

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
Кафедра математического анализа

В. В. Алексеев
А. А. Кащенко
М. М. Преображенская

Математический анализ
Часть 2

Практикум

Ярославль
ЯрГУ
2022

УДК 517(076.5)
ББК В16я73
А47

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2022 года*

Рецензент
кафедра математического анализа
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Алексеев, Владислав Владимирович.

А47 Математический анализ. Часть 2 : практикум
/ В. В. Алексеев, А. А. Кащенко, М. М. Преображенская;
Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль : ЯрГУ,
2022. — 36 с.

Практикум содержит теоретический материал, примеры задач с решениями и расчетную работу по темам «Предел функции» и «Непрерывность».

Предназначен для студентов, изучающих дисциплины «Математический анализ», «Практикум по математическому анализу».

УДК 517(076.5)
ББК В16я73

© ЯрГУ, 2022

Оглавление

| | |
|--|-----------|
| § 1. Основные определения | 4 |
| § 2. Основные правила вычисления пределов | 7 |
| § 3. Замечательные пределы | 13 |
| § 4. Асимптотическое сравнение функций | 16 |
| § 5. Вычисление пределов при помощи замены на эквивалентные | 17 |
| § 6. Классификация точек разрыва | 18 |
| Литература | 34 |

§ 1. Основные определения

Пусть X — непустое подмножество числовой прямой \mathbb{R} . Если каждому значению x из X по некоторому закону f ставится в соответствие одно определенное действительное значение y из \mathbb{R} , то говорят, что на множестве X задана *функция* $y = f(x)$ со значениями в \mathbb{R} . Используется запись $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — числовая функция на множестве $X \subset \mathbb{R}$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ — числовая функция на множестве $Y \subset \mathbb{R}$. Если область значений $f(X)$ функции f на множестве X принадлежит множеству Y , то каждому x из X можно сопоставить число $g(f(x))$. Определенную таким образом функцию $x \rightarrow g(f(x))$ называют *суперпозицией* или *композицией функций* f и g .

Число a есть *предельная точка* непустого подмножества X числовой прямой \mathbb{R} , если любая δ -окрестность $U(a, \delta) := (a - \delta, a + \delta)$ точки a ($\delta > 0$) содержит отличный от a элемент x из X . Число a называют *изолированной точкой* непустого подмножества X числовой прямой \mathbb{R} , если существует δ -окрестность точки a ($\delta > 0$), не содержащая отличных от a элементов множества X . Множество всех точек числовой прямой, предельных для множества X , будем обозначать через X' . *Проколотой δ -окрестностью* точки a будем называть множество $\dot{U}(a, \delta)$, полученное из δ -окрестности $U(a, \delta)$ точки a путем исключения ее центра: $\dot{U}(a, \delta) = U(a, \delta) \setminus \{a\}$.

Определение 1. Число b называют *пределом функции* $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ в точке a из X' , если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \in X$, $x_n \neq a$, $x_n \rightarrow a$, соответствующая последовательность значений функции $f(x_n) \rightarrow b$.

Замечание. Для того чтобы доказать, что функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ не имеет предела в точке a из X' , достаточно указать две последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$, удовлетворяющие условиям определения 1, такие, что пределы последовательностей $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$ различны.

Определение 1 называется определением предела функции на языке последовательностей и предложено Г. Гейне. Существует эквивалентное данному определение предела функции, предложенное О. Коши:

Определение 2. Число b называют *пределом функции* $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ в точке a из X' : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x из X , удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Это определение можно записать при помощи кванторов:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Определение 3. Число b называют *пределом слева функции* $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ в точке a из X' : $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $0 < a - x < \delta$, верно $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Определение 4. Число b называют *пределом справа функции* $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ в точке a из X' : $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $0 < x - a < \delta$, верно $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Пределы слева и справа для краткости обозначают как $f(a - 0)$ и $f(a + 0)$ соответственно.

Замечание. Для существования предела функции $f(x)$ в точке a необходимо и достаточно, чтобы $f(a + 0) = f(a - 0)$.

Определение 5. Число b называют *частичным пределом* функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ в точке a из X' , если существует последовательность $\{x_n\}$, обладающая свойствами $x_n \in X$, $x_n \neq a$, $x_n \rightarrow a$, для которой $f(x_n) \rightarrow b$.

Определение 6. Функцию $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называют *финально ограниченной* при $x \rightarrow a$ ($a \in X'$), если найдутся такие числа C и δ , что $|f(x)| < C$ $\forall x \in \dot{U}(a, \delta) \cap X$.

Если функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ финально ограничена при $x \rightarrow a$ ($a \in X'$), то среди ее частных пределов в точке a найдутся наименьший и наибольший. Их называют соответственно *нижним* и *верхним пределами* функции $f(x)$ в точке a и обозначают $\varliminf_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\varlimsup_{x \rightarrow a} f(x)$.

Также для функций можно определить бесконечный предел и предел в бесконечности.

Определение 7. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ в точке a имеет *бесконечный предел*, если для любого $E > 0$ существует $\delta = \delta(E) > 0$ такое, что $|f(x)| > E$, если $x \in \dot{U}(a, \delta) \cap X$.

Используют следующее обозначение: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Если условие $|f(x)| > E$ заменить на условие $f(x) > E$ (или $f(x) < -E$), то получим определение предела, равного $+\infty$ (или $-\infty$).

Обозначают это так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$).

Определение 8. Число b называют *пределом* функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ в бесконечности ∞ , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - b| < \varepsilon$, если $|x| > \Delta$.

Используют следующее обозначение: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$.

Если условие $|x| > \Delta$ заменить на условие $x > \Delta$ (или $x < -\Delta$), то получим определение предела в $+\infty$ (или в $-\infty$).

Обозначают это так: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ (или $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$).

Комбинируя определения, можно получить определение бесконечного предела в бесконечности (причём бесконечности могут быть как со знаком, так и без знака).

Замечание. Можно определить ε -окрестности бесконечностей $\infty, \pm\infty$ следую-

щим образом:

$$\begin{aligned} U(-\infty; \varepsilon) &= \mathring{U}(-\infty; \varepsilon) := \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right), \\ U(+\infty; \varepsilon) &= \mathring{U}(+\infty; \varepsilon) := \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right), \\ U(\infty; \varepsilon) &= \mathring{U}(\infty; \varepsilon) := U(-\infty; \varepsilon) \cup U(+\infty; \varepsilon). \end{aligned}$$

Тогда можно дать общее определение предела функции, объединяющее конечный и бесконечный случаи.

Определение 9. Число b (возможно, бесконечное) называют пределом функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ в точке a (возможно, бесконечной), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $f(x) \in U(b, \varepsilon)$, если $x \in \mathring{U}(a, \delta) \cap X$.

Определение 10. Функцию $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называют непрерывной в точке $x_0 \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из соотношений $|x - x_0| < \delta$, $x \in X$ следует, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Замечание. Если x_0 — предельная точка множества X , то непрерывность функции f в точке x_0 равносильна равенству $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Пример 1. Доказать, используя определение предела функции, что

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = -2.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ в некоторой окрестности точки $x = 1$, например на интервале $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Возьмем произвольное положительное число ε и преобразуем выражение $|f(x) + 2|$ при условии $x \neq 1$:

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} + 2 \right| = \left| \frac{x + 1}{x - 2} + 2 \right| = \left| \frac{3(x - 1)}{x - 2} \right|.$$

Учитывая, что $x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, получаем:

$$\left| \frac{3(x - 1)}{x - 2} \right| = 3 \frac{|x - 1|}{2 - x} < 3 \frac{|x - 1|}{\frac{1}{2}} = 6|x - 1|.$$

Из неравенства $|f(x) + 2| < 6|x - 1|$ следует, что если взять $\delta = \frac{1}{6}\varepsilon$, то для всех x из интервала $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - 1| < \delta$, выполняется неравенство

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} + 2 \right| < 6\delta = \varepsilon.$$

Согласно определению Коши, число $b = -2$ является пределом функции $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ в точке $a = 1$.

Пример 2. Сформулировать с помощью неравенств следующее утверждение:
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$.

Решение.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in X : |x| > \frac{1}{\delta} \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$ больших по модулю, чем $1/\delta$, верно $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Пример 3. Доказать, что функция $y = \cos(\pi x^{-1})$ не имеет предела при $x \rightarrow 0$, и найти ее верхний и нижний пределы при $x \rightarrow 0$.

Решение. Рассмотрим две последовательности $x_n = \frac{1}{2n+1}$ и $x'_n = \frac{1}{2n}$ и соответствующие им последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$ значений функций. Так как все члены последовательности $f(x_n) = \cos((2n+1)\pi)$ равны минус единице, а последовательность $f(x'_n) = \cos(2n\pi)$ состоит только из единиц, то $f(x_n) \rightarrow -1$ при $x_n \rightarrow 0$, а $f(x'_n) \rightarrow 1$ при $x'_n \rightarrow 0$. Следовательно, предел функции $y = \cos(\pi x^{-1})$ в точке $x = 0$ не существует.

Заметим, что

$$-1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \cos(\pi x^{-1}) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \cos(\pi x^{-1}) \leq 1,$$

поскольку $-1 \leq \cos(\pi x^{-1}) \leq 1$ любого значения $x \neq 0$. Мы построили последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$, такие, что $\lim_{x_n \rightarrow 0} \cos(\pi x_n^{-1}) = -1$, $\lim_{x'_n \rightarrow 0} \cos(\pi (x'_n)^{-1}) = 1$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \cos(\pi x^{-1}) &= \lim_{x_n \rightarrow 0} \cos(\pi x_n^{-1}) = -1, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \cos(\pi x^{-1}) &= \lim_{x'_n \rightarrow 0} \cos(\pi (x'_n)^{-1}) = 1. \end{aligned}$$

§ 2. Основные правила вычисления пределов

Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то выполнены следующие утверждения:

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;
- (iii) если $B \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$;
- (iv) если в некоторой проколотой окрестности точки $x = a$ имеем $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ и $A = B$, то $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$ (принцип двустороннего ограничения);
- (v) если $A = 0$, $f(x) \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

Для бесконечно больших функций полезны следующие соотношения:

- (vi) если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$;
- (vii) если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \pm\infty$;
- (viii) если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, то $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \infty$;
- (ix) если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \infty$.

Также мы будем пользоваться тем, что для любой основной элементарной функции $f(x)$ и точки a из ее области определения справедливо соотношение

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Напомним, что *основными элементарными функциями* называются следующие функции:

- степенная функция $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
- обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Для вычисления предела суперпозиции функций используется правило:

- (x) если $x_0 \in X'$, $y_0 \in Y'$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ и функция $g(y)$ непрерывна в точке y_0 , то $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)) = g(y_0)$.

Для вычисления предела степенно-показательной функции $u(x)^{v(x)}$ (предполагается, что $u(x) > 0$) используется следующее правило:

- (xi) $\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{v(x) \ln u(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} (v(x) \ln u(x))}$.

В частности, если $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = B$ (A и B конечны), то $\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{v(x)} = A^B$ за исключением случая $A = 0$, $B = 0$.

Заметим, что для получения данного правила используется непрерывность функции e^t и правило нахождения предела суперпозиции функций.

Пример 4. Найти значения пределов:

$$\begin{array}{ll}
1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, & 2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, \\
3) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, & 4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}.
\end{array}$$

Решение. 1) Применяя теоремы о пределе разности, суммы и произведения, находим предел знаменателя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3x + 2) = (\lim_{x \rightarrow 0} x) \cdot (\lim_{x \rightarrow 0} x) - \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2.$$

Предел знаменателя конечен и не равен нулю, поэтому по правилу нахождения предела частного получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3x + 2)} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

2) Так как числитель $x^2 - 1$ и знаменатель $x^2 - 3x + 2$ дроби имеют предел в точке $x = 1$, равный нулю (то есть имеет место неопределенность $\frac{0}{0}$), то правило нахождения предела частного неприменимо.

Разложим дробь $\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ на множители:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x - 2)}.$$

При любом $x \neq 1$ выражение $x - 1$ отлично от нуля и выполняется равенство

$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{x + 1}{x - 2}.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) \neq 0$, то по правилу нахождения предела частного имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{2}{-1} = -2.$$

3) Так как $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2) = 0$, а $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) \neq 0$, то можно воспользоваться правилами (v) и (ix):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \infty.$$

4) Числитель и знаменатель дроби при $x \rightarrow \infty$ являются бесконечно большими функциями, поэтому правило нахождения предела частного непосредственно неприменимо. Преобразуем дробь: разделим числитель и знаменатель дроби на x^2 (старшую степень) и применим правило нахождения предела частного и правило (vi):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x^2})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2})} = 1.$$

Пример 5. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(x^{-3})$.

Решение. Поскольку для функции $\sin(x^{-3})$ выполняются соотношения $-1 \leq \sin(x^{-3}) \leq 1$, получаем, что $-x \leq x \sin(x^{-3}) \leq x$. Так как $\lim_{x \rightarrow 0} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, то и $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(x^{-3}) = 0$.

Пример 6. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\ln(x + x^3)}$.

Решение. Воспользуемся утверждением о пределе произведения и правилом (vi):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\ln(x + x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(x + x^3)} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Пример 7. Найти 1) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x - 10}{\sqrt{x} - \sqrt{10}}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x + 15} - 2}{x - 1}$.

Решение. 1) Для «раскрытия» неопределенности вида $\frac{0}{0}$, преобразуем данную функцию, разложив ее числитель на множители:

$$\frac{x - 10}{\sqrt{x} - \sqrt{10}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{10})(\sqrt{x} + \sqrt{10})}{\sqrt{x} - \sqrt{10}} = \sqrt{x} + \sqrt{10}.$$

Так как функция \sqrt{x} является одной из основных элементарных функций и она определена в точке 10, то

$$\lim_{x \rightarrow 10} \sqrt{x} = \sqrt{10}.$$

Из приведенных выше выкладок следует, что

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x - 10}{\sqrt{x} - \sqrt{10}} = \lim_{x \rightarrow 10} (\sqrt{x} + \sqrt{10}) = 2\sqrt{10}.$$

2) Введём новую переменную $y = \sqrt[4]{x + 15}$. Тогда $y \rightarrow 2$ при $x \rightarrow 1$ и $x = y^4 - 15$. Отсюда следует, что

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x + 15} - 2}{x - 1} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y - 2}{y^4 - 16} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{1}{y^3 + 2y^2 + 4y + 8} = \frac{1}{32}.$$

Заметим, что второе равенство получено с помощью формулы разности n -х степеней

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

примененной к выражению $y^4 - 16$.

Пример 8. Найти а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2e^{2x} + 3)}{\ln(3e^x + 4)}$, б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(2e^{2x} + 3x^2)}{\ln(3e^x + x^4)}$.

Решение. а) Для того чтобы «раскрыть» неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, преобразуем числитель и знаменатель, выделив «главное» слагаемое:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(2e^{2x} + 3)}{\ln(3e^x + 4)} &= \frac{\ln\left(e^{2x}\left(2 + \frac{3}{e^{2x}}\right)\right)}{\ln\left(e^x\left(3 + \frac{4}{e^x}\right)\right)} = \frac{\ln(e^{2x}) + \ln\left(2 + \frac{3}{e^{2x}}\right)}{\ln(e^x) + \ln\left(3 + \frac{4}{e^x}\right)} = \\ &= \frac{2x + \ln\left(2 + \frac{3}{e^{2x}}\right)}{x + \ln\left(3 + \frac{4}{e^x}\right)} = \frac{2 + \frac{\ln\left(2 + \frac{3}{e^{2x}}\right)}{x}}{1 + \frac{\ln\left(3 + \frac{4}{e^x}\right)}{x}}. \end{aligned}$$

Поскольку функция $y = \ln(t)$ является непрерывной, то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(2 + \frac{3}{e^{2x}}\right)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(2 + \frac{3}{e^{2x}}\right) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \\ &= \ln\left(2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^{2x}}\right) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \ln 2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

и аналогично

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(3 + \frac{4}{e^x}\right)}{x} = 0,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2e^{2x} + 3)}{\ln(3e^x + 4)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{\ln\left(2 + \frac{3}{e^{2x}}\right)}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln\left(3 + \frac{4}{e^x}\right)}{x}\right)} = \frac{2}{1} = 2.$$

б) Как и в предыдущей задаче, выделим в числителе и знаменателе дроби «главное» слагаемое:

$$\begin{aligned}\frac{\ln(2e^{2x} + 3x^2)}{\ln(3e^x + x^4)} &= \frac{\ln\left(x^2\left(3 + \frac{2e^{2x}}{x^2}\right)\right)}{\ln\left(x^4\left(1 + \frac{3e^x}{x^4}\right)\right)} = \frac{\ln(x^2) + \ln\left(3 + \frac{2e^{2x}}{x^2}\right)}{\ln(x^4) + \ln\left(1 + \frac{3e^x}{x^4}\right)} = \\ &= \frac{2\ln|x| + \ln\left(3 + \frac{2e^{2x}}{x^2}\right)}{4\ln|x| + \ln\left(1 + \frac{3e^x}{x^4}\right)} = \frac{2 + \frac{\ln\left(3 + \frac{2e^{2x}}{x^2}\right)}{\ln|x|}}{4 + \frac{\ln\left(1 + \frac{3e^x}{x^4}\right)}{\ln|x|}}.\end{aligned}$$

Поскольку

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^{2x}}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^x}{x^4} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\ln|x|} = 0,$$

а функция $y = \ln(t)$ является непрерывной, то

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{\ln\left(3 + \frac{2e^{2x}}{x^2}\right)}{\ln|x|}\right) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{3e^x}{x^4}\right)}{\ln|x|}\right) = 4.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(2e^{2x} + 3x^2)}{\ln(3e^x + x^4)} = \frac{1}{2}.$$

Пример 9. Найти $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \arctg(\ln(e \cdot \cos(\frac{\pi}{x})))$.

Решение. Напишем цепочку соотношений:

$$y_1 = \frac{\pi}{x}, \quad y_2 = e \cdot \cos y_1, \quad y_3 = \ln y_2, \quad y_4 = \arctg y_3.$$

Применяя последовательно теорему о пределе суперпозиции функций, получаем

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} y_1(x) &= 2\pi; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} y_2(x) = \lim_{y_1 \rightarrow 2\pi} e \cdot \cos y_1 = e; \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} y_3(x) &= \lim_{y_2 \rightarrow e} \ln y_2 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} y_4(x) = \lim_{y_3 \rightarrow 1} \arctg y_3 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Пример 10. Найти значения пределов:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi x}{4}\right)^{2x^3+1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{\operatorname{ctg}^2 \pi x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} (\sin^2 2x)^{\operatorname{tg} x}.$$

Решение. 1) Преобразуем выражение под знаком предела, согласно правилу (xi):

$$\left(\sin \frac{\pi x}{4}\right)^{2x^3+1} = \exp \left((2x^3 + 1) \ln \left(\sin \frac{\pi x}{4} \right) \right).$$

Так как

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 + 1) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln \left(\sin \frac{\pi x}{4} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{\pi x}{4} \right) = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi x}{4} \right)^{2x^3+1} &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 1} \left((2x^3 + 1) \ln \left(\sin \frac{\pi x}{4} \right) \right) \right) = \\ &= \exp \left(3 \cdot \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

2) Из соотношений

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x+2}{x+3} = \ln \frac{3}{4} < 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{ctg}^2 \pi x = +\infty$$

получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{ctg}^2 \pi x \ln \frac{x+2}{x+3} \right) = -\infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x+3} \right)^{\operatorname{ctg}^2 \pi x} = \exp \left(\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{ctg}^2 \pi x \ln \frac{x+2}{x+3} \right) \right) = 0.$$

3) Так как

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} \ln (\sin^2 2x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} (\sin^2 2x)^{\operatorname{tg} x} = \exp \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} \left(\operatorname{tg} x \ln (\sin^2 2x) \right) \right) = +\infty.$$

§ 3. Замечательные пределы

Вычисление пределов во многих случаях становится проще, если использовать следующие формулы:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1, \\
\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= e, \\
\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e, \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} &= \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a, \quad a > 0, \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \frac{1}{\ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Пример 11. Найти 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$.

Решение. 1) Представим единицу как $\cos 0$ и воспользуемся формулой разности косинусов:

$$1 - \cos(ax) = \cos 0 - \cos(ax) = 2 \sin^2 \frac{ax}{2}.$$

Введя новую переменную $y = \frac{ax}{2}$ и пользуясь 3.1, получаем, что

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{x^2} = 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{ax}{2}}{x} \right)^2 = \\
&= 2 \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{a \sin y}{2y} \right)^2 = \frac{a^2}{2}.
\end{aligned}$$

2) Сделаем замену переменной $y = \arcsin x$, тогда $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ и $x = \sin(\arcsin x) = \sin y$ в окрестности точки $x = 0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

Пример 12. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$.

Решение. Воспользуемся правилом (xi):

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}} = \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{\sin^2 2x} \right).$$

Найдем значение получившегося предела. Заметим, что правило вычисления предела частного непосредственно неприменимо, поскольку имеем неопределенность

$\frac{0}{0}$. Преобразуем данное выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{\sin^2 2x} &= \frac{\ln(1 - \operatorname{tg}^2 x) \cdot (-\operatorname{tg}^2 x)}{\sin^2 2x \cdot (-\operatorname{tg}^2 x)} = \frac{\ln(1 + (-\operatorname{tg}^2 x))}{(-\operatorname{tg}^2 x)} \times \\ &\times \frac{-\operatorname{tg}^2 x}{4 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\ln(1 + (-\operatorname{tg}^2 x))}{(-\operatorname{tg}^2 x)} \cdot \frac{-1}{4 \cos^4 x}. \end{aligned}$$

Вычислим предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + (-\operatorname{tg}^2 x))}{(-\operatorname{tg}^2 x)}$. Выполним замену $y = -\operatorname{tg}^2 x$. Тогда $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Пользуясь замечательными пределами (3.1), получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + (-\operatorname{tg}^2 x))}{(-\operatorname{tg}^2 x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}} &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{-\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{-1}{4 \cos^4 x} \right) \right) = \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{-\operatorname{tg}^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{4 \cos^4 x} \right) = \exp \left(1 \cdot \frac{-1}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}. \end{aligned}$$

§ 4. Асимптотическое сравнение функций

Пусть функция $g(x)$ не обращается в нуль в некоторой проколотой окрестности точки a из \mathbb{R} . Тогда:

- 1) если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то говорят, что *функция $f(x)$ эквивалентна* функции $g(x)$ при $x \rightarrow a$, и пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow a$;
- 2) если существуют числа $C > 0$ и $\delta > 0$ такие, что в проколотой δ -окрестности точки a справедливо неравенство $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C$, то говорят, что $f(x)$ есть O большое от $g(x)$ при $x \rightarrow a$, и пишут $f(x) = O(g(x))$ при $x \rightarrow a$;
- 3) если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то говорят, что $f(x)$ есть o малое от $g(x)$ при $x \rightarrow a$, и пишут $f(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow a$;

Замечание. Определения можно сформулировать в другом виде. Пусть $f(x) = h(x)g(x)$.

- 1') Если $h(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow a$, то $f(x) \sim g(x)$.
- 2') Если $h(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки a , то $f(x) = O(g(x))$.
- 3') Если $h(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$, то $f(x) = o(g(x))$.

Запись $f(x) = O(1)$ при $x \rightarrow a$ означает, что функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки a , а запись $f(x) = o(1)$ при $x \rightarrow a$ означает, что функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow a$.

Пример 13. Докажите, что

- а) $\operatorname{tg} x \sim \sin x$ при $x \rightarrow 0$,
- б) $2x^2 + x \cos x = O(x^2)$ при $x \rightarrow \infty$,
- в) $x^2 = o(2^x - 1)$ при $x \rightarrow 0$.

Решение. а) Данное утверждение верно, поскольку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

б) Рассмотрим выражение $\frac{2x^2 + x \cos x}{x^2}$. При $|x| > 100$ верна следующая цепочка соотношений:

$$\left| \frac{2x^2 + x \cos x}{x^2} \right| = \left| 2 + \frac{\cos x}{x} \right| \leq 2 + \left| \frac{\cos x}{x} \right| \leq 2 + \frac{1}{|x|} \leq 2 + \frac{1}{100}.$$

Следовательно, если взять $\delta = \frac{1}{100}$, то получим, что в проколотой δ -окрестности точки ∞ модуль частного функций $f(x) = 2x^2 + x \cos x$ и $g(x) = x^2$ ограничен константой $C = 2\frac{1}{100}$.

в) Докажем, что предел частного функций x^2 и $2^x - 1$ равен нулю. Пользуясь формулами (3.1) и правилом вычисления предела произведения, получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2^x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = \frac{1}{\ln 2} \cdot 0 = 0.$$

§ 5. Вычисление пределов при помощи замены на эквивалентные

Можно упростить вычисление пределов, заменив функцию на эквивалентную по следующему правилу.

$$f(x) \sim g(x) \text{ при } x \rightarrow a \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x)) \text{ при } x \rightarrow a.$$

Например, при $x \rightarrow 0$ верны следующие соотношения:

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1) $\sin x = x + o(x);$ | 2) $\operatorname{tg} x = x + o(x);$ |
| 3) $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2);$ | 4) $e^x - 1 = x + o(x);$ |
| 5) $\ln(1 + x) = x + o(x).$ | 6) $(1 + x)^p - 1 = px + o(x).$ |

Пример 14. Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x^2}{\cos 2x - 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - 1 + \cos 2x}{\sqrt{1 - 4x} - 1 + \ln(1 + 3x)}.$

Решение. а) Преобразуем числитель. Пусть $t = 5x^2$, при этом $t \rightarrow 0$. Тогда $\sin t = t + o(t)$ или $\sin 5x^2 = 5x^2 + o(x^2)$.

Аналогично $\cos 2x - 1 = \frac{4x^2}{2} + o(x^2)$. Получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x^2}{\cos 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + o(x^2)}{-2x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 + \frac{o(x^2)}{x^2}}{-2 + \frac{o(x^2)}{x^2}} = -\frac{5}{2}.$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что $\frac{o(x^2)}{x^2} \rightarrow 0$ по определению о-малого.

б) Сделаем замену $t = \frac{1}{x}$, при этом $t \rightarrow +0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{t \rightarrow +0} \left(\sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}} - \frac{1}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} (\sqrt{1 + t} - 1) = \dots$$

Поскольку $\sqrt{1 + t} - 1 = (1 + t)^{1/2} - 1 = \frac{1}{2}t + o(t)$,

$$\dots = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2}t + o(t) \right) = \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{1}{2} + \frac{o(t)}{t} \right) = \frac{1}{2}.$$

в) Запишем известные эквивалентности при $x \rightarrow 0$:

$$\sin 5x \sim 5x; \quad -1 + \cos 2x \sim -2x^2; \quad \sqrt{1-4x} - 1 \sim -\frac{1}{2} \cdot 4x; \quad \ln(1+3x) \sim 3x.$$

Сделаем в выражении соответствующие замены.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - 1 + \cos 2x}{\sqrt{1-4x} - 1 + \ln(1+3x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + o(x) - 2x^2 + o(x^2)}{-2x + o(x) + 3x + o(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 - 2x + \frac{o(x)}{x} + \frac{o(x^2)}{x^2} \cdot x}{1 + \frac{o(x)}{x}} = 5. \end{aligned}$$

Замечание. Замена функции на эквивалентную приводит к “огрублению” исходного выражения. После неудачной замены может оказаться, что получившийся предел нельзя вычислить, как показывает следующий пример.

Пример 15. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\operatorname{tg} x - x}$.

Решение. Сделаем замену $\sin x = x + o(x)$, $\operatorname{tg} x = x + o(x)$. Получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\operatorname{tg} x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{o(x)} = ???$$

Последнее отношение может давать в пределе любое число (а может вообще не иметь предела). Из этого не следует, что исходного предела не существует. Причина в том, что мы слишком “загубили” выражение заменами.

Если воспользоваться соотношениями:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

(они следуют из формулы Тейлора, о которой вы узнаете в дальнейшем), то можно вычислить значение предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\operatorname{tg} x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}} = -\frac{1}{2}.$$

§ 6. Классификация точек разрыва

Определение 11. Точку x_0 из X называют точкой разрыва функции f , если x_0 не является точкой непрерывности f .

Замечание. Очевидно, $x_0 \in X'$, поскольку в изолированных точках множества X любая функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.

Если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, отличный от $f(x_0)$, то x_0 называют *точкой устранимого разрыва*.

Пример 16. Точка $x = 0$ является устранимой точкой разрыва для функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq 0, \\ 10, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Число x_0 называют *точкой разрыва первого рода* функции f , если существуют конечные односторонние пределы f в этой точке и $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$. При этом подразумевается, что x_0 — предельная точка для множеств $\{x \in X \mid x < x_0\}$ и $\{x \in X \mid x > x_0\}$.

Пример 17. Доказать, что точка $x = \pi$ является точкой разрыва первого рода для функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x < \pi, \\ \sin x, & \text{если } x \geq \pi. \end{cases}$$

Решение. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} f(\pi + 0) &= \lim_{x \rightarrow \pi + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi + 0} \sin x = 0, \\ f(\pi - 0) &= \lim_{x \rightarrow \pi - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi - 0} \cos x = -1. \end{aligned}$$

Следовательно, поскольку оба предела конечны и они различны, то $x = \pi$ — точка разрыва первого рода.

Будем называть x_0 *точкой разрыва второго рода* функции f , если хотя бы один из пределов $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ бесконечен или не существует.

Пример 18. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

в точке $x = 0$ терпит разрыв второго рода.

Решение. Заметим, что

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Воспользуемся правилом вычисления предела суперпозиции функций:

$$\begin{aligned} f(+0) &= \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x}} = +\infty, \\ f(-0) &= \lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x}} = 0. \end{aligned}$$

Так как $f(+0) = +\infty$, то для данной функции $x = 0$ — точка разрыва второго рода.

I. Сформулируйте на языке ε -, δ -окрестностей (с помощью неравенств) следующее утверждение и приведите соответствующий пример.

$$1.1. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

$$1.2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

$$1.3. \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

$$1.4. \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty.$$

$$1.5. \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

$$1.6. \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty.$$

$$1.7. \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty.$$

$$1.8. \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty.$$

$$1.9. \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty.$$

$$1.10. \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty.$$

$$1.11. \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty.$$

$$1.12. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

$$1.13. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty.$$

$$1.14. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty.$$

$$1.15. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty.$$

$$1.16. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$$1.17. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

$$1.18. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty.$$

$$1.19. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$1.20. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

$$1.21. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b - 0.$$

$$1.22. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b + 0.$$

$$1.23. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b + 0.$$

$$1.24. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b - 0.$$

$$1.25. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b + 0.$$

$$1.26. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b - 0.$$

II. Пользуясь определением предела, докажите равенство.

$$2.1. \quad \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9.$$

$$2.2. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x}{1-x} = \infty.$$

$$2.3. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0.$$

$$2.4. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x = +\infty.$$

$$2.5. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

$$2.6. \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{2+x}{2-x} = +\infty.$$

$$2.7. \quad \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1+x}{3-x} = -\infty.$$

$$2.8. \quad \lim_{x \rightarrow 8} \sqrt[3]{x} = 2.$$

$$2.9. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0.$$

$$2.10. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log_2 x = -\infty.$$

$$2.11. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_5 x = +\infty.$$

$$2.12. \quad \lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4.$$

$$2.13. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{x} = -1.$$

$$2.14. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1.$$

$$2.15. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = -1.$$

$$2.16. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1.$$

$$2.17. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2+1} = 1+0.$$

$$2.18. \quad \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x - 3) = -1.$$

$$2.19. \quad \lim_{x \rightarrow 2} x(x+5) = 14.$$

$$2.20. \quad \lim_{x \rightarrow 3} (3-x)^2 = 9+0.$$

$$2.21. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^x} = 0.$$

$$2.22. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$2.23. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2+x} = \frac{1}{3}.$$

$$2.24. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

$$2.25. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2}.$$

$$2.26. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1} = 1.$$

III. Докажите, что предела не существует.

$$3.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} 12^{x \cos x}.$$

$$3.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} 15^{x \sin x}.$$

$$3.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\cos x}.$$

$$3.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \pi^{\sin x}.$$

$$3.5. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\sin^2 \frac{1}{x}}.$$

$$3.6. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\cos^2 \frac{1}{x}}.$$

$$3.7. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sign} \left(\sin \frac{\pi}{2x} \right).$$

$$3.8. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sign} \left(\cos \frac{\pi}{3x} \right).$$

$$3.9. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{arctg} \frac{5}{x} \right).$$

$$3.10. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{x} \right).$$

$$3.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x^8}}{x + x^5}.$$

$$3.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x + x^2}.$$

$$3.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^6 + x^7}}{x^3 + x^5}.$$

$$3.14. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cos x + x}{(x - 1)^2}.$$

$$3.15. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x + 2}{x + 2}.$$

$$3.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin |x|}{x}.$$

$$3.17. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{\operatorname{sign} x}{x}}.$$

$$3.18. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + |x|)^{\frac{1}{x}}.$$

$$3.19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + |x|)^{\sqrt{2}} - 1}{x}.$$

$$3.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{\sqrt{x^2}}.$$

$$3.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_7(1 + |x|) - 1}{x}.$$

$$3.22. \lim_{x \rightarrow 0} (125)^{\frac{1}{2x}}.$$

$$3.23. \lim_{x \rightarrow 0} (374)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

$$3.24. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (21, 4)^{\frac{1}{\cos x}}.$$

$$3.25. \lim_{x \rightarrow 0} (832)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}.$$

$$3.26. \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} (59)^{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}}.$$

IV. Найдите значение предела.

$$4.1. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6 - 5x - 2x^2 + x^3}{12 - 11x - 2x^2 + x^3}.$$

$$4.3. \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3 + 10x + 9x^2 + 2x^3}{6 - x - 4x^2 - x^3}.$$

$$4.5. \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{15 + 32x + 3x^2 - 2x^3}{5x - 11x^2 + 2x^3}.$$

$$4.7. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{14 + 9x - 6x^2 - x^3}{2 - 9x + 10x^2 - 3x^3}.$$

$$4.9. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10 - 3x - 6x^2 - x^3}{12 - 19x + 8x^2 - x^3}.$$

$$4.11. \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{24 + 26x + 9x^2 + x^3}{48 - 16x - 3x^2 + x^3}.$$

$$4.13. \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{3 + 4x - 5x^2 - 2x^3}{6 + 13x + x^2 - 2x^3}.$$

$$4.15. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6 - 7x + x^3}{12 - 10x - 4x^2 + 2x^3}.$$

$$4.17. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{45 - 9x - 5x^2 + x^3}{12 + 8x - 13x^2 + 3x^3}.$$

$$4.19. \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{16 + 4x - 4x^2 - x^3}{12 - 17x - 13x^2 - 2x^3}.$$

$$4.21. \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{6 + x - 5x^2 - 2x^3}{6 + 7x - x^2 - 2x^3}.$$

$$4.23. \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{30 + 19x - x^3}{6 + 5x - 2x^2 - x^3}.$$

$$4.25. \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{20 - 19x - 2x^2 + x^3}{35 + 23x - 11x^2 + x^3}.$$

$$4.2. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 + 11x + 6x^2 + x^3}{8 - 6x - 3x^2 + x^3}.$$

$$4.4. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 + 17x + 11x^2 + 2x^3}{2x - 3x^2 - 2x^3}.$$

$$4.6. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{12 + 17x + 3x^2 - 2x^3}{4x - 13x^2 + 3x^3}.$$

$$4.8. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{30 + 11x - 4x^2 - x^3}{24 - 26x + 9x^2 - x^3}.$$

$$4.10. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{10 + 17x + 8x^2 + x^3}{12 + 5x - 6x^2 + x^3}.$$

$$4.12. \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{15 - 22x - 15x^2 - 2x^3}{30 - 19x + x^3}.$$

$$4.14. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{6 - 13x + x^2 + 2x^3}{12 - 25x + x^2 + 2x^3}.$$

$$4.16. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{12 + 4x - 3x^2 - x^3}{24 + 22x - x^2 - 3x^3}.$$

$$4.18. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{60 - 7x - 6x^2 + x^3}{16 + 12x - 16x^2 + 3x^3}.$$

$$4.20. \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{35x + 12x^2 + x^3}{15 - 22x - 15x^2 - 2x^3}.$$

$$4.22. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{18 - 9x - 5x^2 + 2x^3}{6 - x - 5x^2 + 2x^3}.$$

$$4.24. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{40 - 18x - 3x^2 + x^3}{14 + 5x - 8x^2 + x^3}.$$

$$4.26. \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{12 - 8x - 5x^2 + x^3}{18 + 9x - 8x^2 + x^3}.$$

V. Вычислите значение предела.

$$5.1. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{25+x} - \sqrt[3]{29-x}}{x - \sqrt{2x}}.$$

$$5.3. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{5+x} - \sqrt[3]{11-x}}{x - 1 - \sqrt{x+1}}.$$

$$5.5. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{61+x} - \sqrt[3]{58+2x}}{x - \sqrt{x+6}}.$$

$$5.7. \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4 - \sqrt{21-x}}{\sqrt[4]{x+14} - 2}.$$

$$5.9. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - \sqrt{2x+8}}{\sqrt[4]{85-x} - 3}.$$

$$5.11. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5 - \sqrt{7x+4}}{\sqrt[4]{13+x} - 2}.$$

$$5.13. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt[3]{5x+7}}{7 - \sqrt{4x+33}}.$$

$$5.15. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x-6} - \sqrt[3]{30-x}}{1 - \sqrt{x-2}}.$$

$$5.17. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - \sqrt[3]{27-x}}{3 - \sqrt{9+3x+x^2}}.$$

$$5.19. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{20-2x} - \sqrt{3x+10}}{\sqrt[3]{25+x} - \sqrt[3]{29-x}}.$$

$$5.21. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-2} - \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{5+x} - \sqrt[3]{14-2x}}.$$

$$5.23. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{12-x} - \sqrt{x+6}}{\sqrt[3]{34+10x} - \sqrt[3]{55+3x}}.$$

$$5.25. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[4]{3x+4}}{6 - \sqrt{10x-4}}.$$

$$5.2. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x} - \sqrt[3]{9-x}}{x - \sqrt{x}}.$$

$$5.4. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{6+x} - \sqrt[3]{10-x}}{x + 1 - \sqrt{x+7}}.$$

$$5.6. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{25+x} - \sqrt[3]{29-x}}{\sqrt[4]{x+14} - \sqrt{2x}}.$$

$$5.8. \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{6 - \sqrt{22+2x}}{\sqrt[4]{10x+11} - 3}.$$

$$5.10. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 - \sqrt{11+x}}{\sqrt[4]{18+x} - 2}.$$

$$5.12. \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{4 - \sqrt{3x-2}}{\sqrt[4]{2x+4} - 2}.$$

$$5.14. \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x+3}}{4 - \sqrt{3x+1}}.$$

$$5.16. \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{7+x} - \sqrt[3]{14+2x}}{\sqrt{12+x} - 3}.$$

$$5.18. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - \sqrt[3]{21+3x}}{7 - \sqrt{7x^2+21}}.$$

$$5.20. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{7+x} - \sqrt[3]{10-2x}}.$$

$$5.22. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+3} - \sqrt{x+7}}{\sqrt[3]{4+2x} - \sqrt[3]{10-x}}.$$

$$5.24. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt[3]{23+2x} - \sqrt[3]{29-x}}.$$

$$5.26. \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt[4]{3x+1}}{5 - \sqrt{4x+5}}.$$

VI. Вычислите пределы, пользуясь «замечательными» пределами.

$$6.1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x^2)}{7x^2 + x}.$$

$$6.2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2 + x^3}.$$

$$6.3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}.$$

$$6.4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{19x}.$$

$$6.5. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$6.6. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{\cos 3x - 1}$$

$$6.7. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{5x^2 + x^4}.$$

$$6.8. \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 3x.$$

$$6.9. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}.$$

$$6.10. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right).$$

$$6.11. \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

$$6.12. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^3 - 2x^2}{\sin(3x^2)}.$$

$$6.13. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin^2 3x}.$$

$$6.14. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^3}{\arcsin(x^2)}.$$

$$6.15. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(2x^2 + x)}{\operatorname{arctg}(x^2 + x)}.$$

$$6.16. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{1 - \cos 5x}.$$

$$6.17. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1 - x)}.$$

$$6.18. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x)}{\ln(1 + x)}.$$

$$6.19. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\ln(1 - x) + \ln(1 + x)}.$$

$$6.20. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) \sin 2x}{x(1 - \cos x)}.$$

$$6.21. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}.$$

$$6.22. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_{10}(1 - x^2)}{2x^2}.$$

$$6.23. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^2}{1 - \cos x}.$$

$$6.24. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\log_2(1 + 2x) + \log_2(1 - 2x)}.$$

$$6.25. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + 2 \sin x}{\operatorname{tg} x - 2 \sin x}.$$

$$6.26. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\ln 2x}{6x - 3}.$$

VII. Вычислите пределы, используя правило суперпозиции пределов.

$$7.1. \quad \lim_{x \rightarrow e} \cos(\arcsin(\ln x)).$$

$$7.2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin(\arccos(\ln x)).$$

$$7.3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin(\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)).$$

$$7.4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin(\operatorname{arctg}(\operatorname{ch} x)).$$

$$7.5. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{\sin^2 x}.$$

$$7.6. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \left(\ln \frac{\sin x}{x} \right).$$

$$7.7. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}.$$

$$7.8. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1 + 2 \sin^2 x)}{2 \sin^2 x}.$$

$$7.9. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \cos(\operatorname{arctg}(\ln x)).$$

$$7.10. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \sin \left(\arccos \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) \right).$$

$$7.11. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right).$$

$$7.12. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right).$$

$$7.13. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg}(\ln(x^2)).$$

$$7.14. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \operatorname{arctg}(\ln(x^2)).$$

$$7.15. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{\sqrt{1 + e^{-x}} - 1}{e^{-x}}.$$

$$7.16. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\sqrt[3]{1 + \sin \frac{1}{x}} - 1}{\sin \frac{1}{x}}}.$$

$$7.17. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \cos \left(2 \arcsin \frac{x}{2} \right).$$

$$7.18. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sin \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{x}{2} \right).$$

$$7.19. \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\operatorname{ctg}(1-x^2)}.$$

$$7.20. \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \operatorname{arctg}(\ln(1 + x^3)).$$

$$7.21. \quad \lim_{x \rightarrow 5} \arcsin \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

$$7.22. \quad \lim_{x \rightarrow 5} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x-2}}.$$

$$7.23. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \arcsin \sqrt{1 - \sin^4 x}.$$

$$7.24. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \arcsin \frac{\operatorname{tg} 2x}{2}.$$

$$7.25. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1}}{\operatorname{tg} x}.$$

$$7.26. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1}}{\operatorname{tg} x}.$$

VIII. Вычислите пределы, выделяя «главное» слагаемое.

$$8.1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{2x} + 2e^x + 100)}{\ln(e^{3x} - e^{2x} + e^{1000})}.$$

$$8.2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{7x} + \cos x + 500)}{\ln(e^x - 2 \operatorname{arctg} x + e^{20})}.$$

$$8.3. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2^x + 5^x + 10)}{\ln(3^x + e^x - 50)}.$$

$$8.4. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(10^x - 15 \sin x + 2)}{\ln(7^x + 4^x - 200)}.$$

$$8.5. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(15^x + \operatorname{arctg} x + 10)}{\ln(e^x + 5)}.$$

$$8.6. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt[2]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x})}{\ln(\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[5]{x} + \sqrt[7]{x})}.$$

$$8.7. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[6]{x})}{\ln(\sqrt[2]{x} - \sqrt[5]{x} + \sqrt[8]{x})}.$$

$$8.8. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 5})}{\ln(2x - \sqrt{x^2 - 1})}.$$

$$8.9. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + \sqrt{x^3 + 5})}{\ln(x - \sqrt{x^2 - 2})}.$$

$$8.10. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\ln(x + x^2)}.$$

$$8.11. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x + \sqrt{x - \sqrt{x}}}}{\ln(x^{\frac{3}{4}} + \sqrt{x})}.$$

$$8.12. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x \sqrt{2x \sqrt{3x}}}}{\ln(2x^2 - 10x)}.$$

$$8.13. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x})}{\ln\left(\sqrt{2x \sqrt{4x \sqrt{8x}}}\right)}.$$

$$8.14. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3 + \sqrt{x^6 + 5})}{\ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 1})}.$$

$$8.15. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^3 + x^2 + 1})}{\ln(x^2 + \sqrt{x^2 - 2x + 1})}.$$

$$8.16. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^{10} + 7x^6 + 9 \cos x)}{\ln(x^3 + 2x + 1)}.$$

$$8.17. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x^8 + x^5 + 10x^4)}{\ln(x^{19} + 3x^2 \sin x + x)}.$$

$$8.18. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3 - 2x + 3 \operatorname{arctg} x)}{\ln(x^7 + x^2 - 5)}.$$

$$8.19. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(5\sqrt[5]{x} + 7\sqrt[7]{x} + 8\sqrt[8]{x})}{\ln(3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 9\sqrt[9]{x})}.$$

$$8.20. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(5\sqrt[5]{x} + 4\sqrt[7]{x}\sqrt[8]{x})}{\ln(3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x}\sqrt[9]{x})}.$$

$$8.21. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + x \operatorname{arctg} x + 2^x)}{\ln(x^4 + 3x^3 + e^x)}.$$

$$8.22. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^4 + xe^x)}{\ln(x^4 - 2x^2 \cos x)}.$$

$$8.23. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 2x \cos x + 1)}{\ln(x^6 + 2^x)}.$$

$$8.24. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + \sqrt{1 - x^3})}{\ln(x^8 + e^x)}.$$

$$8.25. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + \sqrt{1 - x})}{\ln(x^{10} + \sqrt{x^8 - 5})}.$$

$$8.26. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 7^x \cos x)}{\ln(x^2 + 1000^x)}.$$

IX. Найдите предел выражения вида $u(x)^{v(x)}$.

$$9.1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{3x+5} \right)^{x^4 + \cos x}.$$

$$9.2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1} \right)^{3x}.$$

$$9.3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+20}{x+11} \right)^{5x+\sin x}.$$

$$9.4. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+5} \right)^{x^2-10x+2}.$$

$$9.5. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+5x+1}{4x^2+1} \right)^{7x^2+5}.$$

$$9.6. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+5x+7}{x^2-x+10} \right)^{\frac{x^3}{2-3x}}.$$

$$9.7. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2x+5}{8x^2-x+7} \right)^{\frac{2x^3}{x-1}}.$$

$$9.8. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-9x+17}{x^2-x} \right)^{\frac{1+\sqrt{x}}{1-x}}.$$

$$9.9. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+17}{x^2+10} \right)^{\frac{5x^3}{2-3x}}.$$

$$9.10. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \sqrt{1-3 \operatorname{tg} x}.$$

$$9.11. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \sqrt{1+5 \sin x}.$$

$$9.12. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x}.$$

$$9.13. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-7x}.$$

$$9.14. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+2 \sin x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$9.15. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+7 \operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}}.$$

$$9.16. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}.$$

$$9.17. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1-2 \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

$$9.18. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\ln \cos x}}.$$

$$9.19. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+\sin^2 x)^{\frac{1}{\ln \cos 2x}}.$$

$$9.20. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (3^x + \sin x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$9.21. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (5^x - \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$9.22. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (7^x + 2 \sin x)^{\operatorname{cosec} x}.$$

$$9.23. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (9^x + x^2)^{\operatorname{cosec} x}.$$

$$9.24. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (2^x - x^3)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}.$$

$$9.25. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (10^x + x e^x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$9.26. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (15^x - x e^x)^{\frac{1}{x}}.$$

Х. Докажите следующие асимптотические сравнения.

$$10.1. \quad \frac{\operatorname{arctg} x}{x + x^3} = O\left(\frac{1}{x^3}\right) \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

$$10.2. \quad \frac{\arcsin \frac{x-1}{x+2}}{1 + x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

$$10.3. \quad \operatorname{arctg} x \sqrt{x^2 + x + 1} = O(x) \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

$$10.4. \quad x \left(\arccos \left(\frac{x+1}{x+20} \right) + \cos x \right) = O(x) \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

$$10.5. \quad x^2 \sin \sqrt{x} = O\left(x^{\frac{5}{2}}\right) \text{ при } x \rightarrow +0.$$

$$10.6. \quad \sqrt{x^3} \cos \left(\frac{1}{x} \right) = O\left(x^{\frac{3}{2}}\right) \text{ при } x \rightarrow +0.$$

$$10.7. \quad 2x \cos x - x^2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right) = O(x) \text{ при } x \rightarrow 0.$$

$$10.8. \quad 2x \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right) + x^3 = O(x) \text{ при } x \rightarrow 0.$$

$$10.9. \quad \sqrt{x + 2\sqrt{x + 3\sqrt{x}}} \sim \sqrt{x} \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

$$10.10. \quad x^2 \operatorname{arctg} x + x \sin x \sim \frac{\pi x^2}{2} \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

$$10.11. \quad \sqrt[3]{x + \sqrt{x - \sqrt{x}}} \sim \sqrt[3]{x} \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

$$10.12. \quad \sqrt[4]{x^2 + \sqrt{x + \sqrt{x^3}}} \sim \sqrt{x} \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

$$10.13. \quad x^3 \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1 + x^2} \sim \pi x^3 \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

$$10.14. \quad \sqrt{3x + \sqrt{2x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x} \text{ при } x \rightarrow +0.$$

$$10.15. \quad \sin 2x \sim 2 \operatorname{arctg} x \text{ при } x \rightarrow 0.$$

$$10.16. \quad 1 - \cos x \sim \operatorname{ch} x - 1 \text{ при } x \rightarrow 0.$$

$$10.17. \quad (1 + x)^{10} - 1 \sim e^{10x} - 1 \text{ при } x \rightarrow 0.$$

$$10.18. \quad \arcsin x \sim \operatorname{sh} x \text{ при } x \rightarrow 0.$$

$$10.19. \quad \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x \text{ при } x \rightarrow 0.$$

$$10.20. \quad \sqrt{x} \sin \sqrt{x} \sim \arcsin x \text{ при } x \rightarrow +0.$$

$$10.21. \quad \sqrt{x^2 - 1} - |x| = o(1) \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

$$10.22. \quad \frac{x^3 + 4x + 10}{x^2 + 6x + 7} = o\left((1 + x)^{\sqrt{3}} - 1\right) \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

$$10.23. (\sqrt{1+2x} - 1) \operatorname{ctg}^2 x = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ при } x \rightarrow 0.$$

$$10.24. \frac{x + 2x^2 + x^3}{x^3 + x^4 + x^6} = o\left(\frac{1}{x^3}\right) \text{ при } x \rightarrow 0.$$

$$10.25. \frac{x + 2x^2 + x^3}{x^2 + x^4 + x^6} = o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) \text{ при } x \rightarrow +0.$$

$$10.26. (3^x - 1) \operatorname{arctg} 2x = o(\sqrt{x}) \text{ при } x \rightarrow +0.$$

XI. Вычислите значение предела, используя замену функций на эквивалентные.

$$11.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 4x}.$$

$$11.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{\ln(\cos 5x)}.$$

$$11.3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{e^{4-x} - 1}{\sqrt{2x-7} - 1}.$$

$$11.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}.$$

$$11.5. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$11.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^3)}{(e^{2x^2} - 1) \sin 3x}.$$

$$11.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\sqrt{\frac{2+x}{2-7x}} - 1 \right).$$

$$11.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\sqrt[3]{\frac{3+5x}{3-4x}} - 1 \right).$$

$$11.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 3x}.$$

$$11.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{e^{2x^2} - 1}.$$

$$11.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{3x}.$$

$$11.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{3 \operatorname{arctg} x}.$$

$$11.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1-3x^2} - 1}.$$

$$11.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - 1}{\sin^2 x}.$$

$$11.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 2x}.$$

$$11.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{\sqrt{\cos 5x} - 1}.$$

$$11.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+1} - e}{\ln(\cos 2x)}.$$

$$11.18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+\sin 2x)}{\sqrt{1-6x^2} - 1}.$$

$$11.19. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{e^{x-1} - 1}.$$

$$11.20. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(3x-8)}{\sqrt{x-2} - 1}.$$

$$11.21. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\ln x}.$$

$$11.22. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-x-1} - 1}{\ln(x-1)}.$$

$$11.23. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}}.$$

$$11.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{2x+1}.$$

$$11.25. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$11.26. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

XII. Найдите значение предела.

$$12.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

$$12.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2 \sin x}{3x - \sqrt[3]{x}}.$$

$$12.5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + \ln^2 x}{2^{x+1} + x^{100}}.$$

$$12.7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^{x+1} + x^2}{5^{x-1} + 3^{x+2} + x^4}.$$

$$12.9. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + |x|}{e^{x-1} + 2x}.$$

$$12.11. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \operatorname{arctg} x^2}{2x^2 + \sqrt{x}}.$$

$$12.13. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x + 2^x}{5^x + 3^x}.$$

$$12.15. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x + |x|}{\sqrt[3]{x} \ln(x^2) - 2x \cos \frac{1}{x}}.$$

$$12.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\ln |x|}.$$

$$12.19. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 x + \sqrt{x}}{2(\ln x + \sqrt{2x})}.$$

$$12.21. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{5x^2 + 1} \right)^{x \ln x}.$$

$$12.23. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2}{\operatorname{arctg} x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$12.25. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} + 2x^4}{e^{x-1} + 2^{x+2} - x^4}.$$

$$12.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

$$12.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2}{3e^x + 2^x}.$$

$$12.6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1,001)^x}{x^{1000}}.$$

$$12.8. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7^x + x^4}{5^x - 3x^4}.$$

$$12.10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2^{\sin x}}{4x^2 + 2^x}.$$

$$12.12. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^{100} - x^{2x}}{5^x + x^2 \operatorname{arctg} x}.$$

$$12.14. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{\sqrt{x} + 2 \ln x}.$$

$$12.16. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^{e^2}}.$$

$$12.18. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}, n \in \mathbb{N}.$$

$$12.20. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1 + \operatorname{arctg} x^2}.$$

$$12.22. \lim_{x \rightarrow +0} \left(1 + \frac{2}{\operatorname{arctg} x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$12.24. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - x^2}{e^x + \sin x - 3x^2}.$$

$$12.26. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+1} + 2x^4}{e^{x-1} + 2^{x+2} - x^4}.$$

XIII. Укажите точки разрыва функции и определите их тип.

$$13.1. \quad f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}.$$

$$13.2. \quad f(x) = \frac{2x-6}{2x^2-5x+3}.$$

$$13.3. \quad f(x) = \frac{(x+4)^2}{3x^2+10x-8}.$$

$$13.4. \quad f(x) = \frac{x-3}{2x^2-7x+3}.$$

$$13.5. \quad f(x) = \frac{8x^2+2x-1}{8x^2-2x-3}.$$

$$13.6. \quad f(x) = \frac{3x^2+5x-2}{6x^2-17x+5}.$$

$$13.7. \quad f(x) = \frac{2x^2-11x+12}{x^2-6x+8}.$$

$$13.8. \quad f(x) = \frac{x^2+10x+25}{2x^2+7x-15}.$$

$$13.9. \quad f(x) = \frac{x+1}{x^3+1}.$$

$$13.10. \quad f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

$$13.11. \quad f(x) = e^{x+\frac{1}{x}}.$$

$$13.12. \quad f(x) = \operatorname{sign} \frac{x^2+x-2}{x^2-6x+5}.$$

$$13.13. \quad f(x) = \frac{e^x-1}{2x}.$$

$$13.14. \quad f(x) = \frac{\sin(2x^2)}{1-\cos 4x}.$$

$$13.15. \quad f(x) = \frac{[x]}{x}.$$

$$13.16. \quad f(x) = \frac{\{x\}}{x}, \text{ где } \{x\} = x - [x].$$

$$13.17. \quad f(x) = \frac{1}{\ln x}.$$

$$13.18. \quad f(x) = x \sin \left(\frac{\pi[x]}{2} \right).$$

$$13.19. \quad f(x) = \operatorname{sign}(\arcsin(\cos x)).$$

$$13.20. \quad f(x) = \operatorname{sign}(\arccos(\sin x)).$$

$$13.21. \quad f(x) = \operatorname{sign} \left(\cos \frac{1}{x} \right).$$

$$13.22. \quad f(x) = \operatorname{sign} \left(\sin \frac{1}{x} \right).$$

$$13.23. \quad f(x) = (-1)^{[x^2]}.$$

$$13.24. \quad f(x) = x \left[\frac{1}{x} \right].$$

$$13.25. \quad f(x) = \sin \frac{1}{x}.$$

$$13.26. \quad f(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{x}.$$

Литература

- [1] Архипов, Г. И. Лекции по математическому анализу / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. — М. : Высшая школа, 1999. — 695 с.
- [2] Виноградова, И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий ; под общ. ред. В. А. Садовниченко. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1988. — 416 с.
- [3] Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие / Б. П. Демидович. — 13-е изд., испр. — М. : Изд-во Моск. ун-та ; ЧеРо, 1997. — 624 с.
- [4] Зорич, В. А. Математический анализ. Ч. I / В. А. Зорич. — Изд. 4-е, испр. — М. : МЦНМО, 2002. — XVI+ 664 с.
- [5] Ильин, В. А. Основы математического анализа. Ч. I / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — Изд. 4-е, перераб. и доп. — М. : Наука, 1982. — 616 с.
- [6] Климов, В. С. Одномерный математический анализ. Ч. I : учеб. пособие / В. С. Климов. — Ярославль : ЯрГУ, 2005. — 120 с.
- [7] Кудрявцев, Л. Д. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1. : Предел. Непрерывность. Дифференцируемость : учеб. пособие / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин ; под ред. Л. Д. Кудрявцева. — 2-е изд., перераб. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 496 с.
- [8] Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа. Т. I / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Высшая школа, 1981. — 687 с.
- [9] Логвенков, С. А. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов социально-управленческих специальностей / С. А. Логвенков, П. А. Мышкис, В. С. Самовол — М. : МЦНМО, 2014. — 176 с.

- [10] Никольский, С. М. Курс математического анализа. Т. I / С. М. Никольский. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1990. — 528 с.
- [11] Рудин, У. Основы математического анализа / У. Рудин. — М. : Мир, 1976. — 320 с.
- [12] Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа : учеб. пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. — 3-е изд., испр. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 672 с.
- [13] Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. — Спб. : Лань, 2001. — 448 с.

Учебное издание

Алексеев Владислав Владимирович
Кащенко Александра Андреевна
Преображенская Маргарита Михайловна

Математический анализ

Часть 2

Практикум

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова
Компьютерный набор и верстка
В. В. Алексеев, А. А. Кащенко, М. М. Преображенская

Подписано в печать 29.09.2022. Формат 60×84/16.

Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 2,0.

Тираж 4 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.