

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

Международная научно-исследовательская лаборатория
«Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б. Н. Делоне

Д. П. Ильютко, В. О. Мантуров, И. М. Никонов

Комбинаторная топология и теория графов в задачах и упражнениях

Допущено УМО по классическому университетскому
образованию в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся по направлению
010100 Математика

Ярославль
ЯрГУ
2013

УДК 519.1(075)
ББК В152.5_я73-4+В174.2_я73-4
И 48

Серия «Библиотека Делоне»

Главные редакторы: Н. П. Долбилин, Х. Эдельсбруннер,
А. О. Иванов

Редакторы: В. М. Бухштабер, В. Л. Дольников,
Р. Н. Карасёв, В. О. Мантуров, Н. Г. Мощевитин,
О. Р. Мусин, М. В. Невский, И. Х. Сабитов, М. И. Штогрин

Рецензенты:

А. В. Чернавский, д-р физ.-мат. наук, проф.;
кафедра дифференциальных уравнений и приложений
механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова

Ильютко, Денис Петрович.

И 48 Комбинаторная топология и теория графов в задачах
и упражнениях : учебное пособие / Д. П. Ильютко,
В. О. Мантуров, И. М. Никонов; Яросл. гос. ун-т
им. П. Г. Демидова. — Ярославль: ЯрГУ, 2013. — 150 с.
ISBN 978-5-8397-0980-5

В учебном пособии представлены оригинальные задачи по комбинаторной топологии и теории графов. Часть задач была решена авторами и открывает новые направления исследований. Приведены также некоторые нерешенные задачи.

Учебное пособие рассчитано на студентов-математиков, аспирантов-математиков и всех, кто интересуется комбинаторикой и маломерной топологией.

УДК 519.1(075)

ББК В152.5_я73-4+В174.2_я73-4

Опубликовано за счет средств гранта Правительства РФ
по постановлению № 220, договор 11.G34.31.0053

Иллюстрации А. Т. Фоменко

Дизайн обложки выполнен К. Эдельсбруннер

ISBN 978-5-8397-0980-5

© ЯрГУ, 2013

Предисловие

Центральной темой настоящего пособия являются оснащенные графы, т. е. графы со специальными структурами, и поверхности, связанные с такими графами. Целью пособия является ознакомление читателя с несколькими оригинальными задачами комбинаторной топологии и теории графов, большинство из которых, несмотря на простоту своих формулировок, возникло в последние десятилетия XX века или даже в XXI веке и привело к развитию новых направлений исследований. Каждая из этих задач приводит к новому кругу открытых вопросов.

Хорошо известен критерий Понтрягина–Куратовского [22, 59], утверждающий, что граф не является планарным тогда и только тогда, когда у него найдется подграф, гомеоморфный полному графу K_5 или полному двудольному графу $K_{3,3}$ (точные определения см. ниже). Рассмотрим теперь графы с дополнительной структурой. Скажем, что граф имеет *крестовую структуру*, если в каждой вершине графа указано разбиение четырех (полу)ребер, инцидентных вершине, графа на две пары (формально) противоположных ребер, см. рис. 1.

Когда можно такой граф вложить в плоскость, причем так, чтобы формально противоположные ребра переходили в локально противоположные ребра на плоскости? В 2004 году В. А. Васильевым [14] была предложена гипотеза, которая сразу была доказана одним из авторов [51] настоящего пособия.

Гипотеза В. А. Васильева формулируется так: крестовый граф не вложим в плоскость тогда и только тогда, когда у него найдутся два цикла без общих ребер, имеющие ровно одну точку перекрестья (т. е. общую вершину, в которой оба цикла переходят с ребра на противоположное ребро). Решение этой задачи дается в п. 2.2.

Решение этой проблемы использовало метод атомов [23], (атомам посвящен раздел 3), и d -диаграмм [48] и породило много новых задач.

Гипотеза Васильева и теорема Понтрягина–Куратовского тесно связаны: ниже мы приводим в виде серии упражнений схему вывода одного критерия планарности из другого.

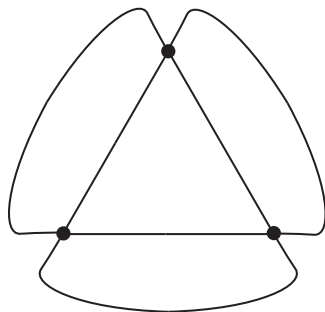


Рис. 1. Граф с крестовой структурой

Пусть дан крестовый граф, который не вкладывается в плоскость. В какую поверхность его можно вложить? Как оценивать род вложения эффективно, т. е. решать задачу за короткое (по числу ребер) время? Что можно сказать о произвольных графах, в каждой вершине которых сходится четное число ребер (не обязательно четыре) и при этом задана некоторая структура?

Оказывается, задача об оценке рода вложимости может быть легко переформулирована в виде следующей задачи на языке матриц.

Дана симметричная матрица размера $n \times n$ с коэффициентами из \mathbb{Z}_2 . Как разбить множество ее индексов $\{1, \dots, n\}$ на два семейства $I \sqcup J$ таким образом, чтобы сумма рангов двух квадратных матриц, высекаемых индексами I и индексами J , была минимальной? Разумеется, вопрос ставится об эффективном алгоритме решения задачи, а не о переборе.

Крестовые графы можно обходить трансверсально, т. е. в каждой вершине мы переходим с (полу)ребра на противоположное ему (полу)ребро (при этом может понадобиться несколько циклов, если граф не уникурсальный), или с поворотами, т. е. в каждой вершине мы переходим с (полу)ребра на непротивоположное ему (полу)ребро. При этом поворачивающие обходы, т. е. обходы с поворотом, имеют ряд преимуществ перед уникурсальными обходами. Так, например, используя поворачивающие обходы, мы можем закодировать хордовой диаграммой каждый граф вне зависимости от количества его уникурсаль-

ных компонент, см. далее. Кроме того, на языке поворачивающих обходов вопрос о планарности графа решается значительно проще, чем в случае трансверсальных обходов. В связи с этим возникает естественный вопрос: как формульно связаны матрицы, описывающие один и тот же граф с точки зрения поворачивающих обходов и с точки зрения трансверсальных обходов? Кроме того, трансверсальный обход у графа единствен (если существует), а поворачивающих обходов может быть много. Какова связь между этими различными обходами? Такая связь, в виде явной формулы, была найдена одним из авторов (см. п. 2.4 и [34]). Эта формула имеет ряд приложений как для задач о графах, так и для задач о матрицах, формально не имеющих отношения к графам.

Задача о вложении крестовых графов в поверхности естественным образом приводит к понятию атома как допускающего шахматную раскраску клеточного разбиения поверхности четырехвалентным графом. В классе атомов можно выделить максимально симметричные атомы, которые могут рассматриваться как обобщение понятия правильного многогранника. Мы приводим ряд классификационных результатов, которые позволяют составить список максимально симметричных атомов малой сложности, а также описываем методы, при помощи которых получают упомянутые результаты.

Следующей задачей и ее обобщениями интересовался П. Эрдёш, подробную историю возникновения задачи и ее развития см. [61]. Во сколько цветов можно покрасить плоскость, чтобы любые две точки, находящиеся на фиксированном расстоянии ρ , имели разные цвета? Несмотря на серьезные усилия первоклассных математиков, этот ответ остался открыт для плоскости, причем «зазор» между оценкой сверху и оценкой снизу очень велик: неизвестно, достаточно ли 4 цветов, 5 цветов или 6 цветов (семи цветов заведомо достаточно, а трех — нет). Аналогичные вопросы можно ставить про другие пространства с другими запрещенными расстояниями. В случае вещественных пространств задача о вычислении точного значения минимального количества цветов (*хроматического числа*) кажется безнадежной и успех имеет место лишь в оценках числа цветов при стремлении размерности к бесконечности: доказано, что оцен-

ки, как верхняя, так и нижняя, экспоненциально растут с ростом размерности.

Рассмотрим вместо вещественного пространства целочисленные решетки \mathbb{Z}^n . Что можно сказать о хроматических числах в этих случаях? Оказывается, см. раздел 4, что для целочисленных решеток при каждом конкретном запрещенном состоянии хроматическое число растет не более чем полиномиально с ростом размерности n , что доказано одним из авторов, и при этом хроматические числа для целочисленных решеток и рациональных пространств часто возможно вычислить явно. Также в этом разделе предлагается ряд нерешенных задач и очерчивается круг открытых проблем.

Читатель, знакомый с самыми основными понятиями топологии и теории графов и желающий непосредственно перейти к задачам, может пропустить раздел 1 и перейти к разделу 2.

Авторы выражают благодарность А. Т. Фоменко за постоянное внимание к работе, А. М. Райгородскому и А. Б. Купавскому за обсуждение результатов раздела 4 и М. Н. Вялому за полезные замечания, касающиеся стиля изложения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению N 220, договор 11.G34.31.0053, РФФИ (гранты № 13-01-00666-а, № 13-01-00830-а и № 12-01-31432-мол-а) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1410.2012.1).

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Двумерные многообразия

В этом разделе мы сформулируем основные определения, касающиеся двумерных многообразий.

Определение 1.1. *Топологическое пространство* — это множество X , на котором задана *топология*, т. е. непустое множество \mathcal{T} подмножеств множества X , удовлетворяющее следующим трем условиям:

- 1) пустое множество \emptyset и все множество принадлежат \mathcal{T} ,
- 2) объединение любого числа множеств из \mathcal{T} принадлежит \mathcal{T} ,
- 3) пересечение конечного числа множеств из \mathcal{T} принадлежит \mathcal{T} .

Множества из \mathcal{T} называются *открытыми*. *Окрестностью* точки называется произвольное открытое множество, содержащее эту точку.

Определение 1.2. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым*, если для любых двух различных точек пространства найдутся непересекающиеся их окрестности, т. е. открытые множества, содержащие соответствующие точки.

Топологическое пространство называется *компактным*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Топологическое пространство называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых его подмножеств.

Пример 1.1. Рассмотрим множество X , состоящее из двух элементов a и b . Тогда множество $\mathcal{T} = \{\emptyset, a, X\}$ задает топологию на X (проверьте!). Легко убедиться, что это топологическое пространство не является хаусдорфовым, поскольку окрестностью точки b служит все множество X .

Примером некомпактного топологического пространства служит стандартная евклидова прямая, где множество является открытым, если оно вместе с каждой своей точкой включает некоторый интервал, содержащий данную точку.

В качестве несвязного топологического пространства можно взять объединение двух евклидовых прямых, которые параллельны на плоскости.

Определение 1.3. Отображение одного топологического пространства в другое топологическое пространство называется *непрерывным*, если прообраз любого открытого множества является открытым множеством, и два топологических пространства называются *гомеоморфными* (обозначение: $X \simeq Y$), если существует *гомеоморфизм*, т. е. взаимно однозначное и непрерывное в обе стороны отображение одного множества на другое.

Определение 1.4. *Многообразием* размерности n называется хаусдорфово топологическое пространство, которое в каждой своей точке локально устроено как евклидово пространство \mathbb{R}^n , т. е. для каждой точки найдется окрестность, гомеоморфная \mathbb{R}^n . *Многообразием размерности n с краем* называется топологическое пространство, которое в каждой своей точке локально устроено как евклидово пространство \mathbb{R}^n или как $\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\}$. Точки, окрестности которых гомеоморфны \mathbb{R}_+^n , называются *граничными*.

Замечание 1.1. Иногда в определении многообразия отказываются от условия хаусдорфовости. Приведем пример нехаусдорфова многообразия.

Рассмотрим множество $X = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{a, b\}$ и два отображения $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, где

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = a, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = b. \end{cases}$$

Зададим топологию X таким образом, чтобы отображения f и g были гомеоморфизмами. Легко проверить, что условие локальной евклидовости для этого топологического пространства выполняется и любые две окрестности точек a и b пересекаются.

На рис. 2 справа видны сферы — простейшие 2-многообразия. Слева, как листья гигантских папоротников, вырастают проективные плоскости. Наверху — тор, «бублик». На переднем плане — лист Мёбиуса в виде «скрещенного колпака». Здесь же — двумерные поверхности большого рода, т. е. сферы



Рис. 2. Двумерные многообразия (рис. А. Т. Фоменко)

с большим числом ручек, а также две поверхности, не являющиеся многообразиями. Это — сферы с тремя отождествленными точками. Получается нечто похожее на морское животное. Легко убедиться, что «скрещенный колпак» в действительности представляет собой лист Мёбиуса (точное определение см. ниже). Он расположен в пространстве так, что его граница стала плоской окружностью. Проективная плоскость получается склейкой диска с листом Мёбиуса по их общей границе. Поэтому «папоротник» связан как с листом Мёбиуса, так и с проективной плоскостью. Проективную плоскость нельзя вложить в \mathbb{R}^3 без самопересечений. Однако самопересечения можно устранить, «выйдя» в четырехмерное пространство.

В дальнейшем мы ограничимся двумерными замкнутыми (т. е. компактными и без края) многообразиями, см. рис. 3. Примером двумерного многообразия с краем служит замкнутый круг на плоскости.

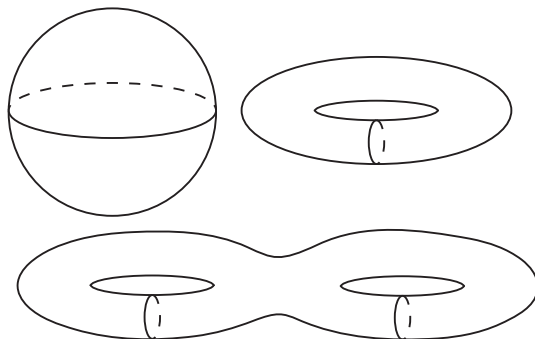


Рис. 3. Сфера, тор (сфера с одной ручкой) и крендель (сфера с двумя ручками)

Определение 1.5. Два непрерывных отображения $f, g: X \rightarrow Y$ топологических пространств X и Y называются *гомотопными* (обозначение $f \sim g$), если существует такое непрерывное отображение $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$, что $F(x, 0) = f(x)$ и $F(x, 1) = g(x)$ при всех x . Само отображение F называется *гомотопией*.

Два топологических пространства X и Y называются *гомотопически эквивалентными*, если существуют два таких непрерывных отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$, что $f \circ g \sim \text{id}_Y$ и $g \circ f \sim \text{id}_X$, где $\text{id}_X: X \rightarrow X$ и $\text{id}_Y: Y \rightarrow Y$ — тождественные отображения соответствующих пространств.

Определение 1.6. *Стандартным двумерным симплексом* называется (замкнутый) треугольник на плоскости. Вершины симплекса называются его *нульмерными гранями*, а стороны — *одномерными гранями*. *Топологическим двумерным симплексом* (соответственно *топологическим многоугольником*) в многообразии M называется образ стандартного двумерного симплекса (соответственно образ обычного многоугольника на плоскости) Δ при таком его отображении $f: \Delta \rightarrow M$ в многообразии M , что индуцированное им отображение $f: \Delta \rightarrow f(\Delta)$ является гомеоморфизмом.

Замечание 1.2. Аналогично определяются одномерные и нульмерные грани для топологического симплекса.

Определение 1.7. *Триангулируемое многообразие* (с краем или без) — это множество, представимое в виде объединения конечного числа топологических симплексов. При этом требуется, чтобы пересечение любых двух входящих в это множество симплексов было либо пустым множеством, либо в точности одной целой гранью (размерности 0 или 1) для обоих пересекающихся симплексов.

Триангуляцией многообразия называется его представление в виде такого объединения топологических симплексов.

Хорошо известно, что каждое двумерное замкнутое многообразие допускает триангуляцию. Идея состоит в следующем. Замкнутое многообразие можно покрыть системой окрестностей, причем в связи с компактностью многообразия можно считать, что число этих окрестностей может быть выбрано конечным. После небольшого изменения системы окрестностей, см. подробно в [21], можно считать, что границы окрестностей правильным образом расположены между собой, т. е. каждые две границы пересекаются по конечному числу точек (на рис. 4 слева изображены две окрестности, мощность пересечения которых бесконечна (это пересечение изображено жирной линией), после малого шевеления эти две окрестности пересекаются только по двум точкам). Тогда все многообразие можно представить в виде объединения топологических многоугольников, каждые два из которых пересекаются либо по вершине, либо по целой стороне. На рис. 5 изображены окрестности, пересекающиеся правильным образом, и несколько пронумерованных топологических многоугольников. Далее мы измельчаем каждый многоугольник на треугольники правильным образом, например диагоналями. В результате мы получим триангуляцию многообразия.

Под *схемой склейки* мы будем подразумевать многоугольник с четным числом сторон с указанием пар склеиваемых сторон и правила для склейки, т. е. указанием, какие пары сторон склеиваются с перекруткой, а какие — без. Пары склеиваемых сторон изображаются одинаковыми буквами, а правило склейки указывается стрелками, причем при склейке ориентации стрелок должны совпадать. Более точное определение см. [21].

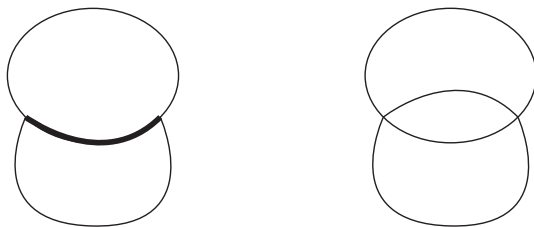


Рис. 4. Пересечение окрестностей: «неправильное» и «правильное»

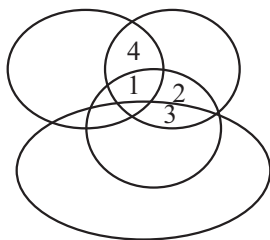


Рис. 5. Окрестности и многоугольники

Упражнение 1.1. Каждое двумерное связное замкнутое многообразие допускает схему склейки из $2m$ -угольника для некоторого m . Указание: рассмотреть триангуляцию многообразия и начать «исчерпывать» все многообразие, добавляя один треугольник за другим.

Пример 1.2. Тор T^2 допускает схему склейки, указанную на рис. 6 (слева). Покажем на примере, как из триангуляции тора,

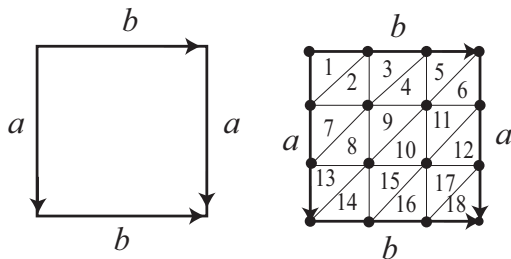


Рис. 6. Схема склейки тора

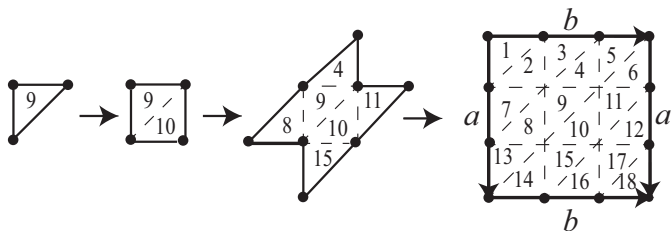


Рис. 7. Алгоритм

изображенной на рис. 6 (справа), можно получить схему его склейки.

Для этого рассмотрим один треугольник триангуляции, см. рис. 7. Он гомеоморфен диску. Рассмотрим один из соседних по ребру треугольников. Два треугольника вместе образуют четырехугольник. У этого четырехугольника имеется четыре соседних треугольника. Добавим один из них к нашему диску. Возможно, у полученного пятиугольника некоторые из вершин будут повторяться (совпадать на торе). Исчерпывая все треугольники, мы получим требуемую схему склейки. Склеивая треугольники в другом порядке и по другим сторонам, мы можем получить другую схему склейки. Потом из нее мы получим требуемую схему склейки.

Упражнение 1.2. Доказать, что крендель допускает схему склейки, изображенную на рис. 8.

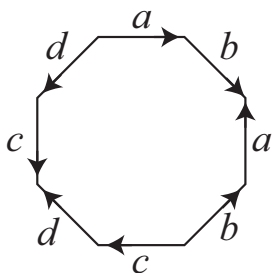


Рис. 8. Схема склейки кренделя

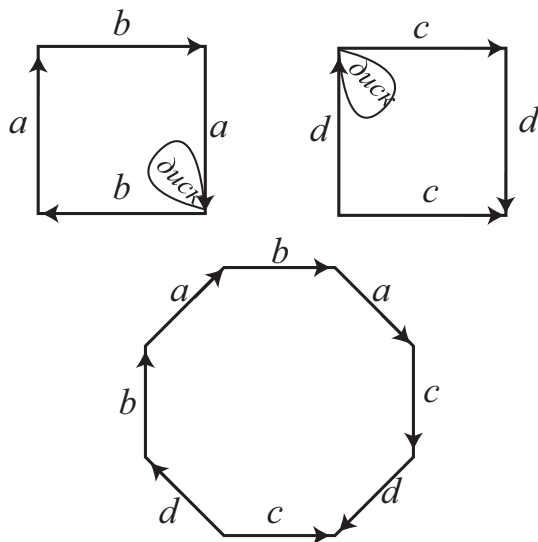


Рис. 9. Связная сумма проективной плоскости и бутылки Клейна

Пусть M_1 и M_2 — два замкнутых триангулируемых двумерных многообразия. Удалим из каждого многообразия по одному симплексу. Получим два триангулируемых многообразия с краем. Склеим эти два многообразия по их краям. В результате мы получим новое многообразие $M_1 \# M_2$, называемое *связной суммой* многообразий M_1 и M_2 .

Задача 1.1. Докажите, что гомеоморфный тип связной суммы не зависит от склейки их краев (склейка важна для связной суммы в старших размерностях), т. е. определен корректно.

Покажем, как выглядит связная сумма многообразий, реализованных в виде склейки многоугольника. Рассмотрим для примера связную сумму проективной плоскости \mathbb{RP}^2 и бутылки Клейна K^2 . На рис. 9 сверху изображены схемы склейки проективной плоскости (слева) и бутылки Клейна (справа). Также показано, какой диск мы вырезаем. На нижнем рисунке показана их связная сумма.

Задача 1.2. Доказать, что

$$\mathbb{R}P^2 \# T^2 = \mathbb{R}P^2 \# K^2 = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2.$$

Определение 1.8. Стандартный двумерный симплекс называется *ориентированным*, если задано направление обхода его края. Другими словами, на каждой стороне треугольника должно быть указано направление, причем в каждой вершине встречаются одно входящее и одно выходящее направление ребра.

Замечание 1.3. Пусть вершины симплекса занумерованы; тогда ориентация задается перестановкой из трех чисел (номеров вершин), причем две перестановки задают одну и ту же ориентацию тогда и только тогда, когда их четности совпадают.

Фактически задание ориентации — это выбор одного из двух направлений вращения — «по часовой стрелке» или «против часовой стрелки».

Определение 1.9. Топологический симплекс называется *ориентированным*, если задана ориентация соответствующего стандартного симплекса. Другими словами, на крае топологического симплекса должно быть задано направление обхода.

Рассмотрим теперь триангулированное двумерное многообразие. Его ориентация получается из ориентации входящих в него симплексов при условии правильного согласования ориентаций на их пересечениях.

Определение 1.10. Триангулируемое многообразие называется *ориентированным*, если на каждом входящем в него топологическом симплексе задана ориентация, причем если два симплекса пересекаются по одномерной грани, то два направления, индуцированные на этой грани ориентациями двух пересекающихся симплексов, должны быть противоположными.

Замечание 1.4. Очевидно, что гомеоморфные многообразия одновременно либо ориентированные, либо нет.

Замечание 1.5. Иными словами, условие противоположности ориентаций, индуцированных на грани двумя пересекающимися по этой грани симплексами, означает «согласованность» ориентации при переходе через грань из одного симплекса в другой.

Определение 1.11. Двумерное многообразие называется *ориентируемым*, если на нем существует ориентация.

Замечание 1.6. Рассмотрим на поверхности замкнутую цепочку симплексов, т. е. набор топологических треугольников $\Delta_1, \dots, \Delta_m$, каждый из которых граничит по одномерной грани с последующим и с предыдущим, причем Δ_1 граничит с Δ_m . Зададим ориентацию на первом симплексе Δ_1 ; правило согласования однозначно определяет ориентацию на симплексе Δ_2 , от него — на Δ_3 и далее по цепочке до Δ_m , а от него снова на Δ_1 . Таким образом, на первом симплексе возникают две ориентации. Будем говорить, что цепочка симплексов *сохраняет ориентацию*, если эти две ориентации совпадают, и *обращает ориентацию*, если они противоположны. Ясно, что если на поверхности существует обращающая ориентацию цепочка симплексов, то поверхность неориентируема; легко проверить, что верно и обратное утверждение. Таким образом, ориентируемость поверхности эквивалентна отсутствию на ней обращающих ориентацию замкнутых цепочек симплексов.

На рис. 10 изображена цепочка фигур, каждая из которых держит в руках раскаленный шар. Цепочка образует замкнутую петлю. Если на многообразии нарисовать замкнутый непрерывный путь, то можно «протащить» вдоль него репер, т. е. набор касательных векторов, образующих базис в касательной плоскости. Если репер вернется в исходную точку с противоположной ориентацией, значит, многообразие неориентируемо. Задание репера эквивалентно заданию ориентации шара малого радиуса, лежащего в многообразии. Другими словами, вместо непрерывной деформации репера вдоль пути можно «прокатить» шар, а затем сравнить его исходную ориентацию с той, какая появится на нем после однократного обхода петли.

Задача 1.3. Докажите, что лист Мёбиуса, см. схему склейки (схема склейки для многообразия с краем — то же, что схема склейки и для замкнутого многообразия, только склеиваются не все ребра, а часть их) листа Мёбиуса на рис. 11, — неориентируемое двумерное многообразие с краем.



Рис. 10. Неориентируемость (рис. А. Т. Фоменко)

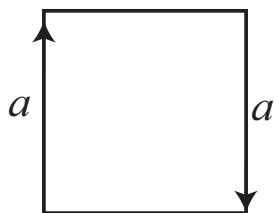


Рис. 11. Схема склейки листа Мёбиуса из квадрата

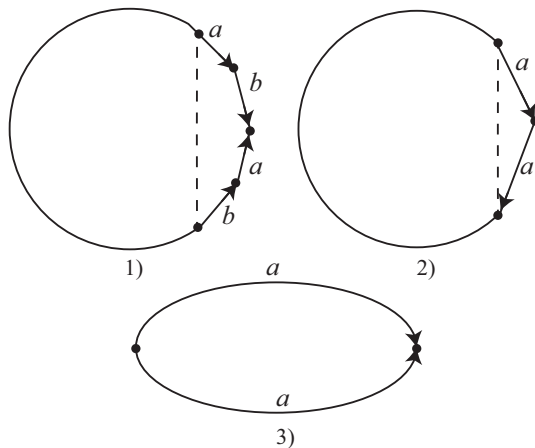


Рис. 12. Шаг индукции: три случая

Теорема 1.1. Любое связное замкнутое ориентируемое двумерное многообразие гомеоморфно либо сфере, либо связной сумме торов.

Любое связное замкнутое неориентируемое двумерное многообразие гомеоморфно связной сумме проективных плоскостей.

Приведем план доказательства. Мы знаем, что любое двумерное многообразие допускает триангуляцию и, используя триангуляцию, мы можем представить любое связное двумерное замкнутое многообразие в виде схемы склейки многоугольника. Совершая при необходимости разрезы и склейки, мы получим три случая, см. рис. 12.

Разрезая по пунктирной линии в первых двух случаях, мы получим связную сумму двумерного замкнутого многообразия и тора в первом случае и связную сумму двумерного замкнутого многообразия и листа Мёбиуса во втором случае. В третьем случае мы имеем сферу. Далее по индукции получаем, что любое связное двумерное замкнутое многообразие есть связная сумма торов и проективных плоскостей, быть может, и того и другого вместе. Используя задачу 1.2, мы получим требуемое представление. Окончание доказательства теоремы мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Теорема 1.1 говорит нам, как устроены двумерные связные замкнутые многообразия. Возникает вопрос: сколько представлений посредством склейки (сколько различных схем склейки), указанных в этой теореме, может иметь данное многообразие? Поскольку гомеоморфные многообразия одновременно либо ориентированные, либо нет, то многообразие не может быть одновременно представленным в виде связной суммы торов и связной суммы проективных плоскостей. В следующем разделе мы покажем, что количество торов или проективных плоскостей в связной сумме одно и то же для фиксированного многообразия, т. е. представление единственно.

1.2. Эйлерова характеристика многообразия

Определение 1.12. Пусть τ — произвольная триангуляция двумерного многообразия. *Эйлерова характеристика* $\chi(\tau)$ *триангуляции* τ — это $\chi(\tau) = V - E + F$, где V , E , F — число вершин, ребер и треугольников триангуляции соответственно.

Задача 1.4. Эйлерова характеристика триангуляции многообразия не зависит от триангуляции многообразия и определяется только самим многообразием. Указание: понять, как можно перейти от одной триангуляции к другой, и показать, что эйлерова характеристика не меняется при таком переходе.

Замечание 1.7. Аналогичные понятия — триангуляция, эйлерова характеристика и т.п. — можно определить и для многообразий произвольной размерности.

Согласно задаче 1.4 назовем *эйлеровой характеристикой* *двумерного многообразия* эйлерову характеристику любой его триангуляции.

Теорема 1.2. *Эйлерова характеристика многообразия является его топологическим инвариантом, т. е. гомеоморфные многообразия имеют одинаковую эйлерову характеристику.*

Задача 1.5. Докажите равенство

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$

Задача 1.6. Докажите, что $\chi(S^2) = 2$, $\chi(\underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_g) = 2 - 2g$,

$$\chi(\underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P_2}_m) = 2 - m.$$

Задача 1.7. Связные суммы, состоящие из разного количества торов (соответственно проективных плоскостей), не гомеоморфны, т. е. в теореме 1.1 все многообразия попарно не гомеоморфны.

1.3. Фундаментальная группа и накрытия

Пусть X — произвольное топологическое пространство и $x_0 \in X$ — произвольная точка в X . Назовем точку x_0 *базисной*.

Определение 1.13. Под *кривой* мы понимаем непрерывное отображение отрезка в топологическое пространство или многообразие в зависимости от того, где кривая рассматривается. Кривая называется *замкнутой*, или *петлей*, если ее конец и начало совпадают.

Рассмотрим на X множество $\Omega_1(X, x_0)$ всех петель, начинающихся и заканчивающихся в базисной точке x_0 . Введем на этом множестве отношение эквивалентности. А именно, две петли $\gamma_1, \gamma_2: [0, 1] \rightarrow X$ назовем *эквивалентными*, если они гомотопны и в процессе гомотопии базисная точка стоит на месте, т. е. существует такое непрерывное отображение $F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$, что $F(t, 0) = \gamma_1(t)$, $F(t, 1) = \gamma_2(t)$ для любых $t \in [0, 1]$ и $F(0, s) = F(1, s) = x_0$ при любых $s \in [0, 1]$.

Упражнение 1.3. Показать, что отношение гомотопности, оставляющее базисную точку на месте, действительно является отношением эквивалентности.

Обозначим множество классов эквивалентности множества $\Omega_1(X, x_0)$ по отношению гомотопности через $\pi_1(X, x_0)$. Введем на этом множестве структуру группы. Для этого нам сначала надо определить бинарную операцию, которая ставит в соответствие двум петлям одну петлю, и для построенной операции проверить аксиомы группы. Пусть даны два класса a, b . Выберем в каждом классе по представителю, т. е. выберем две петли $\gamma_1, \gamma_2: [0, 1] \rightarrow X$ с началом и концом в точке x_0 , представляющие классы a и b соответственно. Определим третью петлю $\gamma_3: [0, 1] \rightarrow X$, положив

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma_2(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Тогда элемент ab определяется как класс эквивалентности, содержащий петлю γ_3 .

Отметим, что петля γ_3 — это просто композиция двух петель γ_1 и γ_2 .

Упражнение 1.4. Покажите, что элемент ab определен корректно, т. е. он не зависит от выборов представителей в a и b соответственно.

Проверим теперь, что введенная выше операция задает на множестве $\pi_1(X, x_0)$ структуру группы, т. е. нам надо показать ассоциативность операции, существование нейтрального элемента относительно этой операции и существование для каждого элемента обратного элемента.

Ассоциативность. Пусть даны три класса a, b, c , заданные тремя петлями $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ соответственно. Надо показать, что $(ab)c = a(bc)$. Согласно определению класс $(ab)c$ порождается петлей

$$\gamma_4(t) = \begin{cases} \gamma_1(4t), & 0 \leq t \leq 1/4, \\ \gamma_2(4t - 1), & 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma_3(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

а класс $a(bc)$ —

$$\gamma_5(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma_2(4t - 2), & 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ \gamma_3(4t - 3), & 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Упражнение 1.5. Покажите, что петли γ_4 и γ_5 гомотопны.

Из упражнения 1.5 следует, что $(ab)c = a(bc)$.

Существование нейтрального элемента. Рассмотрим петлю $\varepsilon: [0, 1] \rightarrow X$, положив $\varepsilon(t) = x_0$ для любого t , и соответствующий ей элемент e в $\pi_1(X, x_0)$.

Упражнение 1.6. Покажите, что для любого элемента $a \in \pi_1(X, x_0)$ имеет место $ae = ea = a$.

Существование обратного элемента. Рассмотрим произвольный элемент $a \in \pi_1(X, x_0)$, заданный петлей $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$. Построим новый элемент b , задав его представитель $\gamma': [0, 1] \rightarrow X$ формулой $\gamma'(t) = \gamma(1 - t)$.

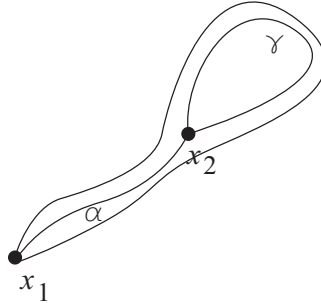


Рис. 13. Изоморфизм фундаментальных групп

Упражнение 1.7. Покажите, что для любого элемента $a \in \pi_1(X, x_0)$ имеет место $ab = ba = e$.

Определение 1.14. Группа $\pi_1(X, x_0)$ называется *фундаментальной группой* топологического пространства с базисной точкой x_0 .

После определения фундаментальной группы возникает вопрос: изменится ли фундаментальная группа, если в качестве базисной точки взять другую точку? Оказывается, что для некоторых топологических пространств группы останутся изоморфными.

Определение 1.15. Топологическое пространство называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой.

Имеет место

Теорема 1.3 (см. [21, 59]). *Если пространство X линейно связно, то для любых двух точек x_1 и x_2 группы $\pi_1(X, x_1)$ и $\pi_1(X, x_2)$ изоморфны.*

На рис. 13 показан возможный изоморфизм между группами $\pi_1(X, x_1)$ и $\pi_1(X, x_2)$, а именно мы соединяем точки x_1 и x_2 путем α , и каждому классу из $\pi_1(X, x_2)$, порожденному петлей γ , мы ставим в соответствие класс петли $\alpha^{-1}\gamma\alpha$, т. е. мы сначала двигаемся из точки x_1 в точку x_2 вдоль пути α , затем обходим петлю γ и возвращаемся в x_1 обратным путем к α .

Нетрудно доказывается следующая теорема.

Теорема 1.4 (см. [21, 59]). Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение топологических пространств и $f(x_0) = y_0$. Тогда это отображение индуцирует естественный гомоморфизм $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ фундаментальных групп, который не меняется при гомотопии отображения f , оставляющей неподвижной точку x_0 .

В частности, фундаментальные группы гомотопически эквивалентных линейно связных топологических пространств изоморфны.

Пусть X и Y — линейно связные топологические пространства.

Определение 1.16. Отображение $p: X \rightarrow Y$ называется *накрытием*, если $p(X) = Y$ и у каждой точки $y \in Y$ есть такая окрестность U , что полный прообраз $p^{-1}(U)$ этой окрестности гомеоморфен $U \times D$, где D — дискретное множество, причем ограничение отображения p на $p^{-1}(U)$ устроено как естественная проекция $U \times D \rightarrow U$.

Пространство X называется *накрывающим пространством*, или *тотальным пространством накрытия*, а Y — *базой накрытия*. Если множество D состоит из n точек, то накрытие называется *n -листным накрытием*.

Непрерывное отображение $p: X \rightarrow Y$ называется *разветвленным накрытием*, если существует конечное множество $R \subset Y$, такое что множество $p^{-1}(R)$ дискретно и ограничение p на множество $X \setminus p^{-1}(R)$ является накрытием. Точка $y \in R$ называется *точкой ветвления*, если ограничение отображения p на множество $X \setminus p^{-1}(R \setminus \{y\})$ перестает быть накрытием.

Упражнение 1.8. Рассмотрим отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, заданное формулой $f(x) = e^{2\pi i x}$. Проверьте, что отображение f является накрытием.

Рассмотрим отображение $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, определенное формулой $p(z) = z^n$, $n \geq 2$ — натуральное число. Проверьте, что p является разветвленным накрытием с единственной точкой ветвления $z = 0$.

Теорема 1.5 (см. [21, 59]). Если $p: X \rightarrow Y$ — накрытие и $p(x_0) = y_0$, то существует взаимно однознач-

ное соответствие между множеством смежных классов $\pi(Y, y_0)/p_*\pi(X, x_0)$ и слоем $p^{-1}(x_0)$.

1.4. Графы и эйлеровы циклы

Дадим основные определения по теории графов, более подробно см. [22].

Графом называется пара (V, E) , где V — непустое множество, а E — произвольное семейство неупорядоченных пар элементов из V (пары могут повторяться в E). Все рассматриваемые графы являются *конечными*, т. е. множества V и E предполагаются конечными. Элементы множества V называются *вершинами* графа, а элементы множества E — *ребрами*. Говорят, что две вершины u и v *смежны*, если множество $\{u, v\}$ является ребром, и *не смежны* в противном случае. В первом случае также говорят, что вершина u (вершина v) *инцидентна* ребру $e = \{u, v\}$. Ребро, соединяющее вершины u и v , мы также будем записывать в виде $e = uv$ или $e = vu$. Два ребра называются *смежными*, если существует вершина, инцидентная обоим ребрам.

Два графа называются *изоморфными*, если существует биекция между множествами вершин графов, сохраняющая отношение смежности.

Граф $H = (V(H), E(H))$ называется *подграфом* графа $G = (V(G), E(G))$, если $V(H) \subset V(G)$ и $E(H) \subset E(G)$. Если $V(H) = V(G)$, то подграф H называется *остовным*.

Каждое ребро можно снабдить ориентацией, в результате мы получим *ориентированный* граф. В этом случае ребро записывается в виде uv , если оно направлено от вершины u к вершине v .

Графы удобно изображать в виде рисунков, состоящих из точек и линий, соединяющих некоторые из этих точек. При этом точки соответствуют вершинам графа, а соединяющие пары точек линии — ребрам. На рис. 14 изображены попарно неизоморфные графы.

На втором графе рис. 14 мы имеем два ребра, соединяющие одни и те же две вершины. Такие ребра называются *кратными*. На третьем графе рис. 14 мы имеем ребро, соединяющее одну и ту же вершину. Такое ребро называется *петлей*.

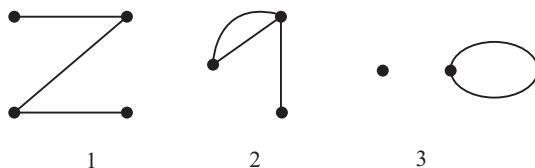


Рис. 14. Графы

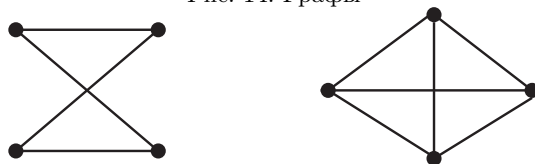


Рис. 15. 2-Граф и 3-граф

Пусть G — произвольный граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. Вообще говоря, графы могут иметь петли. Если определять *степень* (*валентность*) вершины как число ребер, инцидентных данной вершине, то каждая петля будет давать единицу. На самом деле, ясно, что каждая петля должна давать вклад, равный двум. Поэтому удобно ввести понятие *полуребра*. Добавляя на каждом ребре графа по новой вершине, мы получим разбиение ребер на *полуребра*. Таким образом, под *ребром* мы будем понимать класс эквивалентности двух полуребер, составляющих это ребро. Вершина $v \in V(G)$ графа G имеет *степень*, равную k , если v инцидентна k полуребрам. Граф, все вершины которого имеют степень k , называется k -валентным или просто k -графом. На рис. 15 изображены 2-граф и 3-граф, имеющие по четыре вершины (вершины изображены жирными точками).

Чередующаяся последовательность

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_l, v_{l+1}$$

вершин и ребер, такая что $e_i = v_i v_{i+1}$, $i = 1, \dots, l$, называется *путем*, *соединяющим вершины* v_1 и v_{l+1} . Путь называется *цепью*, если все его ребра различны. Цепь, у которой $v_1 = v_{l+1}$, называется *циклом*. Цикл в графе называется *эйлеровым*, если он содержит все ребра графа. Цикл в графе называется *гамильтоновым*, если он проходит через все вершины графа по

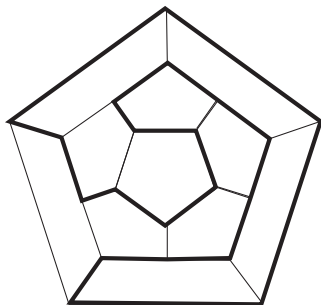


Рис. 16. Гамильтонов цикл на додекаэдре

одному разу, за исключением первой и последней вершин. На рис. 16 жирной ломаной линией изображен гамильтонов цикл на додекаэдре.

Граф называется *связным*, если любые две его несовпадающие вершины соединены путем. В противном случае граф называется *несвязным*. Максимальный связный подграф называется *связной компонентой* или *компонентой связности*. Таким образом, связный граф — это граф с одной компонентой связности.

Замечание 1.8. Долгое время существовала гипотеза, что связные планарные графы, удовлетворяющие некоторым очевидным условиям (мы не будем здесь уточнять эти условия), всегда имеют гамильтонов цикл. Впоследствии эта гипотеза была опровергнута.

Отметим, что из существования гамильтоновых циклов следует проблема четырех красок.

Хорошо известна следующая

Теорема 1.6 (Л. Эйлер, 1736 г.). *Связный граф имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.*

Задача 1.8. Докажите теорему 1.6.

Пусть H — произвольный связный 4-граф с множеством вершин $V(H)$ и пусть U — эйлеров цикл на нем. Эйлеровы циклы удобно записывать словами в алфавите, состоящем из вершин данного 4-графа. Дадим необходимые определения.

Пусть $w = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k$ — произвольное слово, т. е. конечная последовательность букв. *Зеркальный образ слова w* — это слово $\tilde{w} = x_kx_{k-1} \dots x_2x_1$. *Циклическое слово $(x_1 \dots x_k)$* — это класс эквивалентности слов, где любое слово из класса является или циклической перестановкой $w_i = x_ix_{i+1} \dots x_kx_1 \dots x_{i-1}$, $1 \leq i \leq k$, слова $x_1 \dots x_k$, или зеркальным образом слова w_i .

Определение 1.17. Слово называется *словом с двойным вхождением*, если каждая его буква встречается в нем ровно два раза.

Пример 1.3. Например, слово $abccba$ является словом с двойным вхождением, а слово $abccb$ не является словом с двойным вхождением.

Очевидно, что зеркальный образ и циклическая перестановка слова с двойным вхождением являются словами с двойным вхождением. Поэтому имеет смысл говорить о циклическом слове с двойным вхождением.

Замечание 1.9. Когда мы рассматриваем циклическое слово с двойным вхождением, для нас будет важно лишь расположение букв, соответствующих одной и той же вершине, а не их обозначение, см. [74].

Каждое циклическое слово с двойным вхождением удобно изображать хордовой диаграммой.

Определение 1.18. *Хордовая диаграмма* — это 3-граф, состоящий из выбранного неориентированного гамильтонового цикла (*окружность*) и неориентированных ребер (*хорд*), соединяющих точки на окружности.

Представление слова в виде хордовой диаграммы строится следующим образом. Пусть t — произвольное циклическое слово с двойным вхождением. Хордовая диаграмма, соответствующая слову t , строится последовательным расположением букв слова t вдоль окружности S^1 , выбором точек на S^1 около каждого появления буквы слова и соединением хордой каждой пары точек, соответствующих двум одинаковым буквам слова. Нетрудно видеть, что мы получаем взаимно однозначное соответствие между множеством циклических слов с двойным

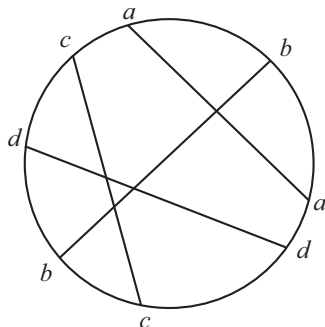


Рис. 17. Хордовая диаграмма слова $(abacdbcd)$

вхождением и множеством хордовых диаграмм (рассматриваемых с точностью до изоморфизма, переводящего гамильтоновы циклы друг в друга).

Пример 1.4. Рассмотрим слово $m = (abacdbcd)$. Слово m имеет представление с помощью хордовой диаграммы, изображенной на рис. 17.

Определение 1.19. Пусть D — хордовая диаграмма и пусть S^1 — ее окружность. Назовем две хорды *зацепленными*, если концы одной хорды лежат в разных связных компонентах множества, полученного из S^1 выбрасыванием концов другой хорды. Используя язык циклических слов с двойным вхождением, мы называем две буквы a, b *чередующимися*, если мы их встречаем последовательно $(\dots a \dots b \dots a \dots b \dots)$ при циклическом прочтении слова.

Замечание 1.10. При изображении хордовой диаграммы на плоскости посредством евклидовой окружности и прямолинейных хорд зацепленные хорды изображаются пересекающимися.

1.5. Планарные графы: формула Эйлера и теорема Понтрягина–Куратовского

Кривая называется *вложенной*, если она не имеет самопересечений, за исключением концевых точек в случае замкнутой кривой.

Упражнение 1.9. Докажите, что любой граф можно вложить в трехмерное пространство, т. е. изобразить в пространстве, расположив вершины графа и соединив их вложенными кривыми, пересекающимися только по общим вершинам. Более того, если граф не содержит петель и кратных ребер, то в качестве вложенных кривых можно выбрать прямолинейные отрезки.

Граф G называется *планарным*, если существует его вложение в плоскость, т. е. непрерывное отображение $f: G \rightarrow \mathbb{R}^2$, такое что G гомеоморфен своему образу $f(G)$. *Плоский* граф, т. е. вложенный в плоскость планарный граф, делит плоскость на *грани*, которые определяются так: точки, попавшие в одну грань, можно соединить кривой, не пересекающей граф (изображение графа на плоскости), а попавшие в разные грани — нет. Мы знаем, см. задачу 1.5, что эйлерова характеристика сферы равна двум. Следующая теорема обобщает этот результат на случай произвольного, не обязательно связного, графа.

Теорема 1.7 (формула Эйлера). Пусть G — планарный граф, состоящий из s компонент связности, среди которых нет изолированных вершин. Пусть v — число вершин графа, e — число ребер графа. Тогда для любого вложения графа G в плоскость число граней f одно и то же, а именно $f = 1 + s - v + e$.

Следствие 1.1. Для связного графа имеем $v - e + f = 2$.

Задача 1.9. Докажите теорему 1.7.

Замечание 1.11. Вместо плоскости можно рассмотреть произвольную поверхность, т. е. двумерное замкнутое многообразие. Изображение графа на поверхности, при котором ребра — вложенные кривые, пересекающиеся только по общим вершинам, называется *вложением* графа в поверхность. Очевидно, что вложить граф в поверхность — то же самое, что разбить поверхность на клетки посредством графа. Клетки должны либо не пересекаться, либо пересекаться по целым ребрам, либо пересекаться по вершинам.

Так как плоскость получается из сферы выкалыванием точки, то граф является планарным тогда и только тогда, когда его можно вложить в сферу.

Определение 1.20. Полный граф на n вершинах, K_n , — это граф без петель и кратных ребер, содержащий n вершин, при-

чем любые две его различные вершины соединены ребром. *Двудольный граф* — это граф $G = (V, E)$, множество вершин которого может быть разбито на два непересекающихся множества $V = V_1 \sqcup V_2$, причем всякое ребро графа инцидентно вершине из V_1 и вершине из V_2 . Множества V_1 и V_2 — это *доли* двудольного графа. *Полный двудольный граф* — это двудольный граф, у которого любая пара вершин из разных долей смежна (обозначение $K_{m,n}$).

Задача 1.10. Используя формулу Эйлера, покажите, что для плоского связного графа без петель и кратных ребер при $v \geq 3$ выполняется $\frac{3}{2}f \leq e \leq 3v - 6$.

Задача 1.11. Используя формулу Эйлера, покажите, что графы K_5 и $K_{3,3}$ нельзя вложить в плоскость.

Задача 1.12. Покажите, что в связном плоском графе без петель и кратных ребер есть вершина, степень которой не больше 5.

Определение 1.21. Операция, при которой ребро графа удаляется и в граф добавляется новая вершина, соединенная новыми ребрами с концами данного ребра, называется *операцией разбиения ребра*. Два графа называются *гомеоморфными*, если каждый из них может быть получен из одного и того же графа путем применения конечного числа раз операции разбиения ребра.

Теорема 1.8 (Понтрягин–Куратовский [43]). *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного K_5 или $K_{3,3}$.*

Упражнение 1.10. Доказать теорему Понтрягина–Куратовского в обратную сторону, т. е. граф, содержащий подграф, гомеоморфный K_5 или $K_{3,3}$, не является планарным. Простое доказательство теоремы Понтрягина–Куратовского можно найти в [47].

1.6. Раскраски графов

Фиксируем натуральное число n . *Правильной раскраской* графа G в n цветов является отображение $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, n\}$, такое что если две вершины v_1 и v_2 графа G соединены ребром, то их цвета различны: $f(v_1) \neq f(v_2)$.

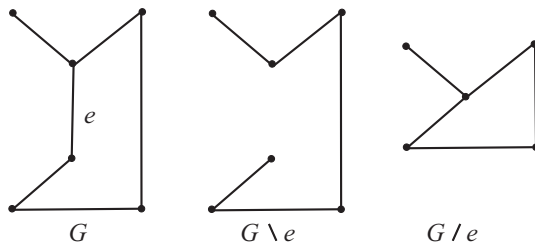


Рис. 18. Графы $G \setminus e$ и G/e

Рассмотрим функцию *раскрасок* $P(G, n)$, которая каждому графу G и натуральному числу n ставит в соответствие число раскрасок графа G в n цветов.

Оказывается, что если фиксировать граф G , то функция $P_G(n) = P(G, n)$ будет многочленом от n .

Упражнение 1.11. Пусть G — граф, имеющий m вершин и не имеющий ни одного ребра. Вычислите $P_G(n)$.

Задача 1.13. Докажите «формулу удаления–сокращения»:

$$P_G(n) = P_{G \setminus e}(n) + P_{G/e}(n),$$

где графы $G \setminus e$ и G/e получаются из графа G удалением некоторого ребра e и стягиванием ребра e в точку, см. рис. 18.

Задача 1.14. Докажите, что для фиксированного G функция $P_G(n)$ является многочленом от n . Указание: использовать индукцию по числу ребер, упражнение 1.11 и задачу 1.13.

Определение 1.22. Функция $P_G(n)$ называется *хроматическим полиномом* графа G .

В разделе 4 мы исследуем хроматические числа пространств: вместо конечного графа мы рассмотрим бесконечный граф, вершинами которого являются все точки пространства, причем ребром будут соединены пары точек, расстояние между которыми равно заданному фиксированному числу d .

2. КРЕСТОВЫЕ ГРАФЫ

2.1. Введение

Одним из важнейших классов графов (например, в маломерной топологии) является класс *крестовых графов*.

Определение 2.1. Четырехвалентный граф называется *графом с крестовой структурой* или просто *крестовым графом* (также такие графы называются *оснащенными*, см., например [34, 52, 53]), если в каждой вершине графа четыре исходящих из нее полуребра разбиты на две пары полуребер. Полуребра из одного семейства называются (формально) *противоположными*. Будем называть не противоположные полуребра, инцидентные одной вершине, *соседними*.

Понятие противоположности будет важно при вложении крестовых графов в поверхности, точные определения см. ниже.

Крестовые графы возникают, например, в виде *срединных* (*медиальных*) графов. Пусть S — двумерная поверхность, а G — вложенный в поверхность S произвольный граф. Построим *срединный* (*медиальный*) граф $M(S, G)$. Вершинами нового графа будут середины ребер исходного графа, а ребра нового графа будут строиться следующим образом: каждое ребро будет соответствовать *углу*, т. е. паре соседствующих (непротивоположных) ребер и вершине между ними, см. рис. 19. Вообще говоря, если два ребра графа G имели две общие концевые вершины, то на графе $M(S, G)$ две соответствующие этим ребрам вершины будут соединены двумя различными ребрами. Полученный граф $M(S, G)$ будет четырехвалентным: у каждого ребра имеются два соседних ребра с одного конца и два соседних ребра с другого конца; более того, на данном графе естественным образом определяется наследуемая из поверхности крестовая структура.

Зададимся вопросом: когда крестовый граф вложим в плоскость с сохранением крестовой структуры? Естественно потребовать, чтобы вложение было согласовано с крестовой структурой. А именно будем говорить, что вложение графа в двумерную поверхность *согласовано с крестовой структурой*, ес-

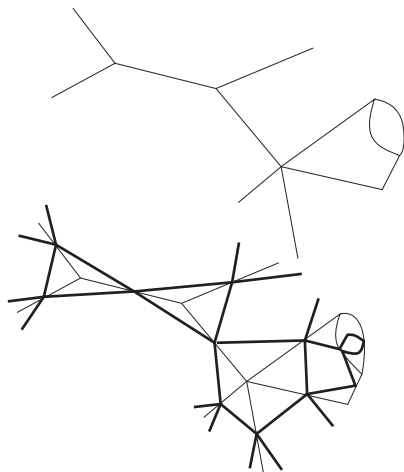


Рис. 19. Построение медиального графа

ли полуребра, противоположные в вершине, являются противоположными на поверхности. Любой четырехвалентный граф, вложенный в поверхность, естественным образом наследует из этой поверхности крестовую структуру.

Рассмотрим простейший четырехвалентный граф с одной вершиной и двумя ребрами, ей инцидентными. Отметим, что на этом графе имеются две разные крестовые структуры. В одной крестовой структуре два полуребра одного ребра являются противоположными, а в другой — они являются соседними. Отметим, что первый крестовый граф G_1 не вложим в плоскость, а второй крестовый граф G_2 вложим в плоскость, см. рис. 20.

Как оказывается, граф G_1 естественным образом вложим в тор с сохранением крестовой структуры: представляя тор в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами, мы можем изобразить в торе граф G_1 в виде параллели и меридиана с одной точкой пересечения, см. рис. 21.

Граф G_1 не вложим в плоскость: действительно, предположив, что одно ребро-окружность вложено в плоскость, мы получим по теореме Жордана две области, на которые она делит плоскость. Вторая окружность, проходя через точку перекре-

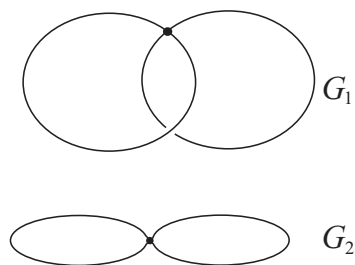


Рис. 20. Простейший граф и две его крестовые структуры

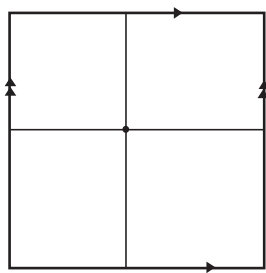


Рис. 21. Вложение графа G_1 в тор

стья, должна переходить из одной области в другую, откуда она не может возвратиться.

Как оказывается, граф G_1 в некотором смысле является единственным препятствием планарности крестового графа, см. теорему 2.1.

В данном разделе, помимо задачи о вложимости крестового графа в плоскость, мы рассмотрим еще следующие задачи: существует ли явная формула, связывающая разные эйлеровы циклы на крестовом графе и в какую поверхность может быть вложен крестовый граф с сохранением крестовой структуры?

2.2. Планарные крестовые графы

Основная цель данного раздела — это доказать следующую теорему.

Теорема 2.1. *Крестовый граф не вложим в плоскость тогда и только тогда, когда у него имеются два цикла без общих ребер, обладающие единственной точкой перекрестья.*

Мы говорим, что два цикла без общих ребер имеют *перекрестье* в некоторой вершине, если один из них содержит одну пару противоположных полуребер в этой вершине, а другой — вторую. При этом в формулировке теоремы не накладывается никаких ограничений на количество (нетрансверсальных) пересечений двух циклов. Далее мы будем называть *препятствием Васильева* два цикла без общих ребер, имеющие единственную точку перекрестья.

Ясно, что на плоскости нельзя изобразить две несамопересекающиеся замкнутые кривые, которые бы имели перекрестье в одной точке. С другой стороны, если две кривые «касаются» в нескольких точках, то эти касания можно «развести» в точках нетрансверсального пересечения так, как показано на рис. 22.

Таким образом, предполагая, что граф вложен в плоскость с сохранением крестовой структуры, мы можем «развести» два цикла во всех точках, где они пересекаются не трансверсально; если окажется, что при этом останется ровно одна точка перекрестья, то это будет противоречить планарности графа.

Приведенный выше результат был выдвинут в качестве гипотезы В. А. Васильевым [14] и доказан в [51].

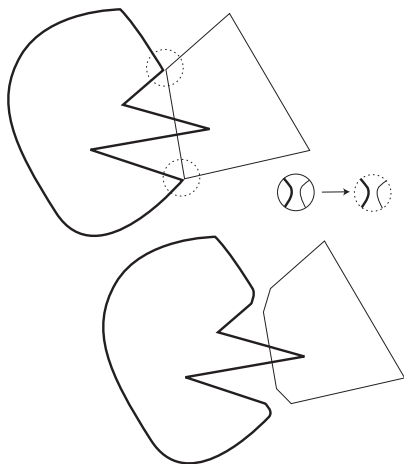


Рис. 22. Построение графа G' по графу G

Простая часть гипотезы следует из приведенных выше рассуждений; доказательству сложной части (о том, что если граф не вложим в плоскость, то два таких цикла обязательно найдутся) посвящена оставшаяся часть данного раздела.

Скажем, что крестовый граф обладает *седловой ориентацией*, если можно ориентировать его ребра таким образом, чтобы в каждой вершине некоторые два противоположных ребра были направлены в сторону вершины, а другие два — в сторону от вершины. На рис. 23 слева изображен планарный крестовый граф и его седловая ориентация, а на рисунке справа — крестовый граф (с двумя вершинами), седловой ориентацией не обладающий.

Определение 2.2. Эйлеров цикл крестового графа называется *поворачивающим обходом*, если вдоль движения по нему мы в каждой вершине переходим с ребра на соседнее (непротивоположное ему) ребро, см. [35, 36, 51, 52, 65]. Если же мы каждую вершину проходим по противоположным ребрам, то эйлеров цикл называется *гауссовым циклом*.

Ясно, что если у связного крестового графа имеется седловая ориентация, то она единственна с точностью до одновременного обращения всех стрелок: стартуя с любой стрелки и идя

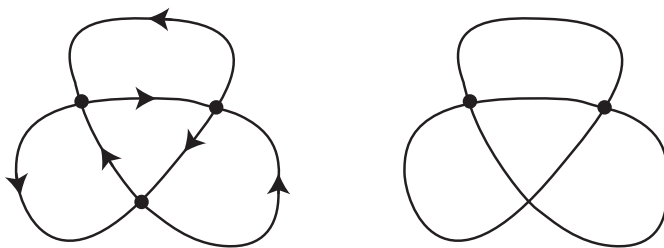


Рис. 23. Граф с седловой ориентацией и граф без седловой ориентации

вдоль любого поворачивающего обхода, мы этот самый поворачивающий обход ориентируем в ту или другую сторону, и если в каждой вершине обход подходит сам к себе «правильно», то получаем седловую ориентацию. Иными словами, из определения седловой ориентации следует, что хордовая диаграмма, соответствующая некоторому (а следовательно, и любому) поворачивающему обходу крестового графа имеет все хорды с оснащением 0 (точное определение оснащения см. ниже).

Упражнение 2.1. У всякого плоского крестового графа имеется седловая ориентация.

Лемма 2.1. *Предположим, что крестовый граф не обладает седловой ориентацией. Тогда на нем найдется препятствие Васильева.*

Эту лемму мы оставляем читателю в качестве упражнения (подсказка: попытайтесь из поворачивающего обхода построить седловую ориентацию и рассмотрите какую-либо из вершин, где этого не удастся сделать).

Эта лемма сводит нашу задачу к случаю графов, обладающих седловой ориентацией.

Определение 2.3. Хордовая диаграмма называется d -диаграммой, см. [50, 51, 52, 54, 65], если множество всех ее хорд может быть разбито на два дизъюнктных подмножества, причем хорды из одного множества не зацеплены друг с другом.

Лемма 2.2 (см. [50]). *Крестовой граф планарен тогда и только тогда, когда он допускает седловую ориентацию и хордо-*

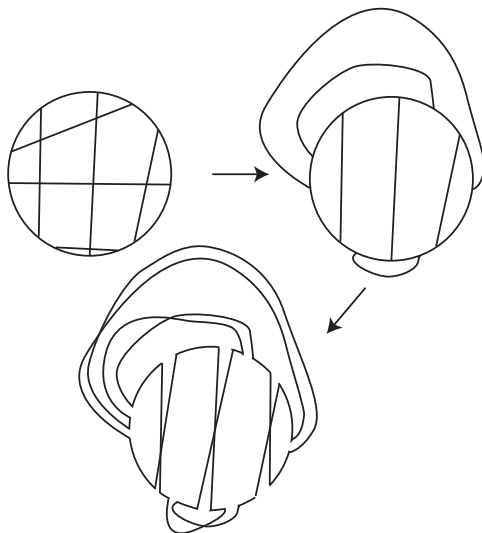


Рис. 24. d -Диаграмма и вложение в плоскость

вая диаграмма некоторого поворачивающего обхода является d -диаграммой.

План доказательства следует из рис. 24. Идея состоит в том, что каждая хорда вместе с двумя маленькими дугами в окрестности ее концов удаляется и заменяется на пару пересекающихся линий. Получающийся граф и будет искомым крестовым графом.

Замечание 2.1. В лемме 2.2 можно заменить выражение «некоторого поворачивающего обхода» на «любого поворачивающего обхода». Действительно, планарность крестового графа будет гарантировать, что хордовая диаграмма, соответствующая каждому поворачивающему обходу этого графа, является d -диаграммой.

Таким образом, для доказательства теоремы нам достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма 2.3. Пусть крестовый граф обладает седловой ориентацией и пусть при этом для некоторого (и, следовательно, для любого) поворачивающего обхода этого графа соответ-

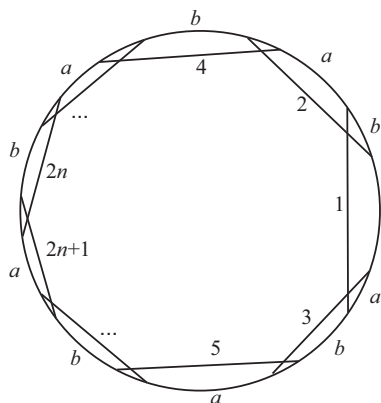


Рис. 25. Хордовая диаграмма $(2n + 1)$ -угольника

ствующая хордовая диаграмма не является d -диаграммой. Тогда данный граф обладает препятствием Васильева.

Заметим сначала, что если хордовая диаграмма не является d -диаграммой, то у нее найдется набор хорд, образующий «нечетноугольник», см. рис. 25. Это утверждение остается читателю в качестве упражнения.

Далее, если эта хордовая диаграмма $((2n + 1)$ -угольник) соответствует поворачивающему обходу некоторого крестового графа, то на этом графе легко выделяется препятствие Васильева: один цикл состоит из ребер графа, соответствующих дугам хордовой диаграммы, помеченным на рис. 25 буквой a , другой же цикл (симметричный первому) состоит из ребер (дуг), помеченных буквой b . Эти два цикла имеют ровно одну точку пересечения, которая соответствует вершине 1 и является точкой перекрестия.

Рассмотрим теперь произвольный граф G , обладающий седловой ориентацией, хордовая диаграмма некоторого поворачивающего обхода которого содержит $(2n + 1)$ -угольник. Тогда два цикла, имеющие ровно одно перекрестие, легко переносятся на G : в вершинах графа G , которым соответствуют хорды, не принадлежащие $(2n + 1)$ -угольнику, каждый из этих двух циклов будет поворачивать, следовательно, других перекрестий не появится.

Лемма 2.3 доказана, что завершает доказательство теоремы.

Замечание 2.2. В работе [29] Фризен обобщил теорему 2.1 на случай $*$ -графов. Здесь $*$ -графами называются графы, все вершины которых имеют степень 4 или 6, причем в вершинах степени 4 имеется седловая ориентация, а в вершинах степени 6 указано, какие полурёбра являются соседними. Фактически задача про $*$ -графы сводится к задаче про четырехвалентные графы с седловой ориентацией.

Предположим теперь, что крестовый граф не является планарным. Вопросу о том, в поверхность какого рода этот крестовый граф может быть вложен с сохранением крестовой структуры, посвящен п. 2.5.

Замечание 2.3. Говоря о вложении крестового графа в поверхность, мы имеем в виду всегда те вложения, которые допускают раскрашивание областей поверхности, полученных выбрасыванием графа из поверхности, шахматным образом. *В дальнейшем мы всегда рассматриваем только такие вложения.*

Следующая задача является переформулировкой задачи о вложениях крестовых графов.

Задача 2.1. Пусть дана симметричная матрица M размера $n \times n$ над полем из двух элементов. Каково минимальное значение суммы рангов двух матриц $\text{rank } M_I + \text{rank } M_J$, где два подмножества I, J образуют разбиение множества индексов исходной матрицы: $I \sqcup J = \{1, \dots, n\}$, а квадратные матрицы M_I и M_J получаются из матрицы M взятием соответствующих множествам I и J наборов строк и столбцов?

Разумеется, задача 2.1 может быть решена прямым перебором 2^{n-1} вариантов, однако, конечно, имеется в виду возможность нахождения ее быстрого (например, полиномиального по n) решения.

Как именно эта задача связана с задачей о вложении крестовых графов, мы расскажем в п. 2.5. Скажем лишь, что сумма рангов 0 возможна лишь тогда, когда обе матрицы M_I и M_J нулевые. А это очень похоже на d -диаграммы — два семейства хорд, таких что хорды из одного семейства попарно не пересекаются.

2.3. Эквивалентность критериев планарности Васильева и Понтрягина–Куратовского

Рассмотрим следующее обобщение крестовых четырехвалентных графов.

Определение 2.4. *✱-Графом* назовем граф, в каждой вершине которого на полуребрах задан неориентированный циклический порядок. *Неориентированный циклический порядок* определяется как биекция между полуребрами и вершинами циклического графа. Полуребра, отображающиеся в соседние вершины циклического графа, называются *смежными*.

Назовем *✱-граф четным*, если степени всех его вершин четные.

Замечание 2.4. В случае когда степени всех вершин *✱-графа* равны 4, мы получаем крестовый четырехвалентный граф.

Дадим определение планарного *✱-графа*.

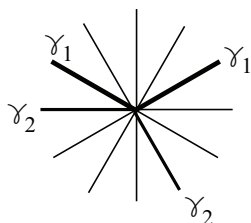
Определение 2.5. Под *вложением* *✱-графа* G в поверхность S понимается произвольное вложение G (как обычного графа) в S , которое согласовано с *✱-структурой*, т. е. для каждой вершины v в G циклический порядок полуребер в вершине v , задаваемый вложением, должен совпадать с циклическим порядком *✱-графа* в вершине v .

✱-Граф называется *планарным*, если его можно вложить в плоскость \mathbb{R}^2 .

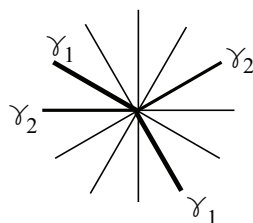
Чтобы сформулировать обобщение гипотезы Васильева на случай *✱-графов*, нам понадобится следующее определение.

Определение 2.6. Пусть v — вершина *✱-графа* G , а γ_1 и γ_2 — пути в G , не имеющие общих ребер. Предположим, что γ_1 и γ_2 проходят через вершину v и e, e' (соответственно f, f') суть полуребра пути γ_1 (соответственно пути γ_2), инцидентные вершине v . Скажем, что пути γ_1 и γ_2 *пересекаются трансверсально* в вершине v , если пары полуребер e, e' и f, f' чередуются в неориентированном циклическом порядке в вершине v (см. рис. 26).

Замечание 2.5. Пути γ_1 и γ_2 могут проходить через вершину v несколько раз и давать несколько трансверсальных пересече-



нетрансверсальное пересечение



трансверсальное пересечение

Рис. 26. Пересечение путей в вершине

ний в v . Чтобы различить точки пересечения, рассмотрим следующую конструкцию. Пусть e_{2i-1}, e_{2i} , $i = 1, \dots, k$, — пары последовательных (полу)ребер пути γ_1 , которые инцидентны вершине v . Аналогично обозначим ребра пути γ_2 , инцидентные v , через f_{2j-1}, f_{2j} , $j = 1, \dots, l$. Неориентированный циклический порядок в вершине v задает биекцию между полуребрами и вершинами циклического графа. Изобразим циклический граф на плоскости как окружность с помеченными на ней точками. Для любого $i = 1, \dots, k$ ($j = 1, \dots, l$) соединим отрезком точки, соответствующие ребрам e_{2i-1} и e_{2i} (ребрам f_{2j-1} и f_{2j}). Назовем получившийся граф *хордовой диаграммой вершины v* (см. рис. 27). Тогда трансверсальные пересечения в вершине соответствуют пересечениям хорд в хордовой диаграмме. Например, пути γ_1 и γ_2 на рис. 27 имеют одно трансверсальное пересечение в вершине (кроме того, путь γ_2 трансверсально самопересекается).

Сформулируем теперь обобщение критерия Васильева. Заметим, что для $*$ -графов, вершины которых имеют степень 4 и 6, данный критерий был доказан в работе Т. Фризена [29].

Теорема 2.2 (критерий планарности). *Четный $*$ -граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит пары циклов без общих ребер, имеющих ровно одно трансверсальное пересечение.*

Упражнение 2.2. Покажите, что если отказаться от условия четности, то критерий перестает быть верным.

Задача 2.2. Покажите, что трансверсальные циклы в теореме 2.2 можно считать простыми (т. е. не имеющими

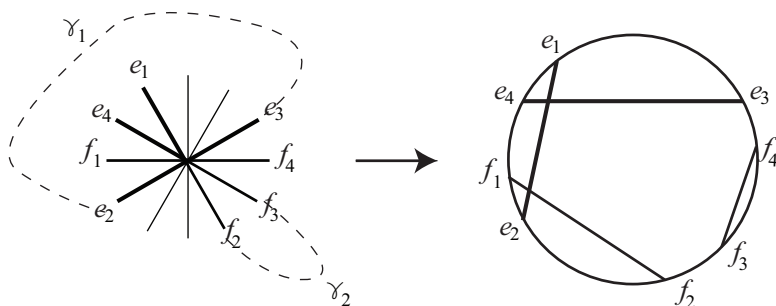


Рис. 27. Хордовая диаграмма вершины

самопересечений). Указание: разбейте цикл, имеющий самопересечение, на две части в точке самопересечения. Когда цикл проходит через вершину несколько раз, воспользуйтесь хордовой диаграммой вершины.

Определение 2.7. Пусть имеется \ast -граф G . Построим по графу G *узловой граф* \tilde{G} путем замены каждой вершины графа G на *узел*: на каждом полуребре, инцидентном данной вершине G , мы добавляем новую вершину (степени 2) и затем соединяем ребром новые вершины, лежащие на смежных полурейсах (см. рис. 28). Говоря неформально, вокруг каждой вершины графа G мы рисуем окружность.

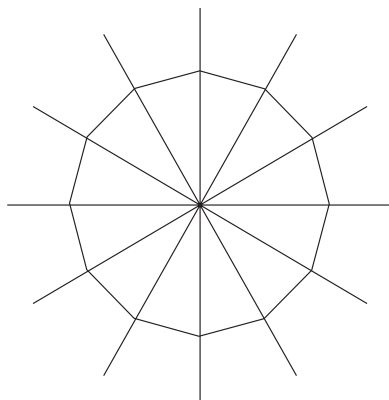


Рис. 28. Узел

Назовем исходящие из узла полуребра *направлениями*. На множестве направлений узла имеется неориентированный циклический порядок, наследуемый от \star -структуры графа.

Замечание 2.6. Узловой граф \tilde{G} имеет естественную структуру \star -графа, однако в дальнейшем мы будем рассматривать \tilde{G} исключительно как обычный граф.

Узловой граф \tilde{G} содержит подграф, изоморфный графу G (достаточно удалить из \tilde{G} ребра, лежащие на окружностях узлов). С другой стороны, имеется проекция $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$, при которой каждый узел в \tilde{G} отображается в соответствующую вершину графа G .

Следующий технический результат окажется весьма полезным далее при построении трансверсальных циклов.

Упражнение 2.3. Пусть γ_1 и γ_2 — пути в узловом графе \tilde{G} , не имеющие внутренних пересечений, т. е. $(\gamma_1 \setminus \partial\gamma_1) \cap (\gamma_2 \setminus \partial\gamma_2) = \emptyset$. Их проекции $\pi(\gamma_1)$ и $\pi(\gamma_2)$ в G трансверсально пересекаются в некоторой вершине тогда и только тогда, когда один из путей замыкается при проекции и имеет место одна из следующих ситуаций:

- концы пути γ_i , $i = 1$ либо 2 , лежат в одном узле W и разделены путем γ_{3-i} , т. е. концы лежат в разных компонентах связности графа $W \setminus \gamma_{3-i}$ (см. рис. 29 слева);
- концы путей γ_1 и γ_2 лежат в одном узле W , и соответствующие этим концам направления чередуются в неориентированном циклическом порядке в W (см. рис. 29 справа).

Следующее утверждение является ключевым в выводе гипотезы Васильева из теоремы Понтрягина–Куратовского.

Упражнение 2.4. \star -граф G планарен тогда и только тогда, когда его узловой граф \tilde{G} планарен (как обычный граф).

Упражнение 2.4 позволяет свести условие планарности \star -графов к обычным графам, где работает критерий Понтрягина–Куратовского. Теперь мы можем использовать следующую стратегию для доказательства гипотезы Васильева: предположить, что \star -граф не планарен, тогда соответствующий узловой

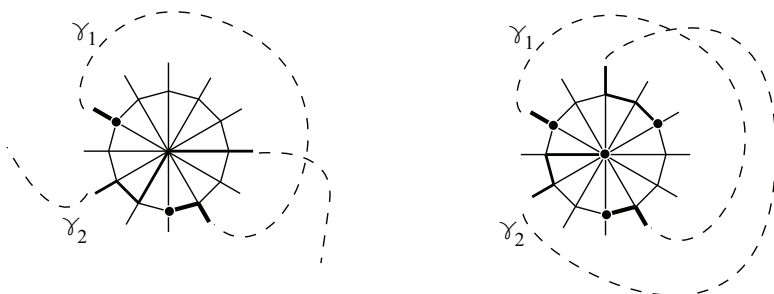


Рис. 29. Расположение путей, приводящее к трансверсальному пересечению

граф также не будет планарным. Следовательно, он будет содержать подграф вида K_5 или $K_{3,3}$. Тогда в этом подграфе (или в его окрестности) можно будет выбрать два замкнутых пути, которые при проекции на граф G отобразятся в циклы с одной точкой перекрестья. Перейдем к реализации этого плана.

Доказательство. Докажем сначала простую часть теоремы 2.1: наличие циклов с одной точкой перекрестья приводит к непланарности графа.

Упражнение 2.5. Покажите, что если в графе G есть простые циклы с одной точкой трансверсального пересечения, то в узловой граф \tilde{G} можно вложить граф K_5 .

Перейдем к доказательству необходимости условия Васильева для непланарности \ast -графа.

Пусть G — непланарный четный \ast -граф. Тогда его узловой граф \tilde{G} также не будет планарным. Согласно теореме Понтрягина-Куратовского граф \tilde{G} содержит подграф Γ , изоморфный графу K_5 или графу $K_{3,3}$. Ниже при рассмотрении подграфа Γ мы будем игнорировать его вершины степени 2 и под *вершинами* графа Γ понимать вершины, имеющие степень 3 (когда $\Gamma \simeq K_{3,3}$) или 4 (когда $\Gamma \simeq K_5$), а под *ребрами* графа Γ понимать пути в Γ , внутренние вершины которых имеют степень два, а концевые вершины — степень 3 или 4.

Рассмотрим следующую вспомогательную конструкцию.

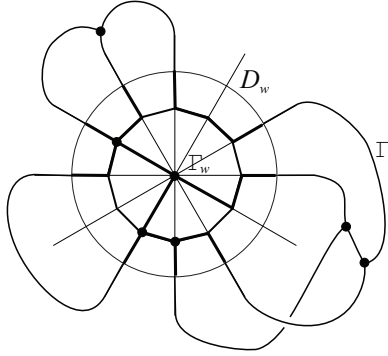


Рис. 30. Вложение узла в диск

Замечание 2.7. Пусть W — узел в графе \tilde{G} . Так как граф W планарен, его можно вложить вместе с выходящими из него полуребрами в диск $D_W \subset \mathbb{R}^2$. Обозначим часть графа Γ , попадающую внутрь диска D_W , через Γ_W . Эту часть можно рассматривать как плоский граф, внутренние вершины которого имеют степень 3 или 4, а граничные вершины, лежащие на границе диска D_W , — степень 1 (см. рис. 30). Обозначим через Γ_W объединение компонент графа Γ_W , содержащих внутренние вершины, и пусть $\tilde{\Gamma}_W^{int}$ — полный подграф в Γ_W , натянутый на внутренние вершины. Заметим, что граф Γ_W определяет граф $\tilde{\Gamma}_W^{int}$ с точностью до изоморфизма.

Пусть v_1, v_2 — смежные вершины в Γ , $v_1 \in W$, а ребро $v_1 v_2 \subset \Gamma$ не лежит целиком в узле W . Определим *направление* $v_1 \rightarrow v_2$ *ребра* $v_1 v_2$ как выходящее из узла W полуребро, которое встречается первым на ребре $v_1 v_2$ (т. е. пути в Γ , соединяющем вершины v_1 и v_2).

Остальная часть доказательства теоремы, по существу, заключается в переборе различных конфигураций плоского графа Γ_W и построении для каждого случая пары трансверсальных циклов.

Случай K_5 . Подграф Γ изоморфен K_5 . Обозначим вершины графа Γ через 1, 2, 3, 4, 5.

Случай K_5 .а. Существует узел W , содержащий ровно одну вершину графа Γ .

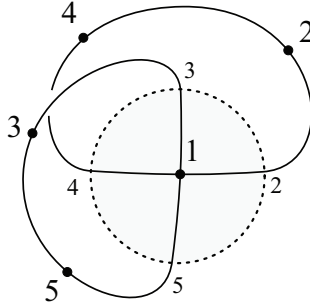


Рис. 31. Случай $K_5.a$: одна вершина в узле

Упражнение 2.6. Докажите, что в этом случае можно найти два пути в графе \tilde{G} , которые при проекции образуют пару циклов, имеющих одно трансверсальное пересечение (см. рис. 31).

Случай $K_5.b$. Существует узел W , содержащий ровно две вершины графа Γ . Мы можем считать, что W содержит вершины 1 и 2. Тогда вершины 1 и 2 соединены внутри W (т. е. $12 \subset W$) через центральную вершину узла W . Пусть i, j, k (соответственно k', j', i') — номера вершин, смежные с вершиной 1 (соответственно 2), перечисленные согласно циклическому порядку соответствующих направлений (см. рис. 32). Тогда $\{i, j, k\} = \{i', j', k'\} = \{3, 4, 5\}$.

Упражнение 2.7. Покажите, что для любого порядка направлений i, j, k и i', j', k' можно построить пути, дающие при проекции препятствие Васильева.

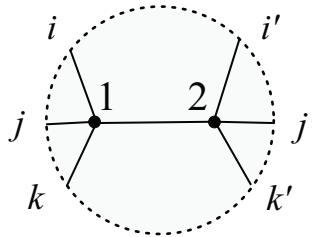


Рис. 32. Случай $K_5.b$: две вершины в узле

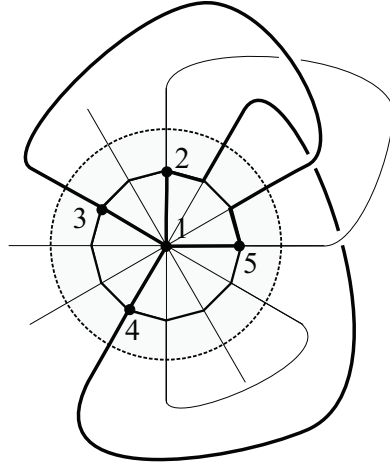


Рис. 33. Случай $K_{5.c}$: пять вершин в узле

Случай $K_{5.c}$. Не существует узлов, содержащих одну или две вершины графа Γ .

Упражнение 2.8. 1. Покажите, что в этом случае все вершины лежат в одном узле, причем одна из вершин лежит в центре узла.

2. Докажите, что в этом случае можно найти два пути в графе \tilde{G} , которые при проекции образуют пару циклов, имеющих одно трансверсальное пересечение (см. рис. 33).

Таким образом, если граф \tilde{G} содержит K_5 , то в графе G можно построить пару циклов с одной точкой трансверсального пересечения.

Пусть теперь \tilde{G} содержит подграф Γ , который изоморфен графу $K_{3,3}$. Обозначим вершины графа Γ через 1, 2, 3, 4, 5, 6, чтобы вершины разной четности были смежными.

Рассмотрим возможные случаи расположения вершин подграфа.

Случай $K_{3,3}.a$. Существует узел W , содержащий ровно две вершины графа Γ . Данный случай можно разбить на следующие подслучаи:

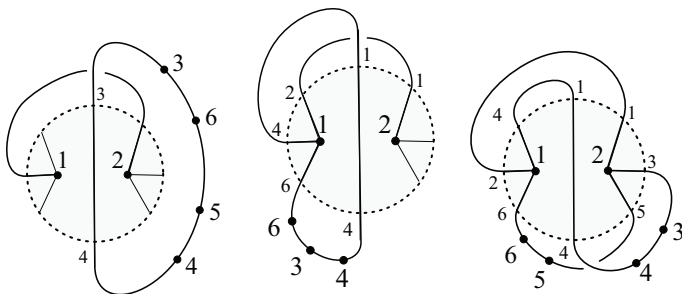


Рис. 34. Случай $K_{3,3}.a$: две разделенные смежные вершины в узле

- 1) вершины соединены ребром внутри узла;
- 2) вершины у узле W не разделены, т. е. могут быть соединены в D_W дугой, не пересекающей граф Γ (здесь имеются варианты, зависящие от того, являются ли вершины смежными в графе Γ или нет);
- 3) вершины разделены дугой дугой из $\Gamma \cap W$ (здесь имеются варианты в зависимости от того, являются ли вершины концами разделяющей дуги или нет).

Упражнение 2.9. 1. Покажите, что в узле может быть только одна разделяющая дуга.

2. Докажите, что во всех подслучаях случая $K_{3,3}.a$ можно найти два пути в графе \tilde{G} , которые при проекции образуют пару циклов, имеющих одно трансверсальное пересечение (см., например, рис. 34).

Замечание 2.8. Если количество вершин графа Γ в узле W больше 2, можно воспользоваться следующими редукциями.

Если в узле имеется разделяющая дуга, она разбивает диск D_W на две компоненты. Обозначим через D' компоненту, содержащую не менее двух вершин графа Γ (см. рис. 35 слева). Тогда D' компонента содержит не больше вершин графа Γ , чем диск D_W . Кроме того, циклический порядок направлений у ребер, выходящих из компоненты D' , совпадает с циклическим порядком для диска D_W . Следовательно, если для компоненты D' мы построим пару путей γ_1 и γ_2 , направления которых

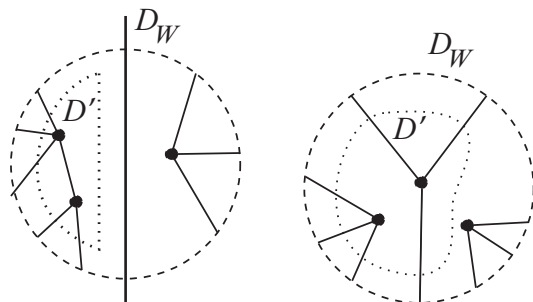


Рис. 35. Редукции для разделенного (слева) и несвязного (справа) случаев

чередуются в циклическом порядке (как мы делали выше), то направления путей будут чередоваться и в циклическом порядке диска D_W . Тогда проекции путей γ_1 и γ_2 в граф G будут давать пару циклов с одним трансверсальным пересечением.

Если граф $\bar{\Gamma}_W$ (или граф $\bar{\Gamma}_W^{int}$) не связан, то диск D_W можно разделить дугой, так чтобы одна из получившихся компонент D' диска содержала меньшее количество вершин графа Γ , чем весь диск D_W , но включала в себя не менее двух вершин. Повторяя рассуждения предыдущего абзаца, мы можем построить пару путей γ_1 и γ_2 , порождающую препятствие Васильева, рассматривая часть графа Γ , лежащую внутри компоненты D' .

Таким образом, ниже можно рассматривать только случай связного графа $\bar{\Gamma}_W^{int}$. Граф $\bar{\Gamma}_W^{int}$ является планарным подграфом в графе $K_{3,3}$.

Случай $K_{3,3}.b$. Существует узел W , содержащий ровно три вершины графа Γ .

Упражнение 2.10. 1. Покажите, что в графе $K_{3,3}$ с точностью до изоморфизма есть только один связный подграф с тремя вершинами.

2. Найдите для данного случая пути в графе \tilde{G} , которые при проекции образуют пару циклов, имеющих одно трансверсальное пересечение.

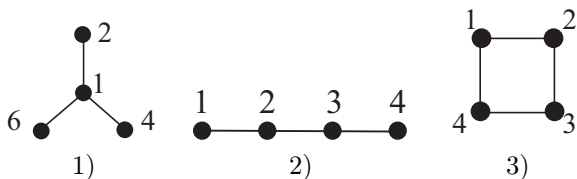


Рис. 36. Связные подграфы графа $K_{3,3}$ с четырьмя вершинами

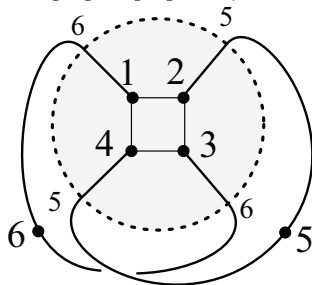


Рис. 37. Случай $K_{3,3}.c$: пример двух путей, порождающих препятствие Васильева

Случай $K_{3,3}.c$. Существует узел W , который содержит четыре вершины графа Γ .

Упражнение 2.11. 1. Покажите, что с точностью до изоморфизма есть три связных подграфа в $K_{3,3}$ с четырьмя вершинами (см. рис. 36).

2. Для каждого подграфа предъявите пути в графе \tilde{G} , которые при проекции образуют пару циклов, имеющих одно трансверсальное пересечение (см., например, рис. 37).

Случай $K_{3,3}.d$. Есть узел W , в котором лежат пять вершин графа Γ .

Упражнение 2.12. Покажите, что граф $\bar{\Gamma}_W^{int}$ не может содержать подграф $K_{2,3}$ (см. рис. 38).

Упражнение 2.13. 1. Покажите, что после исключения запрещенного подграфа остаются три связных подграфа в $K_{3,3}$ с пятью вершинами (см. рис. 39).

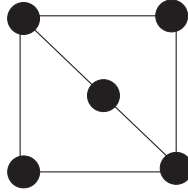


Рис. 38. Запрещенный подграф в $K_{3,3}$

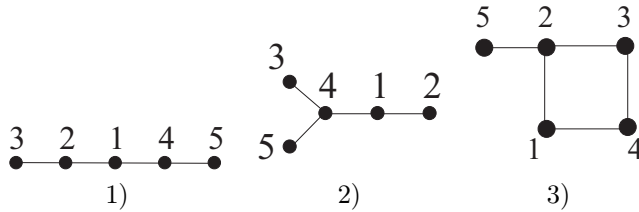


Рис. 39. Допустимые связные пографы в $K_{3,3}$ с пятью вершинами

2. Найдите для всех вариантов данного случая пути в графе \tilde{G} , которые при проекции образуют пару циклов, имеющих одно трансверсальное пересечение.

Случай $K_{3,3}$.е. Граф $\bar{\Gamma}_W^{int}$ содержит 6 вершин.

Упражнение 2.14. 1. Покажите, что с точностью до изоморфизма имеются шесть связных подграфов в $K_{3,3}$ с шестью вершинами, которые не содержат запрещенный подграф (см. рис. 40)

2. Найдите для всех вариантов данного случая пути в графе \tilde{G} , которые при проекции в G дают препятствие Васильева.

Случай $K_{3,3}$.f. Любой узел графа \tilde{G} содержит не более одной вершины графа Γ . Рассмотрение этого случая несколько отличается от предыдущих.

Пусть $\hat{\Gamma} = \pi(\Gamma)$ — проекция графа Γ в G . Обозначим проекции вершин графа Γ числами i , $i = 1, \dots, 6$, а проекции ребер графа Γ парами чисел ij , $1 \leq i < j \leq 6$. Согласно предположению для данного случая, проекции всех вершин различны между собой. По лемме 2.3 пути ij , $1 \leq i < j \leq 6$, в $\hat{\Gamma}$ не

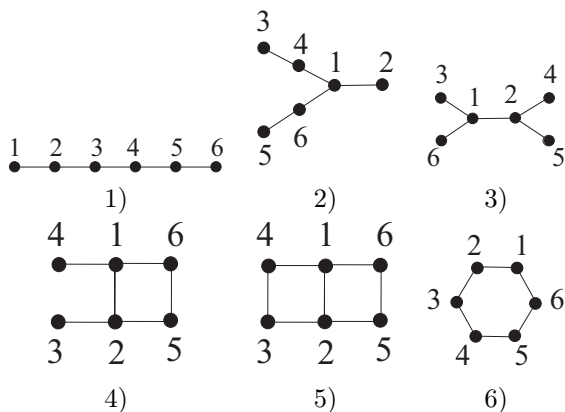


Рис. 40. Допустимые связные подграфы в $K_{3,3}$ с шестью вершинами имеют точек трансверсального пересечения. Степени вершин i , $i = 1, \dots, 6$, в подграфе $\hat{\Gamma}$ нечетны, а степени остальных вершин в $\hat{\Gamma}$ четны.

Пусть G' есть граф, полученный из графа G удалением всех ребер подграфа $\hat{\Gamma}$.

Упражнение 2.15. Докажите, что найдется путь γ в графе G' , не имеющий самопересечений, который соединяет вершину $2k$, $k = 1, 2$ или 3 с вершиной $2l - 1$, $l = 1, 2$ или 3 .

Замечание 2.9. Доказательство существования пути γ — это единственное место в доказательстве гипотезы Васильева, где используется условие четности \ast -графа G .

Будем считать, что путь γ начинается в вершине 1.

Случай $K_{3,3}$.f.1. Путь γ трансверсально пересекает один из путей ij , $1 \leq i < j \leq 6$.

Упражнение 2.16. 1. Покажите, что, если $i = 1$, путь γ и подграф $\hat{\Gamma}$ можно перестроить таким образом, чтобы уменьшилось число трансверсальных пересечений пути и подграфа (см. рис. 41).

2. При $i > 1$ покажите, что в графе G найдутся два цикла с одной точкой трансверсального пересечения (см. рис. 42).

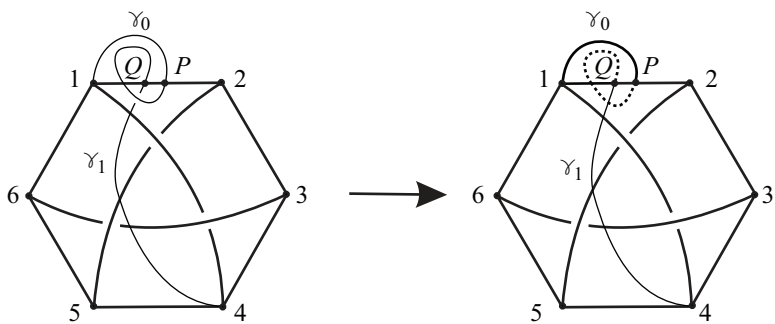


Рис. 41. Случай $K_{3,3}.f.1$: редукция пути γ

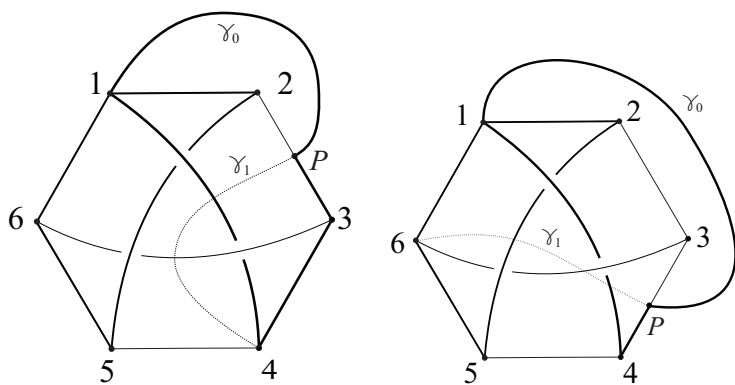


Рис. 42. Случай $K_{3,3}.f.1$: трансверсальные циклы

Случай $K_{3,3}$.f.2. Путь γ не имеет трансверсальных пересечений с путями ij , $1 \leq i < j \leq 6$.

Упражнение 2.17. Покажите, что в данном случае в графе G найдутся два цикла, которые образуют препятствие Васильева.

Таким образом, гипотеза Васильева для \star -графов доказана. \square

Вывод теоремы Понтрягина–Куратовского из гипотезы Васильева. Рассмотрим теперь обратную задачу и выведем критерий планарности графов Понтрягина–Куратовского из гипотезы Васильева. Гипотеза Васильева может рассматриваться в качестве комбинаторного аналога теоремы Жордана. Это дает возможность получить чисто комбинаторное (за исключением упражнения 2.18) доказательство теоремы Понтрягина–Куратовского: нужно взять одну из известных схем доказательства теоремы и заменить все отсылки к теореме Жордана на использование гипотезы Васильева. Далее мы опираемся на доказательство из работы [71].

Чтобы использовать гипотезу Васильева, необходимо уметь по обычному графу строить некоторый \star -граф, планарность которого тесно связана с планарностью исходного графа. Приведем соответствующую конструкцию.

Определение 2.8. Пусть дан некоторый граф $G = (V, E)$ со множеством вершин V и множеством ребер E . Пусть $v \in V$ — вершина графа. Обозначим через $E(v)$ множество полуребер графа в вершине v (каждому невырожденному ребру, инцидентному вершине v , соответствует элемент множества $E(v)$, каждой петле в вершине v соответствуют два элемента множества $E(v)$). (Ориентируемым) циклическим порядком ребер в вершине v называется произвольное взаимно-однозначное отображение $\nu_v: E(v) \rightarrow E(v)$, такое что для любых $e_1, e_2 \in E(v)$ найдется натуральное число k , такое что $(\nu_v)^k(e_1) = e_2$. Элемент $\nu_v(e)$ интерпретируется как ребро, следующее за ребром e в циклическом порядке. Говорят, что в графе G задан (ориентируемый) циклический порядок ребер, если в каждой вершине $v \in V$ фиксирован некоторый циклический порядок ν_v .

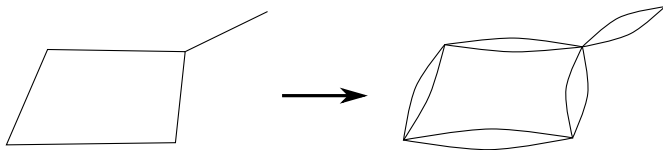


Рис. 43. Построение крестового графа G_ν

Определение 2.9. Пусть на графе $G = (V, E)$ задан некоторый циклический порядок ребер $\nu = \{\nu_v\}_{v \in V}$. **-Графом, определяемым циклическим порядком ν* , называется граф G_ν , который получается из исходного графа удвоением каждого ребра (при этом возникает граф, на котором имеется естественный (ориентируемый) циклический порядок), так чтобы структура **-графа G_ν* была индуцирована циклическим порядком (см. рис. 43).

Аналогом упражнения 2.4 в данном случае будет следующее условие планарности.

Упражнение 2.18. Граф G является планарным тогда и только тогда, когда существует циклический порядок ребер ν на графе, для которого **-граф G_ν* планарен.

Определение 2.10. Циклический порядок ребер ν на графе G , для которого **-граф G_ν* планарен, будем называть *планарным*.

Заметим, что доказательство упражнения 2.18 о связи планарности обычных и крестовых графов — единственное место при выводе теоремы Понтрягина–Куратовского, где требуются геометрические рассуждения. Все дальнейшие шаги доказательства будут чисто комбинаторными.

Задача 2.3. Используя упражнение 2.18 и критерий Васильева планарности крестовых графов, докажите следующее:

- подграф планарного графа планарен;
- если все компоненты связности графа G планарны, то граф G тоже планарен;
- пусть граф G' получается из графа G разбиением некоторого его ребра на два. Тогда планарность графа G равносильна планарности графа G' ;

- пусть граф G планарен и граф G' получается из G добавлением петли в некоторой вершине либо ребра, параллельного некоторому ребру графа G . Тогда граф G' тоже является планарным;
- пусть $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, \dots, n$, — планарные графы и $v_i \in V_i$, $i = 1, \dots, n$. Построим граф $G = (V, E)$ следующим образом: возьмем дополнительную вершину v и положим $V = \{v\} \cup \bigcup_i V_i$, $E = \bigcup_i vv_i \cup \bigcup_i E_i$ (иными словами, мы соединяем вершину v с вершинами v_i). Тогда граф G планарен.

Приступим к выводу теоремы Понтрягина–Куратовского из гипотезы Васильева.

Простая часть теоремы вытекает из следующего утверждения.

Упражнение 2.19. Покажите, что для любого циклического порядка ребер в графе K_5 или $K_{3,3}$ в соответствующем \star -графе найдутся трансверсальные циклы.

Докажем сложную часть теоремы Понтрягина–Куратовского от противного. Предположим, что существуют непланарные графы, не содержащие K_5 и $K_{3,3}$. Тогда рассмотрим граф G с таким свойством, количество ребер которого минимально возможное. Будем также считать, что количество вершин у графа G также наименьшее среди непланарных графов, не содержащих K_5 и $K_{3,3}$, с тем же числом ребер, что и граф G .

Упражнение 2.20. Докажите, что:

- граф G связен;
- граф G не содержит вершин степени ≤ 2 ;
- граф G не содержит петель и кратных ребер;
- для любого ребра e графа G граф $G - e$, получаемый из G удалением ребра e , и граф G/e , получаемый стягиванием ребра e в точку, планарны;

- для любой вершины v графа G граф $G - v$, получаемый из G удалением вершины v и инцидентных ей ребер, планарен.

Пусть C — цикл в графе G . C -компонентой графа G называется либо ребро графа, концы которого лежат в C , либо связная компонента графа $G \setminus C$, к которой добавлены ребра, соединяющие эту компоненту с циклом C . Пусть H_1, H_2 — некоторые C -компоненты. Тогда H_1 и H_2 :

- *разведены*, если найдутся такие две вершины x, y цикла C , разбивающие его на два пути, что вершины компоненты H_1 , лежащие на цикле C , попадают на один путь, а вершины компоненты H_2 — на другой;
- *C -эквивалентны*, если $V(H_1) \cap V(C) = V(H_2) \cap V(C)$ и $|V(H_1) \cap V(C)| = 3$;
- *зацеплены*, если на цикле C найдутся различные вершины x_1, x_2, x_3, x_4 , идущие в данном циклическом порядке, такие что $x_1, x_3 \in V(H_1)$, $x_2, x_4 \in V(H_2)$;
- *перекрываются*, если H_1 и H_2 не разведены.

Упражнение 2.21. Две C -компоненты H_1 и H_2 перекрываются тогда и только тогда, когда они C -эквивалентны или зацеплены.

Для заданного цикла C определим *граф перекрытия* \mathcal{H} , вершинами которого являются C -компоненты, а ребрами — перекрывающиеся пары компонент.

Задача 2.4. В графе G найдется цикл C , у которого есть не менее двух C -компонент. Указание: рассмотрите цикл наибольшей длины и покажите, что соседние вершины цикла принадлежат разным C -компонентам.

Далее мы предполагаем, что в графе перекрытия выбранного цикла C не менее двух вершин. Основным шагом доказательства является следующая лемма.

Лемма 2.4. Пусть Γ — произвольный граф и C — некоторый цикл в графе Γ . Тогда

- 1) если граф Γ — планарен, то граф перекрытия цикла C двудольен;
- 2) если граф перекрытия компоненты C двудольен и для любой C -компоненты H графа Γ подграф $H \cup C$ планарен, то граф Γ планарен.

Для доказательства леммы введем следующее определение. Рассмотрим цикл C в графе Γ . Фиксируем порядок обхода вершин цикла C : v_1, v_2, \dots, v_k . Зададим некоторый циклический порядок ребер ν в графе Γ .

Пусть H — некоторая C -компонента графа Γ и vv_i — ребро в H , соединяющее компоненту с циклом C в вершине v_i . Скажем, что ребро vv_i примыкает к циклу C *изнутри*, если последовательность ребер $v_{i-1}v_i$, v_iv_{i+1} , v_iv является ограничением циклического порядка ν_{v_i} на эти три ребра. В противном случае скажем, что ребро vv_i примыкает к циклу C *снаружи*.

Предположим теперь, что циклический порядок ребер ν на графе Γ планарен. Тогда справедлив следующий результат.

Упражнение 2.22. Если циклический порядок ребер ν на графе Γ планарен, то для любой C -компоненты H либо все его ребра вида vv_i примыкают к циклу C изнутри, либо все они примыкают к циклу снаружи.

Таким образом, мы можем поделить все C -компоненты на две группы: назовем компоненту *внутренней*, если ее ребра примыкают к циклу C изнутри, и *внешней*, если ребра примыкают снаружи.

Справедливость первого утверждения леммы вытекает из следующего утверждения.

Упражнение 2.23. Если в планарном графе две C -компоненты перекрываются, то одна из них является внутренней, а другая — внешней.

Докажем второе утверждение леммы. Пусть граф перекрытия для цикла C является двудольным. Пусть C -компоненты A_1, A_2, \dots, A_p образуют одну долю графа перекрытия, а B_1, B_2, \dots, B_q — другую. По предположению леммы графы $A_i \cup C$, $B_i \cup C$ являются планарными.

Задача 2.5. 1. Используя индукцию, покажите, что на графе $\bigcup_{i=1}^p A_i \cup C$ можно ввести планарный циклический порядок ребер, относительно которого все C -компоненты A_i будут внутренними.

2. Докажите, что граф $\Gamma = \bigcup_{i=1}^p A_i \cup \bigcup_{j=1}^q B_j \cup C$ является планарным.

Таким образом, лемма доказана. Вернемся к доказательству основной теоремы. Напомним, что мы рассматриваем цикл C в минимальном непланарном графе G , не содержащем K_5 и $K_{3,3}$. Дальнейшие рассуждения чисто комбинаторны и не опираются на гипотезу Васильева.

Из леммы 2.4 следует, что граф перекрытия \mathcal{H} цикла C в графе G содержит цикл нечетной длины. Выберем наименьший нечетный цикл $H_1, H_2, \dots, H_{2k+1}$ в \mathcal{H} . Предположим сначала, что $k \geq 2$.

Задача 2.6. 1. Соседние компоненты H_i, H_{i+1} , $i = 1, \dots, 2k+1$, в цикле зацеплены.

2. Существует цикл C' в графе G , в графе перекрытия которого имеется цикл длины $2k - 1$.

Указание: рассмотрите вершины $z_1, z_2 \in V(H_i) \cap V(C)$, разделяющие вершины компонент $H_{i \pm 1}$. Вершины z_1, z_2 разбивают C на два пути γ_1 и γ_2 . Так как H_i разведены с компонентами H_j , $|i - j| \geq 2$, а они последовательно перекрываются, то вершины этих компонент лежат на одном из двух путей. Пусть это γ_1 . Компонента H_i связна, следовательно, есть путь γ' в H_i , соединяющий z_1 и z_2 . Тогда цикл C' есть объединение $\gamma_1 \cup \gamma'$ и его граф перекрытия содержит цикл, состоящий из компонент H_j , $|i - j| \geq 2$ и компоненты H'_i , содержащей $H_{i \pm 1}$, γ_2 и части компоненты $H_i - \gamma'$, выходящие на путь γ_2 .

Таким образом, можно считать, что в графе перекрытия цикла C есть цикл H_1, H_2, H_3 длины 3. Пусть m — максимальное среди всех компонент число вершин компоненты, лежащих на цикле C .

Задача 2.7. 1. Покажите, что $m \leq 4$.

2. Покажите, что подграф $C \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3$ содержит K_5 или $K_{3,3}$.

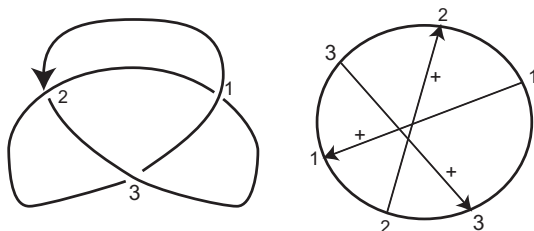


Рис. 44. Гауссова диаграмма трилистника

Указание: для доказательства первого пункта воспользуйтесь леммой 2.4 и тем, что для любого ребра e граф $G - e$ — планарен.

Последнее утверждение завершает доказательство теоремы Понтрягина–Куратовского.

2.4. Гауссовы циклы и поворачивающие обходы

Узлы удобно кодировать с помощью *гауссовых диаграмм* [17, 32], которые представляют собой окружность со стрелками, снабженными знаками. Для этого надо на окружности S^1 отметить точки, проецирующиеся при отображении f в вершины графа, и соединить точки, проецирующиеся в одну и ту же вершину, стрелкой, при этом стрелку снабдив знаком (мы не будем указывать явно, как направлена стрелка и какой знак она имеет), см. рис. 44. Очевидно, что гауссова диаграмма получается рассмотрением на диаграмме узла гауссова цикла. Гауссовы диаграммы применяются также при построении инвариантов конечного порядка и инвариантов Васильева [3, 17, 32].

С помощью поворачивающего обхода, как мы видели выше, очень легко формулируется критерий планарности крестового графа, см. лемму 2.2. Существуют также критерии планарности крестового графа в терминах гауссовых диаграмм, см. [15, 16]. Если мы рассматриваем вопрос о нахождении минимального рода двумерной замкнутой ориентируемой поверхности, в которую может быть вложен заданный крестовой граф (с шахматной раскраской), то подход с помощью поворачивающего обхода также более удобен, в чем мы убедимся далее. Существует

критерий, дающий ответ на вопрос о минимальности рода, см. ниже и [52, 54].

Заметим, что поворачивающий обход существует на любом связном 4-валентном графе с крестовой структурой и их количество почти всегда больше одного. В то же самое время гауссов цикл существует не всегда, и если существует, то он единствен. Возникают следующие задачи:

1. Найти критерий существования гауссова цикла.
2. В случае существования гауссова цикла найти явную формулу, связывающую поворачивающие обходы и гауссов цикл.

Конечно, мы можем ответить на эти вопросы. А именно в каждой вершине мы имеем единственный способ прохода через нее, поэтому, двигаясь вдоль графа согласно крестовой структуре, мы или попадем в первоначальное положение, или нет. В первом случае граф имеет гауссов цикл, а во втором — нет. Но этот способ в случае большого количества вершин не очень удобен и не дает явную связь между циклами. В данном разделе мы даем явную формулу, позволяющую найти матрицу смежности гауссова цикла из матрицы смежности произвольного эйлерова цикла (конечно, при условии, что гауссов цикл существует).

Преобразования эйлеровых циклов. Опишем сначала, как связаны произвольные эйлеровы циклы на связном 4-графе (с крестовой структурой или без таковой). Эти преобразования помогут нам доказать основной результат — формулу, связывающую матрицы смежности поворачивающих обходов и матрицу смежности гауссова цикла.

Пусть H — произвольный связный 4-граф с множеством вершин $V(H)$. Опишем связь между произвольными двумя эйлеровыми циклами на данном графе H .

Определим k -преобразование (см. [38]). Пусть U — (ориентированный) эйлеров цикл на H . Для каждой вершины $v \in V(H)$ существуют в точности два замкнутых пути P_v и Q_v на U , не имеющих общих ребер, начинающихся и заканчивающихся в вершине v , каждый из которых содержит, по крайней мере,

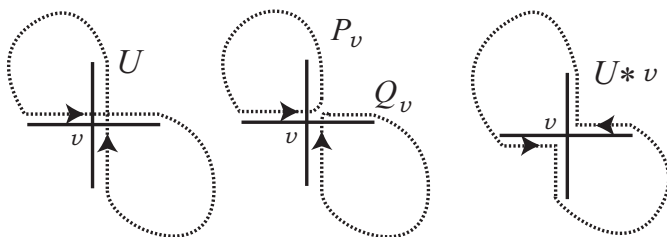


Рис. 45. k -Преобразование

по одному ребру. Существует единственный эйлеров цикл, отличный от U , также соединяющий пути P_v и Q_v (если мы зададим произвольную ориентацию на эйлеровом цикле U , то на новом эйлеровом цикле мы двигаемся вдоль P_v согласно ориентации на U , а вдоль Q_v — в противоположном направлении), см. рис. 45. Обозначим через $U * v$ новый эйлеров цикл, полученный из U . Преобразование $U \mapsto U * v$ называется k -преобразованием.

Предложение 2.1 (см. [38]). Любые эйлеровы циклы на 4-графе связаны конечной последовательностью k -преобразований.

Задача 2.8. Докажите предложение 2.1.

Упражнение 2.24. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 46. Найти на нем все эйлеровы циклы и для каждой пары различных эйлеровых циклов найти конечную последовательность k -преобразований, связывающую их.

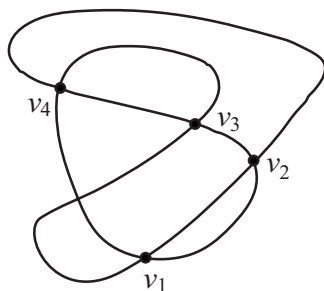


Рис. 46. Граф

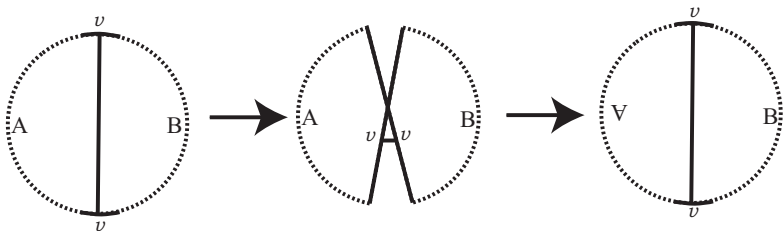


Рис. 47. Операция $*$ на хордовых диаграммах

Определим операцию $*$ на циклических словах с двойным вхождением, которая будет соответствовать k -преобразованию. Пусть $m = (vAvB)$, где A, B — подслова слова m и буквы принадлежат некоторому конечному алфавиту. Тогда положим $m * v = (v\tilde{A}vB)$, \tilde{A} — зеркальный образ подслова A . На рис. 47 преобразование $m \mapsto m * v$ изображается для хордовых диаграмм (пунктирные дуги хордовых диаграмм содержат концы всех хорд, отличных от v). Для каждого преобразования хордовых диаграмм мы считаем, что только фиксированные фрагменты хордовых диаграмм меняются. Части хордовых диаграмм, не содержащие хорд, участвующих в преобразованиях, изображаются пунктирными дугами.

Пусть U — произвольный эйлеров цикл на 4-графе H с множеством вершин $V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$, которое будет играть роль алфавита. Двигаясь вдоль U , мы встречаем каждую вершину дважды. Последовательно записывая встречающиеся вершины, мы получим циклическое слово $m(U)$ в алфавите $V(H)$. Очевидно, что в полученном слове каждая вершина встречается дважды, следовательно, эйлеровы циклы кодируются циклическими словами с двойным вхождением.

Упражнение 2.25. Покажите, что $m(U * v) = m(U) * v$, и если мы имеем циклическое слово m с двойным вхождением, то мы можем построить 4-граф, имеющий такой эйлеров цикл U , что $m(U) = m$.

Рассмотрим теперь крестовый граф H и U — (ориентированный) эйлеров цикл на нем. Построим *оснащенное* циклическое слово $m(U)$ с двойным вхождением (соответственно *оснащенную* хордовую диаграмму) для эйлерового цикла U . В каждой

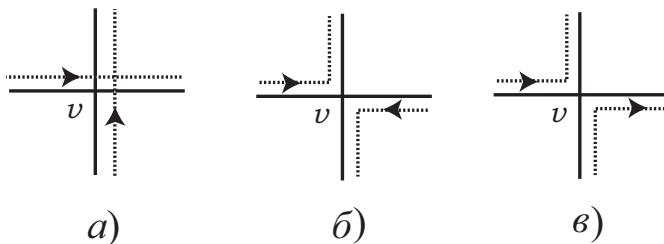


Рис. 48. Переход через вершину

вершине v графа H мы имеем следующие три возможности прохождения вдоль U через вершину v :

- 1) мы переходим с полуребра на противоположное ему полуребро, см. рис. 48 а). Вершина v в этом случае будет называться *гауссовой вершиной для U* и хорда, соответствующая этой вершине, также будет называться *гауссовой*;
- 2) мы переходим с полуребра на непротивоположное ему полуребро, причем ориентации противоположных ребер различны, см. рис. 48 б). Вершина v в этом случае будет называться *негауссовой вершиной с оснащением 0 для U* и хорда, соответствующая этой вершине, также будет называться *негауссовой хордой с оснащением 0*;
- 3) мы переходим с полуребра на непротивоположное ему полуребро, причем ориентации противоположных ребер совпадают, см. рис. 48 в). Вершина v в этом случае будет называться *негауссовой вершиной с оснащением 1 для U* и хорда, соответствующая этой вершине, также будет называться *негауссовой хордой с оснащением 1*.

Замечание 2.10. Гауссов цикл содержит только гауссовы вершины, а поворачивающий обход — негауссовы вершины.

Двигаясь вдоль эйлера цикла U , мы встречаем каждую вершину графа H дважды. Перейдем к построению *оснащенного* циклического слова $t(U)$ с двойным вхождением, соответствующего эйлерову циклу U . Слова будут рассматриваться над

алфавитом $X = V(H) \cup V(H)^{-1} \cup V(H)^G$, где множество $V(H)^{-1}$ состоит из элементов вида v^{-1} для каждой вершины $v \in V(H)$, а множество $V(H)^G$ состоит из элементов вида v^G для каждой вершины $v \in V(H)$. Каждой гауссовой вершине будут соответствовать в $m(U)$ две одинаковые буквы из множества $V(H)^G$, т. е. каждому вхождению соответствующей вершины мы припишем верхний индекс G . Например, $m(U) = (Av^G Bv^G)$, если вершина v является гауссовой. Каждой негауссовой вершине с оснащением 0 будут соответствовать в $m(U)$ две одинаковые буквы из множества $V(H) \cup V(H)^{-1}$, т. е. каждому вхождению соответствующей вершины мы либо ничего не припишем, либо припишем оба раза верхний индекс -1 . Например, $m(U) = (Av Bv)$ или $m(U) = (Av^{-1} Bv^{-1})$, если вершина v является негауссовой вершиной с оснащением 0. Каждой негауссовой вершине с оснащением 1 будут соответствовать в $m(U)$ две разные буквы из множества $V(H) \cup V(H)^{-1}$, т. е. двум вхождениям соответствующей вершины мы произвольным образом приписываем разные верхние индексы. Например, $m(U) = (Av^{-1} Bv)$ или $m(U) = (Av Bv^{-1})$, если вершина v является негауссовой вершиной с оснащением 1 (мы не делаем различия между этими двумя словами). Таким образом, мы рассматриваем не просто оснащенные циклические слова, а классы эквивалентности оснащенных циклических слов, где эквивалентность порождается автоморфизмами алфавита, которые меняют буквы v и v^{-1} местами для некоторой буквы v . Для простоты изложения мы называем эти классы оснащенными циклическими словами.

Замечание 2.11. Построенное оснащенное слово не всегда будет являться словом с двойным вхождением каждой буквы. Рассмотрим проекцию $\pi: V(H) \cup V(H)^{-1} \cup V(H)^G \rightarrow V(H) \cup V(H)^G$, заданную правилом $v^{\pm 1} \mapsto v$ и $v^G \mapsto v^G$. Образ построенного оснащенного слова при этой проекции является словом с двойным вхождением каждой буквы. Мы называем оснащенное слово *словом с двойным вхождением*, если образ слова при проекции π является словом с двойным вхождением.

Изображая оснащенное циклическое слово с двойным вхождением посредством оснащенной хордовой диаграммы, мы будем использовать хорды трех типов: хорды с меткой G для гауссовых вершин, «жирные» хорды без меток для негауссовых

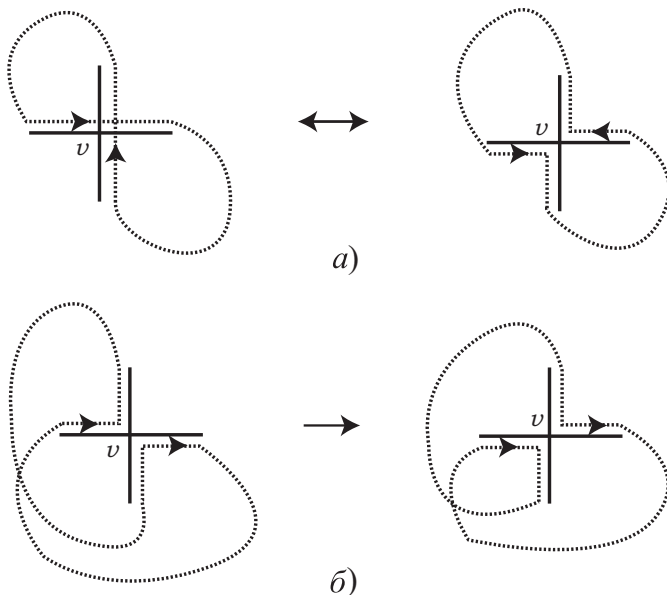


Рис. 50. Операция «оснащенная звездочка»

ное циклическое слово с двойным вхождением. Положим $m * a = (a \overline{m_1} a m_2)$, если $\varepsilon = \varepsilon' = G$ (рис. 50 а); $m * a = (a^G \overline{m_1} a^G m_2)$, если $\varepsilon = \varepsilon' \neq G$ (рис. 50 а); $m * a = (a \overline{m_1} a^{-1} m_2)$, если $\varepsilon = -\varepsilon'$ (рис. 50 б)). Таким образом, в результате применения операции «оснащенная звездочка» к букве a мы получаем: если a являлась гауссовой буквой, то в новом слове она будет негауссовой буквой с оснащением 0; если a являлась негауссовой буквой с оснащением 0 (соответственно 1), то в новом слове она будет гауссовой буквой (соответственно негауссовой буквой с оснащением 1).

Следующие три утверждения мы оставляем в качестве упражнений.

Упражнение 2.26. Любые два оснащенных циклических слова с двойным вхождением, полученные из крестового графа, связаны между собой последовательным применением операции «оснащенная звездочка».

Упражнение 2.27. Каждый крестовый граф имеет поворачивающий обход.

Очевидно, что существует много поворачивающих обходов и что не каждый 4-граф с крестовой структурой имеет гауссов цикл (если имеет гауссов цикл, то он единствен).

Пример 2.2. Любые два поворачивающих обхода, заданные с помощью оснащенных циклических слов с двойным вхождением, получают друг из друга последовательностью следующих операций: оснащенная звездочка, примененная к негауссовым буквам с оснащением 1, и операция $((t * a) * b) * a$, где t — оснащенное циклическое слово с двойным вхождением, a, b — негауссовы буквы с оснащением 0, причем они чередуются в слове t , т. е. $t = (\dots a \dots b \dots a \dots b \dots)$.

Существование гауссова цикла. Нам потребуются два понятия для формулирования критерия существования гауссова цикла: *матрица смежности* оснащенного циклического слова с двойным вхождением (оснащенной хордовой диаграммы) и *перестройка* множества хорд.

Определение 2.11. *Матрица смежности* хордовой диаграммы D с пронумерованными n хордами — это $n \times n$ матрица $A(D) = (a_{ij})$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) элемент a_{ii} равен оснащению хорды с номером i , т. е. или G , или 0, или 1;
- 2) $a_{ij} = 1$, $i \neq j$, если и только если хорды с номерами i и j зацеплены;
- 3) $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, если и только если хорды с номерами i и j не зацеплены.

Замечание 2.12. Матрицы смежности рассматриваются над \mathbb{Z}_2 , если у нас на диагонали нет букв G .

Пример 2.3. Пусть D — оснащенная хордовая диаграмма, изображенная на рис. 49. Пронумеруем все хорды из D : хор-



Рис. 51. Перестройка окружности по хордам

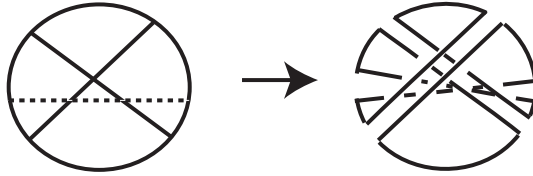


Рис. 52. Многообразие $M(D)$

да aa имеет номер 1, хорда bb — номер 2 и т. д. Тогда

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & G & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что нам дана оснащенная хордовая диаграмма D , все хорды которой имеют оснащение 0 или 1 (без гауссовых хорд).

Определение 2.12. Определим *перестройку вдоль множества хорд* хордовой диаграммы D следующим образом. Для каждой хорды, имеющей оснащение 0 (соответственно 1), мы рисуем параллельную (соответственно пересекающую) хорду около первоначальной хорды и удаляем дуги окружности между соседними концами, как показано на рис. 51. Незначительным шевелением картинка в \mathbb{R}^2 перестраивается в одномерное многообразие в \mathbb{R}^3 . Это многообразие $M(D)$ и есть *результат перестройки*, см. рис. 52.

Оказывается, число компонент связности многообразия $M(D)$ может быть определено из матрицы смежности $A(D)$ диаграммы D .

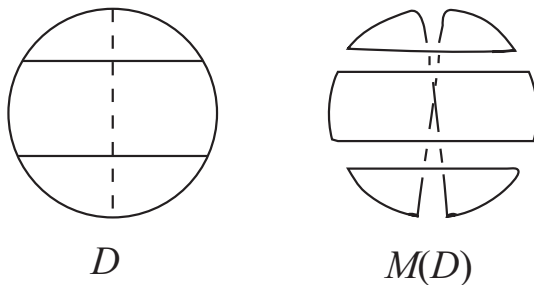


Рис. 53. Хордовая диаграмма D и многообразие $M(D)$

Теорема 2.3 (см. [4, 19, 56, 70, 73]). Пусть D — оснащенная хордовая диаграмма, не содержащая гауссовых хорд. Тогда число компонент связности многообразия $M(D)$ равно $\text{corank} A(D) + 1$, где $A(D)$ — матрица смежности диаграммы D над \mathbb{Z}_2 , и коранг corank вычисляется над \mathbb{Z}_2 .

Замечание 2.13. Напомним, что коранг равен разности размерности матрицы и ее ранга.

Пример 2.4. Рассмотрим хордовую диаграмму D , изображенную на рис. 53 слева. Совершив перестройку вдоль всех хорд, мы получим многообразие $M(D)$, изображенное на рис. 53 справа. Легко видеть, что число компонент многообразия $M(D)$ равно двум.

С другой стороны мы имеем

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{corank} A(D) = 3 - \text{rank} A(D) = 3 - 2 = 1.$$

Упражнение 2.28. Рассмотрим оснащенную хордовую диаграмму D , изображенную на рис. 54. Найдите число компонент связности многообразия $M(D)$, совершив перестройку вдоль всех хорд, и найдите число $\text{corank} A(D) + 1$. Убедитесь, что они совпадают.

Пусть D — оснащенная хордовая диаграмма с матрицей смежности $A(D)$. Построим матрицу $\hat{A}(D)$, выкидывая строки и столбцы матрицы $A(D)$, соответствующие гауссовым хордам.

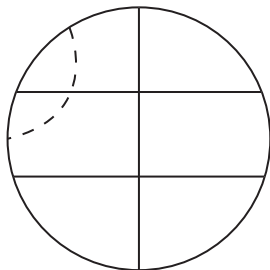


Рис. 54. Оснащенная хордовая диаграмма

Теорема 2.4 (см. [35, 36]). Пусть H — 4-граф с крестовой структурой, и пусть U — эйлеров цикл на H . Тогда H имеет гауссов цикл тогда и только тогда, когда $\text{corank}(\hat{A}(D) + E) = 0$, где D — оснащенная хордовая диаграмма, построенная из U , и E — единичная матрица.

Задача 2.9. Используя теорему 2.3 и рис. 55, докажите теорему 2.4.

Матрицы смежности гауссова цикла. Пусть H — 4-граф с крестовой структурой, имеющий гауссов цикл, и пусть U — эйлеров цикл на H . Будем считать, что $m(U)$ (соответственно хордовая диаграмма D) не имеет гауссовых вершин (соответственно гауссовых хорд), т. е. U — поворачивающий обход.

Определение 2.13. Скажем, что две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{kl})$ равны с точностью до диагональных элементов, если $a_{ij} = b_{ij}$ при $i \neq j$.

Основной результат статьи — следующая теорема.

Теорема 2.5 (см. [34]). Матрица смежности гауссова цикла, рассматриваемая над \mathbb{Z}_2 , с точностью до диагональных элементов равна $(A(D) + E)^{-1}$.

Перед доказательством теоремы мы сформулируем утверждение, на котором базируется доказательство теоремы, в виде упражнения.

Задача 2.10. Рассмотрим две операции, которые мы будем называть *уменьшающими*:

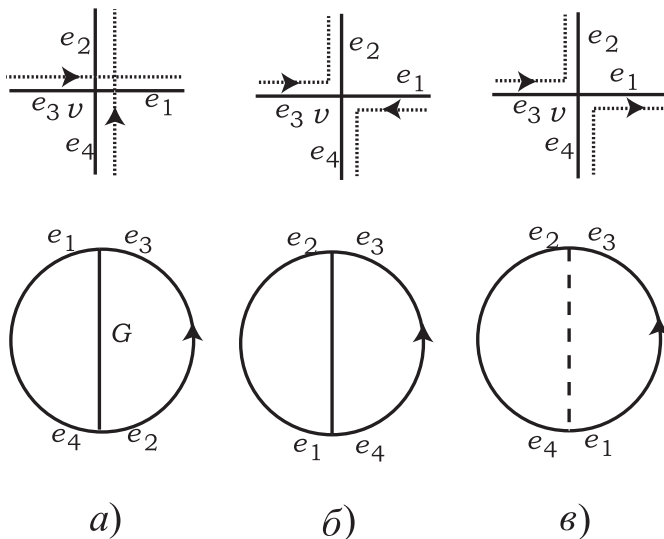


Рис. 55. Структура оснащенной хордовой диаграммы

- 1) оснащенная звездочка, примененная к негауссовой хорде с оснащением 0, см. рис. 50 а);
- 2) $m \mapsto (((m*a)*b)*a)$, где m — оснащенное циклическое слово с двойным вхождением, a, b — негауссовы буквы (хорды) с оснащением 1 и они чередуются в m (зацеплены), см. рис. 56.

Докажите, что, применяя эти две операции к диаграмме D , мы за конечное число шагов получим хордовую диаграмму, содержащую только гауссовы хорды.

Доказательство теоремы 2.5. Пусть $V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Пусть $A(D)$ — матрица смежности хордовой диаграммы D , не содержащей гауссовых хорд. Будем применять уменьшающие операции. Без ограничения общности можно считать, что уменьшающие операции применяются к хордам с наименьшими номерами в нашей нумерации. Тогда первая уменьшающая операция, примененная к первому элементу, на языке матриц

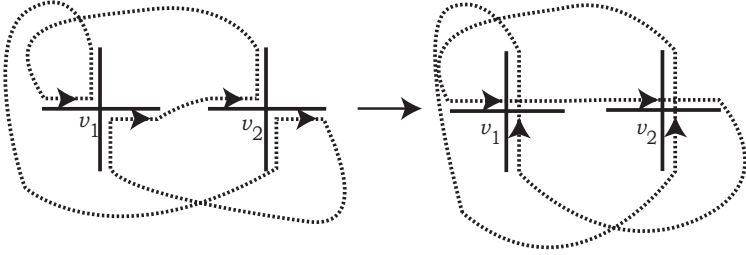


Рис. 56. Уменьшающая операция

выглядит следующим образом:

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A(D') = \begin{pmatrix} G & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 + (1) \end{pmatrix},$$

а вторая, примененная к двум первым элементам, —

$$A(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & A_1^\top & A_4 & A_5 & A_6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_2^\top & A_5^\top & A_7 & A_8 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & A_9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow A(D') = \begin{pmatrix} G & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & G & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_1^\top & A_4 & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & A_7 & A_8 + (1) \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & A_9 \end{pmatrix},$$

здесь жирные $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ обозначают вектор-столбцы, полностью состоящие из 0 и 1 соответственно; (1) — это матрица, полностью состоящая из единиц, и A_i — некоторые матрицы.

Мы будем последовательно применять эти операции к хордовой диаграмме D . Наша следующая цель — показать, что после применения уменьшающих операций к оснащенной хордовой диаграмме D , не имеющей гауссовых хорд, мы в итоге

получим оснащенную хордовую диаграмму, содержащую только гауссовы хорды и имеющую с точностью до диагональных элементов матрицу $(A(D) + E)^{-1}$ своей матрицей смежности.

Матрицу $(A(D) + E)^{-1}$ мы будем находить, совершая элементарные преобразования над строками матрицы $B(D) = A(D) + E$ с $\det(A(D) + E) = 1$. Построим матрицу $(A(D) + E|E)$ размера $n \times 2n$. Обозначим через $\widehat{M}_{ij\dots k}$ матрицу, полученную из матрицы M удалением строк и столбцов с номерами от i до k .

Так как $\det B(D) = 1$, то или существует диагональный элемент, равный 1, или два таких номера i и j , что $b_{ii} = b_{jj} = 0$, $b_{ij} = b_{ji} = 1$.

В первом случае без ограничения общности можно предположить, что $b_{11} = 1$. Совершая элементарные преобразования над матрицей $B(D)$ с помощью первой строки, получаем

$$\begin{aligned} B(D) = A(D) + E &= \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 + E \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow B'(D) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 \\ \mathbf{0} & A_1^\top & A_2 + E + (1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (B(D)|E) &\rightsquigarrow (B'(D)|E') = \\ &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 & \mathbf{0} & E & 0 \\ \mathbf{0} & A_1^\top & A_2 + E + (1) & \mathbf{1} & 0 & E \end{array} \right). \end{aligned}$$

После применения первой уменьшающей операции к хордовой диаграмме D хорда, соответствующая вершине v_1 , становится гауссовой хордой и смежности негауссовых хорд определяются матрицей $\widehat{B'(D)}_1$, а другие смежности определяются первым столбцом матрицы E' (с точностью до диагональных элементов).

Во втором случае без ограничения общности можем предположить, что $b_{11} = b_{22} = 0$, $b_{12} = b_{21} = 1$. Совершая элементарные преобразования с помощью первых двух строк матрицы $B(D)$, мы получим

$$B(D) = A(D) + E =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & A_1^\top & A_4 + E & A_5 & A_6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_2^\top & A_5^\top & A_7 + E & A_8 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & A_9 + E \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\
&\rightsquigarrow B'(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_1^\top & A_4 + E & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & A_7 + E & A_8 + (1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & A_9 + E \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&(B(D)|E) \rightsquigarrow (B'(D)|E') = \\
&= \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_1^\top & A_4 + E & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & A_7 + E & A_8 + (1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & A_9 + E \end{array} \right. \\
&\quad \left. \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ 1 & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & E & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 & E & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & E \end{array} \right).
\end{aligned}$$

После применения второй уменьшающей операции к хордовой диаграмме D хорды, соответствующие вершинам v_1 и v_2 , становятся гауссовыми хордами, смежности негауссовых хорд определяются матрицей $\widehat{B'(D)}_{12}$, а оставшиеся смежности определяются первыми двумя столбцами матрицы E' .

Предположим, что мы совершили k уменьшающих операций. После этих преобразований матрица $(B(D)|E)$ преобразуется в матрицу

$$(B'(D)|E') = \left(\begin{array}{cc|cc} E & C & F & 0 \\ 0 & R & S & E \end{array} \right),$$

где F — это $l \times l$ -матрица, R — симметрическая матрица. Тогда новая оснащенная хордовая диаграмма содержит l гауссовых хорд, смежности негауссовых хорд определяются матрицей R , а все оставшиеся смежности — первыми l столбцами матрицы E' . Так как $\det B'(D) = 1$, то $\det R = 1$, и в матрице R существуют или диагональный элемент, равный 1, или два таких номера p и q , что $r_{pp} = r_{qq} = 0$, $r_{pq} = r_{qp} = 1$.

Рассмотрим первый случай. Без ограничения общности считаем, что $r_{11} = 1$. В этом случае применим первую уменьшающую операцию. Мы получим

$$\begin{aligned}
 (B'(D)|E') &= \left(\begin{array}{cc|cc} E & C & F & 0 \\ 0 & R & S & E \end{array} \right) = \\
 &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} E & C_1 & C_2 & C_3 & F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & S_1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & R_1 & R_2 & S_2 & \mathbf{0} & E & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & R_2^\top & R_3 & S_3 & \mathbf{0} & 0 & E \end{array} \right) \rightsquigarrow \\
 &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} E & 0 & C'_2 & C'_3 & F'_1 & F'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & S_1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & R_1 & R_2 & S_2 & \mathbf{0} & E & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & R_2^\top & R_3 + (1) & S'_3 & \mathbf{1} & 0 & E \end{array} \right) = \\
 &= \left(\begin{array}{cc|cc} E & C' & F' & 0 \\ 0 & R' & S' & E \end{array} \right) = (B''(D)|E''),
 \end{aligned}$$

где F' — это $(l+1) \times (l+1)$ матрица, R' — это симметрическая матрица. Число гауссовых вершин равно $l+1$, смежности негауссовых вершин определяются матрицей R' , а все оставшиеся смежности — первыми $l+1$ столбцами матрицы E'' . Второй случай рассматривается аналогично первому.

В конце мы получим матрицу

$$\left(\begin{array}{c|c} E & (A(D) + E)^{-1} \end{array} \right)$$

и оснащенную хордовую диаграмму только с гауссовыми хордами. Матрица смежности полученной хордовой диаграммы с точностью до диагональных элементов равна $(A(D) + E)^{-1}$.

Мы доказали теорему для недиагональных элементов, но мы знаем, что на диагонали будут стоять буквы G . \square

Замечание 2.14. Пусть H — произвольный (связный и содержащий хотя бы одну вершину) ориентированный 4-граф, причем в каждую вершину входят и выходят ровно два полуребра (ориентации полуребер, соответствующих одному ребру, совпадают). Легко видеть, что на графе H существует ориентированный эйлеров цикл U . Зададим крестовую структуру на H таким образом, чтобы U являлся поворачивающим обходом на уже новом графе с крестовой структурой, и в каждой вершине пара противоположных полуребер состояла из входящего и исходящего из нее полуребер. Если на полученном ориентированном 4-графе с крестовой структурой существует ориентированный гауссов цикл, то теорема 2.5 дает формулу для матрицы смежности гауссова цикла. Таким образом, последнее утверждение о существовании гауссова цикла является теоремой 3.4 из [37] и, следовательно, теорема 3.4 из [37] является частным случаем теоремы 2.5.

Следствия из теоремы 2.5. Используя разные критерии планарности 4-графа с крестовой структурой и теорему 2.5, мы в данном разделе сформулируем интересные факты, касающиеся симметрических матриц. На самом деле, не каждая симметрическая матрица является матрицей смежности некоторого эйлерова цикла [8], но, как было показано в [34], аналогичные утверждения можно сформулировать для всех симметрических матриц над полем \mathbb{Z}_2 .

Следствие 2.1. Пусть U_1 и U_2 — два поворачивающих обхода одного и того же 4-графа с крестовой структурой, и пусть D_1 и D_2 — такие их оснащенные хордовые диаграммы, что $\det(A(D_i) + E) = 1$. Тогда матрицы $(A(D_1) + E)^{-1}$ и $(A(D_2) + E)^{-1}$ совпадают с точностью до диагональных элементов.

Пример 2.5. Рассмотрим 4-граф с крестовой структурой, состоящий из 4 вершин v_i , рис. 46 (структура индуцируется из плоскости). Пусть U_1 и U_2 — два поворачивающих обхода, заданные оснащенные циклическими словами с двойными вхождениями

$$m(U_1) = (v_1 v_4 v_2 v_1^{-1} v_2 v_3 v_4 v_3) \quad \text{и} \quad m(U_2) = (v_1 v_4 v_3 v_4 v_2 v_3 v_1 v_2^{-1})$$

соответственно. Тогда

$$A(m(U_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(m(U_2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получаем

$$(A(m(U_1)) + E)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(A(m(U_2)) + E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$A = \begin{pmatrix} G & 0 & 1 & 1 \\ 0 & G & 1 & 1 \\ 1 & 1 & G & 1 \\ 1 & 1 & 1 & G \end{pmatrix}$$

— матрица смежности гауссова цикла, заданного с помощью $(v_1 v_4 v_3 v_1 v_2 v_4 v_3 v_2)$.

Следующее следствие сразу следует из критерия планарности 4-графа с крестовой структурой, сформулированного на языке поворачивающих обходов, и из теории атомов, см. [23, 24, 25, 26, 27, 50].

Следствие 2.2. Пусть D — оснащенная хордовая диаграмма, все хорды которой являются негауссовыми с оснащением 0, и $\det(A(D) + E) = 1$. Если числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}_2$ таковы, что

$$\det((A(D) + E)^{-1} + \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = 1,$$

то матрица

$$((A(D) + E)^{-1} + \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))^{-1}$$

имеет единицы на диагонали. Кроме того, если D является d -диаграммой, то матрица

$$((A(D) + E)^{-1} + \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))^{-1}$$

является матрицей смежности d -диаграммы. Здесь через $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ обозначена диагональная матрица с числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на диагонали.

Геометрически первая часть следствия 2.2 означает следующее. Имея 4-граф H с крестовой структурой и некоторый поворачивающий обход U на нем, мы можем задать ориентацию на H : ориентируем обход U произвольным образом и зададим с помощью него ориентацию на H . Оказывается, если какой-то поворачивающий обход задает седловую ориентацию на 4-графе с крестовой структурой, то и любой другой поворачивающий обход тоже будет задавать седловую ориентацию. Действительно, если седловая ориентация существует, то она единственна, а ее существование проверяется исходя из произвольного поворачивающего обхода. Вторая часть следствия относится к вопросу планарности. Если у нас имеется планарный 4-граф с крестовой структурой, т. е. вложенный в плоскость граф с сохранением структуры, то все поворачивающие обходы задают d -диаграммы.

Хорошо известно необходимое условие планарности 4-графа с крестовой структурой в терминах матрицы смежности гауссова цикла.

Теорема 2.6 (теорема Гаусса [31]). Пусть H — 4-граф с крестовой структурой, имеющий гауссов цикл и пусть D — гауссова диаграмма. Тогда если граф H планарен, то сумма элементов в каждой строке (каждом столбце) матрицы $A(D)$, за исключением диагонального элемента, равна нулю по модулю два.

Отсюда получаем

Следствие 2.3. Пусть D — d -диаграмма и $\det(A(D) + E) = 1$. Тогда сумма элементов в каждой строке (каждом столбце) матрицы $(A(D) + E)^{-1}$, за исключением диагонального элемента, равна нулю по модулю два.

2.5. Вложение крестовых графов в двумерные поверхности

В настоящем разделе мы рассмотрим следующий вопрос: как выглядят хордовые диаграммы, соответствующие четырехвалентным графам с крестовой структурой, вложимым в различные двумерные замкнутые поверхности? Мы ограничимся лишь *шахматными вложениями*. Назовем вложение оснащенного четырехвалентного графа в двумерную поверхность *шахматным*, если дополнение к образу этого графа состоит из двумерных клеток, причем клетки допускают раскраску в черный и белый цвета таким образом, что клетки, соседствующие по ребру, имеют разные цвета. Очевидно, что любое вложение графа в плоскость (в сферу) является шахматным.

Мы знаем, см. следствие 2.2, что если для какого-нибудь поворачивающего обхода найдется хорда с оснащением 1, то хорда с оснащением 1 найдется и для любого другого поворачивающего обхода. Оказывается, верна следующая теорема.

Теорема 2.7. *Пусть крестовому графу G при некотором его поворачивающем обходе C соответствует хордовая диаграмма $D_{G,C}$. Тогда если у хордовой диаграммы $D_{G,C}$ найдется хоть одна хорда с оснащением 1, то все поверхности, в которые граф G вложим шахматным образом, являются неориентируемыми, а если все хорды хордовой диаграммы имеют оснащение 0, то все поверхности, в которые граф вложим шахматным образом, являются ориентируемыми.*

Введем новое понятие.

Определение 2.14. *Атомом* называется двумерное замкнутое многообразие M , в которое вложен 4-граф $G \subset M$, делящий многообразие M на клетки с фиксированной шахматной раскраской двумерных клеток. Граф G называется *остовом атома*. *Вершинами атома* называются вершины его остова.

Родом (соответственно *эйлеровой характеристикой*) атома называется род (эйлерова характеристика) его двумерного многообразия. Атом называется *ориентируемым* (*связным*), если таковым является соответствующее многообразие. Атомы рода 0 называются *сферическими*, ориентируемые атомы рода один — *торическими*.

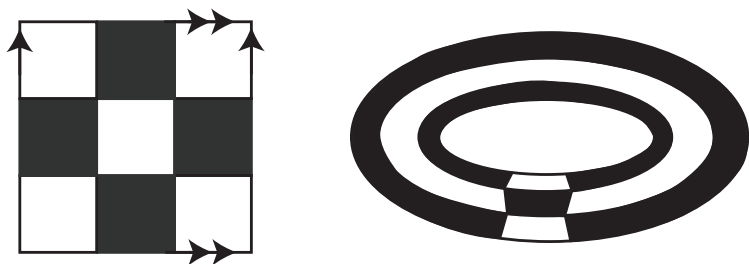


Рис. 57. Торический атом

Замечание 2.15. Атом можно представлять себе в виде двумерной поверхности (с краем), на которой задана функция Морса с выделенным критическим уровнем с несколькими седловыми точками при условии отсутствия других седловых точек (изначальное определение А. Т. Фоменко [23, 24, 25, 26, 27]); в этом случае остов атома представляет собой критический уровень, черные клетки — области значений выше критического (послекритические), а белые клетки — области значений ниже критического (докритические).

Пример торического атома изображен на рис. 57.

Если атом ориентируем, то можно снабдить его ориентацией. Таким образом, имеет смысл говорить об ориентированных и неориентированных атомах.

Атомы рассматриваются с точностью до эквивалентности, т. е. гомеоморфизма, переводящего остов — в остов, черные клетки — в черные, а белые — в белые.

Каждый атом (точнее, его класс эквивалентности) может быть полностью восстановлен по следующим комбинаторным данным:

- 1) остов (4-граф);
- 2) *A-структура* (или *структура противоположных ребер*) (делящая четыре полуребра, исходящие из каждой вершины, на две пары, называемые противоположными; отношение противоположности определяется в соответствии с расположением полуребер на поверхности);

- 3) *B-структура* (в каждой вершине выделены две пары соседних полуребер (или двух углов), которые входят в границу одной черной клетки).

Таким образом, вычисление минимального рода поверхности, в которую вложим крестовый граф шахматным образом, достигается перебором за 2^n раз (n — число вершин) — рассматриваются всевозможные способы приклейки черных и белых клеток.

Пусть дан атом, т. е. крестовый граф G , вложенный в замкнутую двумерную поверхность M шахматным образом. Рассмотрим произвольный поворачивающий обход графа G и хордовую диаграмму, соответствующую этому обходу. Построим вложение хордовой диаграммы в поверхность M следующим образом. Образ окружности хордовой диаграммы будет совпадать с ребрами графа G везде, за исключением окрестностей образов вершин. В окрестностях образов вершин окружность хордовой диаграммы будет локально выглядеть так, как показано на рисунке 58. Две части окружности будут соединены хордой, отвечающей данной вершине.

Нетрудно заметить, что образ окружности хордовой диаграммы является *разделяющим*: его дополнение состоит из двух компонент связности. Действительно, эти компоненты связности почти полностью (за исключением малых фрагментов вершин) совпадают с объединением черных клеток атома и объединением белых клеток атома, соответственно. Таким образом, мы имеем две поверхности с краем: M_B и M_W , склейка которых по их общему краю-окружности дает исходную поверхность M .

Будем далее использовать следующее определение рода для двумерной замкнутой поверхности: $g(M) = 1 - \frac{\chi(M)}{2}$, где χ — эйлерова характеристика; для компактной поверхности с краем род определяется как род поверхности, получающейся из исходной путем заклейки компонент края дисками. Так, для листа Мебиуса и для проективной плоскости род равен $\frac{1}{2}$, а для бутылки Клейна он равен 1. Замкнутая двумерная поверхность определяется своим родом и ориентируемостью/неориентируемостью.

Очевидно, что род поверхности M равен сумме родов поверхностей M_B и M_W . Наша дальнейшая задача будет состоять

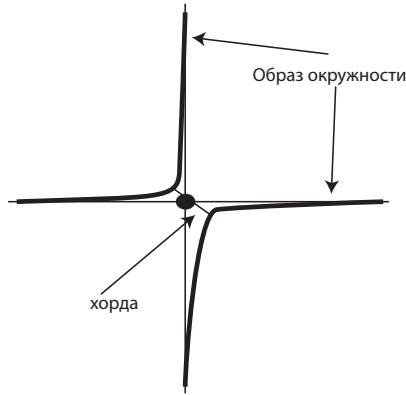


Рис. 58. Локальное построение хордовой диаграммы в окрестности вершины

в оценке суммы $g(M_B) + g(M_W)$. Как оказывается, эту оценку можно переформулировать на языке матриц.

Если задано шахматное вложение крестового графа в некоторую двумерную поверхность и задан поворачивающий обход на этом графе, то все хорды соответствующей хордовой диаграммы естественным образом делятся на «черные» и «белые»: черными хордами мы называем хорды, отвечающие вершинам графа, окрестность которых принадлежит черной области, а белыми — те вершины графа, окрестность которых принадлежит белой области.

Так, на рис. 59, если покрасить всю плоскость в черный и белый цвета, хорды 2-4, 5-14, 7-9, 10-13 (внутренние) будут черными, а хорды 1-12, 3-6, 8-11 (внешние) — белыми.

Таким образом, любая тройка (граф, обход, вложение) задает хордовую диаграмму, хорды которой разбиты на два семейства.

Составим теперь две хордовые диаграммы D_B и D_W , которые получаются из хордовой диаграммы D удалением белых (соответственно черных) хорд и объединением дуг, инцидентных вершине удаленной хорды, в одну дугу. Пусть теперь D — хордовая диаграмма и D_B и D_W — соответствующие ей «чер-

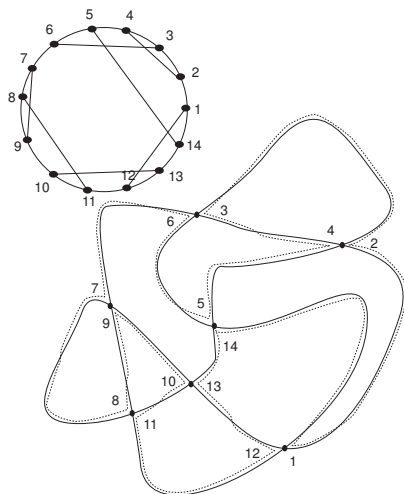


Рис. 59. Поворачивающий обход и поворачивающая хордовая диаграмма

ная» и «белая» хордовые диаграммы. Такое разбиение приводит к двум новым матрицам смежности $A(D_B)$ и $A(D_W)$.

Оказывается, что по этим двум матрицам можно вычислить род белой части поверхности и род черной части поверхности, а именно имеет место

Теорема 2.8. *Справедливы равенства*

$$2g(M_B) = \text{corank } A(D_B), \quad 2g(M_W) = \text{corank } A(D_W).$$

Эта теорема является следствием теоремы 2.3. Таким образом, в связи с теоремой 2.8 наша задача о вложимости крестового графа в поверхность рода g (ориентируемую или неориентируемую) сводится к задаче 2.1.

Это минимальное значение отвечает за минимальный род поверхности, в которую данный крестовый граф может быть вложен шахматным образом. Разумеется, эта задача может быть решена прямым перебором 2^{n-1} вариантов, однако, конечно, имеется в виду возможность нахождения ее быстрого (например, полиномиального по n) решения. Как оказывается, быстрое решение такой задачи весьма легко может быть полу-

чено явно для случая вложений в сферу (или плоскость), проективную плоскость и бутылку Клейна. Во всех остальных случаях вопрос о быстром решении остается открытым.

Уместно сравнить этот результат с работой Линса, Рихтера и Шанка, [46], в которой случаи плоскости, проективной плоскости и бутылки Клейна также решаются просто, а случай тора — нет. Кроме того, нужно отметить, что с алгоритмической точки зрения проблема распознавания того, в какую поверхность вложим тот или иной граф, является NP-трудной [72].

Решения для случая плоскости, проективной плоскости и бутылки Клейна. Случай $\mathbb{R}R^2(S^2)$. Рассмотрим хордовую диаграмму. Для планарности необходимо, чтобы все хорды имели оснащение 0: действительно, чтобы сумма рангов двух матриц была равна нулю, на диагонали исходной матрицы не должно быть элементов, равных единице. Пусть это так. Далее нам нужно разбить хорды на 2 семейства таким образом, чтобы хорды из одного семейства были незацеплены (d -диаграмма). Алгоритм таков: мы рассматриваем произвольную хорду и отправляем ее в первое семейство, затем некоторую зацепленную с ней хорду отправляем во второе семейство, некоторую хорду, зацепленную со второй, отправляем в первое семейство и т.д. Исчерпав все хорды, проверяем, не содержит ли одно из семейств пару зацепленных хорд.

В случае проективной плоскости мы должны найти хорду с оснащением 1. Далее все хорды с оснащением 1 должны быть зацеплены с ней, чтобы ранг соответствующей подматрицы не превышал единицы. После этого два семейства должны быть устроены следующим образом: хорды из первого семейства включают в себя все хорды с оснащением 1, зацепленные между собой, а также хорды с оснащением 0, которые не зацеплены друг с другом и с остальными хордами из этого семейства. Второе семейство состоит из оставшихся хорд с оснащением 0, попарно не зацепленных. Дальнейший алгоритм дословно повторяет алгоритм распознавания d -диаграммы. В случае распознавания вложения в бутылку Клейна нам понадобится следующее очевидное

Упражнение 2.29. Пусть крестовый граф G вложен шахматным образом в бутылку Клейна, и пусть C — обход графа G . Тогда либо обход C разбивает бутылку Клейна на два листа Мебиуса, либо существует такая хорда с оснащением 1, что обход C' , полученный изменением обхода C в вершине, соответствующей этой хорде, разбивает бутылку Клейна на два листа Мебиуса.

После этого нужно устроить разбиение матрицы пересечений для одной из хордовых диаграмм $D_{G,C}$ или $D_{G,C'}$ на два семейства, каждое из которых имело бы ранг один. Алгоритм разбиения и проверка дословно повторяют алгоритм распознавания d -диаграммы, только в случае двух хорд с оснащением 1 нужно заменить слово «пересечение» на «непересечение» и наоборот. Нужно также поменять инцидентность на графе пересечений для вершин с оснащением 1. Случай, когда граф пересечения будет несвязным, легко сводится к проверке каждой из его компонент.

Об условии шахматности

Задача 2.11. Докажите, что вложение крестового графа G в двумерную поверхность M является шахматным, если и только если любой замкнутый путь на этой поверхности, не проходящий через вершины графа и не касающийся его ребер, пересекает его ребра четное число раз.

Приведенное выше условие математически формулируется так: граф представляет собой нулевой класс одномерных гомологий поверхности в поле из двух элементов.

Над любой двумерной поверхностью M , в которую вложен крестовый граф G , можно рассмотреть двулистное накрытие $M \rightarrow M$, которое строится следующим образом. Каждый замкнутый путь γ на поверхности M , пересекающий образ графа G трансверсально, накрывается замкнутым путем, если он пересекает образ графа G в четном числе точек. В противном случае он накрывается незамкнутым путем. Таким образом, вопрос о шахматных вложениях тесно связан с вопросом о произвольных вложениях. Подробнее см. [53].

3. МАКСИМАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫЕ АТОМЫ

3.1. Введение

Целью настоящего раздела является описание и частичная классификация ориентированных максимально симметричных атомов. Максимально симметричные атомы можно рассматривать как обобщение правильных многогранников — «платоновы тела» на двумерных поверхностях. В изложении настоящей главы мы следуем работе [41].

Для задания (ориентированного) атома можно использовать несколько представлений:

- как пару (M, G) , где M — двумерная связная ориентированная замкнутая поверхность, G — вложенный в M 4-граф, который разбивает поверхность на клетки с фиксированной шахматной раскраской клеток (см. определение 2.14);
- как пару (\bar{M}, G) , где \bar{M} — двумерная связная ориентированная компактная поверхность с краем, G — вложенный в \bar{M} такой 4-граф, что $\bar{M} \setminus G$ представляет собой объединение колец, раскрашенных в белый и черный цвет, причем к каждому ребру графа примыкает одно белое и одно черное кольцо (при данном представлении атом можно рассматривать как окрестность особого значения некоторой функции Морса на двумерной поверхности, причем граф G представляет собой линию уровня особого значения);
- как f -граф — граф, некоторые ребра которого ориентированы и все вершины которого имеют степень 3, причем к каждой его вершине примыкают ровно два ориентированных полуребра, из которых одно входит в вершину, а другое выходит из нее;
- как клеточное разбиение двумерной связной замкнутой ориентированной поверхности M (такие разбиения называют также *картами*, или *абстрактными многогранниками*).

Замечание 3.1. Перечисленные выше объекты рассматриваются с точностью до изоморфизма (гомеоморфизма поверхности, сохраняющего имеющуюся дополнительную структуру (вложенный граф, цвет клеток, ориентацию)).

Задача 3.1. Покажите, что между различными представлениями атома имеется взаимно-однозначное соответствие. Указание: построение атома (M, G) по карте (то есть по клеточному разбиению замкнутой поверхности) получается операцией «усечение» (см. рис. 60). Иными словами, граф, задающий атом, получается как медиальный граф 1-остова клеточного разбиения поверхности.

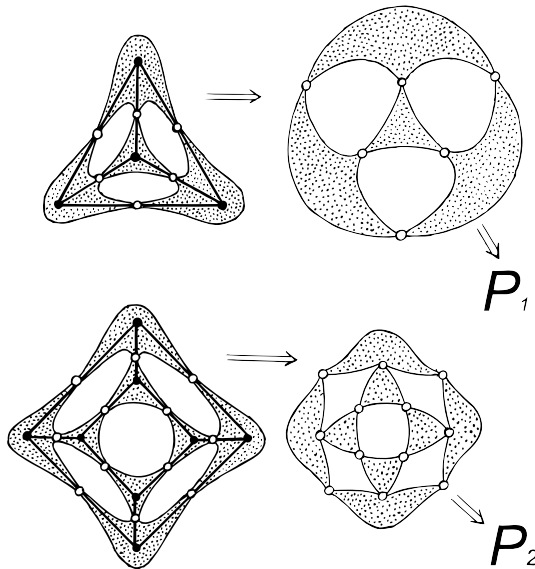


Рис. 60. Построение атома по клеточному разбиению поверхности

Для построения f -графа по паре (\bar{M}, G) в окрестности каждой вершины графа G соедините отрезком белые граничные окружности, проходящие рядом с вершиной. f -Граф есть объ-

единение данных отрезков и белых граничных окружностей (см. рис. 61).

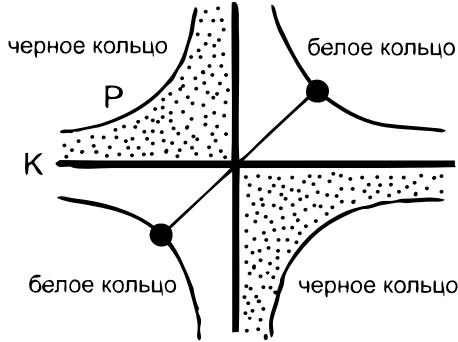


Рис. 61. Построение f -графа атома

Определение 3.1. Пусть дан атом $X = (M, G)$. Количество вершин $n(X)$ графа G называется *сложностью* атома, а род $g(X)$ поверхности M — *родом* атома.

Определение 3.2. Атом, полученный из атома $X = (M, P)$ перекраской белых клеток в черные, а черных — в белые, называется *двойственным* атому X и обозначается X^* .

Атом, который получается из атома $X = (M, P)$ заменой ориентации поверхности M , называется *зеркально симметричным* атомом и обозначается $-X$.

Упражнение 3.1. Используя определение двойственного атома, опишите, как построить двойственную карту и двойственный f -граф.

3.2. Максимально симметричные атомы

Ниже, если не указано противное, мы будем рассматривать атом как разбиение поверхности на белые и черные клетки.

Определение 3.3. *Симметрией* атома $X = (M, G)$ называется гомеоморфизм поверхности M на себя, который переводит

граф G в себя и сохраняет цвет клеток. Симметрии рассматриваются с точностью до гомотопии.

Упражнение 3.2. Покажите, что гомотопический класс симметрии атома определяется комбинаторно, т. е. однозначно задается действием на множестве клеток атома, множестве ребер и множестве вершин 4-графа.

Группу симметрий атома обозначим $\text{Aut}(X)$.

Введем основной объект исследования настоящего раздела.

Определение 3.4. Атом $X = (M, G)$ называется *максимально симметричным*, если группа симметрий транзитивно действует на множестве ребер графа G .

Замечание 3.2. Карты, которые соответствуют максимально симметричным атомам при представлении атомов как абстрактных многогранников, называются *правильными картами*.

Для максимально симметричного атома $X = (M, G)$ введем следующие обозначения: S_w (соответственно S_b) есть число белых (соответственно черных) клеток атома, d_w (соответственно d_b) есть число сторон у белой (соответственно черной) клетки атома (в силу симметричности не важно, какую клетку данного цвета мы берем). Пара $\{d_w, d_b\}$ называется *типом* атома X .

Упражнение 3.3. Покажите, что следующие свойства атома эквивалентны:

- 1) атом максимально симметричен;
- 2) для любой вершины атома найдется симметрия, оставляющая вершину неподвижной и переставляющая между собой белые (а значит, и черные) клетки, примыкающие к вершине, а для любой двумерной клетки атома существует симметрия, сохраняющая эту клетку и действующая как элементарный поворот клетки;
- 3) для некоторой клетки атома e и вершины атома v , инцидентной данной клетке, найдутся две симметрии атома, первая из которых переводит клетку e в себя и действует как элементарный поворот клетки e , а вторая действует как поворот на π с центром в вершине v .

Задача 3.2. Покажите, что имеется естественная биекция между максимально симметричными атомами и тройками (Γ, a, b) , где Γ — конечная группа, $a, b \in \Gamma$ — ее образующие, причем $b^2 = 1 \neq b$ (тройки (Γ, a, b) рассматриваются с точностью до изоморфизма). Указание: в качестве группы Γ возьмите группу симметрий атома, в качестве a — элементарный поворот некоторой двумерной клетки e атома, в качестве b — центральную симметрию в одной из вершин клетки e .

Упражнение 3.4. Докажите, что порядок группы симметрий максимально симметричного атома равен удвоенной сложности атома.

Пример 3.1. Для любого натурального n можно построить следующие 4 максимально симметричных ориентированных атома сложности n , которые обозначим A_n, B_n, C_n, D_n (см. рис. 62).

Упражнение 3.5. 1. а) Покажите, что атомы C_n и D_n имеют род 0, группу симметрий

$$\text{Aut}(C_n) = \text{Aut}(D_n) = \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2,$$

изоморфную группе симметрий правильного n -угольника, $D_n = C_n^*$, причем C_n состоит из 2 белых n -угольных клеток и n черных двуугольных клеток.

б) Покажите, что атом A_n имеет род $g = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, циклическую группу симметрий

$$\text{Aut}(A_n) = \mathbb{Z}_{2n}$$

и состоит из одной белой $2n$ -угольной клетки и одной либо двух черных клеток (из $2n$ -угольника при четном n или двух n -угольников при нечетном n).

в) Покажите, что атом B_n имеет род $g = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, абелеву группу симметрий

$$\text{Aut}(B_n) = \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_2$$

и состоит из двух белых n -угольных клеток и одной либо двух черных клеток (из $2n$ -угольника при нечетном n или двух n -угольников при четном n).

2. Постройте f -графы атомов A_n, B_n, C_n, D_n .

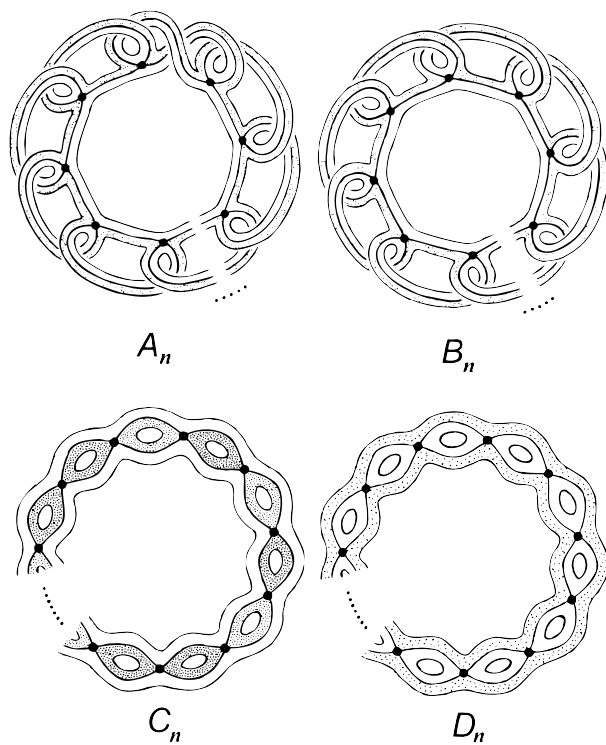


Рис. 62. Атомы серий A_n , B_n , C_n и D_n

Упражнение 3.6. Покажите, что имеются следующие равенства для атомов:

$$A_1 = D_1, \quad B_1 = C_1, \quad B_2 = C_2 = D_2$$

и что остальные атомы A_n, B_n, C_n, D_n попарно различны.

Пример 3.2. Пяти классическим правильным многогранникам отвечают 5 атомов P_i , $1 \leq i \leq 5$ (см. рис. 63), причем атомы получаются из этих многогранников операциями «усечения» (см. рис. 60).

Упражнение 3.7. Докажите, что атомы имеют следующие группы симметрий:

$$\text{Aut}(P_1) = \mathcal{A}_4, \quad \text{Aut}(P_2) = \text{Aut}(P_3) = \Sigma_4, \quad \text{Aut}(P_4) = \text{Aut}(P_5) = \mathcal{A}_5,$$

где Σ_k — симметрическая группа порядка k , а \mathcal{A}_k — ее знакопеременная подгруппа.

Упражнение 3.8. Для каждого из атомов P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 найдите группу симметрии, сложность, род, количество белых и черных клеток.

Пример 3.3. Опишем три бесконечные серии максимально симметрических атомов на торе $T_{(s,t)}^\square, T_{(s,t)}^\triangle, T_{(s,t)}^\blacktriangle$, $s > 0, t \geq 0$. Белые клетки атомов первой серии (соответственно второй и третьей серий) являются квадратами (соответственно треугольниками и шестиугольниками). Отметим, что черные клетки атомов первой серии (соответственно второй и третьей серий) являются квадратами (соответственно шестиугольниками и треугольниками). Эти серии будем называть *сериями квадратного, треугольного и шестиугольного типов* соответственно.

Опишем серию $T_{(s,t)}^\square$ классов изоморфности торических атомов квадратного типа. Эта серия параметризуется парой целых чисел s, t , таких что $s > 0, t \geq 0$. При этом $s^2 + t^2 = S$, где S — количество белых клеток атома. Рассмотрим на ориентированной евклидовой плоскости стандартную целочисленную решетку. Рассмотрим разбиение плоскости на квадраты со стороной $1/\sqrt{2}$, которые раскрасим в шахматном порядке в белый и черный цвета так, чтобы центры белых квадратов (клеток) находились в узлах целочисленной решетки (см. рис. 64).

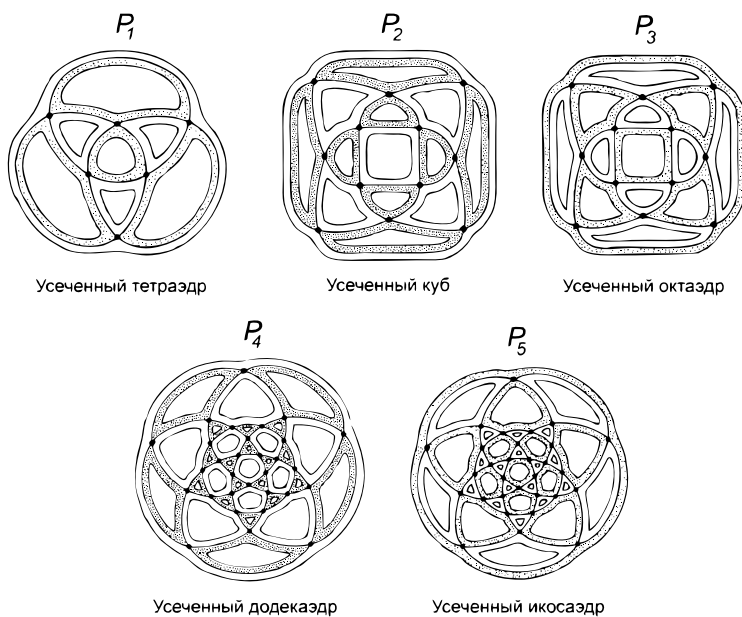


Рис. 63. Атомы P_1, P_2, P_3, P_4, P_5

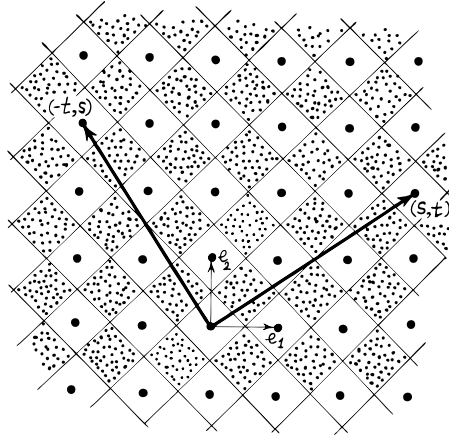


Рис. 64. Построение торического атома квадратного типа

Рассмотрим факторпространство плоскости по подрешетке, порожденной парой целочисленных векторов (s, t) и $(-t, s)$, где числа s, t удовлетворяют соотношению $s^2 + t^2 = S$. Поскольку разбиение плоскости на белые и черные квадраты инвариантно относительно сдвигов плоскости на целочисленные векторы, полученное факторпространство имеет структуру ориентированного атома. Этот атом торический и максимально симметричный (докажите!). Описанный атом назовем *торическим максимально симметричным атомом квадратного типа* (s, t) и обозначим как $T_{(s,t)}^\square$.

Упражнение 3.9. Найдите группу симметрии, сложность и количество белых и черных клеток атома $T_{(s,t)}^\square$.

Опишем серию $T_{(s,t)}^\triangle$ торических атомов треугольного типа. Эта серия параметризована парой целых чисел s, t , таких что $s > 0, t \geq 0$. При этом $2(s^2 + st + t^2) = S$, где S — количество белых клеток атома. Рассмотрим стандартное замощение ориентированной евклидовой плоскости равносторонними треугольниками со стороной 1. Вершины этих треугольников образуют решетку, в которой выберем следующий базис e_1, e_2 : векторы этого базиса единичные, угол между ними равен $\pi/3$,

а определяемая этим базисом ориентация плоскости положительна. Определим теперь «шахматное» разбиение плоскости на белые треугольники и черные шестиугольники (см. рис. 65), получающееся из указанного разбиения плоскости на треугольники операцией «усечения» (см. рис. 60).

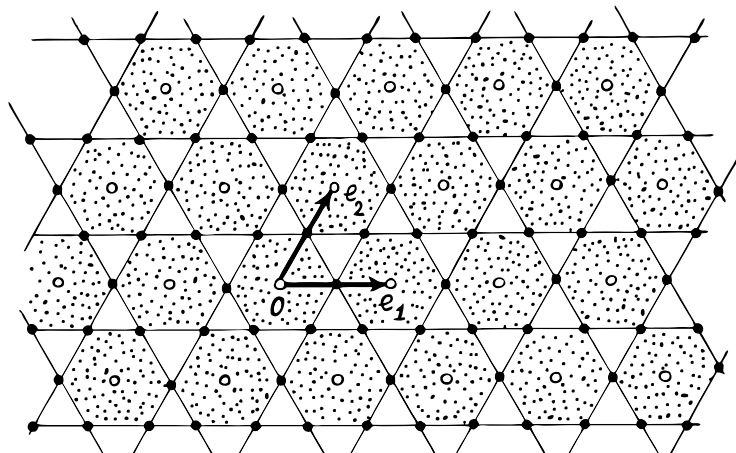


Рис. 65. Разбиение плоскости на шестиугольники и треугольники

Рассмотрим теперь подрешетку, порожденную векторами $se_1 + te_2$ и $-te_1 + (s+t)e_2$ (см. рис. 66, где числа s, t указаны выше).

Поскольку разбиение плоскости на белые треугольники и черные шестиугольники инвариантно относительно сдвигов плоскости на целочисленные векторы, полученное факторпространство имеет структуру атома, который является максимально симметричным. Определенный атом назовем *торическим максимально симметричным атомом треугольного типа* (s, t) и обозначим как $T_{(s,t)}^\Delta$.

Упражнение 3.10. Найдите группу симметрии, сложность и количество белых и черных клеток атома $T_{(s,t)}^\Delta$.

Опишем теперь серию $T_{(s,t)}^\Delta$ торических атомов шестиугольного типа. Эта серия параметризована парой целых чисел s, t , таких что $s > 0, t \geq 0$. При этом $s^2 + st + t^2 = S$, где S —

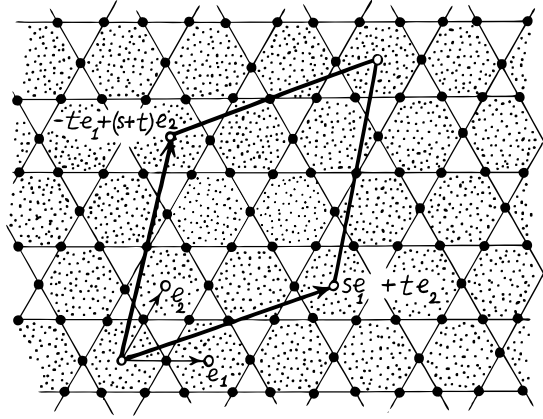


Рис. 66. Построение треугольного и шестиугольного торического атома

количество белых клеток атома. Атомы $T_{(s,t)}^\Delta$ получаются из описанных выше ориентированных атомов $T_{(s,t)}^\Delta$ заменой раскраски двумерных клеток — белых треугольников на черные, а черных шестиугольников на белые.

3.3. Примитивные максимально симметричные атомы

При описании и классификации максимально симметричных атомов полезным приемом является сведение одних атомов к другим. С этой целью определим отображения (морфизмы) между атомами.

Определение 3.5. *Морфизмом* атомов называется разветвленное накрытие $f: X \rightarrow Y$, которое согласовано с клеточными разбиениями атомов X и Y , точки ветвления которого находятся в центрах двумерных клеток клеточного разбиения, причем разветвленное накрытие f рассматривается с точностью до гомотопии в классе таких накрытий.

Заметим, что любая симметрия атома является морфизмом.

Следующее утверждение обосновывает данное выше определение морфизма.

Задача 3.3. Пусть Y — атом, X — связное топологическое пространство и $f: X \rightarrow Y$ — конечнолистное разветвленное накрытие, точки ветвления которого находятся в центрах двумерных клеток атома Y . Тогда на X существует единственная структура атома, для которой $f: X \rightarrow Y$ — морфизм.

Задача 3.4. *Единственность морфизма.* Пусть X, Y — атомы и $f, g: X \rightarrow Y$ — морфизмы. Предположим, что существует одномерная клетка (т. е. ребро вложенного в атом 4-графа) $e \subset X$, такая что $f(e) = g(e)$. Тогда $f = g$. Другими словами, морфизм атомов однозначно восстанавливается своим ограничением на ребро.

Определение 3.6. Морфизм $f: X \rightarrow Y$ между максимально симметричными атомами называется *симметричным разветвленным накрытием*.

Максимально симметричный атом X назовем *приводимым*, если существуют максимально симметричный атом Y и симметричное разветвленное накрытие $X \rightarrow Y$, не являющееся изоморфизмом.

Задачу описания и классификацию максимально симметричных атомов можно разбить на две подзадачи (см. [41]): нахождение симметричных атомов определенного типа (например, неприводимых или примитивных, см. определение ниже) и классификацию симметрических накрытий над атомами выделенного типа. Для решения последней подзадачи исследуем свойства симметрических накрытий.

Напомним следующие определения из теории гомотопий.

Определение 3.7. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — разветвленное накрытие связных топологических пространств. Обозначим через $Y_0 \subset Y$ дополнение к точкам ветвления накрытия f . Пусть $X_0 = f^{-1}(Y_0)$. Тогда ограничение $f|_{X_0}: X_0 \rightarrow Y_0$ будет обычным (неразветвленным) накрытием. Выберем произвольную точку $y_0 \in Y_0$ и точку $x_0 \in X_0$. В силу определения накрытия имеется гомоморфизм фундаментальной группы в группу перестановок слоя $\rho: \pi_1(Y_0, y_0) \rightarrow \text{Aut}(f^{-1}(y_0))$, переводящий гомотопический класс $[\gamma] \in \pi_1(Y_0, y_0)$ любой петли γ в биекцию множества $f^{-1}(y_0)$, сопоставляющую любой точке $x \in f^{-1}(y_0)$ конец кривой $\tilde{\gamma}$ на X_0 , выходящей из точки x и являющейся

поднятием кривой γ при накрытии f . Отображение ρ называется *гомоморфизмом монодромии*, а его образ $\rho(\pi_1(Y_0, y_0)) \subset H$ — *группой монодромии* накрытия f .

Аutomорфизмом (разветвленного) накрытия $f: X \rightarrow Y$ называется такой гомеоморфизм $a: X \rightarrow X$, что $f \circ a = f$.

В случае когда подгруппа $\pi = f_{\#}(\pi_1(X_0, x_0)) \subset \pi_1(Y_0, y_0)$, соответствующая накрытию f , является нормальной, накрытие называется *регулярным*.

Задача 3.5. Для регулярного накрытия f монодромия при обходе вдоль любой петли (однозначно) продолжается до автоморфизма накрытия, и для группы монодромии имеются естественные изоморфизмы $H \cong \text{Aut}(f) \cong \pi_1(Y_0, y_0)/\pi$, где $\text{Aut}(f)$ — группа автоморфизмов накрытия f .

Задача 3.6. Пусть X — максимально симметричный ориентированный атом, $\Gamma = \text{Aut}(X)$ — группа его симметрий, и пусть $H \subset \Gamma$ — подгруппа, свободно действующая на вершинах атома X . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) факторпространство $Y = X/H$ имеет единственную структуру ориентированного атома, для которой проекция $f: X \rightarrow Y$ является морфизмом;
- 2) проекция f является регулярным разветвленным накрытием с ветвлениями в центрах двумерных клеток разбиения X , и её группа монодромии изоморфна H ;
- 3) подгруппа H нормальна в Γ тогда и только тогда, когда Y является максимально симметричным;
- 4) если Y является максимально симметричным, то $\text{Aut}(Y) = \Gamma/H$ и для любых двух морфизмов $f_1, f_2: X \rightarrow Y$ существует единственная симметрия $g \in \text{Aut}(Y)$, такая что $f_2 = g \circ f_1$;
- 5) любой морфизм $f': X \rightarrow Y'$ атома X является регулярным разветвленным накрытием, причем его группой накрытия является некоторая подгруппа $H' \triangleleft \Gamma$, свободно действующая на вершинах X .

Задача 3.7. Пусть $f_1: X_1 \rightarrow Y$ и $f_2: X_2 \rightarrow Y$ — симметричные разветвленные накрытия и атомы X_1 и X_2 изоморфны. Тогда разветвленные накрытия f_1 и f_2 изоморфны, т. е. существует такой изоморфизм $g: X_1 \rightarrow X_2$, что $f_1 = f_2 \circ g$.

Утверждение задачи 3.6 можно «обратить» следующим образом:

Задача 3.8. Пусть Y — максимально симметричный атом, X — связное топологическое пространство и $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) f — конечнолистное разветвлённое накрытие, точки ветвления которого находятся в центрах двумерных клеток атома Y ;
- 2) разветвленное накрытие f регулярно;
- 3) для любого элемента $g \in \text{Aut}(Y)$ существует непрерывное отображение $\tilde{g}: X \rightarrow X$, такое что $f \circ \tilde{g} = g \circ f$.

Тогда на X существует единственная структура ориентированного атома, для которой $f: X \rightarrow Y$ — морфизм. При этом атом X максимально симметричен, а f — симметричное разветвленное накрытие.

Известно [59], что регулярное накрытие однозначно определяется гомоморфизмом монодромии. Мы можем переформулировать результат предыдущей задачи следующим образом.

Задача 3.9. Пусть Y — максимально симметричный атом, $Y_0 \subset Y$ получен из Y выкалыванием центров всех двумерных клеток, $y_0 \in Y_0$. Пусть $\rho: \pi_1(Y_0, y_0) \rightarrow H$ — некоторый эпиморфизм на конечную группу H и $f: X \rightarrow Y$ — отвечающее подгруппе $\ker \rho \triangleleft \pi_1(Y_0, y_0)$ регулярное разветвленное накрытие. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) f является симметричным разветвленным накрытием;
- 2) (условие эквивариантности для ρ) для любого $g \in \text{Aut}(Y)$ и некоторого (а значит, любого) пути γ , соединяющего в Y_0 точку y_0 с $g(y_0)$, корректно определён автоморфизм

$F(g, \gamma) \in \text{Aut}(H)$, такой что $\rho \circ \gamma_{\#} \circ g_{\#} = F(g, \gamma) \circ \rho$, где автоморфизм $\gamma_{\#} \circ g_{\#}$ определяется формулой

$$\gamma_{\#} \circ g_{\#}([\omega]) = [\gamma \cdot (g \circ \omega) \cdot \gamma^{-1}], \quad [\omega] \in \pi_1(Y_0, y_0);$$

- 3) для любого $g \in \text{Aut}(Y)$ и некоторого (а значит, любого) пути γ , соединяющего в Y_0 точку y_0 с $g(y_0)$, выполнено $\gamma_{\#} \circ g_{\#}(\ker \rho) = \ker \rho$.

Когда группа монодромии H регулярного разветвленного накрытия над Y абелева, эпиморфизм монодромии $\rho: \pi_1(Y_0, y_0) \rightarrow H$ (см. определение 3.7) сводится к эпиморфизму

$$\bar{\rho}: H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H.$$

В этом случае предыдущее утверждение можно переформулировать следующим образом.

Задача 3.10. Пусть Y — максимально симметричный ориентированный атом, H — конечная абелева группа, $\bar{\rho}: H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H$ — некоторый гомоморфизм и $f: X \rightarrow Y$ — регулярное разветвлённое накрытие, отвечающее подгруппе $\ker \bar{\rho} \subset H_1(Y_0; \mathbb{Z})$. Тогда f является симметричным разветвленным накрытием в том и только том случае, когда гомоморфизм $\bar{\rho}$ эквивариантен (относительно действия группы $\text{Aut}(Y)$ на $H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ и некоторого действия группы $\text{Aut}(Y)$ на H), т. е. существует гомоморфизм групп

$$\overline{\psi}_{\rho}: \text{Aut}(Y) \rightarrow \text{Aut}(H),$$

такой что $\overline{\psi}_{\rho}(g) \circ \bar{\rho} = \bar{\rho} \circ (\overline{\psi}(g))$ для любого $g \in \text{Aut}(Y)$.

Замечание 3.3. Условие эквивариантности гомоморфизма монодромии ρ достаточно проверять только для образующих группы симметрий $\text{Aut}(Y)$ атома.

Введем класс атомов, расширяющий класс неприводимых атомом, который оказывается полезным при описании атомов с заданным количеством белых клеток.

Определение 3.8. Максимально симметричный ориентированный атом X назовем *примитивным*, если выполнено одно из двух условий:

- атом содержит не менее двух белых клеток, и любые две его различные белые клетки имеют не более одной общей вершины,
- в атоме есть ровно одна белая клетка и эта клетка имеет ровно одну вершину.

Пусть атом X не является примитивным и содержит не менее двух белых клеток. Возьмём некоторую белую клетку $e \subset X$, и пусть $a \in \text{Aut}(X)$ — элементарный поворот клетки e . Занумеруем вершины клетки e в циклическом порядке: A_0, \dots, A_{d-1} , тогда $a(A_i) = A_{i+1}$. Пусть e_i — белая клетка, прилегающая к клетке e в i -той вершине. Так как атом не примитивен, то $e_0 = e_q$ для некоторого $0 < q \leq d-1$. В силу симметричности $e_i = e_{i+q}$ для всех i . Можно считать, что q — наименьший положительный период, так что $d = kq$. Рассмотрим преобразование $a^q \in \text{Aut}(X)$. Так как $a^q(e) = e$ и $a^q(e_i) = e_i$, то a^q есть вращение клетки e_i . Порядок элемента a^q равен k , следовательно, $a^q = (a_i^q)^{l_i}$, где $a_i \in \text{Aut}(X)$ — элементарный поворот клетки e_i , а l_i — некоторое число, взаимно простое с k . Из-за симметричности $l_0 \equiv \dots \equiv l_{q-1} \equiv l \pmod{k}$. Аналогично, $a_i^q = (a^q)^{l_i}$, откуда

$$l^2 \equiv 1 \pmod{k}.$$

Заметим, что равенство $(a')^q = (a'')^{ql}$ выполнено для любых двух смежных белых клеток e' и e'' . Поскольку X связно, рассуждая по индукции, мы получаем, что $(a')^q = a^q$ либо $(a')^q = a^{ql}$ для любой клетки $e' \subset X$.

Рассмотрим циклическую подгруппу $H = \langle a^q \rangle \subset \text{Aut}(X)$. Пусть $g \in \text{Aut}(X)$ и $g(e) = e'$. Тогда $gag^{-1} = a'$ и $ga^qg^{-1} = (a')^q$, что равно a^q либо $(a^q)^l$. Следовательно, $gHg^{-1} = H$, т. е. H — нормальная подгруппа. Так как элементы подгруппы H действуют как вращения на каждой белой клетке и поэтому не оставляют никакую вершину неподвижной, то H действует свободно на вершинах. Таким образом, мы можем рассмотреть симметричное разветвленное накрытие

$$p_X: X \rightarrow X/H.$$

Определение 3.9. Назовём разветвленное накрытие p_X отображением примитивизации, а ориентированный атом $X_{prim} = X/H$ примитивизацией ориентированного атома X .

Задача 3.11. Пусть X — максимально симметричный ориентированный атом, содержащий не менее двух белых клеток. Тогда

- 1) X_{prim} — примитивный максимально симметричный ориентированный атом;
- 2) если $f: X \rightarrow Y$ — симметричное разветвленное накрытие и Y примитивен, то существует единственный морфизм $\bar{f}: X_{prim} \rightarrow Y$, такой что $f = \bar{f} \circ p_X$.

Пример 3.4. Среди перечисленных выше атомов примитивными являются атомы A_{2^l} при $l \geq 0$, $B_1 = C_1$, D_n при $n \geq 1$, P_i при $1 \leq i \leq 5$, $T_{(s,t)}^\square$ и $T_{(s,t)}^\blacktriangle$ при $s + t \geq 3$, $T_{(s,t)}^\triangle$ при $s + t \geq 2$.

Задача 3.12. Максимально симметричные ориентированные атомы X и Y , содержащие не менее двух белых клеток, изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны ориентированные атомы X_{prim} и Y_{prim} и изоморфны отображения примитивизации p_X и p_Y .

Таким образом, для классификации максимально симметричных атомов достаточно перечислить все примитивные атомы и описать все отображения примитивизации.

Пусть дан примитивный максимально симметричный атом Y , содержащий не менее двух белых клеток. Рассмотрим задачу классификации максимально симметричных атомов X , таких что $X_{prim} = Y$. Пусть $e \subset Y$ — некоторая белая двумерная клетка, $A \in \bar{e}$ — её вершина, $e' \subset Y$ — чёрная клетка, смежная с клеткой e в вершине A . Обозначим $a \in \text{Aut}(Y)$ — элементарное вращение клетки e , $b \in \text{Aut}(Y)$ — центральная симметрия в вершине A . Пусть Y_0 — пространство, получаемое из Y выкалыванием центров двумерных клеток, $[\alpha] \in H_1(Y_0; \mathbb{Z}) = \pi$ — класс гомологий положительно ориентированной петли α вокруг центра клетки e , $[\beta] \in H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ — вокруг центра клетки e' .

Согласно утверждению задачи 3.10, атомы X классифицируются эквивариантными эпиморфизмами

$$\bar{\rho}: H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}/(k\mathbb{Z}),$$

такими что $\bar{\rho}([\alpha]) = q = 1 \in \mathbb{Z}_k$, где групповая операция в \mathbb{Z}_k обозначается сложением, а эквивариантность равносильна условию $\bar{\psi}_\rho(g) \circ \bar{\rho} = \bar{\rho} \circ (\bar{\psi}(g))$ для любого $g \in \text{Aut}(Y)$. Достаточно проверить эквивариантность для образующих a и b . Так как $\bar{\psi}(a)([\alpha]) = [\alpha]$ и $\bar{\rho}([\alpha]) = 1$ — образующая группы \mathbb{Z}_k , то $\bar{\psi}_\rho(a) = \text{id} \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_k)$, т. е. поворот a действует тождественным автоморфизмом на группе \mathbb{Z}_k . Положим $\bar{\rho}([\beta]) = r \pmod{k}$. Симметрия b действует на группе \mathbb{Z}_k по формуле $x \mapsto lx, x \in \mathbb{Z}_k$, где

$$l^2 \equiv 1 \pmod{k},$$

причём $l = 1$, если белые клетки нельзя разбить на два подмножества так, чтобы соседние клетки принадлежали разным подмножествам (т. е. есть петля нечетной длины на графе смежности белых клеток атома Y). Так как вращения в белых клетках транзитивно действуют на множестве чёрных клеток, то все чёрные клетки имеют одинаковую монодромию $r = \bar{\rho}([\beta]) \in \mathbb{Z}_k$ при обходе вокруг центра. С другой стороны, b переводит чёрные клетки в чёрные клетки, следовательно,

$$rl \equiv r \pmod{k}.$$

Воспользовавшись утверждением задачи 3.10, опишем отображения примитивизации над примитивными атомами на сфере и торе.

Упражнение 3.11. Отображения примитивизации $f: X \rightarrow Y$ над примитивным сферическим максимально симметричным ориентированным атомом Y с $S_w \geq 2$ белыми и S_b чёрными клетками классифицируются тройками (k, l, r) , $k \in \mathbb{N}$, $l, r \in \mathbb{Z}_k$, удовлетворяющими следующим условиям:

- $l^2 \equiv 1 \pmod{k}$, $rl \equiv r \pmod{k}$, $S_b r + (l + 1)S_w/2 \equiv 0 \pmod{k}$;
- $l = 1$, если нет шахматного разбиения белых клеток атома Y (т. е. разбиения белых клеток на два класса так, чтобы

клетки, имеющие общую вершину, принадлежали разным классам).

При этом k — степень разветвленного накрытия f , симметрия b действует на группе \mathbb{Z}_k умножением на l , r — монодромия при обходе вокруг центров чёрных клеток.

Упражнение 3.12. Отображения примитивизации $f: X \rightarrow Y$ над примитивным торическим максимально симметричным атомом $Y = T_{(s,t)}^\square$ квадратного типа (s, t) , $s > 0$, $t \geq 0$, классифицируются четверками (k, l, r, c) , $k \in \mathbb{N}$, $l, r, c \in \mathbb{Z}_k$, удовлетворяющими в зависимости от s и t условиям:

1) если $s + t$ нечетно, то k нечетно и

$$l = 1, \quad c = \frac{s + t + k}{2},$$

$$s(r + 1) \equiv 0 \pmod{k}, \quad t(r + 1) \equiv 0 \pmod{k};$$

2) если s и t четны, то

$$l^2 \equiv 1, \quad lr \equiv r, \quad 2c \equiv -(s + t)r,$$

$$\frac{s}{2}(2r + l + 1) \equiv 0, \quad \frac{t}{2}(2r + l + 1) \equiv 0,$$

где все сравнения рассматриваются по модулю k ;

3) если s и t нечетны и

(а) если k не делится на 4, то

$$l^2 \equiv 1, \quad lr \equiv r, \quad 2c \equiv -tr - 1 + \frac{s + 1}{2}(l + 1),$$

$$s\frac{l + 1}{2}(r + 1) \equiv 0, \quad t\frac{l + 1}{2}(r + 1) \equiv 0;$$

(б) если k делится на 4 и $s \equiv t \equiv 3 \pmod{4}$, то

$$l^2 \equiv 1, \quad lr \equiv r, \quad 2c \equiv -tr - 1 + \frac{s + 1}{2}(l + 1),$$

$$s\frac{l + 1}{2}(r + 1) \equiv 0, \quad t\frac{l + 1}{2}(r + 1) \equiv 0;$$

(с) если k делится на 4 и $s \equiv t \equiv 1 \pmod{4}$, то

$$l^2 \equiv 1, \quad lr \equiv r, \quad 2c \equiv -tr - 1 + \frac{s + 1}{2}(l + 1),$$

$$s \frac{l+1}{2}(r+1) \equiv \frac{l^2-1}{2}, \quad t \frac{l+1}{2}(r+1) \equiv \frac{l^2-1}{2};$$

(d) если k делится на 4 и $st \equiv 3 \pmod{4}$, то

$$\begin{aligned} l^2 &\equiv 1, \quad lr \equiv r, \quad 2c \equiv -tr - 1 + \frac{s+1}{2}(l+1), \\ s \frac{l+1}{2}(r+1) &\equiv 0, \quad t \frac{l+1}{2}(r+1) \equiv 0, \quad \frac{l^2-1}{2} \equiv 0. \end{aligned}$$

При этом k — степень разветвленного накрытия f ; r — монодромия при обходе вокруг центров черных клеток, c — монодромия при обходе вдоль одной из стандартных образующих тора; порядки ветвления в центрах белых (черных) клеток равны k ($\frac{k}{\text{НОД}(k,r)}$). Ориентированный атом X имеет род

$$g = (s^2 + t^2) \left(k - \frac{1 + \text{НОД}(k, r)}{2} \right) + 1,$$

сложность $2k(s^2 + t^2)$, $s^2 + t^2$ белых клеток и $(s^2 + t^2)\text{НОД}(k, r)$ черных клеток, причем каждая его белая клетка имеет $4k$ сторон, а каждая его черная клетка имеет $\frac{4k}{\text{НОД}(k,r)}$ сторон.

Аналогичные утверждения верны для торических атомов треугольного и шестиугольного типа.

Упражнение 3.13. Отображения типа примитивизации $f: X \rightarrow Y$ над примитивным торическим, максимально симметричным, ориентированным атомом $Y = T_{(s,t)}^\Delta$ треугольного типа (s, t) , $s > 0$, $t \geq 0$, классифицируются четверками (k, l, r, c) , $k \in \mathbb{N}$, $l, r, c \in \mathbb{Z}_k$, удовлетворяющими условиям:

$$\begin{aligned} l^2 &\equiv 1, \quad lr \equiv r, \quad s(r+l+1) \equiv 0, \quad t(r+l+1) \equiv 0, \\ 3c &\equiv \frac{s^2 + s + t^2 + t}{2}(r+l+1) + (l-1)(s-t), \quad (l+1)c \equiv 0, \end{aligned}$$

где сравнения рассматриваются по модулю k .

Ориентированный атом X имеет род

$$g = (s^2 + st + t^2) \frac{3k - 2 - \text{НОД}(k, r)}{2} + 1,$$

сложность $3k(s^2 + st + t^2)$, $2(s^2 + st + t^2)$ белых клеток и $(s^2 + st + t^2)\text{НОД}(k, r)$ черных клеток, причем каждая его белая клетка имеет $3k$ сторон, а каждая его черная клетка имеет $\frac{6k}{\text{НОД}(k, r)}$ сторон.

Упражнение 3.14. Отображения типа примитивизации $f: X \rightarrow Y$ над торическим максимально симметричным ориентированным атомом $Y = T_{(s,t)}^\Delta$ шестиугольного типа (s, t) , $s > 0$, $t \geq 0$, классифицируются парами (k, r) , $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_k$, удовлетворяющими условиям:

$$s(2r + 1) \equiv 0 \pmod{k}, \quad t(2r + 1) \equiv 0 \pmod{k}.$$

Ориентированный атом X имеет род

$$g = (s^2 + st + t^2) \left(\frac{3k}{2} - \frac{1 + \text{НОД}(k, r)}{2} \right) + 1,$$

сложность $3k(s^2 + st + t^2)$, $s^2 + st + t^2$ белых клеток и $2(s^2 + st + t^2)\text{НОД}(k, r)$ черных клеток, причем каждая его белая клетка имеет $6k$ сторон, а каждая его черная клетка имеет $\frac{3k}{\text{НОД}(k, r)}$ сторон.

Пример 3.5. Рассмотрим торический примитивный максимально симметричный атом $Y = T_{(2,1)}^\square$ квадратного типа $(2, 1)$. Из предыдущих задач вытекает, что отображения примитивизации $f: X \rightarrow Y$ над атомом однозначно задаются кратностью накрытия $k \geq 1$, которая должна быть нечетной. При этом $r \equiv -1$ и $c \equiv \frac{k+3}{2}$, а порядки ветвления в центрах всех двумерных клеток равны k . Ориентированный атом X имеет род $g = 5k - 4$, сложность $10k$, 5 белых клеток и 5 черных клеток, причем каждая его двумерная клетка имеет $4k$ сторон.

Пример 3.6. Рассмотрим максимально симметричный атом $Y = T_{(1,1)}^\Delta$ на торе треугольного типа $(1, 1)$. Тогда отображения примитивизации $f: X \rightarrow Y$ над атомом классифицируются тройками (k, l, c) , $k \in \mathbb{N}$, $l, c \in \mathbb{Z}_k$, которые удовлетворяют соотношениям

$$l^2 \equiv 1 \pmod{k}, \quad 3c \equiv (l + 1)c \equiv 0 \pmod{k}.$$

При этом $r \equiv -l-1$, порядки ветвления в центрах белых клеток равны k , а в центрах черных клеток — $\frac{k}{\text{НОД}(k, l+1)}$. Ориентированный атом X имеет род

$$g = 3 \frac{3k - \text{НОД}(k, l+1)}{2} - 2,$$

сложность $9k$, 6 белых клеток и $3\text{НОД}(k, l+1)$ черных клеток, причем каждая его белая двумерная клетка имеет $3k$ сторон, а черная — $\frac{6k}{\text{НОД}(k, l+1)}$ сторон.

3.4. Классификация максимально симметричных атомов

В настоящем разделе мы рассмотрим проблему классификации максимально симметричных атомов. В общей постановке данная проблема далека от решения, однако за последние сто лет было получено много частных результатов, которые давали список атомов с некоторыми заданными дополнительными свойствами. В качестве такого свойства наиболее часто выступает род атома. К настоящему моменту с использованием вычислительных средств получено полное описание максимально симметричных атомов рода $g \leq 15$ [20]. Ниже мы приводим ряд классификационных результатов для максимально симметричных атомов.

Начнем с описания атомов малого рода.

Задача 3.13. Используя формулу эйлеровой характеристики клеточного разбиения,

- 1) найдите возможные типы максимально симметрических атомов на сфере и на торе;
- 2) докажите, что количество различных максимально симметрических атомов заданного рода $g > 2$ конечно.

Максимально симметричные ориентированные атомы рода $g < 2$ классифицируются следующим образом.

Упражнение 3.15. На сфере существуют две бесконечные серии C_n, D_n , $n \geq 1$, где n — сложность атома, и пять особых случаев P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , отвечающих платоновым телам, при этом $C_2 = D_2$, а остальные атомы попарно различны.

Упражнение 3.16. На торе имеются три бесконечные серии максимально симметричных атомов: $T_{(s,t)}^\square$, $T_{(s,t)}^\triangle$, $T_{(s,t)}^\blacktriangle$, $s > 0$, $t \geq 0$ (торические атомы квадратного, треугольного и шестиугольного типов).

Перечислим теперь атомы с малым числом белых клеток ($S_w \leq 6$). Поскольку отображение примитивизации не меняет числа белых клеток, для описания атомов достаточно найти все примитивные атомы с малым количеством белых клеток и затем описать все отображения примитивизации над данными атомами.

Решение для первого пункта содержится в следующем утверждении.

Упражнение 3.17. Примитивные максимально симметричные атомы ровно с одной белой клеткой образуют серию (неприводимых) атомов A_{2^l} при $l \geq 0$.

При любом $2 \leq S_w \leq 6$ любой примитивный максимально симметричный атом ровно с S_w белыми клетками является сферическим или торическим, а потому является одним из примитивных атомов из примера 3.4. Таких ориентированных атомов ровно 10:

при $S_w = 2$ сферический ориентированный атом $B_1 = C_1$;

при $S_w = 3$ сферический ориентированный атом D_3 ;

при $S_w = 4$ два сферических ориентированных атома D_4 и P_1 (усеченный тетраэдр);

при $S_w = 5$ три ориентированных атома: сферический ориентированный атом D_5 и два торических ориентированных атома $T_{(2,1)}^\square$ и $T_{(1,2)}^\square$ квадратного типа $(1, 2)$ и $(2, 1)$;

при $S_w = 6$ три ориентированных атома: два сферических ориентированных атома D_6 и P_2 (усеченный куб) и торический ориентированный атом $T_{(1,1)}^\triangle$ треугольного типа $(1, 1)$.

Теперь для описания атомов с малым количеством белых клеток достаточно к результату предыдущей задачи применить утверждения задач 3.11—3.14.

Упражнение 3.18. Пусть X — максимально симметричный атом, имеющий ровно одну белую клетку. Тогда $X = A_n$, где n — сложность атома. Атом имеет род $g = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ и состоит из одной белой клетки ($2n$ -угольника) и одной либо двух черных

клеток ($2n$ -угольника или двух n -угольников) при нечетном и четном n соответственно.

Упражнение 3.19. Пусть X — максимально симметричный атом сложности n , имеющий ровно две белых клетки. Тогда его примитивизация X_{prim} — это сферический ориентированный атом, который принадлежит классу изоморфности $B_1 = C_1$. Атом X совпадает с одним из ориентированных атомов $K_2^{n,l}$, параметризованных парой целых чисел (n, l) , где $n \geq 1$ — сложность атома (равная степени k отображения примитивизации),

$$l^2 \equiv 1 \pmod{n}, \quad 0 \leq l < n.$$

Атом $K_2^{n,l}$ имеет 2 белые клетки и $\text{НОД}(l+1, n)$ черных; каждая его белая клетка является n -угольником, а каждая черная — $\frac{2n}{\text{НОД}(l+1, n)}$ -угольником. Род атома $K_2^{n,l}$ равен $\frac{n - \text{НОД}(l+1, n)}{2}$. При этом

$$K_2^{n,1} = B_n, \quad n \geq 2, \quad K_2^{n,n-1} = C_n, \quad n \geq 1.$$

Атомы $K_2^{n,l}$, отвечающие различным парам чисел (n, l) , попарно различны.

Упражнение 3.20. Пусть X — максимально симметричный атом сложности n , имеющий ровно три белых клетки. Тогда n нечетно и кратно 3, а примитивизация X_{prim} атома X — это сферический атом D_3 . Ориентированный атом X совпадает с атомом $K_3^n = O_3^n$, параметризованным нечетным натуральным числом $n \geq 3$, кратным 3 и равным сложности атома (причем степень отображения примитивизации равна $k = \frac{n}{3}$). Атом $K_3^n = O_3^n$ имеет 3 белые клетки и $2\text{НОД}(3, \frac{n/3+3}{2})$ черных; каждая его белая клетка является $\frac{2n}{3}$ -угольником, а каждая черная — $\frac{n}{\text{НОД}(3, \frac{n/3+3}{2})}$ -угольником. Род атома $K_3^n = O_3^n$ равен $\frac{n-1}{2} - \text{НОД}(3, \frac{n/3+3}{2})$.

Упражнение 3.21. Пусть X — максимально симметричный атом сложности n , имеющий ровно четыре белых клетки. Тогда его примитивизация X_{prim} — это один из сферических атомов P_1 и D_4 .

(А) Если $X_{\text{prim}} = P_1$, то n кратно 6 и атом X совпадает с одним из атомов $K_4^{n,r}$, параметризованных парой целых чисел

(n, r) , где $n \geq 6$ — сложность атома (причем степень отображения примитивизации равна $k = \frac{n}{6}$), $0 \leq r < \frac{n}{6}$, $4r + 4 \equiv 0 \pmod{\frac{n}{6}}$. У атома 4 белые клетки и $4\text{НОД}(r, \frac{n}{6})$ черных. Род атома $K_4^{n,r}$ равен $\frac{n}{2} - 2\text{НОД}(r, \frac{n}{6}) - 1$; каждая его белая клетка является $\frac{n}{2}$ -угольником, а каждая черная — $\frac{n}{2\text{НОД}(r, \frac{n}{6})}$ -угольником. Атомы $K_4^{n,r}$, отвечающие различным парам чисел (n, r) , попарно различны.

(Б) Если $X_{\text{prim}} = D_4$, то n кратно 4 и атом X совпадает с одним из атомов $O_4^{n,l,r}$, параметризованных тройкой целых чисел (n, l, r) , где $n \geq 4$ — сложность атома (причем степень отображения примитивизации равна $k = \frac{n}{4}$), $0 \leq l, r < k = \frac{n}{4}$,

$$l^2 \equiv 1 \pmod{k}, \quad 2(r + l + 1) \equiv 0 \pmod{k}.$$

Атом $O_4^{n,l,r}$ имеет род $\frac{n}{2} - \text{НОД}(\frac{n}{4}, r) - 1$, 4 белые клетки и $2\text{НОД}(\frac{n}{4}, r)$ черных; каждая его белая клетка является $\frac{n}{2}$ -угольником, а каждая черная — $\frac{n}{\text{НОД}(\frac{n}{4}, r)}$ -угольником. Атомы $O_4^{n,l,r}$, отвечающие различным тройкам чисел (n, l, r) , попарно различны.

Упражнение 3.22. Пусть X — максимально симметричный атом сложности n , имеющий ровно пять белых клеток. Тогда его примитивизация X_{prim} — это либо сферический атом D_5 , у которого граф смежности белых клеток изоморфен O_5 , либо торический ориентированный атом $T_{(2,1)}^{\square}$ или $T_{(1,2)}^{\square}$ квадратного типа $(2, 1)$ или $(1, 2)$, у которого граф смежности белых клеток равен K_5 .

(А) Если $X_{\text{prim}} = D_5$, то n нечетно и кратно 5 и атом X совпадает с атомом O_5^n , параметризованным нечетным натуральным числом $n \geq 5$, кратным 5 (причем степень отображения примитивизации равна $k = \frac{n}{5}$). Атом O_5^n имеет 5 белых и $2\text{НОД}(5, \frac{n/5+5}{2})$ черных клеток; каждая его белая клетка является $\frac{2}{5}n$ -угольником, а каждая черная — $\frac{n}{\text{НОД}(5, \frac{n/5+5}{2})}$ -угольником. Род атома O_5^n равен $\frac{n-3}{2} - \text{НОД}(5, \frac{n/5+5}{2})$.

(Б) Если $X_{\text{prim}} = T_{(2,1)}^{\square}$ — торический атом квадратного типа $(2, 1)$, то X совпадает с атомом K_5^n , параметризованным целым числом $n \geq 10$, которое сравнимо с 10 $\pmod{20}$ и равно сложности атома (при этом степень отображения примитивизации

равна $k = \frac{n}{10}$). Атом K_5^n имеет род $\frac{n}{2} - 4$, 5 белых клеток и 5 черных клеток, причем каждая его двумерная клетка имеет $\frac{2}{5}n$ сторон.

(В) Если $X_{\text{prim}} = T_{(1,2)}^\square$ — торический атом квадратного типа $(1, 2)$, то X совпадает с атомом \overline{K}_5^n , получающимся из ориентированного атома K_5^n заменой ориентации атома на противоположную.

Упражнение 3.23. Пусть X — максимально симметричный атом сложности n , имеющий ровно шесть белых клеток. Тогда его примитивизация X_{prim} — это либо сферический атом P_2 или D_6 , либо торический атом $T_{(1,1)}^\triangle$ треугольного типа $(1, 1)$. Для этих трех примитивных атомов графы смежности белых клеток суть P_3^1 (одномерный остов октаэдра), O_6 и $K_{3,3}$ соответственно.

(А) Если $X_{\text{prim}} = P_2$, то атом X совпадает с одним из атомов $P_2^{n,r}$, параметризованных парой целых чисел (n, r) , где $n \geq 12$ — сложность атома, n делится на 12, но не делится на 48 (причем степень отображения примитивизации равна $k = \frac{n}{12}$), $0 \leq r < \frac{n}{12}$, $8r + 6 \equiv 0 \pmod{\frac{n}{12}}$. Атом $P_2^{n,r}$ имеет род $\frac{n}{2} - 4\text{НОД}(r, \frac{n}{12}) - 2$, 6 белых и $8\text{НОД}(r, \frac{n}{12})$ черных клеток, каждая его белая клетка является $\frac{n}{3}$ -угольником, а каждая черная — $\frac{n/4}{\text{НОД}(r, \frac{n}{12})}$ -угольником. Атомы $P_2^{n,r}$, отвечающие различным парам чисел (n, r) , попарно различны.

(Б) Если $X_{\text{prim}} = D_6$, то n кратно 6 и атом X совпадает с одним из $O_6^{n,l,r}$, параметризованных тройкой целых чисел (n, l, r) , где $n \geq 6$ — сложность атома (причем степень отображения примитивизации равна $k = \frac{n}{6}$), $0 \leq l, r < k = \frac{n}{6}$,

$$l^2 \equiv 1 \pmod{k}, \quad rl \equiv r \pmod{k}, \quad 2r + 3(l + 1) \equiv 0 \pmod{k}.$$

Атом $O_6^{n,l,r}$ имеет род $\frac{n}{2} - \text{НОД}(\frac{n}{6}, r) - 2$, 6 белых и $2\text{НОД}(\frac{n}{6}, r)$ черных клеток; каждая его белая клетка является $\frac{n}{3}$ -угольником, а каждая черная — $\frac{n}{\text{НОД}(\frac{n}{6}, r)}$ -угольником.

Атомы $O_6^{n,l,r}$, отвечающие различным тройкам чисел (n, l, r) , попарно различны.

(В) Если $X_{\text{prim}} = T_{(1,1)}^\triangle$, то n кратно 9 и ориентированный атом X совпадает с одним из атомов $K_{3,3}^{n,l,c}$, параметризованных

тройкой целых чисел (n, l, c) , где $n \geq 9$ — сложность атома, n делится на 9 (причем степень отображения примитивизации равна $k = \frac{n}{9}$), $0 \leq l, c < \frac{n}{9}$ и

$$l^2 \equiv 1 \pmod{\frac{n}{9}}, \quad (l+1)c \equiv 0 \pmod{\frac{n}{9}}, \quad 3c \equiv 0 \pmod{\frac{n}{9}}.$$

Атом $K_{3,3}^{n,l,c}$ имеет род $\frac{1}{2}(n - \text{ЗНОД}(\frac{n}{9}, l+1)) - 2$, 6 белых клеток и $\text{ЗНОД}(\frac{n}{9}, l+1)$ черных клеток, причем каждая его белая клетка является $\frac{n}{3}$ -угольником, а каждая черная — $\frac{2n}{\text{ЗНОД}(\frac{n}{9}, l+1)}$ -угольником. Атомы $K_{3,3}^{n,l,c}$, отвечающие различным тройкам чисел (n, l, c) , попарно различны.

В заключение раздела сформулируем еще один классификационный результат (см. [41, Теорема 9.2]).

Задача 3.14. Пусть n — простое число или $n \in \{1, 4, 2p\}$, где p — простое число, $p \equiv 3 \pmod{4}$ и $p \neq 3$. Тогда серии A_n, B_n, C_n, D_n исчерпывают собой список всех классов изоморфности максимально симметричных ориентированных атомов сложности n (т. е. любой максимально симметричный ориентированный атом сложности n принадлежит одному из перечисленных классов изоморфности ориентированных атомов). Указание: воспользуйтесь результатами задач 3.4, 3.2, 3.5.

4. ХРОМАТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ И РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕТОК

4.1. Введение

Хроматическим числом метрического пространства M с *запрещенным расстоянием* (или *критическим расстоянием*) d мы назовем минимальную мощность множества S , для которого найдется отображение $f: M \rightarrow S$, такое что для любых двух точек $x, y \in M$ на расстоянии d мы имеем $f(x) \neq f(y)$. Иными словами, все пространство можно трактовать как бесконечный граф, у которого вершины — точки пространства, при этом ребром соединены те пары точек, которые находятся на расстоянии 1. **Обозначение:** $\chi(M, d)$. Для краткости мы будем писать $\chi(M)$ вместо $\chi(M, 1)$.

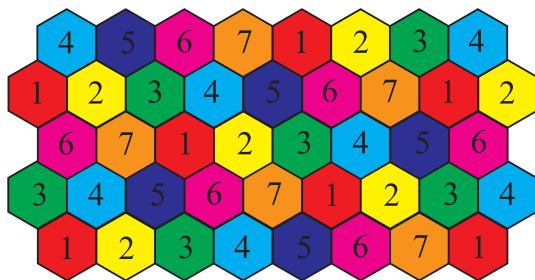


Рис. 67. Раскраска плоскости в семь цветов

Хроматические числа евклидовых пространств и линейных пространств над рациональными числами (в случае евклидовой нормы мы будем обозначать последние через \mathbb{Q}^n) изучались многими авторами, см., напр., работы [5, 9, 18, 42, 44, 60] и ссылки в них.

Хорошо известно, что $\chi(\mathbb{R}^1, 1) = 2$ и $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2, 1) \leq 7$. Несмотря на многолетние усилия первоклассных математиков, до сих пор неизвестно, сколько цветов нужно на самом деле для раскраски двумерной плоскости — 4, 5, 6 или 7. На рис. 67 показана возможность раскраски плоскости в семь цветов. Наибольшая диагональ шестиугольника равна $1 - \varepsilon$, т. е. немного меньше единицы.

На рис. 67 справа показано двумерное *веретено Мозера*, см. [57, 64]. Оно представляет собой граф с семью вершинами, который выглядит следующим образом: одна вершина A является вершиной двух равносторонних треугольников со стороной один: ABC и $AB'C'$; также имеются два равносторонних треугольника BCD и $B'C'D'$ со стороной 1, у которых точки D и D' также находятся друг от друга на расстоянии 1 (и соединены ребром). При попытке раскрасить этот граф-веретено в три цвета мы приходим к противоречию: A и D должны иметь один и тот же цвет; то же самое верно и про A и D' . С другой стороны, D и D' находятся на расстоянии 1, так что их цвета должны быть различными.

Для многомерных евклидовых пространств оценки сложнее, однако известно, что при фиксированном запрещенном расстоянии число цветов растёт экспоненциально (см. [61]).

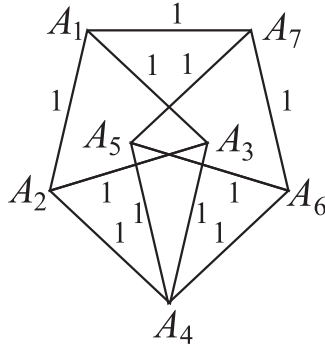


Рис. 68. Конфигурация семи точек, не допускающая раскраску из четырех цветов

Как мы видим, в случае вещественного пространства даже в малых размерностях ответ неизвестен, причем зазор между верхней и нижней оценками достаточно велик.

Целью настоящего раздела является рассмотрение более арифметического случая — целочисленных решеток. В данном случае одному из авторов [55] удалось получить ряд точных оценок для малых размерностей, а также асимптотические оценки при стремлении размерности к бесконечности.

Хроматические числа целочисленных решеток для норм l_2 и l_1 изучались, например, в работах З. Фюреди и Дж. Канг, где была получена нижняя экспоненциальная оценка для $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{r})$ для четных r в норме l_2 и аналогично для $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{r})$ для четных r в норме l_1 , однако этот результат относился к специальному случаю, когда r зависит от n (например, $r = 2q$, $n = 4q - 1$ для некоторого целого q). Некоторые более точные оценки были получены в работе [62].

Оказывается, что самые лучшие известные асимптотические верхние оценки для рациональных пространств — это в точности оценки для евклидовых пространств: хроматическое число для \mathbb{Q}^n ограничено сверху $(3 + o(1))^n$ при n , стремящемся к бесконечности [44, 60].

Приведем структуру раздела.

В следующем пункте мы имеем дело с маломерными целочисленными решетками, в частности, мы находим те случаи, когда хроматическое число равно трем (см. [55]).

Как оказывается, в размерностях 3 или 4 для некоторых запрещенных расстояний ответ до сих пор неизвестен. На наш взгляд, решение задач об определении хроматического числа, скажем для трехмерной целочисленной решетки с запрещенным расстоянием $\sqrt{30}$, может быть хорошим стимулом для начала научных исследований студентами младших курсов.

Основной результат настоящего раздела расположен в третьем пункте: мы доказываем, что для фиксированного m хроматическое число $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{2m})$ оценивается сверху как $c \cdot n^m$ в любой норме l_p , где c не зависит от n .

Этот результат контрастирует с оценкой на рациональные решетки, поскольку в рациональном случае доказано, что *нижняя* оценка является экспоненциальной.

Далее мы вспоминаем некоторые известные нижние оценки, происходящие из теоремы Фрэнкла–Уилсона, которые мы трактуем как оценки для целочисленных решеток.

Другим интересным случаем является изучение хроматических чисел рациональных пространств. Мы приводим новые верхние оценки для решеток над кольцами рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с 5 и 3 соответственно (теоремы 4.16 и 4.15 соответственно).

В качестве шага в сторону оценок хроматических чисел рациональных решеток мы рассматриваем решетки над рациональными числами с некоторыми запрещенными знаменателями.

Раздел завершается обсуждением и некоторыми открытыми проблемами.

В заключении введения приведем иллюстрацию А. Т. Фоменко, которая демонстрирует, как можно геометрически представлять некоторые проблемы теории чисел. Известна задача о представлении натуральных чисел $n > 2$ в виде сумм: $n = n_1^{r_1} + n_2^{r_2} + \dots + n_s^{r_s}$, где числа n_i — неотрицательные целые. Фиксируем произвольные значения $r > 3$ и $s > 2$. Тогда все натуральные числа разбиваются на два класса. К одному относятся натуральные числа, которые



Рис. 69. Иллюстрация А. Т. Фоменко

представляются в таком виде. Ко второму классу — числа, которые нельзя при заданных параметрах r и s представить в таком виде. Обобщенная проблема Варинга звучит так: как описать каждый из указанных классов? Задача эта сложна. На рис. 69 зритель видит некоторые геометрические образы, связанные с проблемой Варинга.

4.2. Маломерные целочисленные решетки

Следующая теорема очевидна, см., напр., [5].

Теорема 4.1. *Для любого числа k , представимого в виде суммы двух квадратов целых чисел, имеет место $\chi(\mathbb{Z}^2, \sqrt{k}) = 2$. В противном случае $\chi(\mathbb{Z}^2, \sqrt{k}) = 1$. Более того, то же самое утверждение верно для \mathbb{Z}^n .*

Для \mathbb{Z}^3 имеет смысл рассматривать лишь критические расстояния вида $\sqrt{4l+2}$, l — нечетное: в случае нечетных критических расстояний хроматическое число не превосходит двух по соображениям четности; случай, когда под квадратным корнем стоит $4l$, $l \in \mathbb{Z}$, сводится в \mathbb{R}^3 к случаю \sqrt{l} , так как любое

представление числа $4l$ в виде суммы трех квадратов состоит из трех квадратов четных чисел.

Теорема 4.2 (верхняя оценка: универсальная раскраска). *Для каждого $k = 4l + 2$, $l \in \mathbb{Z}$ имеет место $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{k}) \leq 4$.*

Доказательство. Рассмотрим множество точек на трехмерной решетке, у которых сумма всех трех координат является четной. Раскраска оставшихся точек будет получена из исходной раскраски сдвигом на вектор $(1, 0, 0)$.

Рассмотрим следующую «универсальную 4-раскраску» в цвета $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, где тройке целых координат точки из \mathbb{Z}^3 мы сопоставляем два числа, первое из которых представляет собой четность первой координаты, а второе — четность второй координаты.

Ясно, что если две точки на целочисленной трехмерной решетке находятся на расстоянии $\sqrt{4l + 2}$, то либо они имеют разную четность координаты z , либо они имеют разную четность координаты x . \square

Чтобы получить нижнюю оценку, нам нужно будет использовать веретено Мозера и его обобщения. Применяя гомотетию с целым коэффициентом к веретену Мозера, мы можем получить аналогичный граф с произвольным целочисленным запрещенным расстоянием. Этот граф мы также будем называть *веретенном*. Из этого следует, что хроматическое число с запрещенным расстоянием $k\rho$, k — целое, не меньше чем хроматическое число с запрещенным расстоянием ρ .

В размерности n вместо треугольников следует рассматривать пары n -мерных симплексов со стороной 1, (A, A_1, \dots, A_n) и (A, A'_1, \dots, A'_n) , имеющих общую точку A , а также точки B и B' , находящиеся на единичном расстоянии от всех $A_i, i = 1, \dots, n$ (от всех $A'_i, i = 1, \dots, n$, соответственно). При этом требуется также, чтобы B и B' были на расстоянии 1 (*веретено Мозера–Райского*). В этом случае граф не допускает $(n + 1)$ -раскраски; это приводит к доказательству того, что $\chi(\mathbb{R}^n, 1) \geq n + 2$.

В случае рациональных пространств или целочисленных решеток для конкретных критических расстояний часто невозможно явно построить такое веретено. Тем не менее рассуждение можно немного поправить, рассматривая *обобщенное веретено* (или *веретено Кунавского*). Пусть мы имеем две пары

треугольников $(A, B, C, D), (A, B', C', D')$ для некоторого критического расстояния в обозначениях, введенных ранее, причем точки D и D' не находятся на критическом расстоянии. Обозначим расстояние $l(D, D')$ через d . Предположим, что для любой собственной раскраски найдутся две точки \tilde{D}, \tilde{D}' разных цветов и изометрия пространства, переводящая $D \mapsto \tilde{D}, D' \mapsto \tilde{D}'$. Рассмотрим образы всех точек (A, B, C, D, B', C', D') и увидим, что их невозможно покрасить в три цвета.

Это утверждение (в несколько большей общности) для случая евклидовых пространств было доказано А.Б. Купавским [42]. Очевидно, изометрии в случае целочисленных решеток требуют более тонкого подхода, чем изометрии вещественных пространств.

Теперь, чтобы доказать нижние оценки для \mathbb{Z}^3 , нам придется часто использовать конструкцию обобщенного веретена (веретена Купавского). Заметим, что в \mathbb{Z}^3 равенство расстояний $l(D, D')$ и $l(\tilde{D}, \tilde{D}')$ не гарантирует наличия изометрии, переводящей D в \tilde{D} и D' в \tilde{D}' .

Для целочисленного случая нам понадобится следующая

Лемма 4.1 (целочисленный аналог леммы Купавского, см. [55]). *Пусть $A = (a_1, a_2, a_3)$ — точка в \mathbb{Z}^3 , такая что $a_1 + a_2 + a_3$ является четным и $\text{НОД}(a_1, a_2, a_3) = 1$. Предположим далее, что $m = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$ является четным для некоторых целых чисел b_1, b_2, b_3 , для которых $\text{НОД}(b_1, b_2, b_3) = 1$. Тогда для любой правильной раскраски пространства \mathbb{Z}^3 с запрещенным расстоянием \sqrt{m} найдутся точки $P, Q \in \mathbb{Z}^3$ и изометрия решетки \mathbb{Z}^3 , которая переводит начало координат в точку P , а точку A — в точку Q таким образом, что P и Q имеют разные цвета.*

Доказательство. Действительно, найдется цепочка X_0, X_1, \dots, X_k , состоящая из точек решетки \mathbb{Z}^3 , от точки $(0, 0, 0) = X_0$ к точке $(b_1, b_2, b_3) = X_k$, у которой все $X_i, i = 1, \dots, k-1$ таковы, что для каждых двух соседних точек X_i, X_{i+1} вектор $X_{i+1} - X_i$ получается из вектора (a_1, a_2, a_3) в результате изометрии пространства \mathbb{Z}^3 . Теперь, так как X_0 и X_k имеют разные цвета, найдутся соседние точки X_i и X_{i+1} , имеющие разные цвета.

Упражнение 4.1. Доказать существование такой цепочки.

Из упражнения 4.1 следует доказательство леммы. \square

Теорема 4.3. $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{2}) = 4$.

Упражнение 4.2. Доказать теорему 4.3, рассмотрев тетраэдр $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$.

Примеры запрещенного расстояния, для которого хроматическое число в трехмерном пространстве равно четырем, хорошо известны, см. [5]. В своей работе [5] М. Бенда и М. Перлес поставили вопрос о существовании запрещенного расстояния в \mathbb{Q}^3 , для которого хроматическое число равно 3.

Теорема 4.4 (см. [55]). Для $k = 10 + 12l$, $l \in \mathbb{Z}$ имеет место $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{k}) = 3$.

Доказательство. Легко можно проверить, что любое разложение числа $10 + 12l$, $l \in \mathbb{Z}$ в сумму трех квадратов целых чисел имеет вид $a^2 + b^2 + c^2$, где приведение по модулю 6 тройки чисел (a, b, c) совпадает с точностью до порядка с одной из троек: $(1, 3, 0)$, $(5, 3, 0)$, $(3, 3, 2)$, $(3, 3, 4)$.

Далее мы будем красить точки с четной суммой координат следующим образом: для точки с координатами x, y, z мы берем класс вычетов $x + y + z$ по модулю 6, что приводит нас к раскраске в три цвета. Аналогичным образом мы получаем раскраску в три цвета для тех точек, сумма координат которых нечетна. \square

Перейдем теперь к случаю тех запрещенных расстояний для \mathbb{Z}^3 , для которых хроматическое число равно четырем.

Теорема 4.5. Если $m = a^2 + ab + b^2$ для некоторых целых a, b , то $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{2m}) = 4$. В частности, пусть $p = 6k + 1$ — простое число (k — целое). Тогда $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{2p}) = 4$.

Доказательство. Действительно, предположим сначала, что $m = a^2 + ab + b^2$ для взаимно простых a, b .

Мы предположим, что наше пространство имеет хроматическое число 3 и попробуем прийти к противоречию. Предположим сначала, что ровно одно из чисел a и b является нечетным; без ограничения общности будем считать, что a нечетно, b четно.

Мы имеем $2m = (a^2 + b^2 + (a + b)^2)$. Таким образом, расстояние между двумя векторами равно $\sqrt{2m}$, если и только если

разности их координат равны $\pm a$, $\pm b$, $\pm(a+b)$ с точностью до порядка. Таким образом, у нас есть возможность выбора различных векторов для построения обобщенного веретена.

Рассмотрим сначала два треугольника ABC, BCD со следующими вершинами $A = (0, 0, 0)$, $B = (a, b, a+b)$, $C = (-b, a+b, a)$, $(a-b, a+2b, 2a+b) = D$.

Мы теперь можем построить другие пары треугольников с начальной вершиной $A = (0, 0, 0)$ посредством перестановки координат и добавления знака «минус» к a и/или к b . Например, имеется пара треугольников с концом $D' = (-a-b, -2a+b, -a+2b)$, противоположным A . Теперь легко видеть, что наибольший общий делитель $\text{НОД}(-a-b, -2a+b, -a+2b)$ равен 1 или 3. Если он равен 3, то, заменяя b на $-b$, мы получаем $\text{НОД}(-a+b, -2a-b, -a-2b) = 1$, что приводит нас к построению веретена.

В случае когда оба числа a, b являются нечетными, мы заметим, что та же самая пара треугольников может быть получена, если мы начнем с пары чисел $(a, a+b)$: число $(a+b)$ является четным.

В случае когда a и b не являются взаимно простыми, мы возьмем $c = \text{НОД}(a, b)$, $a = a'c$, $b = b'c$ и построим аналогичное веретено для подрешеток, состоящих из точек пространства со всеми координатами, делящимися на c .

Теперь мы применим лемму 4.1 и увидим, что после применения изометрии к \mathbb{Z}^3 образы точек \tilde{D} и \tilde{D}' будут иметь различные цвета. Беря образы всех точек A, B, C, D, B', C', D' , мы получим противоречие с тем, что хроматическое число пространства равно 3. \square

Собирая вместе приведенные выше результаты о раскрасках пространства \mathbb{Z}_3 , мы получаем следующую теорему

Теорема 4.6 (см. [55]). *Имеют место следующие оценки:*

- 1) $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{m}) = 2$, если и только если m нечетно и представимо в виде суммы двух квадратов;
- 2) для четного m $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{m})$ равно либо 3, либо 4;
- 3) если $m \equiv 10 \pmod{12}$, то $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{m}) = 3$;
- 4) если $m = 2(a^2 + b^2 + ab)$, $a, b \in \mathbb{Z}$, то $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{m}) = 4$;

$$5) \chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{m}) = \chi(\mathbb{Z}^3, 2\sqrt{m}).$$

Единственное из утверждений приведенной выше теоремы, которое мы пока не доказали, — это 2. Мы докажем его в несколько шагов:

а) достаточно доказать его для $m = 2p$ при простом p ;

б) будем считать, что $m = 2p = a^2 + b^2 + c^2$, где $\text{НОД}(a, b, c) = 1$;

в) из упражнения 4.1 следует, что существует цепочка в \mathbb{Z}^3 , соединяющая начало координат с точкой $(0, 1, 1)$, у которой любые два соседних узла находятся на расстоянии \sqrt{m} ;

г) если найдется цепочка вида в) нечетной длины l , то мы можем легко построить «такую же» цепочку из начала координат в $(1, 0, 1)$, а также из $(1, 0, 1)$ в $(0, 1, 1)$. Это приводит к построению замкнутой цепочки длины $3l$, что противоречит возможности раскраски пространства в два цвета;

д) предположим, что цепочка из пункта в) имеет четную длину. Тогда мы можем построить цепочку в \mathbb{Z}^3 четной длины (с длиной звена \sqrt{m}) от начала координат до точки, у которой сумма координат четна. В частности, имеется цепочка четной длины от начала координат до точки $(a + 1, b, c + 1)$. Таким образом, имеется цепочка нечетной длины от начала координат до $(1, 0, 1)$. Из пункта г) следует противоречие с раскраской в 2 цвета.

Теорема доказана.

Первое критическое расстояние, не охватываемое доказанной теоремой, — это $\sqrt{30}$.

Гипотеза 4.1. В трехмерном пространстве нет других примеров с хроматическим числом 3, иными словами, $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{m}) = 3$ имеет место только для тех m , которые могут быть представлены в виде $2^{2k} \cdot l$, где $l \equiv 10 \pmod{12}$.

Перейдем теперь к случаям размерностей 4 и 5.

Теорема 4.7 (см. [55]). *Имеют место следующие утверждения:*

$$1) \text{ (А.Б. Купавский) для } k = 4l + 2, l \in \mathbb{Z}, \text{ мы имеем } \chi(\mathbb{Z}^4, \sqrt{k}) \leq 4, \chi(\mathbb{Z}^5, \sqrt{k}) \leq 8;$$

$$2) \chi(\mathbb{Z}^4, \sqrt{8k}) = \chi(\mathbb{Z}^4, \sqrt{2k});$$

3) $\chi(\mathbb{Z}^4, \sqrt{4}l) \leq 4$ при нечетных l .

Доказательство. Для доказательства первого утверждения нам достаточно раскрасить единичный куб $\{0, 1\}^4$ (соответственно, $\{0, 1\}^5$), который отвечает четностям координат. Действительно, если две точки в \mathbb{Z}^4 (соответственно, в \mathbb{Z}^5) имеют одну и ту же четность у всех координат, то квадрат расстояния между этими точками делится на четыре. Кроме того, достаточно раскрасить только «половину» куба, состоящую из тех точек, сумма координат которых четна («нечетная» половина куба рассматривается аналогично). Таким образом, в \mathbb{Z}^4 (на самом деле, в $\{0, 1\}^4$) мы раскрашиваем 8 точек (a, b, c, d) , $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2$, $a + b + c + d \equiv 0$ по модулю 2 в четыре цвета таким образом, что каждые две противоположные точки (x, y, z, t) и $(1 - x, 1 - y, 1 - z, 1 - t)$ имеют один цвет. В пятимерном случае достаточно использовать приведенную выше раскраску для четырехмерного подкуба и увеличить число цветов в два раза, добавив к цвету \mathbb{Z}_2 -компоненту, отвечающую за пятую координату: итого мы получим восемь цветов.

Второй результат следует из того факта, что сумма квадратов четырех целых чисел, из которых, по крайней мере, одно является нечетным, не может делиться на восемь, так что проблема сводится к случаю, когда все координаты являются четными.

Верхняя оценка в третьем случае получается следующим образом. В качестве цвета мы возьмем пару классов вычетов. Первый класс равен четности первой координаты. Второй класс равен сумме четностей $\left[\frac{x_i}{2}\right]$ по всем $i = 1, 2, 3, 4$. \square

Замечание 4.1. Заметим сначала, что приведенная выше оценка дает *универсальную раскраску* для всех запрещенных расстояний тех типов, которые приведены в формулировке теоремы. Приведенное выше доказательство первого утверждения может быть обобщено на высшие размерности.

4.3. Для каждого m рост числа $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{2}m)$ полиномиален по n и имеет степень не больше m

Хорошо известно, см., напр., [60], что для рациональных пространств хроматическое число растет экспоненциально с ростом размерности. Ниже мы доказываем, что в случае целочис-

ленных решеток при фиксированном запрещенном расстоянии это никогда не имеет места.

Начнем с хорошо известной теоремы о целочисленных решетках, см., напр., [5]. Раскраска посредством скалярного произведения будет далее использоваться в доказательстве основной теоремы.

Следующая теорема хорошо известна.

Теорема 4.8. *Рост хроматического числа $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{2})$ линеен при стремлении n к бесконечности.*

Доказательство. Чтобы получить нижнюю оценку (см. [30]), рассмотрим множество точек в \mathbb{Z}^n , у которых в точности одна координата равна ± 1 , а остальные равны нулю. Ясно, что это множество не может быть покрашено менее чем в n цветов при $n \geq 2$.

Верхняя оценка достигается посредством следующей раскраски. В \mathbb{Z}^n выберем вектор $v = (1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1)$. Для каждого $u \in \mathbb{Z}^n$ рассмотрим скалярное произведение $\langle u, v \rangle$. Ясно, что если два целочисленных вектора u_1, u_2 находятся на расстоянии $\sqrt{2}$, то мы имеем $\langle u_1, v \rangle \neq \langle u_2, v \rangle$. Более точно, разность значений $\langle \cdot, v \rangle$ для этих векторов является целым числом, модуль которого расположен между 2 и $4n - 4$. Следовательно, если мы возьмем класс вычетов этого скалярного произведения по модулю $4n - 2$ в качестве раскраски, мы получим правильную раскраску в $(2n - 1)$ цветов. \square

Идея раскрасок посредством скалярных произведений по модулю некоторых целых чисел будет далее использоваться в более сложных ситуациях. В частности, мы применим ее для доказательства нашего главного результата — полиномиальной верхней оценки для хроматического числа целочисленной решетки с фиксированным запрещенным расстоянием.

Теорема 4.9. *Для каждого фиксированного t верхняя оценка для $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{2t})$ в любой норме l_α полиномиальна по n и имеет степень не больше t .*

Перед тем как доказывать эту теорему в общем случае, который опирается на некие глубокие факты из аддитивной комбинаторики, построим явную раскраску для некоторого частного случая.

Утверждение 4.1 (см. [55]). $\chi(\mathbb{Z}^n, 2)$ растет квадратично при $n \rightarrow \infty$.

Докажем верхнюю оценку. Нижняя оценка на самом деле хорошо известна и будет доказана позже.

Пусть n — целое число. Пусть p — простое число, причем $p \leq n \leq 2p$.

Мы докажем квадратичную верхнюю оценку для простого p , которая очевидно влечет квадратичную верхнюю оценку при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим множество $(k, a^k \pmod{p})$ из p элементов из абелевой группы $S = \{0, \dots, p-1\} \times \{0, \dots, p-1\}$, где k пробегает $\{1, \dots, p-1\}$, а a является первообразным корнем степени $(p-1)$ из единицы в \mathbb{Z}_p^* .

Можно легко заметить, что для любых четырех различных элементов a, b, c, d из описанного выше подмножества мы имеем $a - b \neq c - d$. Действительно, если для некоторых $e, f, g, h \in \mathbb{Z}_p$ имеет место $f - e = h - g$ и $h \neq f, e \neq g$, то мы видим, что $a^f - a^e$ отличается от $a^h - a^g$ умножением на a^{f-h} .

Мы построили множество (абелеву группу), в котором нет решений уравнения $a - b = c - d$ при различных a, b, c, d . Модифицируем теперь это множество, чтобы избавиться от решения еще некоторых (более простых) уравнений.

Рассмотрим множество $S' \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ целых чисел $(4k - 3, a^k \pmod{p})$, где $a^k \pmod{p}$ рассматривается как целое число между 0 и $p-1$ (здесь мы пользуемся включением множеств $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}$).

Лемма 4.2. Для любых четырех различных элементов $a, b, c, d \in S'$ мы имеем:

- 1) никакая из сумм $\pm a \pm b \pm c \pm d$ не равна нулю;
- 2) абсолютное значение первой координаты суммы $\pm a \pm b \pm c \pm d$ не превосходит $16p$, а абсолютное значение второй координаты суммы не превосходит $4p$.

Доказательство. Второе утверждение очевидно.

Выше мы доказали, что из $a - b = c - d$ для $a, b, c, d \in S'$ следует, что $a = c$ или $a = b$. Уравнение $a + b + c + d = 0$ не имеет решений, поскольку a, b, c, d положительны, а неравенство $a + b + c - d \neq 0$ вытекает из рассмотрения соответствующих вычетов по модулю 4. \square

Рассматривая теперь S' как подмножество абелевой группы $S'' = \mathbb{Z}_{16p+1} \times \mathbb{Z}_{4p+1}$, мы видим, что для любых четырех различных элементов $a, b, c, d \in S' \subset S''$ имеет место $\pm a \pm b \pm c \pm d \neq 0 \in S''$. Мы назовем p элементов, образующих подмножество $S' \subset S''$, *отмеченными элементами* из S'' . Обозначим эти отмеченные элементы из S'' через q_1, \dots, q_p . Они образуют вектор, который мы будем использовать для построения раскраски.

Для каждого вектора $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{Z}^p$ пусть x'_j — класс вычетов по модулю p от x_j , рассмотренный как целое число от 0 до $p - 1$. Вектору x мы сопоставим элемент (цвет) $f(x) = \sum x'_j \cdot q_j \in S''$ из группы S'' .

Лемма 4.3. *Если расстояние между двумя точками x, \tilde{x} равно двум, то $f(x) \neq f(\tilde{x})$ в S'' .*

Доказательство. Действительно, так как все элементы q_i ненулевые, то две точки, у которых все координаты, кроме одной, совпадают, а одна координата отличается на ± 2 , имеют разные цвета. Если у двух точек совпадают все координаты, кроме четырех, а каждая из четырех оставшихся координат отличается на ± 1 , то эти точки имеют разные цвета в силу леммы 4.2. \square

Принимая теперь во внимание, что $|S''|$ имеет порядок роста n^2 при стремлении n к бесконечности, мы получаем утверждение 4.1.

Возвратимся теперь к доказательству теоремы 4.9. Нам нужно доказать эту теорему в l_2 -норме. Конструкция, которую мы будем использовать в доказательстве, на самом деле одна и та же для всех норм l_α .

Начнем с нижней оценки. Пусть \mathcal{M} — подмножество множества целых чисел, имеющее мощность $N = |\mathcal{M}|$. Фиксируем целое число m . Следующий вопрос исследовался многими авторами, см., напр., работы [58, 68, 69] и ссылки в них.

Какова наибольшая мощность подмножества $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, для которого имеются нетривиальные решения уравнения

$$a_1 + \dots + a_m - a_{m+1} - \dots - a_{2m} = 0, \quad (1)$$

где $a_i \in \mathcal{M}$, $i = 1, \dots, 2m$? Что можно сказать в случае, когда N стремится к бесконечности?

Ответ зависит, конечно, от того, как мы определим *нетривиальное решение*. Мы возьмем определение из работы [58] (множества, не имеющие нетривиальных решений аналогичных линейных уравнений, называются *множествами Сидона*).

Решение уравнения (1) назовем *тривиальным*, если имеется в точности l различных элементов a_j , так что, если мы фиксируем одно конкретное a_j и положим все a_k , не равные a_j , равными 0, мы по-прежнему будем иметь решение.

Например, при $m = 4$ решение $a_1 = a_3 = 1$, $a_2 = a_4 = 2$ является тривиальным, в то время как решение $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = a_4 = 1$ нетривиально.

В работе [58] доказано следующее утверждение

Утверждение 4.2. *Имеется бесконечная последовательность абелевых групп M_N и подмножеств в этих группах M'_N , для которых нет нетривиальных решений уравнения (1), где переменные принадлежат подмножеству, причем n растет как $(1+o(1))N^{1/m}$, где N и n обозначают мощности множеств M_N и M'_N соответственно.*

Заметим, что если N достаточно велико, то мы можем считать, что $n > N^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{2}$. Следовательно, если мы берем достаточно большое конкретное n , то N может быть выбрано не больше, чем $2n^m = O(n^m)$.

Заметим теперь, что нетривиальные решения уравнения (1) могут быть рассмотрены так же, как и решения многих других уравнений, см. ниже.

Например, если в некотором множестве $M' \subset M$ мы имеем три элемента a, b, c , образующие арифметическую прогрессию $c + a = 2b$, то это приводит к нетривиальному решению уравнения (1): мы полагаем $a_1 = a$, $a_2 = c$, $a_3 = b$, $a_4 = b$.

Более того, имеет место следующая очевидная

Лемма 4.4. *Пусть $k < m$, и пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — набор целых чисел, таких что $\sum |\alpha_i| < m$ и $\sum \alpha_i = 0$. Тогда любое решение системы*

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i b_i = 0 \quad (2)$$

приводит к решению системы (1).

Доказательство. Действительно, соберем отдельно все положительные α_i и отдельно — все отрицательные α_j . Пусть (b_1, \dots, b_k) — решение уравнения (2). Для каждого положительного α_i выберем α_i штук переменных из числа a_1, \dots, a_m и положим их равными b_i , а для каждой переменной α_j с отрицательным значением мы положим $-\alpha_j$ элементов из числа a_{m+1}, \dots, a_{2m} равными b_j . Это возможно, так как $\sum |\alpha_i| < m$. Теперь мы полагаем оставшиеся a_k равными 0. Утверждение следует. \square

Теперь мы модифицируем множество M' следующим образом. Пусть $\widetilde{M}' = M' + s$, где прибавление s означает сдвиг на достаточно большое положительное число. Это число выбирается таким образом, чтобы отношение между минимальным модулем элемента из $M' + s$ и максимальным модулем элемента из $M' + s$ было строго больше чем $\frac{m-2}{m}$. Сначала мы рассматриваем M' как подмножество множества \mathbb{N} натуральных чисел. Ясно, что s растет линейно с ростом m . Это делается для того, чтобы избежать решений уравнений (2), где переменные берутся из M' , а сумма коэффициентов не равна нулю. Далее мы «расширяем» группу M ; новая группа \widetilde{M} также будет циклической группой $\mathbb{Z}_{2f(s)}$, где $f(s)$ — натуральное число, большее, чем модуль максимального элемента из M , умноженного на $m + 1$.

Теорема 4.10. Пусть $\beta_i, i = 1, \dots, k$ — такие коэффициенты, что сумма $\sum |b_i|$ четна и $\sum \beta_i \neq 0$. Тогда у уравнений (1), (2) нет нетривиальных решений \widetilde{M}' ; кроме того, для того же подмножества нет нетривиальных решений уравнений

$$\sum_{i=1}^k \beta_i c_i = 0. \quad (3)$$

Иными словами, построив абелеву группу и подмножество, для которых нет решений тех уравнений (1) и (2), у которых сумма коэффициентов равна нулю, мы можем легко «запретить» решения всех уравнений, где сумма коэффициентов не равна нулю, «сдвигая» наши множества на некоторое натуральное число $\mu(m)$, не зависящее от n .

Теперь мы готовы доказать основную теорему. Заметим сначала, что любое разложение четного n в сумму квадратов — это

набор целых чисел, которые могут служить коэффициентами уравнений типа (2) или (3). Более того, подставляя элементы из $\widetilde{\mathcal{M}}'$, рассмотренные как целые числа, в уравнения (1), (2) или (3), мы получаем целое число, абсолютное значение которого меньше чем $\lambda(m) \cdot n^m$, где $\lambda(m)$ — это некоторая функция от m , не зависящая от n .

Фиксируем четное натуральное число m .

Рассмотрим все возможные представления числа n в виде суммы квадратов $\sum n_i^2$ целых чисел. Такое представление может содержать не более n слагаемых, более того, сумма этих слагаемых четна.

Выберем теперь множество \mathcal{M}' мощности n и абелеву группу $\mathcal{M}' \supset \mathcal{M}$ мощности $|\mathcal{M}| = O(n^m)$ так, чтобы уравнения (1), (2) не имели решения среди элементов этого множества. Сдвигая на достаточно большое целое число множество \mathcal{M} и подмножество \mathcal{M}' в нем, мы по-прежнему не будем иметь решения уравнения (3) в подмножестве.

Обозначим элементы из $\widetilde{\mathcal{M}}'$ на x_1, \dots, x_n и фиксируем вектор (x_1, \dots, x_n) из \mathbb{Z}^n .

Сопоставим теперь элементам (векторам) $y \in \mathbb{Z}^n$ целые числа $\langle x, y \rangle$. Если две точки y, y' находятся на расстоянии $\sqrt{2m}$, то $\langle y - y', x \rangle \neq 0$. Действительно, координаты разности $y - y'$ образуют разложение числа n в сумму квадратов, а числа x_1, \dots, x_n выбраны так, что для них не выполняется ни одно из уравнений (2), (3). Таким образом, скалярные произведения для таких точек различны.

Кроме того, $\langle y'_1, x \rangle$ не превосходит числа $(\max_{x \in \widetilde{\mathcal{M}}} |x|) \cdot m$, которое растет как $O(n^m)$.

Таким образом, беря класс вычетов этого скалярного произведения по модулю $\lambda(m) \cdot n^m + 1$, мы получаем раскраску пространства \mathbb{Z}^n с запрещенным расстоянием $\sqrt{2m}$ в норме l_2 .

Доказательство для любой другой нормы l_α с той же самой оценкой полностью аналогично.

4.4. Нижние оценки для хроматических чисел целочисленных решеток

Мы получили верхние полиномиальные оценки для хроматических чисел пространств \mathbb{Z}^n . Покажем теперь, что для мно-

гих фиксированных m показатели степеней в оценках $c \cdot n^m$ для $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{2m})$ являются оптимальными.

Пусть S — метрическое пространство, и пусть d — критическое расстояние. Назовем (M, D) -критической конфигурацией подмножество $\mathcal{M} \subset S$ мощности M , такое что для любого подмножества $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, для которого никакие две точки $a, b \in \mathcal{M}'$ не находятся на критическом расстоянии d , мощность $|\mathcal{M}'|$ не превосходит D .

Согласно принципу Дирихле, если существует критическая (M, D) -конфигурация в S , то $\chi(S, d) \geq \chi(\mathcal{M}, d) \geq \frac{M}{D}$.

Нижняя оценка для $\chi(\mathbb{Z}^n, 2)$ хорошо известна. Мы приведем ее здесь для целостности картины.

Мы построим конкретную критическую конфигурацию. Фиксируем натуральное число n , и пусть $S = \mathbb{Z}^n$, \mathcal{M} — множество всех точек из \mathbb{Z}^n , у которых три координаты равны единице, а остальные равны нулю, а \mathcal{M}' — подмножество множества \mathcal{M} , в котором никакие две точки не находятся на расстоянии два. Ясно, что $|\mathcal{M}| = \binom{n}{3}$. Любая точка из \mathcal{M}' может быть рассмотрена как тройка координат, равных единице (все остальные координаты этой точки равны нулю). Теперь тот факт, что две точки x и y из \mathcal{M}' находятся на расстоянии, неравном двум означает в точности, что соответствующие им тройки либо не пересекаются, либо имеют в точности две общие координаты. Теперь легко видеть, что количество элементов из \mathcal{M}' , для которых это условие выполняется, не превосходит n . Таким образом, \mathcal{M} является (M, D) -критической конфигурацией, где $M = |\mathcal{M}| = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ и $D = n$.

Следовательно, хроматическое число для \mathbb{Z}^n с критическим расстоянием 2 не меньше чем $\frac{(n-1)(n-2)}{6}$.

Методы нахождения (M, D) -критических конфигураций широко используются для нахождения нижних оценок для хроматических чисел решеток в произвольных размерностях, при этом главным инструментом для нахождения таких конфигураций является теорема Фрэнкла–Уилсона [28]; дальнейшие модификации теоремы Фрэнкла–Уилсона см. в работе [60].

Теорема 4.11 (теорема Фрэнкла–Уилсона). *Фиксируем n -элементное множество $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$. Пусть p — степень*

простого числа, и пусть a — натуральное число, такое что $a < 2p$. Пусть, далее, \mathcal{M} — набор a -элементных подмножеств множеств \mathcal{N} , таких что мощность пересечения любых двух из них не равна $a - p$. Тогда $|\mathcal{M}| \leq \binom{n}{p-1}$.

Модификации теоремы Фрэнкла–Уилсона можно прочесть в работе [63].

Мы сейчас покажем, что для многих четных чисел $2m$ показатель m в верхней оценке n^m для хроматического числа $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{2m})$ является оптимальным для m , равного степени простого числа. Для этого мы будем рассматривать подмножества множества \mathcal{N} как элементы из \mathbb{Z}^n , координаты которых равны 1 и 0 (i -я координата равна единице, если и только если $i \in \mathcal{N}$).

Приводимый ниже факт можно прочесть, например, в работе [60]; однако в точности это же рассуждение ранее использовалось для оценки хроматического числа для \mathbb{R}^n , а не для \mathbb{Z}^n .

Теорема 4.12. Пусть p — степень простого числа. Тогда

$$\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{2p}) \geq \frac{\binom{n}{2p-1}}{\binom{n}{p-1}}.$$

Доказательство. Действительно, достаточно рассмотреть все векторы длины $2p - 1$ и запретить векторам иметь «пересечение» длины $p - 1$, или, эквивалентно, запретить векторам быть на расстоянии $\sqrt{2p}$. Отсюда получаем требуемое. \square

Таким образом, если p — степень простого числа, то мы доказали, что рост $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{2p})$ является полиномиальным по n степени p .

4.5. Оценки для рациональных решеток \mathbb{Q}^n

Теорема 4.13. Для рационального k , которое может быть представлено в виде суммы двух квадратов рациональных чисел, мы имеем

$$\chi(\mathbb{Q}^2, \sqrt{k}) = 2.$$

В противном случае

$$\chi(\mathbb{Q}^2, \sqrt{k}) = 1.$$

Пусть $m = \frac{2}{q}\sqrt{l}$, где l — нечетное число, представимое в виде суммы двух квадратов целых чисел. Тогда

$$\chi(\mathbb{Q}^3, m) = 2, \quad \chi(\mathbb{Q}^4, m) \leq 4.$$

Доказательство. Утверждения, относящиеся к \mathbb{Q}^2 , очевидны. Перейдем теперь к \mathbb{Q}^3 . Без ограничения общности мы можем считать, что $m = \sqrt{l}$.

Раскрасим пространство \mathbb{Q}^3 в два цвета следующим образом. Пусть $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$, и пусть d — минимальный общий знаменатель чисел a, b, c . Запишем $a = \frac{a'}{d}$, $b = \frac{b'}{d}$, $c = \frac{c'}{d}$. В качестве цвета мы возьмем вычет по модулю два числа $a' + b' + c'$. Очевидно, что если две точки находятся на расстоянии \sqrt{l} , то они имеют разные цвета.

Заметим теперь следующее. Если хотя бы одно из чисел $a, b, c \in \mathbb{Q}$ имеет четный знаменатель в приведенном виде, то сумма квадратов чисел a, b, c не может быть целым числом. Аналогично, если хотя бы один из трех знаменателей содержит в качестве множителя 2^k , то сумма трех квадратов не может быть квадратом рационального числа, знаменатель которого содержит степень двойки, меньшую чем k .

Теперь мы используем тот факт, что числа, имеющие разные степени двойки в знаменателях, «не взаимодействуют»: сумма квадратов трех целых чисел, по крайней мере одно из которых нечетно, не может быть четной.

Теперь мы продолжим эту раскраску на те точки рациональной решетки, у которых координаты имеют четные знаменатели. Мы сначала сдвинем точки исходной решетки (с их цветами) на векторы $(\frac{1}{2}, 0, 0)$, $(0, \frac{1}{2}, 0)$, $(0, 0, \frac{1}{2})$; далее мы сдвинем нашу раскраску на координатные векторы длины $\frac{1}{4}$ и т. д.

Чтобы получить оценку для хроматического числа пространства \mathbb{Q}^4 , мы сначала раскрасим точки, у которых ни одна из координат не имеет (в приведенной форме) знаменателя, делящегося на четыре. Каждый вектор v такого вида может быть записан как $(\frac{a}{2s}, \frac{b}{2s}, \frac{c}{2s}, \frac{d}{2s})$, где s — некоторое нечетное число

(возможно, некоторые из чисел a, b, c, d четные). Такой точке мы сопоставим цвет $\alpha(v)$, равный классу вычета элемента a по модулю 2.

Пусть $v_1 = (\frac{a}{2s}, \frac{b}{2s}, \frac{c}{2s}, \frac{d}{2s})$ и $v_2 = (\frac{a'}{2t}, \frac{b'}{2t}, \frac{c'}{2t}, \frac{d'}{2t})$ — два таких вектора; t и s — нечетные числа. Если $|v_1 - v_2| = l$, то имеет место одна из возможностей: либо все числа $a - a', b - b', c - c', d - d'$ нечетные (в этом случае $\alpha(v) \neq \alpha(v')$), либо все эти числа четные.

Определим теперь $\beta(v)$ следующим образом. Сначала мы определим $\beta(v)$ для точек из \mathbb{Q}^4 , координаты которых имеют нечетные знаменатели: $\beta(v)$ будет просто равно сумме числителей. Далее мы продолжим определение на те точки, координаты которых имеют знаменатели, не делящиеся на 4, посредством параллельных сдвигов на векторы $(\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$, $(0, \frac{1}{2}, 0, 0)$, $(0, 0, \frac{1}{2}, 0)$, $(0, 0, 0, \frac{1}{2})$.

Теперь мы видим, что если два вектора (v_1, v_2) со знаменателями координат, не делящимися на четыре, находятся на расстоянии \sqrt{l} , то либо $\alpha(v_1) \neq \alpha(v_2)$, либо $\beta(v_1) \neq \beta(v_2)$. Таким образом, мы построили раскраску в четыре цвета α, β для точек, у которых знаменатели координат не делятся на 4.

Теперь мы продолжим эту раскраску сдвигами на векторы $\frac{1}{2^l}$, где $l \geq 2$. Здесь мы используем тот факт, что сумма квадратов четырех целых чисел, хотя бы одно из которых нечетно, не может делиться на 16. \square

Теорема 4.14. Пусть $m = \sqrt{2l}^2_q$, где l — нечетное число, такое что $2l$ представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел. Тогда мы имеем $\chi(\mathbb{Q}^4, m) \leq 4$, следовательно, $\chi(\mathbb{Q}^3, m) \leq 4$.

Доказательство. Доказательство для тех точек из \mathbb{Q}^4 , координаты которых имеют нечетные знаменатели, повторяет рассуждение для случая \mathbb{Z}^4 из теоремы 4.7: вместо четностей целых чисел мы берем четности числителей дробей с нечетными знаменателями.

После этого раскраска продолжается на \mathbb{Q}^4 просто посредством сдвига вдоль координатных векторов длины $\frac{1}{2^k}$, $k > 0$, так же, как в доказательстве теоремы 4.13.

Здесь нужно принять во внимание, что если хотя бы одно из четырех целых чисел нечетно, то сумма квадратов этих четырех чисел не может делиться на восемь. \square

4.6. Раскраски некоторых конечных графов

Рассмотрим поля \mathbb{Z}_3 и \mathbb{Z}_5 ; мы построим графы \mathbb{Z}_3^n и \mathbb{Z}_5^m и снабдим их (псевдо)метрикой. Эта (псевдо)метрика получается взятием обычной l_2 -метрики по модулю 3 (соответственно по модулю 5).

Имеет место следующая

Теорема 4.15. $\chi(\mathbb{Z}_3^n, 1) \leq c(\sqrt[3]{9})^n$.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по размерности n . Нам достаточно доказать, что для размерности $n = 2 + 3k$ мы имеем $\chi(\mathbb{Z}_3^n) \leq 3^{2k+1}$ для натуральных k .

Для \mathbb{Z}_3^2 мы будем использовать три цвета для раскраски девяти точек: в качестве цвета мы просто берем класс вычетов суммы трех координат по модулю три.

Пусть теперь у нас имеется правильная раскраска для \mathbb{Z}_3^{2+3k} ; построим правильную раскраску для \mathbb{Z}_3^{5+3k} следующим образом. Мы красим первые $2 + 3k$ координаты в 3^{2k+1} цветов и берем девять цветов для \mathbb{Z}_3^3 . Цвет \mathbb{Z}_3^{5+3k} будет состоять из двух компонент, одна из которых будет представлять собой цвет первых $2 + 3k$ координат, а вторая — некоторый цвет для последних трех координат. Вторая составляющая будет представлять собой один из девяти цветов, а именно для трех последних координат $(a, b, c) \in \mathbb{Z}_3^3$ мы в качестве цвета возьмем пару $(b - a, c - a) \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$. Если для двух точек (a, b, c) и (a', b', c') из \mathbb{Z}_3^3 мы имеем $b - a \equiv b' - a' \pmod{3}$ и $c - a \equiv c' - a' \pmod{3}$, то эти точки будут либо совпадать в случае, если $a = a'$, либо эти точки (a, b, c) и (a', b', c') будут на расстоянии три, если $a \neq a'$. В любом случае, так как расстояние берется по модулю 3, такая раскраска последних трех координат запрещает расстояния, сравнимые с единицей или двойкой по модулю три.

Мы утверждаем, что такая раскраска для \mathbb{Z}_3^{5+3k} является правильной: никакие две точки на расстоянии, сравнимом с единицей по модулю три, не будут иметь один и тот же цвет. Действительно, если две точки $x, y \in \mathbb{Z}_3^{5+3k}$ находятся на расстоянии, сравнимом с единицей по модулю три, то либо расстояние

между их проекциями на первые три координаты сравнимо с единицей по модулю три, либо расстояние между их проекциями на последние три координаты не сравнимо с нулем по модулю три. В первом случае у них различается первая компонента цвета, во втором — вторая компонента цвета.

Этим завершается шаг индукции. \square

Теорема 4.16. $\chi(\mathbb{Z}_5^n, 1) \leq c'(\sqrt{5})^n$.

Доказательство. Доказательство аналогично приведенному выше доказательству для \mathbb{Z}_3^n . Мы устанавливаем базу индукции, раскрашивая \mathbb{Z}_5 в пять различных цветов; после этого мы раскрашиваем \mathbb{Z}_5^2 в пять цветов таким образом, чтобы две точки имели один цвет тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии, сравнимом с нулем по модулю пять, а именно для $(a, b) \in \mathbb{Z}_5^2$ мы в качестве цвета берем $a - 2b \pmod{5}$. Далее мы осуществляем шаг индукции: для каждой следующих двух координат мы умножаем количество цветов на пять, откуда следует утверждение теоремы. \square

Замечание 4.2. Приведенные выше оценки остаются верными, если вместо запрещенного расстояния 1 мы запретим все расстояния, сравнимые с единицей по модулю три (соответственно по модулю пять).

4.7. Оценки для решеток над алгебраическими расширениями кольца \mathbb{Z}

Пусть p_1, \dots, p_k — набор целых чисел. Через $\mathbb{Q}_{p_1, p_2, \dots, p_k}$ мы обозначим кольцо рациональных чисел с знаменателями, взаимно простыми с $p_1 \dots p_k$. Через \mathbb{Q}_{odd} мы обозначим множество рациональных чисел с нечетными знаменателями.

Теорема 4.17. *Имеет место $\chi(\mathbb{Q}_{\text{odd}}^n, 1) = 2$. Более того, для любого расширения K кольца целых чисел, для которого существует гомоморфизм $K \rightarrow \mathbb{Z}_2$, мы имеем $\chi(K^n, 1) = 2$.*

Доказательство. Действительно, предположим, что все знаменатели координат точек решетки являются нечетными. Тогда в качестве раскраски в два цвета мы берем вычет по модулю два суммы координат числителей. \square

Теорема 4.18. *Имеет место $\chi(\mathbb{Q}_3^n, 1) \leq c(\sqrt[3]{9})^n$, где c — некоторая универсальная константа. Те же рассуждения оста-*

ются верными, если мы заменим \mathbb{Q}_3 на любое подкольцо поля \mathbb{R} , допускающее гомоморфизм на \mathbb{Z}_3 .

Теорема 4.19. *Имеет место $\chi(\mathbb{Q}_5^n, 1) \leq c'(\sqrt{5})^n$, где c' — некоторая универсальная постоянная. Более того, то же самое остается верным, если мы заменим \mathbb{Q}_5 на подкольцо поля вещественных чисел, допускающее гомоморфизм на \mathbb{Z}_5 .*

Последние две теоремы легко следуют из теорем 4.15 и 4.16. Идея состоит в использовании координат (x_1, \dots, x_n) по модулю три (соответственно по модулю 5) и применении полученных ранее оценок для $\chi(\mathbb{Z}_3^n)$ (соответственно для $\chi(\mathbb{Z}_5^n)$). Здесь «взятие класса вычетов» понимается в смысле соответствующего гомоморфизма колец.

4.8. Некоторые открытые проблемы

Мы выдвинули гипотезу о том, что все возможные запрещенные расстояния, для которых хроматическое число пространства \mathbb{Z}^3 равно 3, имеют вид $2^k\sqrt{12l+10}$; кроме того, мы выдвигаем гипотезу о том, что хроматическое число 3 никогда не встречается в решетках больших размерностей.

Наилучшие известные верхние асимптотические оценки для хроматического числа рациональных пространств по-прежнему остаются такими же, как и для евклидовых пространств: $(3 + o(1))^n$, см. [44]; метод получения этих оценок основан на некоторых разбиениях Вороного евклидовых пространств; иными словами, мы делим пространство на ячейки, каждую из которых красим в свой цвет.

Более того, каждая нижняя оценка на $\chi(\mathbb{Q}^n, \sqrt{d})$ для некоторого конкретного n , \sqrt{d} происходит из конкретного конечного графа Γ из \mathbb{Q}^n с критическим расстоянием \sqrt{d} .

Возможность получения точной оценки из *конечного* графа утверждает известная теорема Эрдеша-де Брейна [10]. Если мы рассмотрим такой граф для \mathbb{Q}^n и определим D как общий знаменатель всех координат всех точек графа, то мы можем построить гомотетичный ему граф $D\Gamma$ в \mathbb{Z}^n с критическим расстоянием $D\alpha$. Таким образом, все нижние оценки для рациональных решеток на самом деле происходят из целочисленных решеток.

Было бы интересно применить аргумент, приведенный в настоящем разделе, для получения более точных оценок для \mathbb{Q}^n . Прямой подход не работает в связи с тем, что, когда мы выбираем конкретное запрещенное расстояние, нам придется брать все возможные оценки для $D\alpha$, число которых стремится к бесконечности при стремлении n к бесконечности.

Наши оценки для решеток с рациональными координатами с некоторыми ограничениями на знаменатели несколько лучше оценок для рациональных решеток без ограничений, полученных ранее, но наш подход использует другие идеи — некоторые теоретико-числовые свойства ограничений по модулю p . Было бы интересно получить другие оценки для $\chi(\mathbb{Q}^n)$, комбинируя эти два подхода: подход, предложенный в настоящей работе, и подход, связанный с разбиениями Вороного.

Мы нашли верхние оценки для $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{d})$ для любого фиксированного d при n , стремящемся к бесконечности. Если мы фиксируем конкретное значение n , то мы получим: для нечетного d достаточно двух цветов, для d , не делящегося на 3, достаточно $c_1 \cdot (\sqrt[3]{9})^n$ цветов, а для d , не делящегося на 5, мы получаем $c_2 \cdot (\sqrt{5})^n$ цветов. Все эти верхние оценки лучше, чем оценки для рациональных решеток, т. е. $(3 + o(1))^n$. Таким образом, было бы интересно найти верхнюю оценку для $\max_{d: 30|d} (\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{d}))$, где максимум берется по всем d , делящимся на 30. Возможно, аналогичные методы могут быть разработаны для других простых чисел, однако такой подход для чисел, знаменатели которых не делятся на 7, аналогичный предыдущим подходам для чисел, знаменатели которых взаимно просты с 2, 3, 5, приводит к оценке, худшей, чем известная оценка для рациональных решеток.

Литература

- [1] C. Adams, *The knot book: An elementary introduction to the mathematical theory of knots*, AMS, 2004 (307 pp.).
- [2] E. Artin, Theorie der Zöpfe, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **4** (1925), ss. 27–72.
- [3] D. Bar-Natan, On the Vassiliev Knot Invariants, *Topology* **34** (1995), pp. 423–472.
- [4] D. Bar-Natan and S. Garoufalidis, On the Melvin-Morton-Rozansky conjecture, *Inv. Math.* **125** (1996), pp. 103–133.
- [5] M. Benda, M. Perles, Introduction to Colorings of Metric Spaces, *Geombinatorics* **9** (2000), pp. 111–126.
- [6] S. Bigelow, Braid groups are linear, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), pp. 471–486.
- [7] J. S. Birman, *Braids, Links, and Mapping Class Groups*, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1974 (228 pp.).
- [8] A. Bouchet, Circle graph obstructions, *J. Combinatorial Theory B* **60** (1994), pp. 107–144.
- [9] P. Brass, W. Moser, J. Pach. *Research Problems in Discrete Geometry*, Berlin: Springer, 2005 (499 pp.).
- [10] N. G. de Bruijn, P. Erdős, A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **54** (1951), pp. 371–373.
- [11] H. Brunn, Über verknotete Curven, *Verh. des intern. Math. Congr.* **1** (1987), pp. 256–259.
- [12] W. Burau, Über Zopfgruppen und gleichzeitig verdrehte Verkettungen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **11** (1936), ss. 179–186.
- [13] G. Burde, H. Zieschang, *Knots*, Berlin: Walter de Gruyter, 2003 (xii+559 pp.).
- [14] В. А. Васильев, Инварианты первого порядка и когомологии пространств вложений самопересекающихся кривых в \mathbb{R}^n , *Известия РАН: Сер. Мат.* **69**:5 (2005), сс. 3–52.
- [15] G. Cairns, D. Elton, The planarity problem for signed Gauss words, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* **2** (1993), pp. 359–367.

- [16] G. Cairns, D. Elton, The planarity problem. II, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* **5** (1996), pp. 137–144.
- [17] S.V. Chmutov, S.V. Duzhin, S.K. Lando, Vassiliev Knot Invariants. I, II, III, *Adv. Sov. Math.* **21** (1994), pp. 117–147.
- [18] J. Cibulka, On the chromatic numbers of real and rational spaces, *Geombinatorics* **18** (2008), pp. 53–65.
- [19] M. Cohn and A. Lempel, Cycle decomposition by disjoint transpositions, *J. Combin. Theory Ser. A* **13** (1972), pp. 83–89.
- [20] M. D. E. Conder, P. Dobcsányi, Determination of all regular maps of small genus, *J. Combin. Theory. Ser. B.* **81** (2001), pp. 224–242.
- [21] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. *Современная геометрия. Методы теории гомологий*, Москва, Наука, 1984 (344 с.).
- [22] В. А. Емеличев и др. *Лекции по теории графов*, Москва, Наука, 1990 (384 с.).
- [23] A. T. Fomenko, The theory of multidimensional integrable hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular table of all integrable systems with two degrees of freedom, *Adv. Sov. Math.* **6** (1991), pp. 1–35.
- [24] А. Т. Фоменко, Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем, *Доклады АН СССР* **287**:5 (1986), сс. 1071–1075.
- [25] А. Т. Фоменко, Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости, *Известия АН СССР. Серия матем.* **50**:6 (1986), сс. 1276–1307.
- [26] А. Т. Фоменко, Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю, *Функц. анализ и его приложения* **22**:4 (1988), сс. 38–51.
- [27] А. Т. Фоменко, Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем, *Успехи математических наук* **44**:1 (265) (1989), сс. 145–173.
- [28] P. Frankl, R. M. Wilson, Intersection Theorems with Geometric Consequences, *Combinatorica* **1** (1981), pp. 357–368.

- [29] T. Friesen, A generalization of Vassiliev's planarity criterion, arXiv:math.CO/1210.1539 (2012).
- [30] Z. Füredi, J.-H. Kang, Distance Graphs on \mathbb{Z}^n with l_1 -norm, *Theoretical Computer Science* **319** (2004), pp. 357–366.
- [31] C.F. Gauss, Zur mathematischen Theorie der electrodynamischen Wirkungen, *Werke Königl. Gesell. Wiss. Göttingen* **5** (1877), p. 605.
- [32] M. Goussarov, M. Polyak, and O. Viro, Finite type invariants of classical and virtual knots, *Topology* **39** (2000), pp. 1045–1068.
- [33] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge: Cambridge University Press, 2002 (xii+544 pp.).
- [34] Д. П. Илютко, Оснащенные 4-графы: эйлеровы циклы, гауссовы циклы и поворачивающие обходы, *Матем. сб.* **202**:9 (2011), сс. 53–76.
- [35] D. P. Ilyutko, V. O. Manturov, Introduction to graph-link theory, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* **18**:6 (2009), pp. 791–823.
- [36] Д. П. Илютко, В. О. Мантуров, Граф-зацепления, *Доклады РАН. Сер. матем.* **428**:5 (2009), сс. 591–594.
- [37] J. Jonsson, On the number of Euler trails in directed graphs, *Math. Scand.* **90** (2002), pp. 191–214.
- [38] A. Kotzig, Eulerian lines in finite 4-valent graphs and their transformations, in: *Theory of Graphs* (Proc. Colloq., Tihany, 1966), Academic Press, New York (1968), pp. 219–230.
- [39] D. Krammer, Braid groups are linear, *Annals of Mathematics* **155**:1 (2002), pp. 131–156.
- [40] Р. Кроуэлл, Р. Фокс, *Введение в теорию узлов*, М.: Мир, 1967 (348 сс.).
- [41] Е. А. Кудрявцева, В. М. Никонов, А. Т. Фоменко, Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия, *Матем. сб.* **199**:9 (2008), сс. 3–96.
- [42] А. Б. Купавский, О раскрасках сфер, вложенных в \mathbb{R}^n , *Матем. сб.* **202**:6 (2011), сс. 83–110.

- [43] K. Kuratowski, Sur le probleme des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.* **15** (1930), pp. 271–283.
- [44] D.G. Larman, C.A. Rogers, The realization of distances within sets in euclidean spaces, *Mathematica*, London **19** (1972), pp. 1–24.
- [45] R. Lawrence, Homological representations of the Hecke algebra, *Commun. Math. Phys.* **135** (1990), pp. 141–191.
- [46] S. Lins, B. Richter, H. Schank, The Gauss code problem off the plane, *Aequationes Mathematicae* **33**:1 (1987), pp. 81–95.
- [47] Yu. Makarychev, A short proof of Kuratowski’s graph planarity criterion, *J. Graph Theory* **25** (1997), pp. 129–131.
- [48] В. О. Мантуров, Скобочная полугруппа узлов, *Мат. Заметки* **67**:4 (2000), сс. 449–462.
- [49] V. O. Manturov, *Knot Theory*, CRC-Press, Boca Raton, 2004 (416 pp.).
- [50] В. О. Мантуров. *Теория узлов*, Москва-Ижевск, РХД, 2005 (512 сс.).
- [51] В. О. Мантуров, Доказательство гипотезы В. А. Васильева о планарности сингулярных зацеплений, *Известия РАН: Сер. Мат.* **69**:5 (2005), сс. 169–178.
- [52] В. О. Мантуров, Вложения четырехвалентных оснащенных графов в двумерные поверхности, *Доклады РАН* **424**:3 (2009), сс. 308–310.
- [53] V. O. Manturov, Embeddings of four-valent framed graphs into two-surfaces, *The Mathematics of Knots: Theory and Applications*, Heidelberg: Springer (2010), pp. 169–198.
- [54] В. О. Мантуров, Четырехвалентные графы с крестовой структурой. Вложения в двумерные поверхности, *Мат. просвещение*, Сер. 3, вып. 16 (2012), сс. 94–104.
- [55] V. O. Manturov, On chromatic numbers of integer and rational lattices, arXiv:math.CO/1206.1934 (2012).
- [56] G. Moran, Chords in a circle and linear algebra over $GF(2)$, *J. Combin. Theory Ser. A* **37** (1984), pp. 239–247.
- [57] L. Moser, W. Moser, Solution to Problem 10, *Canad. Math. Bull.*, **4** (1961), pp. 187–189.

- [58] K. O'Bryant, A Complete Annotated Bibliography of Work Related to Sidon Sequences, arXiv:math.NT/0407.117 (2011).
- [59] В. В. Прасолов, *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*, Изд-во МЦНМО, 2004 (352 с.).
- [60] А. М. Райгордский, Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств, *Успехи ма. наук*, **56**:1 (2001), сс. 107–146.
- [61] А. М. Райгордский, *Хроматические числа*, Изд-во МЦНМО, 2003 (44 с.)., ил. Библиотека “Математическое просвещение”. Выпуск 28
- [62] А. М. Райгордский, О хроматическом числе пространства с l_p -нормой, *Успехи мат. наук* **59**:5 (2004), сс. 161–162.
- [63] А. М. Райгордский, *Линейно алгебраические методы в комбинаторике*, Изд-во МЦНМО, 2007 (136 с.).
- [64] Д. Е. Райский, Реализация всех расстояний в разложении \mathbb{R}^n на $n + 1$ частей, *Мат. Заметки* **7** (1970), сс. 194–196.
- [65] R. C. Read, P. Rosenstiehl, On the Gauss crossing problem, *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, North-Holland, Amsterdam and New-York, 1976, pp. 843–876.
- [66] K. Reidemeister, *Knotentheorie*, Berlin: Springer, 1932 (74 pp).
- [67] D. Rolfsen, *Knots and Links*, AMS Chelsea Publishing, Providence, 2003 (xiv+439 pp.).
- [68] I. Ruzsa, Solving a linear equation in a set of integers II, *Acta Arithmetica* LXV.3 (1993), pp. 259–282.
- [69] I. Ruzsa, Solving a linear equation in a set of integers II, *Acta Arithmetica* LXXII.4 (1995), pp. 385–397 .
- [70] E. Soboleva, Vassiliev Knot Invariants Coming from Lie Algebras and 4-Invariants, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* **10**:1 (2001), pp. 161–169.
- [71] C. Thomassen, Kuratowski's theorem, *J. Graph Theory*, **5** (1981), pp. 225–241.
- [72] C. Thomassen, The graph genus problem is NP-complete, *J. of Algorithms* **10** (1989), pp. 568–576.

- [73] L. Traldi, Binary nullity, Euler circuits and interlace polynomials, arXiv:math.CO/0903.4405.
- [74] V.G. Turaev, Cobordisms of Words, arXiv:math.CO/0511513v2.
- [75] V.G. Turaev, Faithful linear representations of the braid group, *Séminaire Bourbaki* **42**:878 (1999-2000).

Предметный указатель

- А-Структура, 82
- В-Структура, 83
- С-Компонента, 58
- d -Диаграмма, 37
- f -Граф, 88
- k -Граф, 25
- k -Преобразование, 62
- *-Граф, 41
 - планарный, 41
 - четный, 41
- Автоморфизм, 100
- Атом, 81
 - двойственный, 90
 - зеркально симметричный, 90
 - максимально симметричный, 91
 - ориентируемый, 81
 - приводимый, 99
 - примитивный, 102
 - связный, 81
 - сферический, 81
 - торический, 81
- База накрытия, 23
- Буквы
 - чередующиеся, 28
- Валентность вершины, 25
- Веретено, 119
 - Купавского, 119
 - Мозера, 115
 - Мозера–Райского, 119
 - обобщенное, 119
- Вершина, 24
 - атома, 81
 - гауссовая, 65
 - негауссовая с оснащением 0, 65
 - негауссовая с оснащением 1, 65
- Вершины
 - смежные, 24
- Вложение, 29, 41
 - согласованное с крестовой структурой, 32
 - шахматное, 81
- Гомеоморфизм, 8
- Гомоморфизм монодромии, 100
- Грань, 29
- Граф, 24
 - k -валентный, 25
 - двудольный, 30
 - полный, 30
 - конечный, 24
 - крестовый, 32
 - медialьный, 32
 - несвязный, 26
 - ориентированный, 24
 - оснащенный, 32
 - перекрытия, 58
 - планарный, 29
 - плоский, 29
 - полный, 29

- с крестовой структурой, 32
 - связный, 26
 - срединный, 32
 - узловой, 43
- Графы
 - гомеоморфные, 30
 - изоморфные, 24
- Группа монодромии, 100
- Диаграмма
 - гауссова, 61
 - хордовая, 27
 - оснащенная, 64
- Доля, 30
- Задача о планарных крестовых графах, 35
- Инцидентность, 24
- Компонента связности, 26
- Конфигурация
 - (M, D) -критическая, 131
- Кривая, 20
 - вложенная, 28
 - замкнутая, 20
- Матрица смежности, 69
- Матрицы равные с точностью до диагональных элементов, 72
- Многообразие, 8
 - ориентированное, 15
 - ориентируемое, 16
 - с краем, 8
 - триангулируемое, 11
- Множество
 - Сидона, 128
 - открытое, 7
- Морфизм, 98
- Накрытие, 23
 - n -листное, 23
 - разветвленное, 23
 - симметричное разветвленное, 99
- Направление, 44, 46
- Образ
 - зеркальный, 27
- Обращение ориентации, 16
- Обход
 - поворачивающий, 36
- Окрестность, 7
- Окружность хордовой диаграммы, 27
- Операция
 - оснащенная звездочка, 67
 - разбиения ребра, 30
 - уменьшающая, 72
- Ориентация
 - седловая, 36
- Остов атом, 81
- Отображение
 - непрерывное, 8
 - примитивизации, 104
- Перекрестье, 35
- Пересечение
 - трансверсальное, 41
- Перестройка, 69, 70
- Петля, 20, 24
- Подграф, 24
 - остовный, 24
- Полином

хроматический, 31
 Полуребра
 противоположные, 32
 соседние, 32
 Полуребро, 25
 Порядок
 неориентированный
 циклический, 41
 Препятствие Васильева, 35
 Примитивизация, 104
 Пространства
 гомеоморфные, 8
 Пространство
 накрывающее, 23
 накрытия
 тотальное, 23
 топологическое, 7
 компактное, 7
 связное, 7
 хаусдорфово, 7
 Путь, 25
 Раскраска
 правильная, 30
 Ребра
 смежные, 24, 41
 Ребро, 24
 кратное, 24
 Результат перестройки, 70
 Решение
 тривиальное, 128
 Род атома, 81, 90
 Симметрия атома, 90
 Симплекс
 стандартный, 10
 ориентированный, 15
 топологический, 10
 ориентированный, 15

Слово
 оснащенное, 65
 с двойным вхождением,
 27
 циклическое, 27
 оснащенное, 64
 Сложность атома, 90
 Сохранение ориентации, 16
 Степень вершины, 25
 Структура противополож-
 ных ребер, 82
 Сумма
 связная, 14
 Схема склейки, 11
 Тип атома, 91
 Топология, 7
 Точка
 базисная, 20
 Триангуляция, 11
 Узел узлового графа, 43
 Хорда, 27
 гауссова, 65
 негауссова с оснаще-
 нием 0, 65
 негауссова с оснаще-
 нием 1, 65
 Хорды
 зацепленные, 28
 Цепь, 25
 Цикл, 25
 гамильтонов, 25
 гауссов, 36
 эйлеров, 25
 Циклический порядок ре-
 бер

в вершине, 55
на графе, 55
планарный, 56

Число

хроматическое, 114

Эйлерова характеристика

атома, 81
многообразия, 19
триангуляции, 19

Элементы

отмеченные, 127

Оглавление

Предисловие	3
1. ВВЕДЕНИЕ	7
1.1. Двумерные многообразия	7
1.2. Эйлерова характеристика многообразия	19
1.3. Фундаментальная группа и накрытия	20
1.4. Графы и эйлеровы циклы	24
1.5. Планные графы: формула Эйлера и теорема Понтрягина–Куратовского	28
1.6. Раскраски графов	30
2. КРЕСТОВЫЕ ГРАФЫ	32
2.1. Введение	32
2.2. Планные крестовые графы	35
2.3. Эквивалентность критериев планарности Васильева и Понтрягина–Куратовского	41
2.4. Гауссовы циклы и поворачивающие обходы	61
2.5. Вложение крестовых графов в двумерные поверхности	81
3. МАКСИМАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫЕ АТОМЫ	88
3.1. Введение	88
3.2. Максимально симметричные атомы	90
3.3. Прimitивные максимально симметричные атомы	98
3.4. Классификация максимально симметричных атомов	109
4. ХРОМАТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ И РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕТОК	114
4.1. Введение	114
4.2. Маломерные целочисленные решетки	118
4.3. Для каждого m рост числа $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{2m})$ полиномиален по n и имеет степень не больше m	124
4.4. Нижние оценки для хроматических чисел целочисленных решеток	130
4.5. Оценки для рациональных решеток \mathbb{Q}^n	132
4.6. Раскраски некоторых конечных графов	135
4.7. Оценки для решеток над алгебраическими расширениями кольца \mathbb{Z}	136
4.8. Некоторые открытые проблемы	137

Учебное издание

Ильютко Денис Петрович
Мантуров Василий Олегович
Никонов Игорь Михайлович

**Комбинаторная топология и теория графов
в задачах и упражнениях**

Учебное пособие

Редактор, корректор Л.Н. Селиванова

Компьютерный набор, верстка
Д. П. Ильютко, В. О. Мантуров, И. М. Никонов

Подписано в печать 26.11.2003 г.
Формат 60×84/16. Усл.-печ. л. 8.7. Уч.-изд. л. 6.1.
Заказ 149/013. Тираж 500 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета
им. П. Г. Демидова.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000, Ярославль, ул. Советская, 14