уравнения будем решать методом вариации произвольной постоянной. Тогда общее решение можно записать в виде

$$x(t) = c_1(t) \sin t + c_2(t) \cos t.$$

Известно, что функции c_1, c_2 определяются из системы

$$\begin{cases} c_1'(t) \sin t + c_2'(t) \cos t = 0 \\ c_1'(t) \cos t - c_2'(t) \sin t = y(t). \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, найдем, что $c_1'(t) = y(t) \cos t$, $c_2'(t) = -y(t) \sin t$. Тогда

$$c_1(t) = \int_0^t y(s) \cos s ds + \gamma_1$$

и

$$c_2(t) = - \int_0^t y(s) \sin s ds + \gamma_2.$$

Так как $x(0) = c_2(0) = 0$, то $\gamma_2 = 0$. Кроме того, $x'(0) = c_1(0) = 0$, поэтому $\gamma_1 = 0$. Окончательно получим

$$x(t) = \int_0^t \sin(t-s) y(s) ds = A^{-1} y(t).$$

Этим мы доказали, что уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение для любого $y \in C[0, 1]$. Остается отметить, что

$$\|A^{-1}\| \leq \max_{t \in [0, 1]} \int_0^t |\sin(t-s)| ds \leq 1.$$

Задача 11.5. Доказать, что оператор A из примера 11.4 является неограниченным.

Задача 11.6. В пространстве $C^1[0, 1]$ рассмотрим подмножество $L = \{x \in C^1[0, 1] : x(0) = 0\}$ и оператор $A : L \rightarrow C[0, 1]$, заданный формулой

$$Ax(t) = x'(t) + 2x(t).$$

Доказать, что A непрерывно обратим, и найти A^{-1} .

Задача 11.7. Рассмотрим оператор $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, заданный формулой

$$Ax(t) = x'''(t) + x''(t).$$

Пусть областью определения этого оператора являются трижды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$. Найти оператор A^{-1} .

Задача 11.8. Рассмотрим оператор $B : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, заданный формулой

$$Bx(t) = \int_0^1 e^{-t-s} x(s) ds.$$

1) Доказать, что $\|B\| < 1$.

2) Доказать, что $B^k = \left(\frac{1-e^{-2}}{2}\right)^{k-1} \cdot B$.

3) Рассмотреть оператор $A = B + I$ и доказать, что $A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B^k$ (сравните с теоремой 11.2).

4) Найти оператор A^{-1} .

Пример 11.5. Доказать, что оператор $A : l_2 \rightarrow l_2$ непрерывно обратим. Найти оператор A^{-1} и вычислить его норму.

$$Ax = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Решение. Так как $\|Ax\|_{l_2} \leq \sqrt{2}\|x\|_{l_2}$, то $A \in L(l_2, l_2)$. Учитывая то, что l_2 – банахово пространство, для доказательства непрерывной обратимости оператора A достаточно показать (в силу теоремы Банаха об обратном операторе), что уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение для любого $y \in l_2$. Тогда

$$(x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3, x_4, \dots) = (y_1, y_2, y_3, \dots).$$

Отсюда следует, что $x_1 + x_2 = y_1$; $x_1 - x_2 = y_2$; $x_i = y_i$, $i = 3, 4, \dots$. Итак, уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение

$$x = A^{-1}y = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}, y_3, y_4, \dots \right).$$

Вычислим норму оператора A^{-1} . Из определения нормы в пространстве l_2 следует, что

$$\|A^{-1}y\|_{l_2}^2 = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2 + y_3^2 + \dots \leq \frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{2} + y_3^2 + \dots \leq \|y\|_{l_2}^2.$$

Отсюда следует, что $\|A^{-1}\| \leq 1$. Кроме того, если взять $e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$, то $A^{-1}e_3 = e_3$ и

$$\|A^{-1}\| \geq \frac{\|A^{-1}e_3\|_{l_2}}{\|e_3\|_{l_2}} = 1.$$

Итак, $\|A^{-1}\| = 1$.

Задача 11.9. В пространстве l_2 рассмотрим операторы A, B , переводящие элементы $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$ в $Ax = (0, x_1, x_2, \dots)$, $Bx = (x_2, x_3, \dots)$. Какие из операторов A^{-1} , B^{-1} , A_r^{-1} , A_l^{-1} , B_r^{-1} , B_l^{-1} существуют?

Задача 11.10. Пусть в пространстве l_2^2 задан оператор A поворота на угол α . Найти оператор A^{-1} и вычислить его норму.

Задача 11.11. В пространстве l_2 рассмотрим оператор A , переводящий элемент $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$ в $Ax = (\lambda x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$, где $\lambda_n \in \mathbb{R}$. При каких условиях на последовательность $\{\lambda_n\}$ существует обратный оператор A^{-1} ? Будет ли он ограничен?

Задача 11.12. Найти условия, при которых оператор $A : l_1 \rightarrow l_1$ непрерывно обратим, если

$$Ax = (c_1 x_1 + c_2 x_2, d_1 x_1 + d_2 x_2, x_3, x_4, \dots)$$

Найти оператор A^{-1} и вычислить его норму.

Задача 11.13. Пусть E – подмножество пространства $C^1[0, 1]$, которое состоит из непрерывно дифференцируемых функций в нуле равных нулю. Доказать, что существует непрерывный обратный оператор к оператору $A : E \rightarrow C[0, 1]$:

- а) $Ax(t) = x'(t) + 4x(t)$;
- б) $Ax(t) = x'(t) - 2tx(t)$;
- в) $Ax(t) = (t + 1)x'(t) - x(t)$;
- г) $Ax(t) = (t^2 + 1)x'(t) - 2tx(t)$.

Найти оператор A^{-1} .

Задача 11.14. В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим операторы A и B , определенные формулами

$$Ax(t) = (t + 1)x(t), \quad Bx(t) = x(t^2).$$

Чему равны $(AB)^{-1}$ и $(BA)^{-1}$?

Задача 11.15. Пусть E – линейное нормированное пространство, $A, A^{-1} \in L(E, E)$ и $k = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ – число обусловленности оператора A . Рассмотрим уравнение $Ax = y$, $y \neq 0$. Пусть \bar{x} – его приближенное решение. Доказать, что его относительная погрешность $\frac{\|\bar{x} - x\|}{\|x\|}$ может быть оценена по формуле:

$$\frac{1}{k} \frac{\|A\bar{x} - y\|}{\|y\|} \leq \frac{\|\bar{x} - x\|}{\|x\|} \leq k \frac{\|A\bar{x} - y\|}{\|y\|}.$$

Указание. Чтобы доказать левое неравенство, нужно использовать оценки

$$\|A\bar{x} - Ax\| \leq \|A\| \cdot \|\bar{x} - x\|$$

и

$$\|A^{-1}\| \geq \frac{\|A^{-1}y\|}{\|y\|} = \frac{\|x\|}{\|y\|}.$$

Правое неравенство доказывается с помощью аналогичных неравенств (с заменой A на A^{-1}).

§ 12.

Сопряженные операторы

Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, A – линейный ограниченный оператор, действующий из X в Y . Пусть $g \in Y^*$. Применим функционал g к элементу $y = Ax$. Обозначим его $f(x)$. Таким образом,

$$f(x) = g(Ax). \quad (12.1)$$

Нетрудно проверить, что $f \in X^*$. Этим мы каждому функционалу $g \in Y^*$ поставили в соответствие функционал $f \in X^*$, то есть получили некоторый оператор, отображающий Y^* в X^* . Этот оператор называется **сопряженным** к оператору A и обозначается A^* .

Таким образом,

$$A^*(g) = f. \quad (12.2)$$

Тогда из (12.1) и (12.2) получим

$$g(Ax) = (A^*g)(x).$$

Это соотношение, верное для любого $x \in X$ и любого $g \in Y^*$, можно принять за определение сопряженного оператора A^* , действующего из Y^* в X^* . Проиллюстрируем это определение на конкретных примерах.

Пример 12.1. Найти оператор, сопряженный к оператору $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$, если

$$Ax(t) = \int_0^t x(s) ds.$$

Решение. Любой функционал g , заданный на $L_2[0, 1]$, можно записать в виде

$$g(x) = \int_0^1 a(s)x(s)ds.$$

В дальнейшем нам будет удобно функцию $a \in L_2[0, 1]$ тоже обозначить символом g , таким образом,

$$g(x) = \int_0^1 g(s)x(s)ds.$$

Тогда

$$g(Ax) = \int_0^1 g(s) \left(\int_0^s x(\tau)d\tau \right) ds.$$

Поменяв порядок интегрирования, получим

$$g(Ax) = \int_0^1 \left(\int_\tau^1 g(s)ds \right) x(\tau)d\tau.$$

Так как $f(x) = \int_0^1 f(\tau)x(\tau)d\tau$ и $f(x) = g(Ax)$, то отсюда получим

$$f(t) = \int_t^1 g(s)ds. \text{ С другой стороны, } f = A^*g. \text{ Окончательно имеем}$$

$$A^*y(t) = \int_t^1 y(\tau)d\tau.$$

Пример 12.2. Найти оператор, сопряженный к оператору $A : l_1 \rightarrow l_1$, если

$$Ax = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Решение. Любой функционал $g \in l_1^*$ можно записать в виде

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i x_i.$$

Тогда

$$g(Ax) = g_1(x_1 - x_2) + g_2(x_1 + x_2) + g_3x_3 + \dots = (g_1 + g_2)x_1 + (-g_1 + g_2)x_2 + g_3x_3 + \dots$$

Из равенства $f(x) = g(Ax)$ получим, что $f_1 = g_1 + g_2$, $f_2 = -g_1 + g_2$, $f_i = g_i$ при $i \geq 3$. Здесь учли, что $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i x_i$. Так как $f = A^*g$, то оператор $A^* : l_{\infty} \rightarrow l_{\infty}$ задается формулой $A^*y = (y_1 + y_2, -y_1 + y_2, y_3, y_4, \dots)$.

Задача 12.1. Найти сопряженный к оператору $A : l_1 \rightarrow l_1$, если $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j$. Вычислить норму A и A^* .

Отметим следующие свойства сопряженных операторов:

- 1) $(A + B)^* = A^* + B^*$;
- 2) $(AB)^* = B^*A^*$;
- 3) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ (если A^{-1} существует).

Теорема 12.1. Пусть X, Y – банаховы пространства и A – линейный непрерывный оператор, отображающий X в Y . Тогда сопряженный оператор A^* , действующий из Y^* в X^* , является линейным непрерывным и $\|A^*\| = \|A\|$.

Если рассматривать линейные операторы, заданные в гильбертовом пространстве, то, благодаря наличию в нем скалярного произведения, определение сопряженного оператора можно дать более просто.

Пусть A – линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H . Оператор A^* называется **сопряженным** к A , если для любых $x, y \in H$ выполняется равенство

$$(Ax, y) = (x, A^*y). \quad (12.3)$$

Можно проверить, что это определение совпадает с определением сопряженного оператора, данным ранее.

Линейный ограниченный оператор A называется **самосопряженным**, если $A = A^*$.

Пример 12.3. Найти оператор, сопряженный к оператору $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$, если

$$Ax(t) = \int_0^1 \sin(t^2 s)x(s)ds.$$

Будет ли A самосопряженным оператором?

Решение. Так как пространство $L_2[0, 1]$ является гильбертовым, то мы можем воспользоваться определением (12.3). Вычислим скалярное произведение (Ax, y) . Имеем

$$(Ax, y) = \int_0^1 Ax(t)y(t)dt = \int_0^1 \left(\int_0^1 \sin(t^2 s)x(s)ds \right) y(t)dt.$$

Поменяв порядок интегрирования, получим

$$(Ax, y) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \sin(t^2 s) y(t) dt \right) x(s) ds = (x, A^* y).$$

Здесь $A^* y(s) = \int_0^1 \sin(t^2 s) y(t) dt$. Оператор A^* действует в пространстве $L_2^*[0, 1] = L_2[0, 1]$ и является ограниченным (см. пример 8.3.)

Чтобы сравнить операторы A и A^* , для большей наглядности сменим обозначения в определении оператора A^* . Тогда $A^* y(t) = \int_0^1 \sin(s^2 t) y(s) ds$ и, конечно, операторы A и A^* не совпадают.

Задача 12.2. Найти оператор, сопряженный к оператору $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$, если

1) $Ax(t) = tx(t);$

2) $Ax(t) = \int_0^1 t^2 x(s) ds;$

3) $Ax(t) = \int_0^1 t^3 s x(s) ds.$

Проверить, что выполняется равенство $\|A^*\| = \|A\|$.

Задача 12.3. Пусть A – оператор, действующий в n -мерном пространстве R^n . Доказать, что $A^* = A^T$.

Задача 12.4. Найти оператор, сопряженный к оператору $A : l_1 \rightarrow l_1$, если

1) $Ax = (x_2, x_1, x_3, x_4, \dots);$

2) $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots), |\lambda_n| \leq 1;$

3) $Ax = (0, 0, x_1, x_2, \dots);$

4) $Ax = (x_1 - 2x_3, x_2 + 4x_3, x_3, x_4, \dots).$

Задача 12.5. Доказать, что оператор $A : L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$, заданный формулой

$$Ax(t) = \int_0^1 \sin(ts) x(s) ds,$$

является самосопряженным.

Задача 12.6. Найти оператор, сопряженный к оператору $A : L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$, если

$$Ax(t) = \int_a^b K(s, t)x(s)ds.$$

При каких условиях на ядро оператор A является самосопряженным?

§ 13.

Компактные операторы

Среди множества линейных ограниченных операторов выделим класс операторов, которые называются компактными.

Компактные операторы обладают двумя важными особенностями. Во-первых, этот класс по своим свойствам близок к конечномерным, а значит, может быть хорошо изучен. Во-вторых, компактные операторы имеют многочисленные применения.

Прежде чем дать определение компактного оператора, напомним определение компактного множества. Множество $M \subset L$ называется **компактным**, если из любой его последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Множество называется **предкомпактным**, если его замыкание – компакт.

Теперь мы можем дать определение компактного оператора. Линейный ограниченный оператор A , определенный на линейном нормированном пространстве X и принимающий значения в линейном нормированном пространстве Y , называется **компактным** (или вполне непрерывным), если он отображает ограниченное множество пространства X в предкомпактное множество пространства Y .

Перечислим некоторые свойства компактных операторов.

Задача 13.1. Доказать, что если A, B – компактные операторы, то $\alpha A + \beta B$ также компактный оператор; здесь $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Задача 13.2. Доказать, что если $A : X \rightarrow Y$ и Y – конечномерное пространство, то из ограниченности оператора A следует его компактность.

Задача 13.3. Доказать, что любой компактный оператор является ограниченным.

Как показывает приводимый ниже пример, обратное утверждение в общем случае неверно.

Задача 13.4. Доказать, что в пространстве l_2 единичный оператор некомпактен.

Задача 13.5. Доказать, что в бесконечномерном нормированном пространстве единичный оператор некомпактен.

Задача 13.6. Доказать, что если A – компактный оператор, а B – ограниченный, то операторы AB и BA компактны.

Задача 13.7. Доказать, что в бесконечномерном нормированном пространстве компактный оператор не может иметь ограниченного обратного.

Более сложно доказываются следующие утверждения.

Теорема 13.1. Если $\{A_n\}$ – последовательность компактных операторов, действующих в банаховом пространстве, сходится по норме к некоторому оператору A , то оператор A тоже компактен.

Теорема 13.2. Пусть $A \in L(X, Y)$, где Y – банахово пространство. Оператор A компактен тогда и только тогда, когда A^* компактен.

Теорема 13.3. Компактные операторы A переводят слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся.

Чтобы решать задачи, связанные с компактностью оператора, нужно знать критерии компактности (предкомпактности) множеств в различных пространствах. Приведем некоторые из них.

Теорема 13.4. (Арцела–Асколи). Для того чтобы множество M из пространства $C[a, b]$ было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы это множество было

1) равномерно ограничено, то есть существует константа C такая, что

$$|m(t)| \leq C$$

для всех $t \in [a, b]$ и $m \in M$;

2) равномерно непрерывно, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|m(t_1) - m(t_2)| < \varepsilon$ для всех $t_1, t_2 \in [a, b]$ таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$ и для всех функций $m \in M$.

Приведем достаточное условие равномерной непрерывности множества в пространстве $C[a, b]$.

Задача 13.8. Пусть множество $M \subset C[a, b]$ состоит из непрерывно дифференцируемых функций таких, что $\|m'\| \leq K$ для всех $m \in M$. Доказать, что множество M равномерно непрерывно.

Приведем критерий предкомпактности множества в пространстве $l_p, p \geq 1$.

Теорема 13.5. *Множество $M \subset l_p, p \geq 1$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |m_k|^p$$

существует равномерно относительно $m \in M$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N$ для любого $m = (m_1, m_2, \dots) \in M$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |m_k|^p < \varepsilon.$$

Отметим, что критерий предкомпактности множества в пространстве $L_p[a, b], p \geq 1$ сформулирован в ходе решения примера 13.2.

Приведем примеры компактных операторов.

Пример 13.1. *Доказать, что оператор $A : C[0, 2] \rightarrow C[0, 2]$ является компактным, если*

$$Ax(t) = \int_0^2 e^{ts} x(s) ds.$$

Решение. Пусть M – ограниченное множество в $C[0, 1]$. Нужно доказать, что $A(M)$ – образ множества M при отображении A , будет предкомпактным. Воспользуемся критерием предкомпактности Арцела – Асколи.

Докажем сначала ограниченность $A(M)$:

$$\|Am\|_{C[0,2]} \leq \left(\max_{t \in [0,2]} \int_0^2 e^{ts} ds \right) \|m\|_{C[0,2]}.$$

Так как нам не нужно точно считать константу, то интеграл можно не вычислять, а оценивать. Тогда $\max_{t \in [0,2]} \int_0^2 e^{ts} ds \leq 2e^4$ и остается учесть, что множество M ограничено, а это значит, что $\|m\|_{C[0,2]} \leq c$ для любой функции $m \in M$. Итак, $\|Am\|_{C[0,2]} \leq 2ce^4$, и мы доказали ограниченность множества $A(M)$.

Чтобы доказать равностепенную непрерывность $A(M)$, обозначим $y(t) = Am(t)$. Тогда

$$|y(t_1) - y(t_2)| \leq \int_0^2 |e^{t_1 s} - e^{t_2 s}| |m(s)| ds.$$

Чтобы продолжить оценку, воспользуемся теоремой о среднем: $\varphi(t_1) - \varphi(t_2) = \varphi'(\xi)(t_1 - t_2)$, где $\xi \in (t_1, t_2)$. Тогда

$$|e^{t_1 s} - e^{t_2 s}| = s \cdot e^{\xi s} |t_1 - t_2| \leq 2e^4 |t_1 - t_2|.$$

Из двух последних оценок получим

$$|y(t_1) - y(t_2)| \leq 4e^4 \cdot c |t_1 - t_2|.$$

Отсюда сразу следует равностепенная непрерывность множества $A(M)$, так как для любого $\varepsilon > 0$ мы смогли найти $\delta = \frac{\varepsilon}{4e^4 c}$ такое, что при $|t_1 - t_2| < \delta$ получаем $|y(t_1) - y(t_2)| \leq \varepsilon$. Заметим, что δ зависит только от ε . Мы доказали предкомпактность $A(M)$, а значит, и компактность оператора A .

Замечание. Этот пример можно было решить проще, если использовать задачу 13.8.

Задача 13.9. Доказать, что оператор $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, заданный формулой

$$Ax(t) = \int_0^1 \sqrt{ts} x(s) ds,$$

является компактным.

Задача 13.10. Доказать, что оператор $A : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ является компактным, если

$$Ax(t) = \int_a^b K(s, t) x(s) ds,$$

где $K(s, t)$ – непрерывная функция по s и t .

Указание. Воспользоваться равномерной непрерывностью и ограниченностью ядра $K(s, t)$.

Задача 13.11. Доказать, что оператор $A : C[-1, 1] \rightarrow C[-1, 1]$ является компактным, если

$$Ax(t) = \int_{-1}^t s x(s) ds.$$

Задача 13.12. Проверить компактность оператора $A : C[-2, 2] \rightarrow C[-2, 2]$, если $Ax(t) = x(-2)t + x(0)t^2$.

Пример 13.2. Доказать, что оператор $A : L_3[0, 2\pi] \rightarrow L_3[0, 2\pi]$, заданный формулой

$$Ax(t) = \int_0^{2\pi} \sin(ts)x(s)ds,$$

является компактным.

Решение. Пусть M – ограниченное множество в $L_3[0, 2\pi]$, то есть $\|m\|_{L_3} \leq c$. Тогда

$$\|Am\|_{L_3}^3 = \int_0^{2\pi} \left| \left(\int_0^{2\pi} \sin(ts)m(s)ds \right)^3 \right| dt.$$

Здесь обозначили $L_3 = L_3[0, 2\pi]$.

Используя неравенство Гельдера для оценки внутреннего интеграла, получим

$$\left| \int_0^{2\pi} \sin(ts)m(s)ds \right| \leq \left(\int_0^{2\pi} |\sin(ts)|^{\frac{3}{2}} ds \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_0^{2\pi} |m(s)|^3 ds \right)^{\frac{1}{3}} \leq (2\pi)^{\frac{2}{3}} \|m\|_{L_3}.$$

Итак,

$$\|Am\|_{L_3} \leq 2\pi \cdot c,$$

а это значит, что множество $A(M)$ ограничено.

Докажем теперь, что множество $A(M)$ равномерно непрерывно в среднем. Действительно,

$$|Am(t+h) - Am(t)| \leq \int_0^{2\pi} |s \cos s\xi \cdot hm(s)| ds.$$

Здесь, так же как в примере 13.1, использовали теорему о среднем. Продолжив оценку, получим

$$|Am(t+h) - Am(t)| \leq 2\pi|h| \int_0^{2\pi} |m(s)| ds.$$

Применив неравенство Гельдера, имеем

$$|Am(t+h) - Am(t)| \leq (2\pi)^{\frac{2}{3}+1} |h| \|m\|_{L_3} \leq (2\pi)^{\frac{5}{3}} \cdot c |h|.$$

Отсюда следует, что

$$\left(\int_0^{2\pi} |Am(t+h) - Am(t)|^3 dt \right)^{\frac{1}{3}} \leq c \cdot |h| (2\pi)^2.$$

Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ мы выбрали $\delta = \frac{\varepsilon}{c(2\pi)^2}$ так, что для любого $|h| < \delta$ выполняется неравенство

$$\left(\int_0^{2\pi} |Am(t+h) - Am(t)|^3 dt \right)^{\frac{1}{3}} \leq \varepsilon.$$

А это и есть определение равностепенной непрерывности в среднем.

Задача 13.13. Доказать, что оператор $A : L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$, заданный формулой

$$Ax(t) = \int_a^b K(s, t)x(s)ds,$$

является компактным, если $\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt < \infty$.

Указание. Построить последовательность операторов

$$A_n x(t) = \int_a^b K_n(s, t)x(s)ds.$$

Здесь $K_n(s, t)$ – непрерывные функции и $\int_a^b \int_a^b |K(s, t) - K_n(s, t)|^2 ds dt \rightarrow 0$.

Затем доказать, что $\|A_n - A\| \rightarrow 0$, и использовать теорему 13.1.

Пример 13.3. Доказать, что оператор $A : l_4 \rightarrow l_4$ является компактным, если

$$Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots \right).$$

Решение. Используем критерий предкомпактности в пространстве l_4 (теорема 13.5). Пусть M – ограниченное множество в l_4 , то есть $\|m\|_{l_4} \leq c$. Тогда

$$\|Am\|_{l_4} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{m_k}{k} \right|^4 \right)^{\frac{1}{4}} \leq \|m\|_{l_4} \leq c.$$

Ограниченность множества $A(M)$ доказали. Перейдем к доказательству второго свойства.

Имеем

$$\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |(Am)_k|^4 \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{m_k}{k} \right|^4 \right)^{\frac{1}{4}} \leq c \cdot \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \right)^{\frac{1}{4}};$$

здесь учли, что так как $\|m\|_{l_4} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |m_k|^4 \right)^{\frac{1}{4}} \leq c$, то $|m_k| \leq c$ для любого k .

Заметим, что ряд $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \right)^{\frac{1}{4}}$ сходится, значит, остаток этого ряда можно

сделать сколь угодно малым числом. Найдем n_0 так, что $\left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \right)^{\frac{1}{4}} < \frac{\varepsilon}{c}$.

Тогда $\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |(Am)_k|^4 \right)^{\frac{1}{4}} < \varepsilon$ при $n > n_0$. Этим мы доказали предкомпактность множества $A(M)$, а значит, и компактность оператора A .

Задача 13.14. Рассмотрим оператор $A(x) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots)$, действующий в l_2 . Каким условиям должна удовлетворять числовая последовательность $\{\alpha_n\}$, чтобы оператор A был компактным?

Пример 13.4. Будет ли компактным оператор $Ax(t) = x'(t)$, если он рассматривается как оператор, действующий из $C^1[0, 1]$ в $C[0, 1]$.

Решение. Докажем, что A не является компактным оператором. Для этого в $C^1[0, 1]$ рассмотрим множество

$$M = \{x_n : x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}, n \in N\}.$$

Предположим, что A – компактный оператор. Тогда, как следует из критерия предкомпактности Арцела–Асколи, множество $A(M)$ должно быть равномерно непрерывно. А это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для любых точек $t_1, t_2 \in [0, 1]$ таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$, следует, что $|t_1^n - t_2^n| < \varepsilon$

для любого n . Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2} - e^{-1}$, $t_1 = 1, t_2 = 1 - \frac{1}{n}$. Выберем n_0 так, что $\frac{1}{n_0} < \delta$. Тогда $|t_1 - t_2| = \frac{1}{n} < \delta$ для всех $n > n_0$. Поэтому $|1 - (1 - \frac{1}{n})^n| < \frac{1}{2} - e^{-1}$. Если n устремить к бесконечности, то получим $1 - e^{-1} \leq \frac{1}{2} - e^{-1}$. Полученное противоречие доказывает, что A не является компактным оператором.

Задача 13.15. Доказать, что оператор $A : C^2[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, заданный формулой $Ax(t) = x'(t)$, является компактным.

Задача 13.16. Доказать, что оператор $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, заданный формулой $Ax(t) = tx(t)$, не является компактным.

Задача 13.17. Доказать, что оператор $A : l_2 \rightarrow l_2$, заданный формулой

$$Ax = (x_1, 0, x_3, 0, \dots),$$

не является компактным.

§ 14.

Спектр оператора

В этом разделе рассмотрим одно из самых важных понятий теории операторов – понятие спектра.

В разных разделах математики часто приходится решать уравнения вида

$$Ax - \lambda x = y, \quad (14.1)$$

где A – некоторый линейный ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве X , λ – заданное число.

При решении (14.1) возникают естественные вопросы: имеет ли это уравнение решение при данном y , если имеет, то единственное ли оно, имеет ли уравнение решение при любом y ?

Перепишем (14.1) в виде

$$(A - \lambda I)x = y. \quad (14.2)$$

Пусть уравнение (14.2) имеет единственное решение при любом $y \in X$. Тогда из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что оператор $R_\lambda = R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ ограничен. Отметим, что $R_\lambda(A)$ называется **резольвентой** оператора A , а λ , при котором $R_\lambda(A)$ является ограниченным оператором, называется **регулярным** значением. Совокупность всех остальных значений λ называется **спектром** оператора A и обозначается $\sigma(A)$.

Спектр оператора в свою очередь разделяется на **дискретную** и **непрерывную** части. К дискретной части относятся **собственные значения** оператора A , то есть те λ , при которых найдется ненулевое решение уравнения $(A - \lambda I)x = 0$. В этом случае оператор $R_\lambda(A)$ не существует.

Непрерывная часть спектра состоит из тех λ , для которых оператор $R_\lambda(A)$ существует, но определен не на всем X (и, возможно, не ограничен).

Приведем примеры нахождения спектра оператора.

Пример 14.1. Найти спектр оператора $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, заданного формулой

$$Ax(t) = tx(t).$$

Решение. Сначала найдем собственные значения оператора (дискретную часть спектра). Для этого выясним, при каких λ уравнение $(t - \lambda)x(t) = 0$ имеет ненулевое решение. Пусть $x(t_0) \neq 0$ при некотором $t_0 \in [0, 1]$. Так как x – непрерывная функция, то найдется ε -окрестность точки t_0 , что $x(t) \neq 0$ для $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [0, 1]$, что невозможно. Этим мы доказали, что решение уравнения $(t - \lambda)x(t) = 0$ является лишь функция $x(t) \equiv 0$. Таким образом, у оператора A нет собственных значений.

Найдем теперь регулярные значения. Для этого решим уравнение $((t - \lambda)x(t) = y(t)$. Тогда

$$R_\lambda(y) = x(t) = \frac{y(t)}{t - \lambda}.$$

Если $\lambda \notin [0, 1]$, то R_λ – ограниченный оператор, действующий в $C[0, 1]$. Действительно, в этом случае

$$\|R_\lambda\| \leq \max \left(\frac{1}{|\lambda|}, \frac{1}{|1 - \lambda|} \right).$$

Тогда спектр оператора A состоит из всех точек отрезка $[0, 1]$: $\sigma(A) = [0, 1]$.

В заключение покажем, что R_λ – неограниченный оператор, если $\lambda \in [0, 1]$. Прежде всего отметим, что R_λ определен не на всем пространстве $C[0, 1]$, а только для непрерывных функций, у которых $\max_{t \in [0, 1]} \frac{|y(t)|}{|t - \lambda|} < \infty$.

Рассмотрим последовательность

$$y_n(t) = \begin{cases} n(t - \lambda) & t \in [\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}] \cap [0, 1]; \\ 1 & t \in [\lambda + \frac{1}{n}, 1] \cap [0, 1]; \\ -1 & t \in [0, \lambda - \frac{1}{n}] \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Очевидно, что $y_n \in C[0, 1]$ и $\|y_n\|_{C[0, 1]} = 1$. Кроме того, $\|R_\lambda(y_n)\|_{C[0, 1]} = n$ и $\|R_\lambda\| \geq n$.

Пример 14.2. Найти спектр оператора $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, заданного формулой $Ax(t) = x(0)t$.

Решение. Найдем дискретную часть спектра, решив уравнение $x(0)t - \lambda x(t) = 0$. Если $\lambda = 0$, то $x(0) = 0$. Таким образом, $\lambda = 0$ является собственным значением. Собственные функции – это все непрерывные функции в нуле равные нулю. Пусть $\lambda \neq 0$, тогда $x(t) = \frac{x(0)}{\lambda}t$ и решение уравнения нужно искать в виде $x(t) = at$. Подставив в исходное уравнение, получим $a = 0$. Значит, при $\lambda \neq 0$ мы не нашли ненулевого решения уравнения $Ax = \lambda x$.

Перейдем теперь к нахождению регулярных значений оператора A ($\lambda \neq 0$). Для этого решим уравнение $x(0)t - \lambda x(t) = y(t)$. Взяв $t = 0$, получим $x(0) = -\frac{y(0)}{\lambda}$. Тогда $R_\lambda(y) = x(t) = -\frac{y(t)}{\lambda} - \frac{y(0)}{\lambda^2}t$. Резольвента оператора A является оператором, определенным при всех $y \in C[0, 1]$. Кроме того, $\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|^2}$.

Итак, $\sigma(A) = \{0\}$.

Задача 14.1. Найти спектр оператора $A: E \rightarrow E$, если

- 1) $E = C[-1, 2]$, $Ax(t) = t^2x(0) + tx(2)$;
- 2) $E = l_1$, $Ax = (x_1, 3x_1 + x_2, x_4, x_3, x_5, x_6, \dots)$;
- 3) $E = C[-1, 1]$, $Ax(t) = \int_{-1}^1 e^{1+t}x(s)ds$;
- 4) $E = C[0, 1]$, $Ax(t) = \int_0^t sx(s)ds$.

Перечислим некоторые свойства спектра.

Теорема 14.1. Пусть A – ограниченный линейный оператор, действующий в банаховом пространстве X . Тогда

- 1) спектр – это замкнутое множество;
- 2) спектр оператора A содержится в отрезке $[-\|A\|, \|A\|]$.

Если A – компактный оператор, то можно привести дополнительные свойства спектра.

Теорема 14.2. Пусть A – компактный оператор, действующий в банаховом пространстве. Тогда

- 1) число $\lambda = 0$ всегда принадлежит спектру оператора;
- 2) если $\lambda \neq 0$, то λ или собственное, или регулярное значение оператора;
- 3) спектр оператора содержит конечное или счетное множество точек;
- 4) если спектр состоит из счетного числа точек, то он имеет единственную предельную точку $\lambda = 0$.

Пример 14.3. Найти спектр и резольвенту оператора $A: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, если он определяется равенством

$$Ax(t) = \int_0^t x(s)ds.$$

Решение. Оператор A компактен (доказать самостоятельно). Поэтому достаточно найти его собственные значения. Пусть $\lambda \neq 0$. Решим уравнение

$$\int_0^t x(s)ds = \lambda x(t).$$

Так как левая часть этого уравнения является дифференцируемой функцией, то и функция x имеет производную. Продифференцировав, получим

$$x(t) = \lambda x'(t).$$

Решением этой задачи Коши является функция $x(t) = ce^{\frac{1}{\lambda}t}$. Так как $x(0) = 0$, то $c = 0$ и $x(t) \equiv 0$. Мы доказали, что у оператора A нет ненулевых собственных значений. Учитывая теорему 14.2 (свойство 1), имеем $\sigma(A) = \{0\}$. Хотя ответ уже получен, надо уточнить: к дискретной или непрерывной части спектра принадлежит число $\lambda = 0$?

Для этого решим уравнение $\int_0^t x(s)ds = 0$. Продифференцировав, получим $x(t) = 0$. Значит, $\lambda = 0$ принадлежит к непрерывной части спектра.

Чтобы найти резольвенту, можно воспользоваться способом, который был применен при решении задачи 11.3. Тогда

$$R_\lambda(y)(t) = -\frac{1}{\lambda}y(t) - \frac{1}{\lambda^2} \int_0^t e^{\frac{1}{\lambda}(t-s)}y(s)ds.$$

Отметим, что если спектр оператора состоит только из нуля, то оператор называется **оператором Вольтерра**.

Приложение.

Тестовые задания

Вариант I

Задача 1. Вычислить норму функционала f . Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[-2, 2] \rightarrow R; \quad f(x) = x(0) - \int_{-2}^2 t \cdot x(t) dt.$$

Задача 2. Доказать, что функционал f линейный, и вычислить его норму:

$$f : L_2[0, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_0^1 t \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала f минимальна, если

$$f : l_3 \rightarrow R; \quad f(x) = (2 - \lambda)x_1 + 3\lambda x_2 - 3x_3.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[-1, 1] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_{-1}^1 x(t) dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем

виде функционала, вычислить норму f , если $f(x) = x(0) - \int_{-1}^1 x(t) dt$.

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : C[-1, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-1}^1 t \cdot x(t) dt; \quad x^*(t) = t.$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство l_1^2 . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на l_1^2 такие, что выполняются условия теоремы Хана–Банаха:

$$L_0 = \{x \in l_1^2 : x_1 - 2x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = 3x_1 - 2x_2.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство l_∞^3 . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на l_∞^3 , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_\infty^3, \quad L_0 = \{x \in l_\infty^3 : x_1 = t, x_2 = 2t, x_3 = -t\}, \quad f_0(x) = 2x_1.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора A , если

$$\text{а) } A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]; \quad Ax(t) = \int_0^1 e^{t-s} \cdot x(s) ds;$$

$$\text{б) } A : l_\infty^3 \rightarrow l_\infty^3; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. Пусть задана последовательность функционалов $f_n : L_2[0, 1] \rightarrow R$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если

$$f_n(x) = \int_0^1 \frac{t}{n} \cdot x(t) dt.$$

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора A , если

$$A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]; \quad Ax(t) = tx(t) + x(0).$$

Вариант II

Задача 1. Вычислить норму функционала f . Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[-2, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = 3x(-2) + x(0) - 5x\left(\frac{1}{2}\right).$$

Задача 2. Доказать, что функционал f линейный, и вычислить его норму:

$$f : L_3[0, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_0^1 t \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала f минимальна, если

$$f : l_4 \rightarrow R; \quad f(x) = (-4 + \lambda)x_1 - (2 - \lambda)x_2 + 3x_4.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[0, 2] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_0^2 x(t) dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если

$$f(x) = x(1) + 2x(2) + \int_0^2 x(t) dt.$$

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : C[0, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = x(0) - \int_0^1 x(t) dt; \quad x^*(t) = t^2.$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_\infty^2, \quad L_0 = \{x \in l_\infty^2 : x_1 + 2x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = 2x_1 + 4x_2.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_1^3, \quad L_0 = \{x \in l_1^3 : x_1 = 2t, x_2 = t, x_3 = t\}, \quad f_0(x) = x_1 - x_2.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора A , если

$$\text{а) } f : M[-1, 2] \rightarrow M[-1, 2]; \quad Ax(t) = x(0)t + \int_{-1}^2 x(t) dt;$$

$$\text{б) } f : l_2^3 \rightarrow l_2^3; \quad A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. Пусть задана последовательность функционалов $f_n : C[0, 1] \rightarrow R$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если $f_n(x) = \int_0^1 e^{\frac{t}{n}} \cdot x(t) dt$.

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : C[-1, 0] \rightarrow C[-1, 0]; \quad Ax(t) = t^2 x(t) - 2x(-1).$$

Вариант III

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[-1, 3] \rightarrow R; \quad f(x) = x(0) + \int_{-1}^3 t^2 \cdot x(t) dt.$$

Задача 2. Доказать, что функционал линейный, и вычислить его норму:

$$f : L_4[0, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_0^1 t^2 \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_2 \rightarrow R; \quad f(x) = 6x_2 - x_3 + (\lambda^2 + \lambda)x_4.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[-2, 1] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_{-2}^1 x(t)dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если

$$f(x) = x(-2) - 2x(0) + x(1).$$

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : l_2 \rightarrow R; \quad f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3; \quad x^* = (1, 0, 1, 0, 0, \dots).$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_2^2, \quad L_0 = \{x \in l_2^2 : x_1 - 3x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = x_1.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_1^3, \quad L_0 = \{x \in l_1^3 : x_1 - x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = x_1 + x_3.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

$$\text{а) } f : L_1[-1, 1] \rightarrow L_1[-1, 1]; \quad Ax(t) = \int_{-1}^1 t \cdot s \cdot x(s)ds;$$

$$\text{б) } f : l_2^3 \rightarrow l_2^3; \quad A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. Пусть задана последовательность функционалов $f_n : L_1[0, 1] \rightarrow R$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если

$$A_n(x) = \int_0^1 e^{\frac{t^2}{n}} \cdot x(t)dt.$$

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]; \quad Ax(t) = tx(1) - t^2x(0).$$

Вариант IV

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[-3, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = 2x \left(\frac{1}{2}\right) + \int_{-3}^1 t^4 \cdot x(t) dt.$$

Задача 2. Доказать, что функционал линейный, и вычислить его норму:

$$f : L_2[-1, 2] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-1}^2 t^3 \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_1 \rightarrow R; \quad f(x) = \lambda \cdot x_1 - 5x_2 + (6 - \lambda)x_3 - 7x_4.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[-2, 3] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_{-2}^3 x(t) dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем

виде функционала, вычислить норму f , если $f(x) = x(1) + \int_{-2}^3 t \cdot x(t) dt$.

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : l_1 \rightarrow R; \quad f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3; \quad x^* = (2, 1, -1, 0, 0, \dots).$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_1^2, \quad L_0 = \{x \in l_1^2 : x_1 + 4x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = x_1 - 4x_2.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_\infty^3, \quad L_0 = \{x \in l_\infty^3 : x_1 - 2x_3\}, \quad f_0(x) = x_1 - 2x_3.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

$$а) \quad f : C[-2, 3] \rightarrow C[0, 3]; \quad Ax(t) = t \cdot x(0) + t^2 \cdot x(1);$$

$$б) \quad f : l_1^3 \rightarrow l_1^3; \quad A = \begin{pmatrix} 17 & 6 & -15 \\ 8 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. Пусть задана последовательность функционалов $f_n : L_2[0, 1] \rightarrow R$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если

$$f_n(x) = \int_0^1 (\cos \frac{t}{n} + t) \cdot x(t) dt.$$

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : C[0, 2\pi] \rightarrow C[0, 2\pi]; \quad Ax(t) = \sin tx(0) + \cos tx(1).$$

Вариант V

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[0, \pi] \rightarrow R; \quad f(x) = 2x\left(\frac{\pi}{2}\right) + \int_0^{\pi} \sin t \cdot x(t) dt.$$

Задача 2. Доказать, что функционал линейный, и вычислить его норму:

$$f : L_3[-1, 2] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-1}^2 t^3 \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_{\infty} \rightarrow R; \quad f(x) = -2\lambda x_1 + 3x_2 - (8 - \lambda)x_5.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[-3, 1] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_{-3}^1 x(t) dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем

виде функционала, вычислить норму f , если $f(x) = x(0) + \int_{-3}^1 t^2 \cdot x(t) dt$.

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : l_{\infty} \rightarrow R; \quad f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3; \quad x = (-1, 0, 2, 0, 0, \dots).$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_{\infty}^3, \quad L_0 = \{x \in l_{\infty}^3 : x_1 - 5x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = x_1 - 3x_2.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_1^3, \quad L_0 = \{x \in l_1^3 : x_1 = t, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2t\}, \quad f_0(x) = x_1 - x_2 + x_3.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

$$a) \quad f : L_2[-1, 2] \rightarrow L_2[-1, 2]; \quad Ax(t) = \int_0^t s^2 \cdot x(s) ds;$$

$$\text{б) } f : l_{\infty}^3 \rightarrow l_{\infty}^3; \quad A = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. Пусть задана последовательность функционалов $f_n : l_2 \rightarrow R$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если

$$f_n(x) = x_{n+1} - x_{n+2}.$$

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : C[0, 2] \rightarrow C[0, 2]; \quad Ax(t) = tx(2) - t^3x(0).$$

Вариант VI

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[-2, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = -2x(0) - \int_{-2}^1 |t| \cdot x(t) dt.$$

Задача 2. Доказать, что функционал линейный, и вычислить его норму:

$$f : L_4[-1, 2] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-1}^2 |t| \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_2 \rightarrow R; \quad f(x) = -\lambda x_1 + 3x_2 + (5 + \lambda)x_6.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[-1, 1] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_{-1}^1 x(t) dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если

$$f(x) = x(-1) - x(0) + \int_{-1}^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) \cdot x(t) dt.$$

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : L_2[-2, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-2}^1 t \cdot x(t) dt; \quad x^*(t) \equiv 1.$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_2^2, \quad L_0 = \{x \in l_2^2 : 4x_1 - 2x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = 5x_2.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие

что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_1^3, \quad L_0 = \{x \in l_1^3 : x_1 - x_2 + x_3\}, \quad f_0(x) = x_1 - x_2.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

- а) $A : \widetilde{L}_1[-3, 1] \rightarrow C[-3, 1]; \quad Ax(t) = \int_{-3}^1 t^2 \cdot e^s \cdot x(s) ds;$
 б) $A : l_2 \rightarrow l_1; \quad Ax = (x_1, x_1 + x_2, -x_3, 0, 0 \dots).$

Задача 9. Пусть задана последовательность функционалов $f_n : l_1 \rightarrow R$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если $f_n(x) = \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot x_1 - \frac{x_3}{n}$.

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : C[0, 3] \rightarrow C[0, 3]; \quad Ax(t) = (t^2 - 1)x(0) + x(1).$$

Вариант VII

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[0, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = \sum_{i=0}^n x\left(\frac{i}{n}\right).$$

Задача 2. Доказать, что функционал $f : L_2[-1, 2] \rightarrow R$ линейный, и вычислить его норму:

$$f(x) = \int_{-1}^2 |t - 1| \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_3 \rightarrow R; \quad f(x) = 2\lambda x_1 - x_2 + 6\lambda x_4.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[0, 3] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_0^3 3x(t) dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если $f(x) = x(1) - 4x(2) + 5x(3)$.

Задача 5. Вычислить расстояние в пространстве X от элемента $x^* \in X$ до ядра линейного функционала f , заданного на X . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : L_3[-2, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-2}^1 x(t) dt; \quad x^*(t) = |t|.$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_1^2, \quad L_0 = \{x \in l_2^2 : 4x_1 - 2x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = 5x_2 - x_1.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$\begin{aligned} L = l_\infty^3, \quad L_0 = \{x \in l_\infty^3 : 2x_1 = x_3\}, \quad f_0(x) = 2x_1. \\ L = l_1^2, \quad L_0 = \{x \in l_1^2 : 5x_1 + x_2 = 0\}, \quad f(x) = x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

$$\text{а) } A : \widetilde{L}_1[-2, 3] \rightarrow C[-2, 3]; \quad Ax(t) = \int_{-2}^3 (t+1)s \cdot x(s)ds;$$

$$\text{б) } A : l_\infty \rightarrow l_\infty; \quad Ax = (x_1, x_2 + x_3, x_1, 0, 0\dots).$$

Задача 9. Пусть задана последовательность операторов $f_n : C[0, 1] \rightarrow R$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если $f_n(x) = x \left(\frac{1}{n}\right)$.

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : C[0, 2] \rightarrow C[0, 2]; \quad Ax(t) = e^t x(0) + x(1).$$

Вариант VIII

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[-3, 2] \rightarrow R; \quad f(x) = 4x(1) - 5x(2) + e \cdot x(-1).$$

Задача 2. Доказать, что функционал линейный, и вычислить его норму:

$$f : L_3[-1, 3] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-1}^3 e^t \cdot x(t)dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_\infty \rightarrow R; \quad f(x) = (2 - \lambda)x_2 - 4\lambda x_3 - x_4.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[-2, 2] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_{-2}^2 x(t)dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если

$$f(x) = x(1) - \int_{-2}^2 e^t \cdot x(t)dt.$$

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : C[0, 3] \rightarrow R; \quad f(x) = x(0) - 2x(1) + 3x(2); \quad x^*(t) = t^2 + 5t.$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_1^2, \quad L_0 = \{x \in l_1^2 : 3x_1 - 9x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = 4x_1.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_\infty^3, \quad L_0 = \{x \in l_\infty^3 : x_1 = 2t, \quad x_2 = 2t, \quad x_3 = t\}, \quad f_0(x) = x_1 + 3x_3.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

$$\text{а) } A : M[-2, 3] \rightarrow M[-2, 3]; \quad Ax(t) = x(1)t - 2x(3) + \int_{-2}^3 t^2(s+1) \cdot x(s)ds;$$

$$\text{б) } A : l_3 \rightarrow l_1; \quad Ax = (x_1, x_2 - x_3, x_4, 0, 0, \dots).$$

Задача 9. Пусть задана последовательность функционалов $f_n : M[0, 1] \rightarrow R$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если

$$f_n(x) = 2x\left(\frac{1}{n}\right) + x(0).$$

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : C[-1, 0] \rightarrow C[-1, 0]; \quad Ax(t) = tx(t) + x(0).$$

Вариант IX

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[0, 3] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_0^3 t \cdot e^t \cdot x(t) dt.$$

Задача 2. Доказать, что функционал линейный, и вычислить его норму:

$$f : L_5[-1, 3] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-1}^3 t \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_1 \rightarrow R; \quad f(x) = (4 - \lambda)x_1 - (\lambda + 1)x_2 - 3x_5.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[0, \pi] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_0^\pi x(t) dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если

$$f(x) = 2x(2) + \int_0^\pi \sin t \cdot x(t) dt.$$

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : C[-3, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = x(0) + \int_{-3}^1 t^3 \cdot x(t) dt; \quad x^*(t) = t + 2.$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_\infty^2, \quad L_0 = \{x \in l_\infty^2 : 4x_1 - x_2 = 0\}, \quad f(x) = 2x_2.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_1^3, \quad L_0 = \{x \in l_1^3 : x_1 = 3t, \quad x_2 = t, \quad x_3 = 0\}, \quad f_0(x) = 3x_1 - 3x_2.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

$$a) \quad A : L_2[-3, 1] \rightarrow L_2[-3, 1]; \quad Ax(t) = \int_{-3}^1 t \cdot s \cdot x(s) ds;$$

$$\text{б) } A : l_2^3 \rightarrow l_2^3; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. Пусть задана последовательность функционалов $f_n : l_2 \rightarrow R$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n + \left(2 + \frac{3}{n}\right) x_{n+1}.$$

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : C[-1, 2] \rightarrow C[-1, 2]; \quad Ax(t) = \int_{-1}^2 t \cdot sx(s) ds.$$

Вариант X

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[0, 4] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_0^4 |t - 2| \cdot t \cdot x(t) dt.$$

Задача 2. Доказать, что функционал линейный, и вычислить его норму:

$$f : L_2[0, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_0^1 2^t \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_3 \rightarrow R; \quad f(x) = 2\lambda x_1 + x_2 - (3 - \lambda)x_4.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[-1, 2] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_{-1}^2 x(t) dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если

$$f(x) = x(1) - x(2) + \int_{-1}^2 |t| \cdot x(t) dt.$$

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : l_3^3 \rightarrow R; \quad f(x) = x_1 + 2x_2 - 4x_3; \quad x^*(t) = (1, -1, 3).$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_{\infty}^2, \quad L_0 = \{x \in l_{\infty}^2 : 3x_1 + 8x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = x_1 - 4x_2.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_1^3, \quad L_0 = \{x \in l_1^3 : x_1 + 2x_3 = 0\}, \quad f_0(x) = 4x_1.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

$$\text{а) } A : C[-2, 3] \rightarrow C[-2, 3]; \quad Ax(t) = \int_{-2}^3 t^2 s \cdot x(s) ds.$$

$$\text{б) } A : l_2^3 \rightarrow l_2^3; \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. Пусть задана последовательность функционалов $f_n : l_3 \rightarrow R$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если

$$f_n(x) = 2x_1 - x_3 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n.$$

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : C[-1, 0] \rightarrow C[-1, 0]; \quad Ax(t) = \int_{-1}^0 t^2 \cdot sx(s) ds.$$

Вариант XI

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[-2, 3] \rightarrow R; \quad f(x) = 3x(-2) - x(0) + \int_{-2}^3 (t+1)^3 \cdot x(t) dt.$$

Задача 2. Доказать, что функционал линейный, и вычислить его норму:

$$f : L_2[0, 2\pi] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_0^{2\pi} \sin t \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_4 \rightarrow R; \quad f(x) = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 - 3x_3.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[0, 2] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_0^2 x(t) dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если

$$f(x) = \int_0^2 x(t) dt + x(1) - 2x(0).$$

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : l_{\infty}^4 \rightarrow R; \quad f(x) = x_1 - x_4; \quad x^* = (1, 2, 0, 3).$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_2^2, \quad L_0 = \{x \in l_2^2 : x_1 + x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = 4x_1 - x_2.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_{\infty}^3, \quad L_0 = \{x \in l_{\infty}^3 : 2x_1 - x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = x_3.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

$$\text{а) } A : M[-1, 2] \rightarrow M[-1, 2]; \quad Ax(t) = x(0)t + x(1)t^2;$$

$$\text{б) } A : l_2^4 \rightarrow l_2^4; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. Пусть задана последовательность функционалов $f_n : C[0, 1] \rightarrow R$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если

$$f_n(x) = \int_0^1 t^n \cdot x(t) dt.$$

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : C[0, 2] \rightarrow C[0, 2]; \quad Ax(t) = \int_0^2 e^t \cdot sx(s) ds.$$

Вариант XII

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[-1, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = -4x(-1) + 6x(0) + \int_{-1}^1 x(t) dt.$$

Задача 2. Вычислить норму функционала:

$$f : L_2[0, 2\pi] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_3 \rightarrow R; \quad f(x) = \lambda x_1 - 2x_2 + (5 - 2\lambda)x_3.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[-1, 3] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_{-1}^3 x(t)dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если

$$f(x) = 2x\left(\frac{1}{2}\right) + x(1) + \int_{-1}^3 |t| \cdot x(t)dt.$$

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : L_2[-1, 3] \rightarrow R$$

$$f(x) = \int_{-1}^3 (t^2 - 1) \cdot x(t)dt; \quad x^*(t) = e^t$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_2^2, \quad L_0 = \{x \in l_2^2 : x_1 - 5x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = x_1.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_\infty^3, \quad L_0 = \{x \in l_\infty^3 : x_1 = -2t, \quad x_2 = t, \quad x_3 = 3t\}, \quad f_0(x) = 2x_1 - x_3.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

$$\text{а) } A : \widetilde{L}_3[-2, 1] \rightarrow C[-2, 1]; \quad Ax(t) = \int_{-2}^1 |t| \cdot x(s)ds;$$

$$\text{б) } A : l_1 \rightarrow l_1; \quad Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \dots\right).$$

Задача 9. Пусть задана последовательность функционалов $f_n : L_2[0, 1] \rightarrow R$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если

$$f_n(x) = \int_0^1 (t^n + \sin t) \cdot x(t)dt.$$

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : C[1, 3] \rightarrow C[1, 3]; \quad Ax(t) = \int_1^3 \frac{s^2}{t} x(s) ds.$$

Вариант XIII

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[-1, 2] \rightarrow R; \quad f(x) = 2x(2) - x(-1) + \int_{-1}^2 e^t \cdot x(t) dt.$$

Задача 2. Вычислить норму функционала:

$$f : L_4[0, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_0^1 t \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_1 \rightarrow R; \quad f(x) = (2 - \lambda)x_1 + (3\lambda + 6)x_2 - 4x_3.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[-2, 2] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_{-2}^2 x(t) dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если

$$f(x) = x(1) + \int_{-2}^2 (t + 1) \cdot x(t) dt.$$

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : M[-1, 2] \rightarrow R \quad f(x) = \int_{-1}^2 t \cdot x(t) dt + x(1); \quad x^*(t) = \operatorname{sgn} t$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_1^2, \quad L_0 = \{x \in l_1^2 : 3x_2 - x_1 = 0\}, \quad f_0(x) = x_1 + 5x_2.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_\infty^3, \quad L_0 = \{x \in l_\infty^3 : x_1 = 0, x_2 = 2t, x_3 = -4t\}, \quad f_0(x) = 2x_3 - x_1.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

$$\text{а) } A : L_2[-1, 2] \rightarrow L_1[-1, 2]; \quad Ax(t) = t \cdot \int_{-1}^2 \operatorname{sgn} s \cdot x(s) ds;$$

$$\text{б) } A : l_\infty \rightarrow l_\infty; \quad A = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2^2}, \frac{x_4}{2^3}, \dots\right).$$

Задача 9. Пусть задана последовательность операторов $A_n : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если $A_n x(t) = \int_0^1 t(s^n + 1) \cdot x(s) ds$.

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : C[-2, 2] \rightarrow C[-2, 2]; \quad Ax(t) = \int_{-2}^2 |t| \cdot sx(s) ds.$$

Вариант XIV

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[-1, 3] \rightarrow R; \quad f(x) = 4x(-1) - x(2) + \int_{-1}^3 t \cdot x(t) dt.$$

Задача 2. Вычислить норму функционала:

$$f : L_6[0, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_0^1 t^2 \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_\infty \rightarrow R; \quad f(x) = 2\lambda x_1 + 3x_2 - (5 + \lambda)x_4.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[-1, 2] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильеса $f(x) = \int_{-1}^2 x(t) dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если

$$f(x) = x(1) + \int_{-1}^2 (t + t^2) \cdot x(t) dt.$$

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : M[-2, 2] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-2}^2 e^t \cdot x(t) dt; \quad x^*(t) = \operatorname{sgn} t + t^2.$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_1^2, \quad L_0 = \{x \in l_1^2 : x_1 = x_2\}, \quad f_0(x) = x_1 - x_2.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_\infty^3, \quad L_0 = \{x \in l_\infty^3 : x_2 - 2x_3 = 0\}, \quad f_0(x) = x_1.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

$$\text{а) } A : L_3[-1, 1] \rightarrow L_3[-1, 1]; \quad Ax(t) = \int_{-1}^1 (t+1)s^2 \cdot x(s)ds.$$

$$\text{б) } A : l_2 \rightarrow l_2; \quad Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \dots).$$

Задача 9. Пусть задана последовательность операторов $A_n : C[-1, 1] \rightarrow C[-1, 1]$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если

$$A_n(x) = \int_{-1}^1 t(s^n - 1) \cdot x(t)dt.$$

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : C[-\pi, \pi] \rightarrow C[-\pi, \pi]; \quad Ax(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos s ds.$$

Вариант XV

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[-2, 2] \rightarrow R; \quad f(x) = x(-1) - \int_{-2}^2 |t| \cdot x(t)dt.$$

Задача 2. Доказать, что функционал линейный, и вычислить его норму:

$$f : L_2[0, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_0^1 e^{2t} \cdot x(t)dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_3 \rightarrow R; \quad f(x) = (4 + \lambda)x_1 - 5x_2 + 6\lambda x_3.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[0, 2] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_0^2 x(t)dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если

$$f(x) = 2x(1) - \int_0^2 (1 + e^t) \cdot x(t)dt.$$

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : l_2^4 \rightarrow R; \quad f(x) = x_1 - 3x_2 + x_4; \quad x^*(t) = (1, 0, -1, 0).$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_\infty^2, \quad L_0 = \{x \in l_\infty^2 : 2x_1 = x_2\}, \quad f_0(x) = 2x_1 + x_2.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_1^3, \quad L_0 = \{x \in l_1^3 : x_1 = -2t, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2t\}, \quad f_0(x) = 2x_2 - x_3.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

$$\text{а) } A : C[-4, 1] \rightarrow C[-4, 1]; \quad Ax(t) = t \cdot x(0) + \int_{-4}^1 x(s)ds.$$

$$\text{б) } A : l_2 \rightarrow l_1; \quad Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \dots\right).$$

Задача 9. Пусть задана последовательность операторов $A_n : l_\infty \rightarrow l_\infty$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если

$$A_n e_k = \begin{cases} e_n, & k = 1; \\ e_{n-1}, & k = 3; \\ 0, & k \neq 1, 3. \end{cases}$$

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : C[0, 2] \rightarrow C[0, 2]; \quad Ax(t) = \int_0^2 (t-1)(s+1)x(s)ds.$$

Вариант XVI

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[-3, 3] \rightarrow R; \quad f(x) = 4x(-3) - x(0) + \int_{-3}^3 |t+1| \cdot x(t)dt.$$

Задача 2. Доказать, что функционал линейный, и вычислить его норму:

$$f : L_3[-1, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-1}^1 t \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_2 \rightarrow R; \quad f(x) = (2 + \lambda)x_1 + (3 - 6\lambda)x_2 - 3x_4.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[-1, 1] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_{-1}^1 x(t) dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если

$$f(x) = 3x(0) + \int_{-1}^1 (t(t-1)) \cdot x(t) dt.$$

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : c_0 \rightarrow R; \quad f(x) = x_1 - x_3 + x_5 - x_7 + \dots; \quad x^* = (2, 2, 0, 0, \dots).$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_\infty^2, \quad L_0 = \{x \in l_\infty^2 : 3x_1 = 4x_2\}, \quad f_0(x) = 4x_1 + 8x_2.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_1^3, \quad L_0 = \{x \in l_1^3 : x_1 = 3t, \quad x_2 = t, \quad x_3 = -t\}, \quad f_0(x) = 4x_2.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

$$\begin{aligned} \text{а) } & A : C[1, 2] \rightarrow C[1, 2]; \quad Ax(t) = (x(2) - x(1))t + 2x(1) - x(2); \\ \text{б) } & A : l_2^4 \rightarrow l_2^4; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Задача 9. Пусть задана последовательность операторов $A_n : l_2 \rightarrow l_2$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если

$$A_n e_k = \begin{cases} e_{n-1}, & k = 1; \\ e_{n+1}, & k = 3; \\ 0, & k \neq 1, 3. \end{cases}$$

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : l_2 \rightarrow l_2; \quad Ax = (x_1 - x_3, x_2 - x_3, x_3 - x_3, x_4, x_5, \dots).$$

Вариант XVII

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[0, 2] \rightarrow R; \quad f(x) = 2x(0) - 4x(1) - \int_0^2 |t - 1| \cdot x(t) dt.$$

Задача 2. Доказать, что функционал линейный, и вычислить его норму:

$$f : L_4[-1, 2] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-1}^2 t^2 \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_1 \rightarrow R; \quad f(x) = (5 + \lambda)x_1 + (10 - \lambda)x_2 - 11x_4.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[-3, 1] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_{-3}^1 x(t) dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если

$$f(x) = 2x(-2) - 4x(1) + 5x(-1).$$

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : M[-1, 4] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-1}^4 (t - 1) \cdot x(t) dt + x(0); \quad x^*(t) = e^t.$$

Задача 6. Пусть L_0 — подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_2^2, \quad L_0 = \{x \in l_2^2 : 2x_1 - x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = 4x_2.$$

Задача 7. Пусть L_0 — подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие

что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_1^3, \quad L_0 = \{x \in l_1^3 : x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0\}, \quad f_0(x) = x_1.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

а) $A : C[-1, 2] \rightarrow C[-1, 2]$; $Ax = P_2(x)$, где $P_2(x)$ – интерполяционный многочлен, построенный по узлам $-1, 0, 2$, то есть $P_2(x)(t_i) = x(t_i)$, $t_1 = -1$; $t_2 = 0$, $t_3 = 2$;

б) $A : l_\infty \rightarrow l_\infty$; $Ax = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_n - x_{n-1}, \dots)$.

Задача 9. Пусть задана последовательность операторов $A_n : l_1 \rightarrow l_1$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если

$$A_n = B^n, \text{ если } B : l_1 \rightarrow l_1; \quad Bx = (x_2, x_1, 0, 0, \dots).$$

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : l_3 \rightarrow l_3; \quad Ax = (x_1 + 2x_2, x_3 - 2x_1, x_5, x_4, x_6, x_7, x_8, \dots).$$

Вариант XVIII

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[-2, 2] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-2}^2 t(t-1)(t+1) \cdot x(t) dt.$$

Задача 2. Доказать, что функционал линейный, и вычислить его норму:

$$f : L_6[-2, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-2}^1 |t| \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_\infty \rightarrow R; \quad f(x) = 5x_1 - 10\lambda x_2 - (4 + \lambda)x_8.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[-\pi, \pi] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если

$$f(x) = x(0) + \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cdot x(t) dt.$$

Задача 5. Вычислить расстояние в пространстве X от элемента $x^* \in X$ до ядра линейного функционала f , заданного на X . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : L_2[-1, 4] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-1}^4 (e^t + 1) \cdot x(t) dt; \quad x^*(t) = \operatorname{sgn}(t - 2)^3.$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_2^2, \quad L_0 = \{x \in l_2^2 : 4x_1 - 5x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = x_1 + 2x_2.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_1^3, \quad L_0 = \{x \in l_1^3 : 2x_1 - x_3 = 0\}, \quad f_0(x) = x_2 - x_3.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

$$\begin{aligned} \text{а) } & A : L_2[0, 2] \rightarrow L_2[0, 2]; \quad Ax(t) = \int_0^2 \text{sign}(t-1) \cdot x(s) ds; \\ \text{б) } & A : l_1 \rightarrow l_\infty; \quad Ax = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_n - x_{n-1}, \dots). \end{aligned}$$

Задача 9. Пусть задана последовательность операторов $A_n : l_\infty \rightarrow l_\infty$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если

$$A_n : l_\infty \rightarrow l_\infty = B^n, \text{ если } B : l_\infty \rightarrow l_\infty; \quad Bx = (x_1, \frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{3^2}, 0, 0, \dots).$$

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : l_1 \rightarrow l_1; \quad Ax = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, \dots).$$

Вариант XIX

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[0, 2\pi] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_0^{2\pi} (\sin t + \cos t) \cdot x(t) dt.$$

Задача 2. Доказать, что функционал линейный, и вычислить его норму:

$$f : L_2[-2, 3] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-2}^3 (t-1)^2 \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_3 \rightarrow R; \quad f(x) = x_1 - (1 - \lambda)x_2 + 4\lambda x_4.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[0, 5] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_0^5 x(t)dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если

$$f : C[0, 5] \rightarrow R; \quad f(x) = x(0) - x(1) + 3x(2) - 5x(4).$$

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : l_\infty \rightarrow R; \quad f(x) = 4x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4; \quad x^* = (2, 1, 0, -1, 0, 0, \dots).$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_1^2, \quad L_0 = \{x \in l_1^2 : 3x_1 + 4x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = x_1 - 6x_2.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_\infty^3, \quad L_0 = \{x \in l_\infty^3 : x_1 = 4t, x_2 = t, x_3 = -3t\}, \quad f_0(x) = x_1 + x_3.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

- а) $A : M[0, 3] \rightarrow M[0, 3]; \quad Ax(t) = x(3) + e^t x(0);$
 б) $A : l_\infty \rightarrow l_\infty; \quad Ax = (x_1 - x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_n - x_1, \dots).$

Задача 9. Пусть задана последовательность операторов $A_n : l_1 \rightarrow l_1$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если

$$A_n = B^n, \text{ если } B : l_1 \rightarrow l_1; \quad Bx = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2^2}, 0, 0, \dots).$$

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : l_1 \rightarrow l_1; \quad Ax = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, \dots).$$

Вариант XX

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[-3, 0] \rightarrow R; \quad f(x) = 2x(0) + \int_{-3}^0 t^3 \cdot x(t)dt.$$

Задача 2. Доказать, что функционал линейный, и вычислить его норму:

$$f : L_4[-2, 2] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-2}^2 (t-1)^3 \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_1 \rightarrow R; \quad f(x) = (2 + \lambda)x_1 - x_2 + (8 - 2\lambda)x_3.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[-2, 3] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_{-2}^3 x(t) dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если

$$f(x) = 3x(-1) - \int_{-2}^3 t \cdot x(t) dt.$$

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : l_1 \rightarrow R; \quad f(x) = x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots; \quad x^*(t) = \left(1, \frac{2}{2^1}, \frac{3}{2^2}, \frac{4}{2^3}, \dots\right).$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_1^2, \quad L_0 = \{x \in l_1^2 : x_1 - x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = 2x_1 - x_2.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_\infty^3, \quad L_0 = \{x \in l_\infty^3 : x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = -5t\}, \quad f_0(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

$$\text{а) } A : L_1[-1, 2] \rightarrow L_1[-1, 2]; \quad Ax(t) = \int_{-1}^2 t^2 s^2 \cdot x(s) ds;$$

$$\text{б) } A : l_2^3 \rightarrow l_2^3; \quad A - \text{оператор проектирования на координатную плоскость } O_{x_1, x_2}.$$

Задача 9. Пусть задана последовательность операторов $A_n : l_1 \rightarrow l_1$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если

$$A_n e_k = \begin{cases} e_n, & k = 1; \\ e_2, & k = 2; \\ 0, & k \neq 1, 2. \end{cases}$$

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : l_1 \rightarrow l_1; \quad Ax = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \dots).$$

Вариант XXI

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[-2, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-2}^1 (t^2 - 1) \cdot x(t) dt.$$

Задача 2. Доказать, что функционал линейный, и вычислить его норму:

$$f : L_3[-\pi, \pi] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin t \cdot \cos t) \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_{\infty} \rightarrow R; \quad f(x) = (21 - 7\lambda)x_1 - x_2 + (10 + \lambda)x_4.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[-2, 2] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_{-2}^2 x(t) dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если

$$f(x) = x(0) - 4x(1) + \int_{-2}^2 (1 + t) \cdot x(t) dt.$$

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : C[-3, 4] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-3}^4 (t + 2) \cdot x(t) dt; \quad x^*(t) = |t|.$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_{\infty}^2, \quad L_0 = \{x \in l_{\infty}^2 : 3x_1 - x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = 3x_1 - x_2.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_1^3, \quad L_0 = \{x \in l_1^3 : x_1 = 0\}, \quad f_0(x) = 4x_1 + 5x_2 - 6x_3.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

- а) $A : C[-2, 3] \rightarrow C[-2, 3]; \quad Ax(t) = tx(-2) + t^2x(0) + t^3x(3);$
 б) $A : l_2^2 \rightarrow l_2^2; \quad A$ – оператор поворота на 30° против часовой стрелки.

Задача 9. Пусть задана последовательность операторов $A_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если

$$A_n = B^n, \text{ если } B : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]; \quad Bx(t) = \int_0^1 ts \cdot x(s)ds.$$

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]; \quad Ax(t) = \int_0^t sx(s)ds.$$

Вариант XXII

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[-3, 3] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-3}^3 t \cdot x(t)dt - x(0) + x(1).$$

Задача 2. Доказать, что функционал линейный, и вычислить его норму:

$$f : L_2[-3, -2] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-3}^2 t \cdot x(t)dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_4 \rightarrow R; \quad f(x) = (\lambda + 1)x_1 + 2x_2 - \lambda x_3.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[-2, 3] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильеса $f(x) = \int_{-2}^3 x(t)dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если

$$f(x) = 2x(0) + \int_{-2}^3 (t - 3) \cdot x(t)dt.$$

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : M[-3, 2] \rightarrow R; \quad f(x) = x(0) - x(1) + \int_{-3}^2 t \cdot x(t)dt; \quad x^*(t) = \operatorname{sgn}(t(t - 1)).$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_{\infty}^2, \quad L_0 = \{x \in l_{\infty}^2 : x_1 - 4x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = 2x_1.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_1^3, \quad L_0 = \{x \in l_1^3 : x_2 + x_3 = 0\}, \quad f_0(x) = 2x_1 - 3x_2.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

$$\text{а) } A : L_2[-2, 2] \rightarrow L_1[-2, 2]; \quad Ax(t) = \int_{-2}^2 (t+1)^2 \cdot x(s) ds;$$

$$\text{б) } A : l_2^3 \rightarrow l_2^3; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. Пусть задана последовательность операторов $A_n : M[-1, 1] \rightarrow M[-1, 1]$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если

$$A_n : M[-1, 1] \rightarrow M[-1, 1]; \quad A_n x(t) = t^n x(0) + e^t x(1).$$

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : C[1, 2] \rightarrow C[1, 2]; \quad Ax(t) = \int_1^t s \cdot tx(s) ds.$$

Вариант XXIII

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[0, 2\pi] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_0^{2\pi} (\sin 2t \cos t + \cos 2t \sin t) \cdot x(t) dt - x(0).$$

Задача 2. Доказать, что функционал линейный, и вычислить его норму:

$$f : L_2[-2\pi, 0] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-2\pi}^0 \sin^2 t \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_5 \rightarrow R; \quad f(x) = (2 + \lambda)x_1 - x_2 - \lambda x_3.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[0, 2\pi] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_0^{2\pi} x(t) dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если

$$f(x) = 2x(\pi) - \int_0^{2\pi} (\sin t + \cos t) \cdot x(t) dt.$$

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность.:

$$f : C[-1, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-1}^0 x(t) dt - \int_0^1 x(t) dt; \quad x^*(t) = e^t + 2.$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие, что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_2^2, \quad L_0 = \{x \in l_2^2 : x_1 + 5x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = x_1 - 4x_2.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_\infty^3, \quad L_0 = \{x \in l_\infty^3 : x_1 + 4x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = x_1 + x_2 - x_3.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

- а) $A : M[-2, 1] \rightarrow M[-2, 1]; \quad Ax(t) = x(-2) \cdot t + x(1) \cdot (t^2 + 1);$
 б) $A : l_2 \rightarrow l_1; \quad Ax = (x_1, 2x_2, 3x_3, 0, 0, \dots).$

Задача 9. Пусть задана последовательность операторов $A_n : l_1 \rightarrow l_1$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если

$$A_n x = (x_n, x_{n+1}, \dots).$$

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : C[1, 2] \rightarrow C[1, 2]; \quad Ax(t) = \int_1^t s^2 \cdot tx(s) ds.$$

Вариант XXIV

Задача 1. Вычислить норму функционала. Достигается ли норма функционала на единичном шаре, если

$$f : C[0, 5] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_0^5 |t - 2| \cdot x(t) dt - 2x(1).$$

Задача 2. Доказать, что функционал линейный, и вычислить его норму:

$$f : L_3[-5, 1] \rightarrow R; \quad f(x) = \int_{-5}^1 t^4 \cdot x(t) dt.$$

Задача 3. Найти λ , при котором норма функционала минимальна, если

$$f : l_1 \rightarrow R; \quad f(x) = (9 + \lambda)x_1 - 2x_2 + (20 - 2\lambda)x_5.$$

Задача 4. Представить линейный функционал $f : C[0, 7] \rightarrow R$ в виде интеграла Стильтьеса $f(x) = \int_0^7 x(t)dg(t)$. Пользуясь теоремой Рисса об общем виде функционала, вычислить норму f , если

$$f(x) = 2x(0) - x(1) + 3x(6) - 4x(5).$$

Задача 5. Вычислить расстояние от элемента x^* до ядра линейного функционала f . Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность:

$$f : l_\infty \rightarrow R; \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}; \quad x^* = (1, 1, 1, \dots).$$

Задача 6. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Используя геометрический подход, найти все продолжения функционала f_0 на L такие что выполняются все условия теоремы Хана–Банаха:

$$L = l_2^2, \quad L_0 = \{x \in l_2^2 : 2x_1 + 3x_2 = 0\}, \quad f_0(x) = 2x_1 - x_2.$$

Задача 7. Пусть L_0 – подпространство L . На L_0 задан линейный функционал f_0 . Найти все линейные функционалы, заданные на L , такие что f – продолжение f_0 и $\|f\| = \|f_0\|$:

$$L = l_1^3, \quad L_0 = \{x \in l_1^3 : x_1 - 5x_2 = 0, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}, \quad f_0(x) = 2x_1 - x_3.$$

Задача 8. Вычислить норму оператора, если

$$\text{а) } A : L_1[-1, 2] \rightarrow L_1[-1, 2]; \quad Ax(t) = \int_{-1}^2 (t^2 + 1) \cdot x(s)ds;$$

$$\text{б) } A : l_3 \rightarrow l_3; \quad Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{e^1}, \frac{x_3}{e^2}, \dots, \frac{x_n}{e^{n-1}}, \dots\right).$$

Задача 9. Пусть задана последовательность операторов $A_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$. Выяснить, есть ли сходимость, и определить вид сходимости, если

$$A_n x(t) = x\left(\frac{1}{n}\right) (t^n + \sin t).$$

Задача 10. Найти спектр и резольвенту оператора, если

$$A : C[-1, 2] \rightarrow C[-1, 2]; \quad Ax(t) = \int_{-1}^t t \cdot (s + 1)x(s)ds.$$

Литература

- [1] *Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск: Высшая школа, 1978.
- [2] *Городецкий В. В., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П.* Методы решения задач по функциональному анализу. Киев: Выща шк., 1990.
- [3] *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Наука, 1977.
- [4] *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979.
- [5] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
- [6] *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
- [7] *Соболева Т. С.* Задачи по функциональному анализу. М.: Изд-во МИНХ и ГП, 1977.
- [8] *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
- [9] *Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.

Учебное издание

Иродова Ирина Павловна

Линейные функционалы и операторы
в курсе функционального анализа

Учебное пособие

Редактор, корректор М. В. Никулина
Компьютерный набор, верстка А. И. Иродов

Подписано в печать 25.03.2010. Формат 60×84/16.

Бум. офсетная. Гарнитура «Times New Roman».

Усл. печ. л. 7,21. Уч.-изд. л. 5,1.

Тираж 120 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.

Отпечатано на ризографе.