

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию  
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
Кафедра математического моделирования

**Н.Л. Майорова**

## **Материалы по дисциплине «Методы оптимизации»**

*Методические указания*

*Рекомендовано*

*Научно-методическим советом университета  
для студентов, обучающихся по специальности  
Прикладная математика и информатика*

Ярославль 2009

УДК 51:37  
ББК В183.4я73  
М 14

*Рекомендовано  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2009 года*

Рецензент  
кафедра математического моделирования  
Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова

**Майорова, Н.Л. Материалы по дисциплине «Методы оптимизации»:** метод. указания / Н.Л. Майорова;  
М 14 Яросл. гос. ун-т. – Ярославль : ЯрГУ, 2009. – с.

Методические указания содержат материалы, необходимые для изучения дисциплины «Методы оптимизации»: общую характеристику дисциплины, требования к уровню овладения предметом, программу дисциплины, список литературы, вопросы к экзамену, примерные варианты контрольных работ, варианты расчетно-графической работы, место дисциплины в итоговой государственной аттестации, разбор решений некоторых вариационных задач.

Предназначены для студентов 4 курса математического факультета, обучающихся по специальности 010501 – Прикладная математика и информатика (блок ОПД).

УДК 51:37  
ББК В183.4я73

© Ярославский государственный университет, 2009

# 1. Введение

С задачами оптимизации приходится встречаться в различных сферах деятельности человека. Каждое разумное действие является в определенном смысле оптимальным, так как выбирается после сравнения с другими вариантами. Исторически с задачами оптимизации человечество столкнулось уже в древние века. Так, уже давно были решены разнообразные задачи геометрического типа, связанные со свойствами элементарных фигур.

Наиболее простая задача безусловной оптимизации функций многих переменных привлекла внимание математиков во времена, когда закладывались основы математического анализа. Она во многом стимулировала создание дифференциального исчисления. С появлением дифференциального исчисления возникла возможность исследования более сложных задач. Первый общий аналитический прием решения экстремальных задач был разработан Пьером Ферма и являлся одним из первых крупных результатов анализа. Открыт он был, по-видимому, в 1629 году, но впервые достаточно полно изложен в письме к Робервалю в 1638 году. На современном языке прием Ферма сводится к тому, что в точке экстремума  $\tilde{x}$  в задаче без ограничений  $f(x) \rightarrow \text{extr}$  должно иметь место равенство  $\nabla f(\tilde{x}) = 0$ . Первый намек на этот результат содержится в словах Кеплера из «Стереометрии винных бочек». Точный смысл рассуждения П. Ферма приобрели через 46 лет, когда в 1684 году появилась работа Лейбница, в которой закладывались основы математического анализа. В своей статье Лейбниц не только получает в качестве необходимого условия соотношение  $\nabla f(\tilde{x}) = 0$  (сейчас этот результат называют теоремой Ферма), но и употребляет второй дифференциал для различения максимума и минимума, то есть, по существу, формулирует условия экстремума второго порядка.

Большинство излагаемых Лейбницем фактов было к тому времени известно также и Ньютону, но его работа, завершенная к 1671 году, была опубликована лишь в 1736 году. Важнейшие ре-

зультаты по минимизации функций были в дальнейшем получены Эйлером и Лагранжем.

На первых лекциях курса «Методы оптимизации» излагаются задачи минимизации скалярных функций конечного числа переменных. До некоторой степени этот материал является повторением и обобщением знаний, полученных студентами в курсе математического анализа. Приходится также для более полного понимания использовать геометрическую интерпретацию излагаемых фактов, для чего бывает необходимым вспомнить классификацию поверхностей второго порядка, изучаемую в курсе алгебры, понятие линии и поверхности уровня функций многих переменных, а также некоторые сведения из теории квадратичных форм и алгебраический критерий Сильвестра знакопостоянства квадратичной формы.

Затем изучается переход от необходимых и достаточных условий оптимальности решений оптимизационных задач без ограничений к соответствующим критериям условных задач, то есть задач с различными типами ограничений на независимые переменные. Студентам рассказывается о том, что условная задача является наиболее общим типом оптимизационных задач нелинейного программирования (как, впрочем, и линейного), к которому приводит большой ряд инженерных задач (с ограничениями на управляемые переменные). Такие ограничения существенно уменьшают размеры области, в которой проводится поиск оптимума. На первый взгляд может показаться, что уменьшение размеров допустимой области должно упростить процедуру поиска оптимума. Между тем, напротив, процесс оптимизации становится более сложным, поскольку установленные критерии безусловной оптимизации нельзя использовать при наличии ограничений. При этом может нарушаться даже основное условие, в соответствии с которым оптимум достигается в стационарной точке, характеризующейся нулевым градиентом. Например, безусловный минимум функции  $f(x) = (x - 2)^2$  имеет место в стационарной точке  $x = 2$ . Но если задача оптимизации решается с учетом ограничения  $x \geq 4$ , то будет найден условный экстремум, которому соответствует точка  $x = 4$ . Эта точка не является стационарной точкой функции  $f$ , так как  $\nabla f(4) = 4$ . Поэтому для данного типа задач не-

обходимо сформулировать новые условия оптимальности решений задач с ограничениями.

По опыту многолетнего преподавания данной дисциплины можно отметить, что ввиду недостаточности учебного времени, отведенного на практические занятия (примерно 8 – 9 занятий в группе за семестр на все три большие темы данной дисциплины), и невозможности полностью отработать решение каждого типа задач, во время экзамена для многих студентов может оказаться достаточно сложной даже любая простейшая задача на условный экстремум ( $xy \rightarrow \text{extr}, x + y = 1$ ), поскольку учащиеся пользуются критерием Сильвестра для идентификации стационарной точки (является ли она точкой минимума, максимума или в ней вообще нет экстремума), который «не работает» для задач с ограничениями, а справедлива соответствующая теорема – достаточное условие оптимума для данного типа задач. Большие трудности вызывает также проверка условий регулярности при применении общего метода решений задач с ограничениями – метода множителей Лагранжа, так как все условия регулярности формулируются в терминах точки оптимума, поиск которой и ведется. Общеизвестно, что со времен Лагранжа почти на протяжении целого века правило множителей формулировалось с  $\lambda_0 = 1$ , хотя без дополнительных предположений, например, линейной независимости векторов-градиентов функций-ограничений в точке оптимума это правило неверно.

Отдельной темой рассматривается частный случай общей задачи условной оптимизации со смешанной системой ограничений – выпуклая задача программирования. Студентам поясняется, что доказываемые свойства выпуклых задач имеют важное значение не только в теории, но и в численных методах оптимизации, поскольку большинство существующих численных методов позволяет, вообще говоря, находить лишь локальные решения, а точнее, стационарные точки задачи. Поэтому для выпуклой задачи отыскание стационарной точки означает отыскание решения, причем глобального.

Другой класс изучаемых в данном курсе задач на экстремум – это задачи вариационного исчисления. Следы интереса к ним можно найти и в античной математике, однако подлинное

рождение вариационного исчисления произошло в конце 19 века, когда Иоганн Бернулли в 1696 году сформулировал знаменитую задачу о линии наискорейшего ската (брахистохроне). На современном языке она представляет собой бесконечномерную задачу безусловной оптимизации с минимизируемым функционалом специального интегрального вида. В решении задачи о брахистохроне приняли участие лучшие математики того времени: Лейбниц, Ньютон, Якоб Бернулли, Лопиталь. Первое решение задачи принадлежало Я. Бернулли, второе – Лопиталю, третье – Ньютону. После этого в 18 веке Эйлером и Лагранжем были даны общие методы решения задач вариационного исчисления. Условия экстремума первого порядка были получены Эйлером, а второго – Лагранжем и Якоби. Их работу в 19 веке продолжили Коши, Гаусс, Пуассон, Остроградский и другие. Однако решения задач были неполны до недавнего времени, и только в конце 19 века работами Вейерштрасса и Гильберта было дано полное решение основных задач вариационного исчисления.

За отведенное учебным планом время на лекциях и практических занятиях удастся рассмотреть лишь простейшую вариационную задачу и некоторые ее обобщения для случая зависимости интегранта функционала от нескольких неизвестных функций и его зависимости от старших производных искомой функции. Кроме того, изучается задача об экстремуме определенного интеграла, когда искомые функции кроме граничных условий и условий непрерывности должны удовлетворять еще дополнительным требованиям, относящимся к поведению функции во всем промежутке интегрирования. Такой тип связанного экстремума возник из частной задачи о нахождении замкнутой кривой заданной длины  $2l$ , ограничивающей наибольшую площадь, и получил, благодаря ей, название изопериметрической задачи. Интересным примером такого типа задач является задача Дидоны, которая подробно обсуждается со студентами.

Следует отметить, что как задачи линейного и нелинейного программирования, так и простейшая вариационная задача в течение многих лет выносились на государственную аттестацию выпускников математического факультета. В связи с этим от студентов требуется умение решать типовые задачи нахождения экс-

тремалей интегральных функционалов, имеющих интегранты вида  $y^{-\frac{1}{2}}(1+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $x(1+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\dot{y}^{-2}(y^2+1)$ ,  $(\dot{y}-\sin x)^2$ ,  $-y^2+2y\dot{y}+\dot{y}^2$ ,  $\dot{y}^3y$  и т.п.

В конце сороковых годов 20 века начался новый этап развития методов оптимизации. Как всегда, толчком послужили задачи, поставленные практикой. Возникли динамическое программирование, теория игр, теория оптимального управления, теория дифференциальных игр и другие. В курсе методов оптимизации студенты очень кратко знакомятся с задачей оптимального управления в смысле быстродействия. При этом рассматривается лишь линейный случай. Дается понятие об управляемых объектах, допустимых управлениях, о задаче управления и уравнениях движения объекта. Выводятся уравнения Беллмана, определяющие суть метода динамического программирования. Оно, в свою очередь, представляет ценное эвристическое средство, на котором базируется метод решения задачи на быстродействие – принцип максимума Понтрягина. На практических занятиях от студентов требуется, кроме аналитического решения задачи, наглядно представить на фазовой плоскости фазовые состояния объекта – так называемый процесс управления.

Курс «Методы оптимизации» играет важную роль в подготовке специалиста, развивает его общую культуру.

## 2. Цели и задачи дисциплины

Дисциплина «Методы оптимизации» – одна из основных дисциплин цикла «Общепрофессиональные дисциплины» учебных планов по специальности 010501 – Прикладная математика и информатика. Она обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с Государственным образовательным стандартом, содействует фундаментализации образования, формированию мировоззрения и развитию математического мышления.

Целью дисциплины «Методы оптимизации» является ознакомление с историей развития теории оптимизационных задач, представление о моделях в математическом программировании, изучение основ теории математического программирования и основных методов решения задач математического программирования. Основными разделами программы являются методы решения экстремальных задач нелинейного программирования для конечномерных пространств, выпуклый анализ, простейшая вариационная задача и ее обобщения, уравнение Эйлера, условия второго порядка, связанный тип экстремума – изопериметрическая задача, двойственность задачи условного экстремума, задачи оптимального управления, принцип максимума Понтрягина.

Эта дисциплина относится к числу общепрофессиональных прикладных математических дисциплин в силу отбора изучаемого материала и его важности для подготовки специалиста. Она имеет разносторонние связи со многими основными и специальными математическими дисциплинами и основывается на знаниях, полученных слушателями при изучении таких математических дисциплин, как «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ», «Алгебра», «Линейное программирование», «Методы вычислений» и др.



### **3. Требования к уровню освоения содержания курса**

В результате изучения дисциплины слушатели должны:

#### **Иметь представление**

- об истории развития методов оптимизации, о некоторых современных направлениях их исследований, о многообразии оптимизационных задач
- об использовании алгоритмов поиска оптимума различных оптимизационных задач.

#### **Знать**

- постановку оптимизационных задач различных типов;
- необходимые и достаточные условия минимума различных оптимизационных задач.

#### **Уметь**

- классифицировать тип оптимизационной задачи;
- применять алгоритм нахождения оптимума конкретной оптимизационной задачи.

#### **Иметь навыки**

- нахождения конкретных точек оптимума в задаче на экстремум;
- проверки достаточных условий оптимальности;
- численного решения оптимизационных задач.

### **4. Сведения из Государственного образовательного стандарта и рабочей программы дисциплины «Методы оптимизации»**

Дисциплина «Методы оптимизации» в классических университетах изучается на специальности 010100 Математика и 010200 Прикладная математика и информатика. Отличие состоит в том, что на отделении «Математика» эта дисциплина включает в себя изучение вопросов линейного и нелинейного программирования, а на специальности «Прикладная математика и информатика» от-

дельно читается курс под названием «Линейное программирование», а в следующем семестре в курсе «Методы оптимизации» изучаются вопросы нелинейного программирования в конечно-мерных и бесконечномерных пространствах.

Дисциплина изучается студентами, обучающимися по специальности «Прикладная математика и информатика», математического факультета Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова в восьмом семестре. Структура курса предполагает чтение лекций и проведение практических занятий. В течение семестра студенты выполняют расчетно-графическую работу по всем разделам дисциплины, а в конце семестра сдают экзамен.

В соответствии с рабочим учебным планом общая трудоемкость дисциплины «Методы оптимизации» составляет 129 часов, из них 51 час лекций, 34 часа практических занятий, 10 часов – на выполнение расчетно-графической работы. На самостоятельную работу выделяется 34 часа.

В соответствии с разделом 4 Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по специальности «Прикладная математика и информатика» обязательный минимум содержания дисциплины составляют следующие разделы:

*Предмет и история развития методов оптимизации. Принципы и примеры моделирования экономических, физических и технических проблем в форме задач оптимизации.*

### ***Методы математического программирования.***

*Элементы дифференциального исчисления и выпуклого анализа. Нелинейное программирование. Методы минимизации функций одной переменной. Методы безусловной минимизации функций многих переменных. Гладкие задачи с равенствами и неравенствами. Различные принципы построения методов минимизации функций при наличии ограничений и соответствующие конкретные алгоритмы. Условие Джона. Теорема Куна-Таккера. Правило множителей Лагранжа. Различные условия регулярности оптимизационных задач. Условие Слейтера. Численные методы математического программирования. Методы одномер-*

*ной оптимизации: метод деления отрезка пополам, метод золотого сечения, метод касательных для минимизации выпуклых функций. Минимизация функций многих переменных. Градиентные методы.*

***Элементы выпуклого анализа и задача выпуклого программирования.***

*Выпуклые множества и экстремальные свойства выпуклых функций. Методы безусловной минимизации выпуклых функций. Задача выпуклого программирования. Различные формы условий оптимальности в выпуклом программировании.*

***Оптимальное управление и вариационное исчисление.***

*Задачи классического вариационного исчисления, уравнение Эйлера. Достаточные условия оптимальности в простейшей вариационной задаче. Некоторые случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Обобщения простейшей вариационной задачи. Изопериметрическая задача. Принцип динамического программирования и максимума Понтрягина в математической теории оптимальных процессов. Оптимальное управление линейными системами.*

Ниже приводится более подробное описание этих разделов, содержащееся в учебно-методическом комплексе по дисциплине «Методы оптимизации».

## **5. Содержание разделов дисциплины**

### **1. Введение**

Предмет и история развития методов оптимизации. Принципы и примеры моделирования экономических, физических и технических проблем в форме задач оптимизации.

### **Раздел 1. Нелинейное или математическое программирование – минимизация функций на множествах конечномерного пространства.**

**Тема 1.** Нелинейное программирование. Минимизация функций, исходные понятия. Теоремы существования. Проекция точки на множество.

**Тема 2.** Задача безусловной оптимизации. Дифференцируемые функции  $n$ -мерного евклидова пространства.

**Тема 3.** Краткие сведения из теории квадратичных форм. Критерий Сильвестра знакопостоянства квадратичной формы.

**Тема 4.** Необходимые и достаточные условия минимума в задаче без ограничений.

**Тема 5.** Задачи с ограничениями. Задачи с ограничениями в виде равенств. Геометрическая интерпретация. Множители Лагранжа. Необходимые и достаточные условия минимума задачи условной оптимизации с ограничениями-равенствами.

**Тема 6.** Общая задача нелинейного программирования с ограничениями. Постановка задачи. Геометрическая интерпретация. Необходимые условия оптимальности. Теорема Куна-Таккера. Условия Ф. Джона.

**Тема 7.** Правило множителей Лагранжа в общей задаче с ограничениями.

**Тема 8.** Условия регулярности. Геометрический смысл. Примеры нерегулярных задач. Условие Слейтера. Отыскание решений простейших задач.

## **Раздел 2. Элементы выпуклого анализа и задача выпуклого программирования.**

**Тема 9.** Выпуклые множества. Гиперплоскости, полупространства. Полиэдральные множества.

**Тема 10.** Выпуклые функции. Неравенство Иенсена. Надграфик и подграфик выпуклой функции. Критерии выпуклости дифференцируемой и дважды дифференцируемой функции.

**Тема 11.** Выпуклая задача оптимизации. Необходимые и достаточные условия минимума в задаче выпуклого программирования.

**Тема 12.** Теоремы Каратеодори. Теоремы об очистке.

## **Раздел 3. Вариационное исчисление.**

**Тема 13.** Простейшая вариационная задача. Задача о катеноиде и задача о брахистохроне. Постановка простейшей вариационной задачи. Интегрант функционала.

**Тема 14.** Доказательство вспомогательных лемм для формулирования теоремы о необходимых условиях существования решения простейшей вариационной задачи.

**Тема 15.** Первая вариация. Уравнение Эйлера. Уравнение Эйлера в интегральной форме. Экстремали функционала. Теорема Гильберта. Достаточное условие глобального минимума.

**Тема 16.** Некоторые случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Задача геометрической оптики – принцип Ферма.

**Тема 17.** Некоторые обобщения основной задачи вариационного исчисления. Случай нескольких неизвестных функций. Функционалы, зависящие от старших производных. Обобщенное уравнение Эйлера.

**Тема 18.** Изопериметрическая задача. Правило множителей Лагранжа. Задача Дидоны. Закон двойственности.

## **Раздел 4. Оптимальное управление.**

**Тема 19.** Задача об оптимальном быстродействии. Понятие об управляемых объектах. Задача управления. Уравнения движения объекта. Допустимые управления.

**Тема 20.** Принцип динамического программирования. Понятие оптимального процесса. Уравнение Беллмана.

**Тема 21.** Задача на быстродействие. Принцип максимума Понтрягина в математической теории оптимальных процессов.

**Тема 22.** Оптимальное управление линейными системами. Проблема синтеза.

## **Раздел 5. Численные методы математического программирования.**

**Тема 23.** Методы одномерной оптимизации. Метод деления отрезка пополам. Метод золотого сечения. Метод касательных для минимизации выпуклых функций.

**Тема 24.** Минимизация функций многих переменных. Градиентные методы.

## 6. Список рекомендуемой литературы

### Основная:

1. Карманов, В.Г. Математическое программирование: учеб. пособие / В.Г. Карманов. – М.: Наука, 1986. – 285 с.
2. Сухарев, А.Г. Курс методов оптимизации / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. – М.: Наука, 1986. – 325 с.
3. Габасов, Р. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Минск: БГУ, 1975. – 281 с.
4. Поляк, Б.Т. Введение в оптимизацию / Б.Т. Поляк. – М.: Наука, 1983. – 356 с.
5. Моисеев, Н.Н. Методы оптимизации: учеб. пособие / Н.Н. Моисеев, Ю.П. Иванилов, Е.М. Столярова. – М.: Наука, 1978. – 351 с.
6. Горстко, А.Б. Методы оптимизации: метод. указания / А.Б. Горстко, Ю.А. Домбровский, С.В. Жак. – М.: МГУ, 1981. – 127 с.
7. Дегтярев, Ю.И. Методы оптимизации / Ю.И. Дегтярев. – М.: Советское радио, 1980. – 263 с.
8. Смирнов, В.И. Вариационное исчисление / В.И. Смирнов, В.И. Крылов, Л.В. Канторович. – М.: КуБуч, 1933. – 178 с.
9. Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин и др. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
10. Болтянский, В.Г. Математические методы оптимального управления / В.Г. Болтянский. – М.: Наука, 1969. – 408 с.
11. Алексеев, В.М. Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1979. – 435 с.

### **Дополнительная:**

12. Рейклейтис, Г. Оптимизация в технике / Г. Рейклейтис, А. Рейвиндран, К. Регсдел. – М.: Мир, 1986. – 1–2 т.

13. Базара, М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы / М. Базара, К. Шетти. – М.: Мир, 1982. – 369 с.

14. Бережной, Е.И. Принцип максимума / Е.И. Бережной, В.С. Климов. – ЯрГУ, 1984. – 134 с.

15. Пшеничный, Б.Н. Метод линеаризации / Б.Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1983.

16. Галеев, Э.М. Курс лекций по вариационному исчислению и оптимальному управлению / Э.М. Галеев. – М.: Изд-во мех.-мат.ф-та МГУ, 1996. – 159 с.

## **7. Вопросы к экзамену по курсу «Методы оптимизации»**

1. Постановка задачи нелинейного программирования. Глобальные и локальные экстремумы. Унимодальная функция. Теоремы существования. Проекция точки на множество.

2. Дифференцируемые функции в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Примеры.

3. Критерий Сильвестра знакопостоянства квадратичной формы.

4. Необходимые условия минимума в задаче без ограничений. Достаточные условия.

5. Задача с ограничениями типа равенств. Геометрическая интерпретация. Метод множителей Лагранжа. Необходимые и достаточные условия минимума задачи условной оптимизации с ограничениями-равенствами. Условие регулярности. Примеры.

6. Общая задача математического программирования с ограничениями. Необходимые условия оптимальности. Теорема Куна-Таккера. Примеры.



7. Правило множителей Лагранжа в общей задаче с ограничениями. Условия регулярности. Условия Слейтера. Примеры нерегулярных задач.

8. Выпуклые множества. Гиперплоскости, полупространства, полиэдральные множества.

9. Выпуклые функции. Критерии выпуклости дифференцируемой и дважды дифференцируемой функции.

10. Выпуклая задача оптимизации. Критерии минимума в задаче выпуклого программирования.

11. Численные методы одномерной оптимизации.

12. Численные методы минимизации функций многих переменных.

13. Постановка простейшей оптимизационной задачи. Задача о наименьшей поверхности вращения. Задача о брахистохроне.

14. Доказательство вспомогательных предложений в ПВЗ. Леммы 1, 2, 3.

15. Первая вариация. Уравнение Эйлера. Условие Гильберта. Достаточное условие глобального минимума.

16. Некоторые случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Пример – задача геометрической оптики, задача о брахистохроне и др.

17. Обобщение ПВЗ – случай нескольких неизвестных функций. Примеры.

18. Функционалы, зависящие от старших производных. Примеры.

19. Изопериметрическая задача. Пример – задача Дидоны.

20. Задача об оптимальном быстродействии. Основные понятия.

21. Метод динамического программирования.

22. Принцип максимума Понтрягина в математической теории оптимальных процессов.

## 8. Контрольная работа № 1 по теме «Оптимизация в конечномерных пространствах»

### **Вариант 1**

1.  $e^{2x+3y} (8x^2 - 6xy + 3y^2) \rightarrow \min$

2.  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \rightarrow \min$   
 $x^2 + y^2 = 1$

$x + y + z \rightarrow \min$   
3.  $x^2 + y^2 - z \leq 0$   
 $z - 1 \leq 0$

$\prod_{i=1}^n x_i \rightarrow \max$   
4.  $\sum_{i=1}^n x_i = a$   
 $x_i \geq 0, i = 1 - n, \quad a = \text{const}$

### **Вариант 2**

1.  $e^{x^2-y} (5 - 2x + y) \rightarrow \min$

$x^2 + y^2 \rightarrow \min$   
2.  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$x + y - z \rightarrow \min$   
3.  $x^2 + y^2 + z - 3 \leq 0$   
 $z + 1 \geq 0$

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \rightarrow \min$$

$$4. \sum_{i=1}^n x_i^2 = R^2$$

$$a = \text{const}, \quad R = \text{const}$$

## 9. Контрольная работа № 2 по теме «Вариационное исчисление»

### **Вариант 1**

1. Найти экстремали функционала:

$$\int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y^2} dx$$

2. Решить простейшую вариационную задачу:

$$\int_0^{1/2} \left( \frac{1}{4} \dot{x}^2 + x^2 - 4xe^{2t} \right) dt \rightarrow \min$$

$$x(0) = 2, \quad x\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-t}$$

3. Решить изопериметрическую задачу:

$$\int_0^{\pi} y''^2 dx \rightarrow \min$$

$$\int_0^{\pi} y'^2 dx = 1$$

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

### **Вариант 2**

1. Найти экстремали функционала:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{y} \sqrt{1 + y^2} dx$$

2. Решить простейшую вариационную задачу:

$$\int_0^{\pi/6} \left( \frac{1}{9} \dot{x}^2 - x^2 - \frac{8}{\pi} x \cos 3t \right) dt \rightarrow \min$$

$$x(0) = -1, \quad x(\pi/6) = 0$$

3. Решить изопериметрическую задачу:

$$\int_0^{\pi} y''^2 dx \rightarrow \min$$

$$\int_0^{\pi} y^2 dx = 0$$

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

## 10. Дисциплина «Методы оптимизации» в итоговой государственной аттестации

Итоговая государственная аттестация студентов пятого курса математического факультета специальности 010501 – Прикладная математика и информатика включает в себя два этапа: государственный экзамен по указанной специальности и защиту выпускной квалификационной работы. В свою очередь, государственный экзамен состоит из двух этапов – первого, письменного и второго, устного. На письменном этапе студенты выполняют работу, состоящую примерно из 10 задач по материалам основных дисциплин за весь период обучения. На устном этапе выпускники должны продемонстрировать знание теоретических основ этих дисциплин. Программа устного экзамена состоит из 77 вопросов по математическому анализу, геометрии и алгебре, информатике, дифференциальным уравнениям, дискретной математике, теории вероятностей и математической статистике, уравнениям математической физики, языкам программирования и методам трансляции, системному и прикладному программному обеспечению, методам оптимизации, методам вычислений, теории игр и исследованию операций, базам данных и экспертным системам.

По дисциплине «Методы оптимизации» **программа устного экзамена** содержит два вопроса (сохранена нумерация всей программы экзамена):

66. Нелинейное программирование. Методы минимизации функций одной переменной. Методы безусловной минимизации выпуклых функций многих переменных. Теорема Куна-Таккера.

67. Задачи вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Некоторые случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Изопериметрическая задача.

Некоторые примеры заданий из **письменной части** государственного экзамена по дисциплине «Методы оптимизации»:

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f$  в заданной области  $P$ , где

$$f = x^2 + y^2 - 12x + 16y, \quad P = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$$

2. Решить задачу линейного программирования

$$\max(3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4)$$

при ограничениях

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 10,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

3. Среди дважды непрерывно-дифференцируемых функций  $y = y(x)$ , заданных на отрезке  $[a, b]$  и удовлетворяющих условиям

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

существует функция, на которой достигает минимума функционал  $F(y)$ . Найти эту функцию, если

$$a = 0, \quad b = 2, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1,$$

$$F(y) = \int_0^2 (y'^2 - y) \, dx.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f$  в заданной области  $P$ , где

$$f = x^2 + y^2 + 4x + 3y, \quad P = \{(x, y) \mid -5 \leq x \leq 0, \quad -5 \leq y \leq 0\}$$

5. Решить задачу линейного программирования

$$\max(x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 8x_4)$$

при ограничениях

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 3,$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

6. Среди дважды непрерывно-дифференцируемых функций  $y = y(x)$ , заданных на отрезке  $[a, b]$  и удовлетворяющих условиям

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

существует функция, на которой достигает минимума функционал  $F(y)$ . Найти эту функцию, если

$$a = -1, \quad b = 1, \quad \alpha = 0, \quad \beta = e^{-2},$$

$$F(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2) \, dx.$$

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f$  в заданной области  $P$ , где

$$f = x^3 + 3y^2 - 3xy + 27,$$

$$P = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1\}.$$

8. Решить задачу линейного программирования при ограничениях

$$\max (3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4),$$

при ограничениях

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6,$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 8,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

9. Среди дважды непрерывно-дифференцируемых функций  $y = y(x)$ , заданных на отрезке  $[a, b]$  и удовлетворяющих условиям

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

существует функция, на которой достигает минимума функционал  $F(y)$ . Найти эту функцию, если

$$a = 0, \quad b = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 1,$$

$$F(y) = \int_0^1 (0.5 y'^2 + y) \, dx.$$

## 11. Варианты расчетно-графической работы

Работа выполняется в конце восьмого семестра и служит (в случае положительной оценки) допуском к семестровому экзамену.

### **Вариант 1**

1. Решить задачу линейного программирования:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_3 + x_4 + x_5 = 2$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5.$$

2. Решить задачу линейного программирования:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

3. Найти экстремумы функции:

$$u = y^2 + \frac{x^2}{y} + \frac{z^2}{x} + \frac{1}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

4. Решить задачу выпуклого программирования:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1 + x_3 \geq -2$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

5. Найти экстремали функционала:

$$\int_{x_1}^{x_2} (xy + y^2 - 2y^2 y') dx \rightarrow \min$$

$$y(x_1) = y_1$$

$$y(x_2) = y_2$$

6. Решить задачу оптимального управления:

$$x_1' = u$$

$$x_2' = x_1, \quad |u| < 1$$

## **Вариант 2**

1. Решить задачу линейного программирования:

$$x_1 + x_3 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 7x_2 + 22x_3 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 + 6x_3 \leq 6$$

$$2x_1 - 5x_2 + 2x_3 \leq 2$$

$$-4x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

2. Решить задачу линейного программирования:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 5$$

$$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 5$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 4$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

3. Найти экстремумы функции:

$$z = x^4 + y^4 - z^2.$$

4. Решить задачу выпуклого программирования:

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3 \rightarrow \min$$

$$x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 9$$

$$x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$



5. Решить вариационную задачу:

$$\int_0^1 (y'^2 + y^2) dx \rightarrow \min$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = sh1$$

$$\dot{y}(0) = 1, \quad \dot{y}(1) = chl$$

6. Решить задачу оптимального управления:

$$x_1' = x_2 + u$$

$$x_2' = -x_1, \quad |u| \leq 1$$

### **Вариант 3**

1. Решить задачу линейного программирования:

$$x_1 - 10x_2 + 100x_3 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

$$x_1 - x_2 - x_3 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_3 \leq 0$$

$$x_1 + 2x_3 \geq 5, \quad x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 8$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = -6$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_4 - x_5 = -2$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

3. Найти экстремумы функции:

$$z = x^4 + y^4 - x^2 + 2xy - y^2.$$

4. Решить задачу выпуклого программирования:

$$x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1 \rightarrow \min$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8$$

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -4$$

$$x_1 + x_2 \geq 0$$

$$x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

5. Найти экстремали функционала:

$$\int_{x_1}^{x_2} (x^2 + y^2 + yy') dx \rightarrow \min$$

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$

6. Решить задачу оптимального управления:

$$x_1' = -u$$

$$x_2' = u, \quad |u| \leq 1$$

### **Вариант 4**

1. Решить задачу линейного программирования:

$$x_1 + 2x_6 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 \quad \quad \quad + x_6 = 1$$

$$\quad \quad x_2 \quad \quad + x_5 + x_6 = 1$$

$$\quad \quad x_3 + x_4 \quad \quad + x_6 = 1$$

$$\quad \quad \quad x_4 - x_5 - x_6 = 2$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1 - 6$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 10$$

$$6x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 20$$

$$10x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 30$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1 - 5$$

3. Найти экстремумы функции:

$$z = x^4 + y^4 + 2xy.$$

4. Решить задачу выпуклого программирования:

$$x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 \rightarrow \min$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 \geq -4$$

$$x_1 \quad \quad + x_3 \geq 0$$

$$x_1 \quad \quad - x_3 \geq 0$$

$$x_2 \quad \quad \geq 0$$

5. Решить задачу вариационного исчисления:

$$\int_0^{\pi} y'^2 dx \rightarrow \min$$

$$\int_0^{\pi} y^2 dx = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

6. Решить задачу на быстродействие:

$$x_1' = x_2 + u$$

$$x_2' = x_1, \quad |u| \leq 1$$

## **Вариант 5**

1. Решить задачу линейного программирования:

$$2x_1 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \rightarrow \max$$

$$x_2 + x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 2$$

$$x_1 + x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 2$$

$$x_1 + x_2 - 2x_4 + 7x_5 = 2$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1 - 5$$

3. Найти экстремумы функции:

$$z = e^{-x^2-y^2} (2x^2 + y^2)$$

4. Решить задачу выпуклого программирования:

$$x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 \leq 8$$

$$x_3 \geq 2$$

$$x_1 - x_3 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_3 \geq 0$$

5. Решить изопериметрическую задачу:

$$\int_0^{\pi} y''^2 dx \rightarrow \min$$

$$\int_0^{\pi} y'^2 dx = 1, \quad y(0) = y(\pi) = 0, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0$$

6. Решить задачу на быстродействие:

$$x_1' = u$$

$$x_2' = -x_1, \quad |u| \leq 1$$

## **Вариант 6**

1. Решить задачу линейного программирования:

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1 - 4$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$x_1 - x_4 - 2x_6 = 5$$

$$x_2 + 2x_4 + 3x_5 - x_6 = 3$$

$$x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1 - 6$$

3. Найти экстремумы функции:

$$z = e^{-x^2 - y^2} (x^2 + y^2)$$

4. Решить задачу выпуклого программирования:

$$e^{x_1 - x_2} - x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

5. Решить изопериметрическую задачу:

$$\int_0^1 y'^2 dx \rightarrow \min$$

$$\int_0^1 (y - y'^2) dx = \frac{1}{12}$$

$$y(0), \quad y(1) = \frac{1}{4}$$

6. Решить задачу на быстродействие:

$$x_1' = -x_2$$

$$x_2' = -x_1 + u, \quad |u| \leq 1$$

## **Вариант 7**

1. Решить задачу линейного программирования:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1 - 4$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 \rightarrow \max$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 + x_7 = 0$$

$$2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 - x_7 = 0$$

$$-x_3 + 2x_5 + 4x_7 = 2$$

$$2x_1 + x_2 - x_4 + 4x_7 = 4$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1 - 7$$

3. Найти экстремумы функции:

$$u = x + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$$

4. Решить задачу выпуклого программирования:

$$5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1^2 + 3x_2^2 \leq 10$$

$$2x_1 + x_3 \leq 9$$

$$x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \geq 0$$

5. Решить задачу вариационного исчисления:

$$\int_0^1 (y'^2 + z'^2 + 2y) dx \rightarrow \min$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = \frac{3}{2}$$

$$z(0) = 0, \quad z(1) = 1$$

6. Решить задачу на быстродействие:

$$x'_1 = x_2 + u_1$$

$$x'_2 = -x_1 + u_2, \quad |u_1| \leq 1, \quad |u_2| \leq 1$$

## **Вариант 8**

1. Решить задачу линейного программирования:

$$x_1 + x_4 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_2 - x_4 = 2$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1 - 4$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$-2x_1 - 3x_2 + 2x_4 + 3x_5 \rightarrow \max$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 12$$

$$x_1 + x_4 \leq 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_5 \leq 20$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 \leq 10$$

$$-2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 \leq 24$$

3. Найти экстремумы функции:

$$u = x^2 + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{1}{z} \quad (x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0)$$

4. Решить задачу выпуклого программирования:

$$x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 \rightarrow \min$$

$$3x_1^2 + x_2^2 \leq 10$$

$$2x_2 + x_3 \leq 9$$

$$x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 \geq 0$$

5. Решить задачу вариационного исчисления:

$$\int_{-1}^1 (2xy - y'^2 + \frac{z'^3}{3}) dx \rightarrow \min$$

$$y(1) = 0, \quad y(-1) = 2$$

$$z(1) = 1, \quad z(-1) = -1$$

6. Решить задачу на быстродействие:

$$x_1' = -x_2 + u_1$$

$$x_2' = x_1 + u_2, \quad |u_1| \leq 1, \quad |u_2| \leq 1$$

## Вариант 9

1. Решить задачу линейного программирования:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1 - 5$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 3x_6 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 5x_6 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 14x_5 + 9x_6 = 14$$

$$x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4 + 36x_5 + 17x_6 = 36$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1 - 6$$

3. Найти экстремумы функции:

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x$$

4. Решить задачу выпуклого программирования:

$$2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

5. Решить задачу вариационного исчисления:

$$\int_0^1 (y^2 + 2y'^2 + y''^2) dx \rightarrow \min$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

$$y'(0) = 1, \quad y'(1) = -sh1$$

6. Решить задачу на быстродействие:

$$x_1' = -x_2 + u$$

$$x_2' = x_1, \quad |u| \leq 1$$

## Вариант 10

1. Решить задачу линейного программирования:

$$4x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 2$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1 - 5$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 - 4x_6 + 3x_7 = 4$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 8x_5 - 8x_7 = 0$$

$$x_1 + x_2 - 4x_5 - 2x_6 + 5x_7 = 2$$

$$x_1 - x_2 + x_5 - 10x_7 = 0$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1 - 7$$

3. Найти экстремумы функции:

$$u = -x^2 - y^2 - z^2 - xy + 2z + x$$

4. Решить задачу выпуклого программирования:

$$e^{x_1} - x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \geq 0$$

$$x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_2 \leq 1$$



5. Решить задачу вариационного исчисления:

$$\int_0^{\pi} (4y \cos x - y'^2 - y^2) dx \rightarrow \min$$

$$y(0) = 0$$

$$y(\pi) = 0$$

6. Решить задачу на быстродействие:

$$x_1' = -x_2 + u$$

$$x_2' = -x_1, \quad |u| \leq 1$$

## Вариант 11

1. Решить задачу линейного программирования:

$$x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1 - 4$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1 - 4$$

3. Найти экстремумы функции:

$$u = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + z^2, \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$$

4. Решить задачу выпуклого программирования:

$$e^{x_2} - x_1 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \geq 0$$

$$x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_1 \leq 0$$

5. Решить вариационную задачу:

$$\int_0^1 (y'^2 - y^2 - y)e^{2x} dx \rightarrow \min$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = e^{-1}$$

6. Решить задачу на быстродействие:

$$x_1' = -x_1 + u$$

$$x_2' = x_2 + u, \quad |u| \leq 1$$

## Вариант 12

1. Решить задачу линейного программирования:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 = 1$$

$$x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 1$$

$$x_2 - x_6 = 2$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1 - 6$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$x_4 - x_5 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 \geq 0$$

$$2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq 0$$

$$x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 \geq 0$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1 - 5$$

3. Найти экстремумы функции:

$$u = x^2 - y^2 - z^2 + 2z + x$$

4. Решить задачу выпуклого программирования:

$$2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

5. Решить вариационную задачу:

$$\int_0^1 (y'^2 + 2y'^2 + y''^2) dx \rightarrow \min$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

$$y'(0) = 1, \quad y'(1) = -sh1$$

6. Решить задачу на быстродействие:

$$x_1' = -x_2 + u$$

$$x_2' = x_1, \quad |u| \leq 1$$

## 12. Разбор решений некоторых вариационных задач

**Задача 1.** Найти экстремали функционала  $F(y) = \int_1^2 (y'^2 - 2xy) dx$ , удовлетворяющие начальным условиям  $y(1) = 0, \quad y(2) = -1$ .

Решение. Уравнение Эйлера  $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0$  для данного интеграла имеет вид  $-2x - 2y'' = 0$ . Дважды интегрируя уравнение  $y'' = -x$ , получаем общий вид семейства экстремалей  $y(x) = -\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$ . Исходя из краевых условий, вычисляем константы  $C_1 = \frac{1}{6}, \quad C_2 = 0$ . Таким образом, решение задачи имеет вид  $y(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{6}$ . Теперь для нахождения значения функционала достаточно подставить полученную функцию-экстремаль в интегрант данного функционала и вычислить интеграл.

**Задача 2.** Найти экстремали функционала  $F(y) = \int_0^{2\pi} (y'^2 - 2y^2) dx$ , удовлетворяющие начальным условиям  $y(0) = 1, \quad y(2\pi) = 1$ .

Решение. Уравнение Эйлера  $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0$  для данного интегранта есть однородное дифференциальное уравнение второго порядка  $y'' + y = 0$ .

Соответствующее ему характеристическое уравнение  $\lambda^2 + 1 = 0$  имеет комплексные корни  $\lambda = \pm i$ . Тогда решение данного дифференциального уравнения имеет вид  $y(x) = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$ . Используя начальные условия, получаем, что  $C_1 = 1$ , а константа  $C_2$  может принимать любые значения. Таким образом, для данного функционала существует бесчисленное множество экстремалей вида  $y(x) = \cos x + C \sin x$ , доставляющих функционалу наименьшее значение (для проверки достаточности этого факта требуется, например, выпуклость интегранта данного функционала по совокупности аргументов).

**Задача 3.** Найти минимальное значение функционала  $F(y) = \int_a^b (y^2 + 2xy y') dx$ , если дважды непрерывно-дифференцируемые функции  $y(x)$  удовлетворяют условиям  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ .

Решение. Уравнение Эйлера  $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0$  для данного интегранта имеет вид  $2y + 2xy' - 2y - 2xy' = 0$ . Оно означает, что значение интеграла не зависит от пути интегриации, а лишь от начальной и конечной точек этого пути (то есть в качестве искомой функции можно было бы взять любую кривую (прямую), проходящую через две заданные точки). В свою очередь, этот факт означает, что подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции  $U(x, y)$ , которую можно восстановить, то есть  $dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ , где  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  есть частные производные этой функции по каждой из переменных. В нашем случае  $dU = \left( y^2 + 2xy \frac{dy}{dx} \right) dx$  или  $dU = y^2 dx + 2xy dy$ , откуда функция  $U(x, y) = x y^2$ . Теперь значение интеграла  $\int_{(a, A)}^{(b, B)} dU = U(b, B) - U(a, A) = b B^2 - a A^2$ .

#### Задача 4. О наименьшей поверхности вращения.

*Постановка задачи.* Среди всех линий, соединяющих две точки плоскости, найти ту, дуга которой при вращении около оси ОХ образует поверхность с наименьшей площадью.

Пусть данные точки будут  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x_1, y_1)$  и пусть  $y = f(x)$  -- уравнение линии, их соединяющей. Тогда величина площади поверхности вращения выразится интегралом

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Таким образом, поставленная задача сводится к отысканию линии, проходящей через две заданные точки, для которой величина полученного интеграла достигает наименьшего значения.

Решение. В данной задаче интегрант минимизируемого функционала не зависит от переменной  $x$ , а является функцией двух переменных  $y$  и  $y'$ , то есть  $L = L(y, y')$ . В общем случае уравнение Эйлера представляет собой дифференциальное уравнение второй степени. Для данного интегранта порядок уравнения Эйлера может быть понижен. В этом частном случае уравнение

$$L(y, y') - y' \frac{\partial L(y, y')}{\partial y'} = C$$

дает первый интеграл уравнения Эйлера. При этом интегрирование может быть доведено до конца с помощью квадратуры. Последнее соотношение называют интегралом энергии.

Имеем  $L(y, y') = y \sqrt{1 + y'^2}$ . Тогда уравнение энергии представлено в виде

$$y \sqrt{1 + y'^2} - y' y \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C,$$

или  $y(1 + y'^2) - y y'^2 = C \sqrt{1 + y'^2}$ . Тогда  $y = C \sqrt{1 + y'^2}$ , откуда

$$y'^2 = \frac{y^2 - C^2}{C^2} \quad \text{или} \quad dx = \frac{C dy}{\sqrt{y^2 - C^2}}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными, в котором сделаем подстановку  $y = C \operatorname{ch} t$ . Имеем

$$dx = \frac{C^2 sh t dt}{\sqrt{C^2 ch t - C^2}},$$

то есть  $dx = \frac{C^2 sh t dt}{\sqrt{C^2 sh^2 t}}$  или  $dx = C dt$ . Интегрируя последнее уравнение, получаем  $Ct = x + C_1$  или  $t = \frac{x + C_1}{C}$ . Таким образом, решение уравнения энергии имеет вид

$$y(x) = C ch \frac{x + C_1}{C}.$$

Следовательно, искомые экстремальные кривые представляют семейство цепных линий, имеющих ось симметрии, параллельную оси  $OY$ . Поверхность вращения такой цепной линии называется **катеноидом**. Постоянные  $C$  и  $C_1$  определяются из условия, что искомая кривая проходит через две заданные точки  $A$  и  $B$ . Эта задача, однако, разрешима не при всех положениях этих точек  $A$  и  $B$ . При различных положениях  $A$  и  $B$  задача может иметь два, одно или ни одного решения (см. [8] из списка рекомендуемой литературы).

### **Задача 5. О линии наискорейшего ската – брахистохроне.**

*Постановка задачи.* Найти среди линий, соединяющих две данные точки  $A$  и  $B$ , ту, двигаясь по которой свободно пущенная материальная точка пройдет путь в кратчайшее время.

*Решение.* Примем первую точку за начало координат и направим ось  $OY$  вертикально вниз. Пусть  $y = f(x)$  – уравнение кривой, соединяющей точку  $A(x_0, y_0)$  со второй точкой  $B(x_1, y_1)$ . Найдем время  $T$ , нужное для прохождения тяжелой материальной точкой пути  $AB$  при движении по этой кривой.

Пусть движущаяся точка в момент времени  $t$  занимает положение  $M(x, y)$  и имеет скорость  $v$ . Тогда по уравнению силы

$$\frac{m v^2}{2} = m g y,$$

где  $\frac{m v^2}{2}$  --приращение силы от  $t = 0$  до  $t$ , так как в начальный момент времени скорость равна нулю, а  $m g y$  есть работа силы тяжести.

Из этого уравнения определяем скорость  $v$ :  $v = \sqrt{2gy}$ , откуда  $v = \frac{dS}{dt}$ ,  $dS = \sqrt{1 + y'^2} dx$ ,  $dt = \frac{dS}{dv} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v} dx$  или

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

Тогда все время  $T$ , нужное для прохождения пути  $AB$ , будет  $T = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$ , где  $g$  – ускорение свободного падения – константа. Снова задача свелась к нахождению функции, дающей минимум некоторому интегралу  $T$ .

Применим теорему о необходимом условии наличия минимума функционала  $T$ , достигающегося в некоторой точке – функции  $y = f(x)$ , которая является дважды непрерывно дифференцируемой и удовлетворяет начальным условиям – проходит через точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$ . Теорема утверждает, что такая функция должна являться решением уравнения Эйлера, соответствующего данному функционалу. Поскольку в данном случае интегрант функционала зависит только от самой функции и ее производной, уравнение Эйлера есть уравнение энергии  $L - y' L_{y'} = C$ .

Имеем

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'}{\sqrt{y} \sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1}},$$

$$\frac{(1 + y'^2) - y'^2}{\sqrt{y} \sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1}}, \quad \frac{1}{y(1 + y'^2)} = \frac{1}{C_1}.$$

Получаем уравнение

$$y'^2 = \frac{C_1 - y}{y}. \quad (*)$$

Будем решать его двумя способами. Первый способ. Из уравнения (\*) получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$dx = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{C_1 - y}} dy.$$

Интеграл в правой части последнего уравнения есть интеграл от дифференциального бинома, в котором делается подстановка

$\frac{C_1}{y} - 1 = z^2$ . В результате получаем интеграл от дробно-рациональной функции  $\int \frac{dz}{(z^2 + 1)^2}$ , который можно решить методом Остроградского. Окончательно уравнение (\*) имеет решение  $x + C = \frac{\sqrt{C_1 y - y^2}}{2C_1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C_1 - y}{y}}$ , которое представляет собой функцию, обратную искомой функции  $y = f(x)$ .

Второй способ. В уравнении (\*) сделаем замену, полагая  $y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos u)$ , откуда  $y' = \frac{C_1}{2} \sin u \cdot u'$ . Тогда

$$\frac{C_1^2}{4} \sin^2 u \cdot u'^2 = \frac{C_1 - \frac{C_1}{2} + \frac{C_1}{2} \cos u}{\frac{C_1}{2}(1 - \cos u)}$$

или

$$\frac{C_1^2}{4} (1 - \cos^2 u) \cdot u'^2 = \frac{1 + \cos u}{1 - \cos u}.$$

Тогда

$$u'^2 = \frac{1}{\frac{C_1^2}{4} (1 - \cos u)^2}$$

или

$$\frac{du}{dx} = \frac{\pm 1}{\frac{C_1}{2}(1 - \cos u)}.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{C_1}{2} (1 - \cos u) du = \pm dx.$$

Решением этого уравнения является кривая, заданная в параметрической форме

$$x = \pm \frac{C_1}{2} (u - \sin u) + C_2,$$

$$y = \frac{C_1}{2} (1 - \cos u).$$



Так как кривая должна проходить через начало координат, то нужно положить  $C_2 = 0$  (при  $u = 0$ ). Видно, что искомая кривая – брахистохрона есть циклоида. Постоянная  $C_1$  должна быть найдена из условия, что кривая проходит через заданные точки.

### **Задача 6. Задача геометрической оптики.**

*Постановка задачи.* Пусть в прозрачной среде с переменной оптической плотностью даны две точки  $A$  и  $B$ . Требуется определить траекторию луча света, идущего от  $A$  к  $B$ .

Решение задачи основано на так называемом принципе Ферма: из всех кривых, соединяющих  $A$  и  $B$ , траектория луча света есть линия, по которой свет проходит из  $A$  в  $B$  в кратчайшее время.

Ограничиваясь плоским случаем, примем за плоскость распространения света плоскость  $XOY$  и пусть  $A = (x_0, y_0)$ ,  $B = (x_1, y_1)$ , а  $x_0 \leq x \leq x_1$  – некоторая кривая, соединяющая эти точки.

Обозначим через  $v(x, y)$  скорость света в точке  $(x, y)$ . Пусть  $y = y(x)$  есть уравнение кривой, по которой движется точка из  $A$  в  $B$ . Скорость движения точки равна  $v = \frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{dt} dx$ , где  $dt$  – элемент времени. Отсюда  $dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)} dx$ . Интегрируя, получим время  $T$ , потребное для покрытия луча света от точки  $A$  до точки  $B$  по кривой  $y = y(x)$ :

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{v(x, y)} dx.$$

Согласно принципу Ферма задача определения траектории луча света сводится к определению линии, для которой интеграл  $T$  (функционал  $T$ ) принимает наименьшее значение:  $T \rightarrow \min$ .

Рассмотрим частный случай, когда  $v(x, y) = y$ . Тогда интеграл функционала зависит лишь от  $y$  и  $y'$ , поэтому уравнение Эйлера есть уравнение энергии  $L - y' \cdot L_{y'} = C$ .

Имеем

$$y' \cdot \frac{y'}{y \sqrt{1 + y'^2}} - \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} = C.$$

Экстремалами функционала являются окружности в полуплоскости  $y > 0$  с центрами на оси  $OX$ .

В самом деле

$$\frac{y'^2 - (1 + y'^2)}{y \sqrt{1 + y'^2}} = C,$$

$$C y \sqrt{1 + y'^2} = -1, \quad C^2 y^2 (1 + y'^2) = 1, \quad y'^2 = \frac{1 - C^2 y^2}{C^2 y^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - C^2 y^2}}{C y}, \quad \int \frac{y dy}{\sqrt{1 - C^2 y^2}} = \int \frac{dx}{C}, \quad -\frac{1}{2C} \int \frac{d(1 - C^2 y^2)}{\sqrt{1 - C^2 y^2}} = \int dx,$$

$$-\frac{1}{C} \sqrt{1 - C^2 y^2} = x + C_1, \quad \frac{1}{C^2} (1 - C^2 y^2) = (x + C_1)^2.$$

Окончательно имеем следующий вид семейства экстремалей:

$$(x + C_1)^2 + y^2 = \frac{1}{C^2}.$$

**Задача 7.** Известно, что существует дважды непрерывно-дифференцируемая вектор-функция  $(x_1(t), x_2(t))$ , которая удовлетворяет начальным условиям  $x_1(1) = 1, x_1(2) = 2, x_2(1) = 0, x_2(2) = 1$  и доставляет минимум функционалу

$$\int (x_1'^2 + x_2'^2 + x_2^2) dt.$$

Найти эту функцию.

Решение. Известно, что если вектор-функция  $(x_1^*(t), x_2^*(t))$  минимизирует функционал, то она является решением следующей системы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial x_1'} \right) &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial x_2'} \right) &= 0 \end{aligned},$$

где  $L$  — интегрант функционала (подынтегральная функция). В данном случае система имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (2x_1') &= 0 \\ 2x_2 - \frac{d}{dt} (2x_2') &= 0 \end{aligned}.$$

Ее решение имеет вид

$$\{x_1'' = 0, x_2 - x_2'' = 0\}, \{x_1 = C_1 t + C_2, x_2 = C_3 e^t + C_4 e^{-t}\}.$$

Из краевых условий находим константы

$$C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = \frac{1}{e^2 - 1}, C_4 = \frac{e^2}{1 - e^2}.$$

Тогда решение задачи имеет вид  $\left( t, \frac{e^t}{e^2 - 1} - \frac{e^2 e^t}{1 - e^2} \right).$

**Задача 8.** Найти экстремали функционала  $F(y)$ , зависящего от старших производных. Предполагается, что искомые функции являются дважды непрерывно-дифференцируемыми на отрезке  $[x_0, x_1]$  и удовлетворяют некоторым граничным условиям. Имеем вариационную задачу:

$$F(y) = \int_0^1 (360 x^2 y - y''^2) dx \rightarrow \min,$$

$$y(0) = 0, y(1) = 0,$$

$$y'(0) = 1, y'(1) = \frac{5}{2}.$$

Решение. Согласно теореме о необходимых условиях минимума данной вариационной задачи, решения задачи должны удовлетворять уравнению Эйлера – Пуассона

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial L}{\partial y''} \right) = 0. \text{ Здесь интегрант } L = L(x, y, y').$$

Уравнение Эйлера – Пуассона имеет вид

$$360 x^2 + \frac{d^2}{dx^2} (-2y'') = 0$$

или  $y^{(4)} = 180 x^2$ . Последовательно интегрируя левую и правую части уравнения, получим

$$y^{(3)} = 60 x^3 + C_1, y^{(2)} = 15 x^4 + C_1 x + C_2,$$

$$y' = 3x^5 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3, y = \frac{x^6}{6} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Константы  $C_1, C_2, C_3, C_4$  находим из начальных условий. Окончательно экстремаль функционала  $F(y)$  имеет вид

$$y = \frac{x^6}{2} + \frac{3x^3}{2} - 3x^2 + x.$$

### 13. Изопериметрическая задача – задача Дидоны

*Постановка задачи.* Среди всех кривых заданной длины  $l$ , соединяющих две заданные точки  $A$  и  $B$ , определить кривую, ограничивающую вместе с отрезком  $AB$  наибольшую площадь.

Данная задача относится к типу изопериметрических задач об экстремуме определенного интеграла, когда искомые функции кроме граничных условий и условий непрерывности должны удовлетворять еще дополнительным требованиям, относящимся к поведению этих функций на всем промежутке интегрирования. Уравнения, выражающие эти требования, называются условиями связи. В общем виде изопериметрическая задача имеет вид:

$$F_0(y) = \int_{x_0}^{x_1} L_0(x, y, y') dx \rightarrow \min,$$

$$F_i(y) = \int_{x_0}^{x_1} L_i(x, y, y') dx = C_i \quad (i = 1-m),$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Для изопериметрической задачи естественным образом определяются понятия решения и локального решения. Считается также, что функции  $L_i(x, y, y')$ ,  $i = 1-m$  и их частные производные по  $y$  и  $y'$  непрерывны по совокупности переменных. Для решения изопериметрической задачи используется правило множителей Лагранжа, согласно которому решение исходной задачи должно удовлетворять уравнению Эйлера для интегранта

$$L = L_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i L_i, \quad \text{соответствующего функционалу}$$

$$F(y) = F_0(y) + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(y), \text{ где } \lambda_i, \quad i = 1-m - \text{константы, не все од-}$$

новременно равные нулю, называемые множителями Лагранжа.

Начиная решение задачи Дидоны, отметим, прежде всего, что искомая кривая должна быть выпуклой. В противном случае существовала бы прямая, имеющая с рассматриваемой областью  $S$  внутри этой кривой по крайней мере два не имеющих общих точек замкнутых отрезка  $AB$  и  $DE$ . Отразив зеркально  $BCD$  в  $BC'D$ ,

получим кривую той же длины  $l$ , но ограничиваемая площадь будет больше (рис. 1).

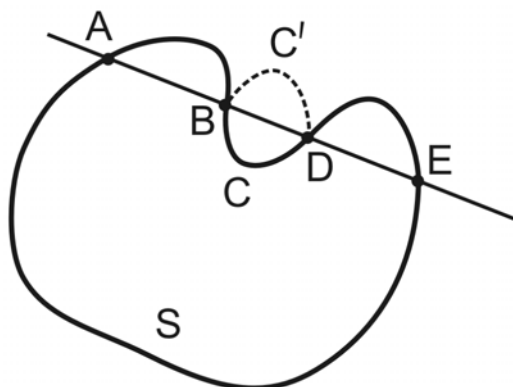


Рис. 1

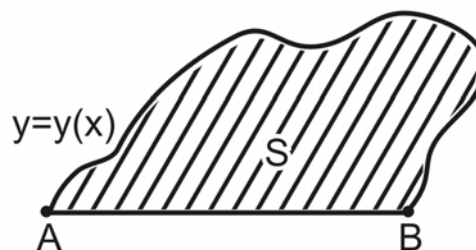


Рис. 2

Примем за ось  $Ox$  прямую  $AB$ , Тогда площадь, ограниченная кривой  $y = y(x)$ , расположенной над осью  $Ox$ , выразится интегралом  $S(y) = \int_a^b y dx$ , где  $a$  и  $b$  – абсциссы точек  $A$  и  $B$  (рис. 2).

Поставленная изопериметрическая задача будет иметь вид:

$$\begin{aligned} F_0(y) &= -\int_a^b y dx \rightarrow \min, \\ F_1(y) &= \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = l, \\ y(a) &= 0, \quad y(b) = 0. \end{aligned}$$

Следуя правилу множителей Лагранжа, составляем функционал

$$F(y) = \int_a^b [-y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}] dx.$$

Интегрант этого функционала не зависит от  $x$ , а лишь от  $y$  и  $y'$ , поэтому имеет место частный случай уравнения Эйлера – интеграл энергии  $y' \cdot L_{y'} - L = C$ :

$$\lambda y' \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} + y - \lambda \cdot \sqrt{1 + y'^2} = C.$$

Приведя в левой части уравнения к общему знаменателю, получим:

$$\frac{\lambda y'^2 + y \sqrt{1 + y'^2} - \lambda (1 + y'^2)}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$$

или

$$y = C + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Положим  $y' = \operatorname{tg} \varphi$ . Тогда  $y = C + \lambda \cos \varphi$  ;  
 $y' = -\lambda \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \operatorname{tg} \varphi,$

$\frac{dx}{d\varphi} = -\lambda \cos \varphi, \quad dx = -\lambda \cos \varphi d\varphi, \quad x = -\lambda \sin \varphi + C_1.$  Следовательно, имеем параметрическое уравнение окружности

$$x = -\lambda \sin \varphi + C_1,$$

$$y = \lambda \cos \varphi + C.$$

В явной форме семейство экстремалей исследуемой задачи записывается в виде:

$$(x - C_1)^2 + (y - C)^2 = \lambda^2.$$

Подставляя значения  $y$  и  $dx$  в функционал  $F_0(y)$ , получим исконое значение минимума.

Изопериметрическая задача обладает интересным свойством, называемым законом взаимности. Пользуясь этим принципом, можно высказать обратное предположение задаче Дидоны: среди кривых, ограничивающих площадь заданной величины, окружность имеет экстремальную (очевидно, наименьшую) длину.

## Оглавление

1. Введение .....	3
2. Цели и задачи дисциплины .....	8
3. Требования к уровню освоения содержания курса .....	9
4. Сведения из Государственного образовательного стандарта и рабочей программы дисциплины «Методы оптимизации» .....	9
5. Содержание разделов дисциплины .....	12
6. Список рекомендуемой литературы .....	15
7. Вопросы к экзамену по курсу «Методы оптимизации» .....	16
8. Контрольная работа № 1 по теме «Оптимизация в конечномерных пространствах» .....	18
9. Контрольная работа № 2 по теме «Вариационное исчисление» .....	19
10. Дисциплина «Методы оптимизации» в итоговой государственной аттестации .....	20
11. Варианты расчетно-графической работы .....	23
12. Разбор решений некоторых вариационных задач .....	35
13. Изопериметрическая задача – задача Дидоны .....	44

Учебное издание

**Майорова Наталия Львовна**

## **Материалы по дисциплине «Методы оптимизации»**

*Методические указания*

Редактор, корректор И.В. Бунакова  
Компьютерная верстка Е.Л. Шелеховой

Подписано в печать 2009 г. Формат 60х84/16.  
Бумага тип. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. 1,8.  
Тираж 100 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен  
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.  
Отпечатано на ризографе.

Ярославский государственный университет.  
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.