

**В.Н. Матвеев**

**Лабораторные работы  
по курсу “Методы вычислений”**

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

**В.Н. Матвеев**

**Лабораторные работы  
по курсу "Методы вычислений"**

*Учебное пособие*

Ярославль 2004

ББК В 192.1я73

М 33

УДК 519.62/.64

**В.Н. Матвеев**

**Лабораторные работы по курсу "Методы вычислений":**

Учеб. пособие / В.Н. Матвеев; Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2004.  
84 с.

ISBN5-8397-0320-6

Учебное пособие «Лабораторные работы по курсу "Методы вычислений"» представляет собой сборник из восьми лабораторных работ по основным разделам указанного курса. Перед каждой лабораторной работой приводятся без доказательств основные факты и теоремы по теме предлагаемой работы.

Предназначено для студентов 3 – 4 курсов, обучающихся по специальности 010100 Математика (дисциплина «Методы вычислений», блок ОПД) и направлению 510100 Математика (дисциплина «Методы вычислений», блок ОПД), очной формы обучения.

**Рецензент:** кафедра прикладной математики и вычислительной техники Ярославского государственного технического университета; доцент, канд. пед. наук Т.Л. Трошина.

ISBN5-8397-0320-6

© Ярославский  
государственный  
университет, 2004  
© В.Н. Матвеев, 2004

## Оглавление

Предисловие .....	4
Основные понятия .....	5
Лабораторная работа №1 .....	8
Лабораторная работа №2 .....	18
Лабораторная работа №3 .....	32
Лабораторная работа №4 .....	40
Лабораторная работа №5 .....	46
Лабораторная работа №6 .....	55
Лабораторная работа №7 .....	64
Лабораторная работа №8 .....	74
Литература.....	82



## Предисловие

В настоящем пособии представлены лабораторные работы с краткими методическими пояснениями по основным разделам курса «Методы вычислений» для студентов специальности «Математика». Пособие отражает опыт выполнения лабораторных работ и в основном хронологически соответствует разделам читаемого курса. В связи с необходимостью синхронизировать лекционный курс и практические занятия, схема изложения тем в лекционном курсе несколько видоизменена. Лекции начинаются с темы «Численные методы алгебры», затем излагается тема «Элементы теории аппроксимации» и далее следуют общепринятой схеме изложения. Лабораторные работы составлены с целью:

- усвоения и закрепления понятий, алгоритмов и методов решения основных задач методов вычислений;
- практического решения на ЭВМ модельных задач, часто встречающихся в вычислительной практике;
- приобретения и закрепления навыков реализации на ЭВМ алгоритмов, изучаемых в курсе «Методы вычислений».

В начале каждой лабораторной работы приводится краткое изложение метода решения поставленной задачи, рекомендации по алгоритму программирования, приводятся основные результаты и оценки, в отдельных случаях рассматриваются некоторые примеры. При работе над пособием были использованы задания из [1], [4], [12].

## Основные понятия

### *Погрешность*

**Абсолютная погрешность.** Пусть  $x$  - точное значение числа,  $x^*$  - его приближенное значение. Величина  $\Delta x \leq |x - x^*|$  называется абсолютной погрешностью.

**Относительной погрешностью** называется такая величина  $\delta$ , что  $|\frac{x-x^*}{x^*}| \leq \delta$ .

*Линейное пространство, норма вектора, норма оператора*

Множество  $R$  называется линейным, если в нем определены операции сложения элементов множества и умножения на число, причем

1.  $(x+y)+z=x+(y+z)$ . Сложение ассоциативно.
2.  $x+y=y+x$ . Сложение коммутативно.
3. Существует нулевой элемент  $\emptyset$ , такой, что  $x + \emptyset = x$  и  $0x = \emptyset$ .
4.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ .
5.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ .
7.  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ .
8.  $1x = x$ .

Система  $e_1, e_2, \dots, e_n$  называется линейно независимой, если равенство

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n = \emptyset$$

возможно тогда и только тогда, когда  $c_1 = c_2 = \dots c_n = 0$ .

Линейное пространство называется нормированным, если каждому элементу  $f$  поставлено в соответствие число  $\|f\|$  такое, что

1.  $\|f\| \geq 0$ , причем  $\|f\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $f = \emptyset$ ,
2.  $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ ,
3.  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ .

**Норма оператора в линейном пространстве.** Пусть в линейном пространстве  $R$  задан оператор  $y = Ax$ , действующий из  $R$  и

R. Нормой оператора  $y=Ax$  будем называть наименьшую из констант  $C$ , для которой выполняется  $\|Ax\| \leq C\|x\|$  для всех  $x$  из области определения оператора  $A$ . Из определения следует, что  $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ . В конечномерном пространстве  $R^n$ , состоящем из векторов  $x = (x_1 \dots x_n)$ , обычно используют следующие нормы.

Первая норма:  $\|x\|_1 = \max_i |x_i|$

Вторая норма:  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$

Третья, или евклидова, норма:  $\|x\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ .

Пусть  $A$  - линейный оператор в  $R^n$  с матрицей  $A = (a_{ij})$ . Согласованные с ними нормы в пространстве матриц таковы.

Первая норма

$$\|A\|_1 = \max_i \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right).$$

Вторая норма

$$\|A\|_2 = \max_j \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right).$$

Третья норма

$$\|A\|_3 = \sqrt{\max_i \lambda_i(AA^*)}.$$

#### Основные понятия теории разностных схем

*Сеточной функцией*  $y_i$  будем называть функцию  $y_i = y(x_i)$  - функцию целочисленного аргумента. В пространстве сеточных функций обычно используют норму

$$\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 h},$$

где  $h$  - шаг сетки.

*Аппроксимация.* Пусть задано дифференциальное уравнение (возможно, в частных производных)  $Lu=f$  с некоторыми начальными и (или) граничными условиями на сетке с шагом  $h$ . Говорят, что разностное уравнение  $ly_i = \phi_i$  аппроксимирует уравнение  $Lu=f$  с

порядком  $h^k$ , если в разностном уравнении для  $z_i = u_i - y_i$   $lz_i = \varphi_i$  правая часть  $\varphi_i$  есть величина порядка  $O(h^k)$ . Здесь  $u_i$  - значение точного решения в узлах сетки.

*Устойчивость.* Разностная схема  $ly_i = \phi_i$  называется устойчивой (или устойчивой по правой части), если  $\|y_i\| \leq A\|\phi_i\|$ , причем константа  $A$  не зависит от  $h$ .

*Сходимость.* Говорят, что разностная схема  $ly_i$ , аппроксимирующая дифференциальный оператор  $Lu=f(x)$ , сходится (сходится со скоростью  $h^k$ ), если  $\|z\| \rightarrow 0$  (или  $\|z\| = O(h^k)$ ) при  $h \rightarrow 0$ . Из аппроксимации разностной схемой дифференциального оператора и устойчивости разностной схемы следует ее сходимость.

## Лабораторная работа №1

### Итерационные методы нахождения собственных значений матриц

Напомним, что собственным значением линейного оператора называется такое число  $\lambda$ , что уравнение  $Ah = \lambda h$  имеет нетривиальное решение. Вектор  $h$  называется собственным вектором, соответствующим собственному значению  $\lambda$ . Задача нахождения максимального по модулю собственного значения называется частичной проблемой собственных значений в отличие от полной проблемы, где требуется найти все собственные значения. Эта лабораторная работа посвящена, если не оговорено противное, задаче отыскания максимального по модулю собственного значения с помощью итерационных методов. Следует отметить, что итерационный процесс строится по разным формулам в зависимости от того, является ли максимальное по модулю собственное значение единственным, кратным или комплексным. Этот факт обычно заранее неизвестен, поэтому приходится перебирать итерационные процессы, в зависимости от того, какой из них сходится. Естественно, невозможно описать все возможные ситуации. Остановимся на наиболее типичных. Пусть собственные значения матрицы  $A$  упорядочены в порядке убывания по модулю:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Рассмотрим случаи:

1. Максимальное по модулю собственное значение вещественно и единственно. Тогда итерационный процесс



$$\lambda_1^{(k)} = \frac{(Y^{(k+1)}, Y^{(k)})}{(Y^{(k)}, Y^{(k)})} \rightarrow \lambda_1 \quad (1.1)$$

сходится к  $\lambda_1$ . Здесь и далее в лабораторной работе

$$Y^{(k+1)} = AY^{(k)}, \quad (1.2)$$

а в качестве начального вектора  $Y^{(0)}$  можно взять любой ненулевой вектор. Впрочем, вместо процесса (1.1) можно использовать процесс

$$\lambda_1^{(k)} = \frac{y_*^{(k+1)}}{y_*^{(k)}} \rightarrow \lambda_1. \quad (1.1')$$

Здесь  $y_*$  — любая фиксированная (например, первая) компонента вектора  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . При этом

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Y^{(k)} \rightarrow h_1,$$

где  $h_1$  — собственный вектор, соответствующий первому собственному значению  $\lambda_1$ . Таким образом, отношение (1.1) или (1.1') стремится к первому собственному значению  $\lambda_1$ , а вектор  $Y^{(k)}$  — к соответствующему ему собственному вектору.

Если же и второе собственное значение вещественно и единственно, то его можно приближенно определить с помощью итерационного процесса

$$\lambda_2^{(k)} = \frac{(Y^{(k+1)}, Y^{(k)}) - \lambda_1(Y^{(k)}, Y^{(k)})}{(Y^{(k)}, Y^{(k)}) - \lambda_1(y^{(k)}, y^{(k-1)})} \rightarrow \lambda_2. \quad (1.3)$$

2. Наибольшее по модулю собственное значение кратное, но соответствующая ему жорданова клетка простая.

В этом случае  $\lambda_1$  находится также с помощью итерационного процесса (1.1) или (1.1'), но при этом вектор  $Y^{(k)}$  стремится к вектору  $Y$ , который принадлежит подпространству, натянутому на собственные векторы, соответствующие собственному значению  $\lambda_1$ .

3. Пусть максимальных по модулю собственных значений два, причем  $\lambda_1 = -\lambda_2$  и они вещественны. Тогда квадрат этих собственных значений приближенно определяется итерационным процессом

$$\frac{(Y^{(k+2)}, Y^{(k)})}{(Y^{(k)}, Y^{(k)})} \rightarrow \lambda_1^2. \quad (1.4)$$

4. Наибольшие по модулю собственные значения образуют комплексную пару.

В этом случае величина  $(Y^{(k+1)}, Y^{(k)})$  при итерациях сильно колеблется, что является признаком этой ситуации. Поступим следующим образом. Пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются корнями уравнения

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Возьмем произвольный вектор  $Y^{(0)}$  и запустим итерационный процесс

$$Y^{(k+1)} = AY^{(k)}.$$

Пусть  $y_*^{(k-1)}, y_*^{(k)}, y_*^{(k+1)}, y_*^{(k+2)}$  - произвольная фиксированная компонента соответственно векторов  $Y^{(k-1)}, Y^{(k)}, Y^{(k+1)}, Y^{(k+2)}$ .

Тогда коэффициенты  $p$  и  $q$  можно приближенно определить из соотношений

$$\frac{y_*^{(k-1)}y_*^{(k+2)} - y_*^{(k)}y_*^{(k+1)}}{y_*^{(k-1)}y_*^{(k+1)} - (y_*^{(k)})^2} \rightarrow p,$$



$$\frac{y_*^{(k)} y_*^{(k+2)} - (y_*^{(k+1)})^2}{y_*^{(k-1)} y_*^{(k+1)} - (y_*^{(k)})^2} \rightarrow q$$

при  $k \rightarrow \infty$ , а векторы

$$Y^{(k+1)} - \lambda_2 Y^{(k)}$$

и

$$Y^{(k+1)} - \lambda_1 Y^{(k)},$$

т.е. стремятся к собственным векторам, соответствующим собственным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

5. Наибольшее по модулю собственное значение вещественно, имеет кратность 2, и ему соответствует жорданова клетка 2-го порядка.

В этом случае процесс (1.1) или (1.1') по-прежнему стремится к  $\lambda_1$ , но медленнее, чем любая геометрическая прогрессия, что приводит к тому, что в силу наличия вычислительных погрешностей вычисление  $\lambda_1$  становится весьма затруднительным. Для определения  $\lambda_1$  поступают так же, как и в случае комплексной пары, т. е. отыскивают коэффициенты  $p$  и  $q$  квадратного уравнения

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

двойным корнем которого является  $\lambda$ .

$$-2\lambda = p, \quad q = \lambda^2.$$

Пусть  $y_*^{(k)}$  и  $z_*^{(k)}$  - две различные фиксированные компоненты вектора  $Y^{(k)}$ , например первая и вторая. В этом случае коэффициенты  $p$  и  $q$  находятся из итерационного процесса

$$\frac{y_*^{(k-1)} z_*^{(k+1)} - z_*^{(k-1)} y_*^{(k+1)}}{y_*^{(k-1)} z_*^{(k)} - z_*^{(k-1)} y_*^{(k)}} \rightarrow p,$$

$$\frac{y_*^{(k)} z_*^{(k+1)} - z_*^{(k)} y_*^{(k+1)}}{y_*^{(k-1)} z_*^{(k)} - y_*^{(k)} z_*^{(k-1)}} \rightarrow q.$$

Все приведенные равенства справедливы с точностью до величин порядка  $(\frac{\lambda_3}{\lambda_1})^k$ , где  $k$  - число итераций. Для определения  $\lambda_1$ , очевидно, достаточно определения одного из коэффициентов  $p$  или  $q$ . Однако совпадение чисел  $-\frac{p}{2}$  и  $\sqrt{q}$  служит контролем правильности предположения о том, что собственному значению  $\lambda_1$  соответствует жорданова клетка 2-го порядка.

В заключение примем соглашение, что  $\lambda_1$  вычислено с заданной степенью точности, если  $|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| < \varepsilon$ . В случае использования итерационных процессов для комплексных и кратных собственных значений с жордановой клеткой, этому условию должны удовлетворять коэффициенты  $p$  и  $q$ .

Используя описанные выше методы, найти наибольшее по абсолютной величине собственное значение с точностью до 0.0001. В случае если оно найдено итерационным процессом (1.1) или (1.1'), найти собственный вектор, 1-я норма которого равна единице, и второе собственное значение.

Задание 1

$$A = \begin{pmatrix} 2.1 & 1 & 1.1 \\ 1 & 2.6 & 1.1 \\ 1.1 & 1.1 & 3.1 \end{pmatrix}$$

Задание 2

$$A = \begin{pmatrix} 2.4 & 1 & 1.4 \\ 1 & 2.9 & 1.4 \\ 1.4 & 1.4 & 3.4 \end{pmatrix}$$

Задание 3

$$A = \begin{pmatrix} 1.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.4 & 1.3 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 & 1.3 \end{pmatrix}$$

Задание 4

$$A = \begin{pmatrix} 1.6 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 2.6 & 0.3 \\ 0.8 & 0.3 & 1.6 \end{pmatrix}$$

Задание 5

$$A = \begin{pmatrix} 2.2 & 1 & 1.2 \\ 1 & 2.7 & 1.2 \\ 1.2 & 1.2 & 3.2 \end{pmatrix}$$

Задание 6

$$A = \begin{pmatrix} 2.5 & 1 & 1.5 \\ 1 & 3.6 & 1.5 \\ 1.5 & 1.5 & 3.5 \end{pmatrix}$$

Задание 7

$$A = \begin{pmatrix} 1.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.5 & 1.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.3 & 1.4 \end{pmatrix}$$

Задание 8

$$A = \begin{pmatrix} 1.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.8 & 0.7 & 0.3 \\ 0.9 & 0.3 & 1.7 \end{pmatrix}$$

Задание 9

$$A = \begin{pmatrix} 2.3 & 1 & 1.3 \\ 1 & 2.8 & 1.3 \\ 1.3 & 1.3 & 3.3 \end{pmatrix}$$

Задание 10

$$A = \begin{pmatrix} 2.6 & 1 & 1.6 \\ 1 & 3.1 & 1.6 \\ 1.6 & 1.6 & 3.6 \end{pmatrix}$$

Задание 11

$$A = \begin{pmatrix} 3.5 & 1 & 2.5 \\ 1 & 4 & 2.5 \\ 2.5 & 2.5 & 4.5 \end{pmatrix}$$

Задание 12

$$A = \begin{pmatrix} 1.8 & 0.9 & 1 \\ 0.9 & 1.8 & 0.3 \\ 1 & 0.3 & 1.8 \end{pmatrix}$$

Задание 13

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.7 & 1.5 & 0.3 \\ 0.7 & 0.3 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Задание 14

$$A = \begin{pmatrix} 2.7 & 1 & 1.7 \\ 1 & 3.2 & 1.7 \\ 1.7 & 1.7 & 3.7 \end{pmatrix}$$

Задание 15

$$A = \begin{pmatrix} 1.4 & 1.2 & -1.3 \\ 1.2 & 0.9 & 0.5 \\ -1.3 & 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Задание 16

$$A = \begin{pmatrix} 3.2 & 1 & 2.2 \\ 1 & 3.7 & 2.2 \\ 2.2 & 2.2 & 4.2 \end{pmatrix}$$

Задание 17

$$A = \begin{pmatrix} 2.8 & 1 & 1.8 \\ 1 & 3.3 & 1.8 \\ 1.8 & 1.8 & 3.8 \end{pmatrix}$$

Задание 18

$$A = \begin{pmatrix} 2.4 & 1.2 & -0.3 \\ 1.2 & 1.9 & 1.4 \\ -0.3 & 1.4 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Задание 19

$$A = \begin{pmatrix} 1.6 & 1.2 & -1.1 \\ 1.2 & 1.1 & 0.6 \\ -1.1 & 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Задание 20

$$A = \begin{pmatrix} 3.3 & 1 & 2.3 \\ 1 & 3.8 & 2.3 \\ 2.3 & 2.3 & 4.3 \end{pmatrix}$$

Задание 21

$$A = \begin{pmatrix} 2.9 & 1 & 1.9 \\ 1 & 3.4 & 1.9 \\ 1.9 & 1.9 & 3.9 \end{pmatrix}$$

Задание 22

$$A = \begin{pmatrix} 2.6 & 1.2 & -0.1 \\ 1.2 & 2.1 & 1.6 \\ -0.1 & 1.6 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Задание 23

$$A = \begin{pmatrix} 1.8 & 1.2 & -0.9 \\ 1.2 & 1.3 & 0.8 \\ -0.9 & 0.8 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Задание 24

$$A = \begin{pmatrix} 3.4 & 1 & 2.4 \\ 1 & 3.9 & 2.4 \\ 2.4 & 2.4 & 4.4 \end{pmatrix}$$

Задание 25

$$A = \begin{pmatrix} 3.1 & 1 & 2.1 \\ 1 & 3.6 & 2.1 \\ 2.1 & 2.1 & 4.1 \end{pmatrix}$$

Задание 26

$$A = \begin{pmatrix} 2.8 & 1.2 & 0.1 \\ 1.2 & 2.3 & 1.8 \\ 0.1 & 1.8 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Задание 27

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1.2 & -0.7 \\ 1.2 & 1.6 & 1 \\ -0.7 & 1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Задание 28

$$A = \begin{pmatrix} 1.6 & 2.3 & -0.5 \\ 2.3 & 2 & 1.2 \\ -0.5 & 1.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Задание 29

$$A = \begin{pmatrix} 26 & -54 & 4 \\ 13 & -28 & 3 \\ 26 & & \\ -56 & 5 & \end{pmatrix}$$

Задание 30

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -2 & -9 \\ -13 & -2 & -12 \\ 16 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

Задание 31

$$A = \begin{pmatrix} 4.2 & -3.4 & 0.3 \\ 4.7 & -3.9 & 0.3 \\ -5.6 & 5.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Задание 32

$$A = \begin{pmatrix} 2.9 & 1 & 1.9 \\ 1 & 3.4 & 1.9 \\ 1.9 & 1.9 & 3.9 \end{pmatrix}$$

Задание 33

$$A = \begin{pmatrix} 2.6 & 1.2 & -0.1 \\ 1.2 & 2.1 & 1.6 \\ -0.1 & 1.6 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Задание 34

$$A = \begin{pmatrix} 1.8 & 1.2 & -0.9 \\ 1.2 & 1.3 & 0.8 \\ -0.9 & 0.8 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Задание 35

$$A = \begin{pmatrix} 3.4 & 1 & 2.4 \\ 1 & 3.9 & 2.4 \\ 2.4 & 2.4 & 4.4 \end{pmatrix}$$



## Лабораторная работа №2

### Итерационные методы решения линейных систем

В данной лабораторной работе рассматривается задача нахождения решения системы

$$AX = b \quad (2.1)$$

с использованием итерационных методов. Эти методы применяются тогда, когда размерность системы велика. В этом случае применение точных методов, например метода Гаусса, приводит к большому объему вычислений и, как следствие, накоплению вычислительной погрешности, что зачастую существенно искажает результат. Итерационные методы более устойчивы к вычислительной погрешности, однако в отличие от точных методов не являются универсальными. Обычно, для того чтобы запустить итерационный процесс, требуется преобразовать систему так, чтобы итерационный процесс сходил. Рассмотрим несколько вариантов таких методов.

*Метод простой итерации.* Преобразуем систему (2.1) к виду

$$X = BX + G. \quad (2.2)$$

Это можно сделать, записав систему (1.1) в виде

$$X = X - AX + b$$

и обозначив через  $B$  матрицу  $E-A$ , или, предварительно умножив (1.1) на некую неособенную матрицу  $H$ , проделать то же самое. Можно предложить и другие способы перехода от системы (2.1) к системе (2.2). Запустим затем итерационный процесс вида

$$X^{(n+1)} = BX^{(n)} + G. \quad (2.3)$$

Если к системе (2.2) мы перешли с помощью некой матрицы  $H$  и эта матрица не зависит от номера итераций, то итерационный процесс называют стационарным. Для сходимости процесса (2.3) с любого начального вектора  $X^{(0)}$  необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матрицы  $B$  были по модулю меньше единицы. Фраза «с любого начального приближения» существенна. Легко можно построить пример матрицы, у которой есть собственные значения больше единицы, а итерационный процесс (2.3) сходится с некоторого начального вектора. Достаточным признаком сходимости является условие  $\|B\| < 1$ .

Приведем еще несколько достаточных признаков сходимости метода простой итерации:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{jj}|,$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| < |a_{jj}|,$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_{ij})^2 < (a_{jj})^2.$$

Выбор матрицы  $H$  может быть осуществлен с использованием особенностей данной системы. Если матрица  $A$  положительно определена, то система  $AX=b$  всегда может быть приведена к виду, в котором метод последовательных приближений будет сходиться. В самом деле, вычислим, например, первую норму  $\mu$  матрицы  $A$ . Мы получим, что собственные значения матрицы  $A$  лежат в интервале  $(0, \mu)$ . Положим

$$H = \frac{2}{\mu} E,$$

где  $E$  - единичная матрица. Умножим систему (1.1) на матрицу  $H$  и

преобразуем к виду:

$$X = X - \frac{2}{\mu}AX + \frac{2}{\mu}b = BX + G.$$

Здесь

$$B = E - \frac{2}{\mu}A,$$

а

$$G = \frac{2}{\mu}b.$$

Собственные значения матрицы  $B$  заключены в интервале  $(-1,1)$ , и, следовательно, метод последовательных приближений будет сходиться.

*Метод Зейделя.* Запишем систему (2.1)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Зададим произвольный начальный вектор  $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$  и запустим итерационный процесс по формулам:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{(k+1)} + a_{12}x_2^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)} &= b_1 \\ a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k+1)} + \dots + a_{2n}x_n^{(k)} &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + a_{nn}x_n^{(k+1)} &= b_n. \end{aligned}$$

Таким образом,  $(k+1)$ -е приближение к решению системы вектор  $X^{(k+1)}$  определяется по следующему алгоритму:  $j$ -я компонента вектора  $X^{(k+1)}$  определяется из  $j$ -го уравнения системы, в котором используются компоненты вектора  $X^{(k)}$  -  $x_{j+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ , т.е. вектора, полученного на предыдущей итерации, и компоненты  $x_1^{(k+1)}, \dots, x_{j-1}^{(k+1)}$  вектора  $X^{(k+1)}$ , определенные из предыдущих  $j-1$  уравнений.

Этот алгоритм, записанный в виде

$$x_j^{(k+1)} = - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{a_{ij}}{a_{jj}} x_i^{(k+1)} - \sum_{i=j+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{jj}} x_i^{(k)} + b_j,$$

$$j = 1, 2, \dots, n,$$

называют иногда в отечественной литературе методом Некрасова.

Коротко остановимся на часто применяемых признаках сходимости метода Зейделя.

1. Для того чтобы метод Зейделя сходился с любого начального приближения, необходимо и достаточно, чтобы корни уравнения

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & \cdots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Достаточные признаки сходимости.

2. Матрица системы с диагональным преобладанием:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{jj}|.$$

Зачастую этого удастся добиться простой перестановкой уравнений или перенумерацией переменных.

3. Матрица системы симметричная и положительно определенная.

*Метод скорейшего спуска.* Этот метод применяется для симметричных, положительно определенных матриц. Доказывается, что в этом случае задача отыскания решения системы (2.1) и задача отыскания минимума функционала  $F(X) = (AX, X) - 2(b, X)$  эквивалентны. Градиентный метод минимизации этого функционала приводит к итерационным формулам отыскания решения системы (2.1).

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda_k R^{(k)},$$

где

$$R^{(k)} = b - AX^{(k)},$$

а

$$\lambda_k = \frac{(R^{(k)}, R^{(k)})}{(AR^{(k)}, R^{(k)})}.$$

Вектор  $R$  называют вектором невязки. Следует заметить, что по координатная минимизация функционала  $F(X)$  приводит к методу Зейделя.

*Методы релаксации.* Так называют группу методов, в которых на каждом шаге итерации уменьшается некая так называемая функция ошибки. Обычно под функцией ошибки понимают функционал  $(AY, Y)$ , где  $Y$  - разность между точным и приближенным решением. В методах релаксации ставится задача, как изменить  $i$ -ю компоненту вектора  $X^{(k)}$ , чтобы для измененного вектора функция ошибки была минимальной. В методе скорейшего спуска функцией ошибки является функционал  $(AR, R)$ , в методе Зейделя происходит по координатная минимизация вектора невязки и т. д. Строго говоря, все методы можно назвать методами релаксации, т.е. методами ослабления некоторой функции ошибки. Рассмотрим один из таких методов, называемый иногда методом ослабления максимальной невязки. Преобразуем систему (2.1) к виду

$$-X + DX + G = 0$$

так, чтобы в матрице  $D$  главная диагональ была нулевой. Это можно сделать следующим образом. В  $j$ -м уравнении системы

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{jj}x_j + \dots + a_{jn}x_n = b_j$$

перенесем  $b_j$  в левую часть и разделим все уравнение на  $-a_{jj}$ .



Получим  $d_{jk} = -\frac{a_{jk}}{a_{jj}}$ ,  $j \neq k$  и  $d_{jj} = 0$ ,  $j = k$ . При этом  $g_j = \frac{b_j}{a_{jj}}$ . Пусть известно  $X^{(k)}$ :  $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$  и пусть

$$-X^{(k)} + DX^{(k)} + G = R^{(k)}.$$

Пусть среди компонент вектора  $R^{(k)} = (r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \dots, r_n^{(k)})$  максимальной по модулю является компонента  $r_p^{(k)}$ . Вектор  $X^{(k+1)}$  построим следующим образом:

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)}, \quad j \neq p, \quad x_p^{(k+1)} = r_p^{(k)}, \quad j = p.$$

Таким образом, метод состоит в том, чтобы на каждом шаге сделать равной нулю максимальную по модулю компоненту вектора невязки предыдущей итерации. Метод сходится для положительно определенных матриц.

При выполнении данной работы признаком окончания итерационного процесса является условие

$$\frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|_1}{\|X^{(k)}\|_1} < 0.0001.$$

Здесь  $\|\cdot\|_1$  - первая векторная норма. Кроме решения системы, следует выводить также вектор невязки  $R = AX^{(k)} - b$ .

## Варианты заданий

1. Используя метод простой итерации, найти решение системы с заданной точностью.

### Задание 1.1

$$x_1 = 0.23x_1 - 0.04x_2 + 0.21x_3 - 0.18x_4 + 1.24$$

$$x_2 = 0.45x_1 - 0.23x_2 + 0.006x_3 - 0.88$$

$$x_3 = 0.26x_1 + 0.34x_2 - 0.11x_3 + 0.62$$

$$x_4 = 0.05x_1 - 0.26x_2 + 0.34x_3 - 0.12x_4 - 1.17$$

### Задание 1.2

$$x_1 = 0.21x_1 + 0.12x_2 - 0.34x_3 - 0.16x_4 - 0.64$$

$$x_2 = 0.34x_1 - 0.08x_2 + 0.17x_3 - 0.18x_4 + 1.42$$

$$x_3 = 0.16x_1 + 0.34x_2 + 0.15x_3 - 0.31x_4 - 0.42$$

$$x_4 = 0.12x_1 - 0.26x_2 + 0.08x_3 + 0.25x_4 + 0.83$$

### Задание 1.3

$$x_1 = 0.32x_1 - 0.18x_2 + 0.02x_3 + 0.21x_4 + 1.83$$

$$x_2 = 0.16x_1 + 0.12x_2 - 0.14x_3 + 0.27x_4 - 0.65$$

$$x_3 = 0.37x_1 + 0.27x_2 - 0.02x_3 - 0.23x_4 + 2.23$$

$$x_4 = 0.12x_1 + 0.21x_2 - 0.18x_3 + 0.25x_4 - 1.13$$

### Задание 1.4

$$x_1 = 0.42x_1 - 0.32x_2 + 0.03x_3 + 0.44$$

$$x_2 = 0.11x_1 - 0.26x_2 - 0.36x_3 + 1.42$$

$$x_3 = 0.12x_1 + 0.08x_2 - 0.14x_3 - 0.24x_4 - 0.83$$

$$x_4 = 0.15x_1 - 0.35x_2 - 0.18x_3 - 1.42$$

### Задание 1.5

$$x_1 = 0.18x_1 - 0.34x_2 - 0.12x_3 + 0.15x_4 - 1.33$$

$$x_2 = 0.11x_1 + 0.23x_2 - 0.15x_3 + 0.32x_4 + 0.84$$

$$x_3 = 0.05x_1 - 0.12x_2 + 0.14x_3 - 0.18x_4 - 1.16$$

$$x_4 = 0.12x_1 + 0.08x_2 + 0.06x_3 + 0.57$$

### Задание 1.6

$$x_1 = 0.13x_1 + 0.23x_2 - 0.44x_3 - 0.05x_4 + 2.13$$

$$x_2 = 0.24x_1 - 0.31x_3 + 0.15x_4 - 0.18$$

$$x_3 = 0.06x_1 + 0.15x_2 - 0.23x_4 + 1.44$$

$$x_4 = 0.72x_1 - 0.08x_2 - 0.05x_3 + 2.42$$



### Задание 1.7

$$x_1 = 0.17x_1 + 0.31x_2 - 0.18x_3 + 0.22x_4 - 1.71$$

$$x_2 = -0.21x_1 + 0.33x_2 + 0.22x_4 + 0.62$$

$$x_3 = 0.32x_1 - 0.18x_2 + 0.05x_3 - 0.19x_4 - 0.89$$

$$x_4 = 0.12x_1 + 0.28x_2 - 0.14x_3 + 0.94$$

### Задание 1.8

$$x_1 = 0.13x_1 + 0.27x_2 - 0.22x_3 - 0.18x_4 + 1.21$$

$$x_2 = -0.21x_1 - 0.45x_3 + 0.18x_4 - 0.33$$

$$x_3 = 0.12x_1 + 0.13x_2 - 0.33x_3 + 0.18x_4 - 0.48$$

$$x_4 = 0.33x_1 - 0.05x_2 + 0.06x_3 - 0.28x_4 - 0.17$$

### Задание 1.9

$$x_1 = 0.08x_1 - 0.03x_2 + 0.04x_4 - 1.2$$

$$x_2 = 0.51x_2 + 0.27x_3 - 0.08x_4 + 0.81$$

$$x_3 = 0.33x_1 - 0.37x_3 + 0.21x_4 - 0.92$$

$$x_4 = 0.11x_1 - 0.03x_3 + 0.58x_4 + 1.17$$

### Задание 1.10

$$x_1 = 0.32x_1 - 0.05x_2 + 0.11x_3 - 0.08x_4 + 1.25$$

$$x_2 = 0.11x_1 + 0.16x_2 - 0.28x_3 - 0.06x_4 - 0.83$$

$$x_3 = 0.08x_1 - 0.15x_2 + 0.12x_4 + 1.16$$

$$x_4 = -0.21x_1 + 0.13x_2 - 0.27x_3 + 0.44$$

2. Используя метод Зейделя, найти решение системы с заданной точностью, предварительно преобразовав, если необходимо, систему так, чтобы метод Зейделя сходился (перейдя к системе с диагональным преобладанием).

Пример.

$$4.4x_1 - 1.8x_2 + 3.6x_3 = -1.7 \quad (I)$$

$$3.1x_1 + 2.3x_2 - 1.2x_3 = 3.6 \quad (II)$$

$$1.8x_1 + 2.5x_2 + 4.6x_3 = 2.2 \quad (III)$$

$$7.6x_1 + 0.5x_2 + 2.4x_3 = 1.9 \quad (I + II)$$

$$2.2x_1 + 9.1x_2 + 4.4x_3 = 1.9 \quad (2 * III + II - I)$$

$$-1.3x_1 + 0.2x_2 + 5.8x_3 = -1.4 \quad (III - II)$$

Задание 2.1

$$2.7x_1 + 3.3x_2 + 3.1x_3 = 2.7$$

$$3.5x_1 - 1.7x_2 + 2.8x_3 = 1.7$$

$$4.1x_1 + 5.8x_2 - 1.7x_3 = 0.8$$

Задание 2.2

$$1.7x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 = 0.7$$

$$2.1x_1 + 3.4x_2 + 1.8x_3 = 1.1$$

$$4.2x_1 - 1.7x_2 + 1.3x_4 = 2.8$$

Задание 2.3

$$3.1x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 = 0.2$$

$$1.9x_1 + 3.1x_2 + 2.1x_3 = 2.1$$

$$7.5x_1 + 3.8x_2 + 4.8x_3 = 5.6$$

Задание 2.4

$$9.1x_1 + 5.6x_2 + 7.8x_3 = 9.8$$

$$3.8x_1 + 5.1x_2 + 2.8x_3 = 6.7$$

$$4.1x_1 + 5.7x_2 + 1.2x_3 = 5.8$$

Задание 2.5

$$3.3x_1 + 2.1x_2 + 2.8x_3 = 0.8$$

$$4.1x_1 + 3.7x_2 + 4.8x_3 = 5.7$$

$$2.76x_1 + 1.8x_2 + 1.1x_3 = 3.2$$

Задание 2.6

$$7.6x_1 + 5.8x_2 + 4.7x_3 = 10.1$$

$$3.8x_1 + 4.1x_2 + 2.7x_3 = 9.7$$

$$2.9x_1 + 2.1x_2 + 3.8x_3 = 7.8$$

Задание 2.7

$$3.2x_1 - 2.5x_2 + 3.7x_3 = 6.5$$

$$0.5x_1 + 0.34x_2 + 1.7x_3 = -0.24$$

$$1.6x_1 + 2.3x_2 - 1.5x_3 = 4.3$$

Задание 2.8

$$5.4x_1 - 2.3x_2 + 3.4x_3 = -3.5$$

$$4.2x_1 + 1.7x_2 - 2.3x_3 = 2.7$$

$$3.4x_1 + 3.4x_2 + 7.4x_3 = 1.9$$

Задание 2.9

$$3.6x_1 + 1.8x_2 - 4.7x_3 = 3.8$$

$$2.9x_1 - 3.6x_2 + 1.9x_3 = 0.4$$

$$1.5x_1 + 4.5x_2 + 3.3x_3 = -1,6$$

Задание 2.10

$$5.6x_1 + 2.7x_2 - 1.7x_3 = 1.9$$

$$3.4x_1 - 3.6x_2 - 6.7x_3 = -2.4$$

$$0.8x_1 + 1.3x_2 + 3.7x_3 = 1.2$$

3. Используя метод скорейшего спуска, найти решение системы с заданной точностью, предварительно проверив выполнение признаков сходимости.

### Задание 3.1

$$x_1 + 2.1x_2 = 0$$

$$2.1x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4$$

$$4x_2 + 5x_3 = 5$$

### Задание 3.2

$$3x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 3$$

$$4x_1 + 4x_2 = 4$$

$$-4x_1 + 5x_3 = 3.1$$

### Задание 3.3

$$2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 2.1$$

$$4x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 0.98$$

$$-4x_1 - 8x_2 + 5x_3 = -7.2$$

### Задание 3.4

$$x_1 + 2x_2 = 5.76$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2.1$$

$$-2x_2 + x_3 = 0.62$$

### Задание 3.5

$$2x_2 + 2x_3 = 1.8$$

$$2x_1 - 2x_3 = 2.2$$

$$2x_1 - 2x_2 = 0.77$$

### Задание 3.6

$$5x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0.7$$

$$-4x_1 + 6x_2 = 1.2$$

$$-4x_1 + 4x_3 = 2.67$$

Задание 3.7

$$0.5x_1 + 1.6x_2 + 0.6x_3 = 2.1$$

$$1.6x_1 + 0.6x_2 - 2x_3 = -0.8$$

$$1.6x_1 - 2x_2 + 0.8x_3 = 7.8$$

Задание 3.8

$$0.78x_1 - 0.02x_2 - 0.12x_3 - 0.14x_4 = 0.76$$

$$-0.02x_1 + 0.86x_2 - 0.04x_3 - 0.06x_4 = 0.08$$

$$-0.12x_1 - 0.04x_2 + 0.72x_3 - 0.08x_4 = 1.12$$

$$-0.14x_1 + 0.06x_2 + 0.08x_3 + 0.74x_4 = 0.74$$

Задание 3.9

$$x_1 + 0.42x_2 + 0.54x_3 + 0.66x_4 = 0.3$$

$$0.42x_1 + x_2 + 0.32x_3 + 0.44x_4 = 0.5$$

$$0.54x_1 + 0.32x_2 + x_3 + 0.22x_4 = 0.7$$

$$0.66x_1 + 0.44x_2 + 0.22x_3 + x_4 = 0.9$$

Задание 3.10

$$1.39x_1 + 0.41x_2 + 0.48x_3 + 0.59x_4 = 0.68$$

$$0.41x_1 + 1.43x_2 + 0.30x_3 + 0.41x_4 = 0.54$$

$$0.48x_1 + 0.30x_2 + 1.36x_3 + 0.18x_4 = 1.26$$

$$0.59x_1 + 0.41x_2 + 0.18x_3 + 1.37x_4 = 1.24$$

4. Используя рассмотренный выше метод релаксации, найти решение системы с заданной точностью.

Задание 4.1

$$2x_2 + 2x_3 = 1.8$$

$$2x_1 - 2x_3 = 2.2$$

$$2x_1 - 2x_2 - 0.77$$

Задание 4.2

$$5x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0.7$$

$$-4x_1 + 6x_2 = 1.2$$

$$-4x_1 + 4x_3 = 2.67$$

Задание 4.3

$$0.5x_1 + 1.6x_2 + 0.6x_3 = 2.1$$

$$1.6x_1 + 0.6x_2 - 2x_3 = -0.8$$

$$1.6x_1 - 2x_2 + 0.8x_3 = 7.8$$

Задание 4.4

$$0.78x_1 - 0.02x_2 - 0.12x_3 - 0.14x_4 = 0.76$$

$$-0.02x_1 + 0.86x_2 - 0.04x_3 - 0.06x_4 = 0.08$$

$$-0.12x_1 - 0.04x_2 + 0.72x_3 - 0.08x_4 = 1.12$$

$$-0.14x_1 + 0.06x_2 + 0.08x_3 + 0.74x_4 = 0.74$$

Задание 4.5

$$x_1 + 0.42x_2 + 0.54x_3 + 0.66x_4 = 0.3$$

$$0.42x_1 + x_2 + 0.32x_3 + 0.44x_4 = 0.5$$

$$0.54x_1 + 0.32x_2 + x_3 + 0.22x_4 = 0.7$$

$$0.66x_1 + 0.44x_2 + 0.22x_3 + x_4 = 0.9$$

Задание 4.6

$$1.39x_1 + 0.41x_2 + 0.48x_3 + 0.59x_4 = 0.68$$

$$0.41x_1 + 1.43x_2 + 0.30x_3 + 0.41x_4 = 0.54$$

$$0.48x_1 + 0.30x_2 + 1.36x_3 + 0.18x_4 = 1.26$$

$$0.59x_1 + 0.41x_2 + 0.18x_3 + 1.37x_4 = 1.24$$

Задание 4.7

$$x_1 + 2.1x_2 = 0$$

$$2.1x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4$$

$$4x_2 + 5x_3 = 5$$

Задание 4.8

$$3x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 3$$

$$4x_1 + 4x_2 = 4$$

$$-4x_1 + 5x_3 = 3.1$$

Задание 4.9

$$2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 2.1$$

$$4x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 0.98$$

$$-4x_1 - 8x_2 + 5x_3 = -7.2$$



## Лабораторная работа №3

### Итерационные методы решения нелинейных уравнений и систем

В отличие от итерационных методов для линейных систем, которые при выполнении достаточных признаков сходимости сходятся с любого начального приближения, в итерационных методах для нелинейных уравнений и систем важной предварительной задачей является локализация корней и, следовательно, выбор начального приближения для того, чтобы можно было запустить итерационный процесс для уточнения приближенного решения. Сразу следует подчеркнуть, что при неудачном выборе начального приближения итерационный процесс может расходиться или сходиться, но не к решению нелинейной системы. Особенно это относится к градиентным методам решения нелинейных систем. В случае одного уравнения задача локализации корней решается, как правило, достаточно легко с помощью стандартных приемов исследования функций. При решении задачи локализации корней нелинейной системы приходится использовать различные соображения, строить графики для определения точек пересечения, проводить различные оценки, прибегать к физическим соображениям, если рассматривается практическая задача, и т.п. Рассмотрим сначала итерационные методы нахождения решений для одного уравнения. Пусть задано уравнение

$$f(x) = 0. \quad (3.1)$$

1. *Метод секущих (метод хорд)*. Пусть на концах отрезка  $[a, b]$  непрерывная функция  $f(x)$  имеет разные знаки. Тогда внутри отрезка находится, по крайней мере, один корень уравнения (3.1) нечет-

ной кратности. Проведем через точки  $(a, f(a))$  и  $(b, f(b))$  прямую

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Точку пересечения этой прямой с осью ОХ будем считать приближенным значением корня уравнения (1)

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)}.$$

Сравним знаки функции  $f(x)$  в точках  $a$ ,  $x_1$ ,  $b$  и в качестве нового отрезка  $(a, b)$  выберем тот, на концах которого знак функции  $f(x)$  противоположен. Продолжая этот процесс, получим последовательность, сходящуюся к решению уравнения (1). Если  $f''(x) > 0$ , то  $f(x)$  выпукла вниз, и, если  $f(a) > 0$ , получаем последовательность

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a).$$

Если  $f(a) < 0$ , то

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n).$$

В случае  $f''(a) < 0$  эти формулы меняются местами.

*2. Метод Ньютона (метод касательных) для одного уравнения.* Для отыскания корня уравнения (1) используется итерационный процесс

$$x_{(n+1)} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Метод сходится со скоростью геометрической прогрессии, если в окрестности корня  $f'(x)$  отлична от нуля и  $f''(x)$  знакопостоянна. Геометрически точка  $x_{n+1}$  находится как точка пересечения касательной к кривой  $y=f(x)$  в точке  $x_n$ .

*3. Метод Ньютона для систем нелинейных уравнений.* Рассмотрим систему

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$\dots \quad (3.2)$$

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Или в векторной форме

$$F(X) = 0,$$

где  $F(X)$  – вектор-функция, а  $X$  – точка в  $n$ -мерном пространстве.

Введем в рассмотрение матрицу Якоби

$$W(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

и с начального приближения  $X^0$  запустим итерационный процесс

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - W^{-1}(X^{(k)})F(X^{(k)}).$$

Таким образом, вычисления по методу Ньютона проводятся по следующей схеме: аналитический вывод формул для элементов матрицы Якоби, аналитический вывод формул для элементов обратной матрицы, вычисление вектора  $F(X^{(k)})$ , вычисление числовой матрицы  $W^{-1}(X^{(k)})$ , вычисление вектора  $W^{-1}(X^{(k)})F(X^{(k)})$ , вычисление вектора  $X^{(k+1)}$ .

4. *Градиентные методы. Метод скорейшего спуска.* При применении градиентных методов следует помнить, что задача отыскания решения нелинейной системы сводится к задаче отыскания нулевого минимума некоторой нелинейной функции. Однако при неудачном выборе начального приближения эти методы могут сойтись к одному из локальных минимумов функции, который не есть решение системы. Поэтому необходимо проверять, является ли полученный в результате итерационного процесса вектор решением системы.

Предлагаемый ниже алгоритм является одним из простейших вариантов метода скорейшего спуска.

Пусть задана система

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

.....

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Или в векторной форме

$$F(X) = 0.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1^2(x_1, \dots, x_n) + f_2^2(x_1, \dots, x_n) + \dots + f_n^2(x_1, \dots, x_n).$$

Или в векторной форме

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^n f_i^2(X).$$

Очевидно, что решение системы сообщает этой функции нулевой минимум. Обратно, нулевой минимум этой функции есть решение исходной системы. Отыскание минимума функции  $\Phi(x)$  методом скорейшего спуска проводится по следующей схеме. Пусть  $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  - нулевое приближение к решению системы. Очередное приближение строится по формуле:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \lambda_k V^{(k)}.$$

Здесь  $V^{(k)} = \text{grad}\Phi(X^{(k)})$ . При этом  $\lambda_k$  определяется приближенно, и мы приведем два варианта.

Вариант А. В простейшем случае  $\lambda$  приближенно можно определить по формуле:

$$\lambda_k = \frac{\Phi(X^{(k)})}{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi(X^{(k)})}{\partial x_j}\right)^2}.$$

Если ввести в рассмотрение матрицу Якоби

$$W(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

и матрицу  $W'(X)$  - транспонированную матрицу Якоби, то вектор-градиент можно записать в виде

$$\text{grad}\Phi = 2W'(X)F(x),$$

и итерационный процесс имеет вид

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \lambda_k W'_k F_k,$$

где

$$\lambda_k = \frac{\Phi(X^{(k)})}{(W'_k F_k, W'_k F_k)}.$$

Здесь и ниже для краткости обозначено



$$W_k = W(X^{(k)}), \quad W'_k = W'(X^{(k)}), \quad F_k = F(X^{(k)}).$$

Вариант В. Более точное определение  $\lambda_k$  приводит к формулам

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \lambda_k W'_k F_k,$$

$$\lambda_k = \frac{(F_k, W_k W'_k F_k)}{(W_k W'_k F_k, W_k W'_k F_k)}.$$

При выполнении лабораторной работы интервал, содержащий корень или начальное приближение, студент определяет самостоятельно. Итерационный процесс следует продолжать до тех пор, пока

$$\frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|_1}{\|X^{(k)}\|_1} < 0.001.$$

### Варианты заданий

1. Используя метод секущих, найти решение уравнения:

- |                                |  |
|--------------------------------|--|
| 1. $x - \sin x = 0.25$         | 2. $\operatorname{tg} 0.58x + 0.1 = x^2$ |
| 3. $\sqrt{x} - \cos 0.41x = 0$ | 4. $x^3 - 6x - 8 = 0$                    |
| 5. $3x - \cos x - 1 = 0$       | 6. $x^2 + 4 \sin x = 0$                  |
| 7. $x \ln x - 1.5 = 0$         | 8. $x^3 + 4x - 6 = 0$                    |
| 9. $x + \ln x = 0.5$           | 10. $\operatorname{ctg} x = 0.5x$        |
| 11. $x^3 - \sin x = 0.25$      | 12. $x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$           |

2. Используя метод Ньютона, найти решение уравнения:

- 2.1.  $x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$       2.2.  $\sqrt{x} - \cos(0.387x) = 0$   
 2.3.  $3x - \cos x - 1 = 0$       2.4.  $x^2 - \cos^2 \pi x - 1 = 0$   
 2.5.  $x^2 + 4 \sin x = 0$       2.6.  $(x - 1) + 0.5e^x = 0$   
 2.7.  $5x^3 + 2x^2 - 15x - 6 = 0$       2.8.  $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$   
 2.9.  $\operatorname{tg}(0.5x + 0.1) = x^2$       2.10.  $5x - e^x = 0$

3. Используя метод Ньютона, найти решение системы:

- 3.1.  $\sin(x + 1) - y = 1$       3.2.  $\cos(x - 1) + y = 0.5$   
        $2x + \cos y = 2$             $x - \cos y = 3$   
 3.3.  $\sin x + 2y = 2$       3.4.  $\cos x + y = 1.5$   
        $2x + \cos(y - 1) + x = 0.7$        $x - \cos y = 3$   
 3.5.  $\sin(x + 0.5) - y = 1$       3.6.  $\cos(y - 1) + x = 0.8$   
        $\cos y - 2 + x = 0$        $y - \cos x = 2$   
 3.7.  $\sin(x + y) - 1.1x = 0.1$       3.8.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$   
        $x^2 + y^2 = 1$        $x - \cos y = 1$   
 3.9.  $\sin(x + 1) - y = 1$       3.10.  $\cos(x + 1) + y = 1$   
        $2x + \cos y = 2$        $e^x - y = 0$   
 3.11.  $\sin(x + 1) - y = 0$       3.12.  $\cos(x - 1) + y = 0.5$   
        $x^2 + y^2 = 4$        $x - \cos y = 3$

4. Используя метод скорейшего спуска (вариант А), найти решение системы:

- 4.1.  $y = e^x - 1$       4.2.  $y = \sin x + 1$   
        $4x^2 + y = 4$        $y = x^2 - 1$   
 4.3.  $\sin(x + 1) - y = 1$       4.4.  $\cos(x - 1) + y = 0.5$   
        $2x + \cos y = 2$        $x - \cos y = 3$



4.5.	$\sin x - y = 0$ $x^2 + y^2 = 4$	4.6.	$x^2 + y^2 = 16$ $x - \cos y = 3$
4.7.	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ $(x - 3)^2 + y^2 = 4$	4.8.	$y = 1.5 + x^3$ $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$
4.9.	$\sin(x + 1) - y = 1$ $x^2 + y^2 = 9$	4.10.	$\cos(x - 1) + y = 0.50$ $x - \cos y = 3$
4.11.	$y = x^2$ $x = e^{-y}$	4.12.	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ $(x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

5. Используя метод скорейшего спуска (вариант В ), найти решение системы:

5.1.	$x = e^y - 1$ $4y^2 + x = 9$	5.2.	$x = \sin y + 1$ $x = y^2 - 1$
5.3.	$\sin(y + 1) - x = 1$ $2y + \cos x = 2$	5.4.	$\cos(y - 1) + x = 0.5$ $y - \cos x = 3$
5.5.	$\sin x - 1 - y = 1$ $4x^2 + y^2 = 4$	5.6.	$x^2 + y^2 = 16$ $y - \cos x = 1$
5.7.	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ $(y - 3)^2 + x^2 = 4$	5.8.	$y = 1.5 + x^3$ $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$
5.9.	$\sin(x + 1) - y = 3$ $y = 2e^x$	5.10.	$\cos(x - 1) + y = 0.50$ $x - \cos y = 3$
5.11.	$y = x^2$ $x = e^{-y}$	5.12.	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ $(x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$
5.13.	$x - y^2 = 0$ $y - \sin(x - 1) = 1$	5.14.	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ $x - 1 = e^y$
5.15.	$x^2 + y^2 = 2x$ $y^2 = 2 \cos x$	5.16.	$\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{9} = 1$ $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

## Лабораторная работа №4

### Теория аппроксимации и численное интегрирование

При выполнении этой работы нетрудно убедиться, что квалифицированный выбор квадратурных формул приводит к резкому сокращению вычислений. Так, для достижения заданной точности при вычислении интеграла по стандартным квадратурным формулам требуется разбить интервал интегрирования на достаточно большое число точек. В работе предлагается вычислить значения функции

$$F(t) = \int_a^b f(t, x) dx \quad (4.1)$$

в точках  $t_j = c + j\tau$ ,  $\tau = \frac{d-c}{m}$  двумя способами:

а) методом удвоения числа шагов для достижения заданной точности, используя стандартные квадратурные формулы;

б) используя квадратурные формулы Гаусса с тремя и четырьмя узлами.

Обозначив через  $g_j(x) = f(t_j, x)$ , мы тем самым сводим задачу в цикле по  $j$  к вычислению интеграла от функции  $g_j(x)$  по заданным квадратурным формулам.

Остановимся более подробно на квадратурных формулах. Все квадратурные формулы имеют вид:

$$I(g) \equiv \int_a^b g(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i g(x_i) \equiv S_n(g). \quad (4.2)$$

При получении квадратурных формул типа Ньютона - Котеса функция  $g(x)$  под интегралом заменяется ее интерполяционным многочленом Лагранжа. Если же сама функция  $g(x)$  есть многочлен степени  $n-1$ , то ее интерполяционный многочлен совпадает с ним самим. Поэтому говорят, что квадратурные формулы типа Ньютона - Котеса точны для многочленов степени до  $n-1$ , имея в виду, что приближенное равенство (4.2) превращается в точное равенство, если  $g(x)$

есть многочлен степени не выше  $n-1$ . К квадратурным формулам типа Ньютона - Котеса относятся известные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Специальный выбор узлов может повысить точность квадратурных формул так, что они будут точны, если  $g(x)$  есть многочлен степени не выше  $2n-1$ . Такие квадратурные формулы называются квадратурными формулами Гаусса. Оказывается, что узлы квадратур являются корнями ортогональных многочленов, в данном случае - корнями многочленов Лежандра. При  $n=3$  коэффициенты и узлы вычисляются элементарно. В самом деле, приближенное равенство

$$\int_a^b g(x)dx \approx \sum_{i=1}^3 c_i g(x_i)$$

превращается в точное, если  $g(x) = x^k$  при  $k=0,1,2,\dots,5$ . Приведем расчет узлов  $x_i$  и коэффициентов  $c_i$  в случае  $a=-1$   $b=1$ . Имеем при  $k=0$

$$2 = \int_{-1}^1 dx = \sum_{i=1}^3 c_i,$$

при  $k=1$

$$0 = \int_{-1}^1 x dx = \sum_{i=1}^3 c_i x_i,$$

при  $k=2$

$$\frac{2}{3} = \int_{-1}^1 x^2 dx = \sum_{i=1}^3 c_i x_i^2,$$

при  $k=3$

$$0 = \int_{-1}^1 x^3 dx = \sum_{i=1}^3 c_i x_i^3,$$

при  $k=4$

$$\frac{2}{5} = \int_{-1}^1 x^4 dx = \sum_{i=1}^3 c_i x_i^4,$$

при  $k=5$

$$0 = \int_{-1}^1 x^5 dx = \sum_{i=1}^3 c_i x_i^5.$$

Мы получили 6 уравнений для определения шести неизвестных  $c_1, c_2, c_3, x_1, x_2, x_3$ . С учетом того, что узлы расположены симметрично:  $x_1 = -x_3$ , и  $x_2 = 0$ , а коэффициенты, соответствующие симметричным узлам, равны (более подробно этот вопрос рассматривается в лекциях), и уравнения при  $k = 1, 3, 5$  являются следствием этого свойства, получаем три уравнения:

$$2 = 2c_1 + c_2,$$

$$\frac{2}{3} = 2c_1 x_1^2,$$

$$\frac{2}{5} = 2c_1 x_1^4.$$

Отсюда получаем:  $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}},$

$$c_1 = c_3 = \frac{5}{9}, \quad c_2 = \frac{8}{9}.$$

Для  $n=4$  и выше узлы и коэффициенты находятся из таблиц. При  $n=4$

$$x_1 = -0.861136, \quad x_2 = -0.339981, \quad x_3 = -x_2, \quad x_4 = -x_1,$$

$$c_1 = c_4 = 0.347855, \quad c_2 = c_3 = 0.652145.$$

В случае отрезка интегрирования  $[a, b]$

$$\int_a^b g(u) du \approx \sum_{i=1}^n d_i g(u_i)$$

узлы  $u_i$  для отрезка  $[a, b]$  и коэффициенты  $d_i$  для этого отрезка находятся из соотношений:

$$d_i = \frac{b-a}{2} c_i, \quad u_i = \frac{b-a}{2} x_i + \frac{b+a}{2},$$

где  $x_i$  и  $c_i$  - узлы и коэффициенты квадратурных формул Гаусса для отрезка  $[-1, 1]$ .

И наконец, метод удвоения числа шагов состоит в следующем. Пусть

$$\int_a^b g(u) du \approx \sum_{i=1}^n d_i g(u_i) = S_n.$$

Разобьем отрезок интегрирования точками  $u_1, \dots, u_N$  и составим сумму  $S_N$ . Удвоим  $N$  и составим сумму  $S_{2N}$ . Если величина

$$|S_{2N} - S_N| < \varepsilon,$$

то считается, что заданная точность достигнута. В противном случае процесс продолжается.

### Варианты заданий

#### Квадратурные формулы

Обозначим через  $h = \frac{b-a}{N}$ ,  $g_i = g(x_i)$ ,  $g_{i+\frac{1}{2}} = g(x_i + \frac{h}{2})$ ,  $g_0 = g(a)$ ,  $g_N = g(b)$ . Начальное разбиение  $N$  выбирается произвольно, но при использовании формул Симпсона начальное  $N$  четно.

А. Квадратурные формулы прямоугольников.

$$S_N(g) = h \sum_{i=0}^{N-1} g_{i+\frac{1}{2}}$$

Б. Квадратурные формулы трапеций.

$$S_N(g) = h \left( \frac{g_0 + g_N}{2} + g_1 + g_2 + \dots + g_{N-1} \right)$$

В. Квадратурные формулы Симпсона (N - четно).

$$S_N(g) = \frac{h}{3}(g_0 + g_n + 2g_1 + 4g_2 + 2g_3 + 4g_4 + \dots + 2g_{N-1})$$

Функция  $f(x, t)$ .

$$1. \quad f(x, t) = \sin\left(\frac{t}{1+x^2} + 0.001x\right)$$

$$2. \quad f(x, t) = \cos\left(\frac{t}{1+x^2} + 0.001x\right)$$

$$3. \quad f(x, t) = e^{-\left(\frac{t}{1+x^2} + 0.001x\right)}$$

$$4. \quad f(x, t) = e^{\left(\frac{\sqrt{t}}{1+x^2}\right)}$$

$$5. \quad f(x, t) = \ln\left(\frac{1+t}{1+x^2} + 0.001x\right)$$

$$6. \quad f(x, t) = \sqrt{\frac{t}{6+x^2} + x}$$

$$7. \quad f(x, t) = \frac{\sin(t + x^2 + 0.5)}{2 + \cos(x^2 + 1)}$$

$$8. \quad f(x, t) = \frac{\cos(t + x^2 + 0.5)}{2 + \sin(x^2 + 1)}$$

$$9. \quad f(x, t) = \frac{\cos(t + x)}{2x^2 + \cos(x^2 + 1)}$$

$$10. \quad f(x, t) = e^{\left(\frac{\sqrt{t+1}}{1+x^2}\right)} \sin 2x$$

Значения  $a, b, c, d, m, \varepsilon$ .



номер	a	b	c	d	m	$\varepsilon$
1	-1	0	0.5	1.5	15	0.001
2	0	2	0	1	20	0.001
3	0	1	2	3	15	0.001
4	1	2	1.5	2.5	25	0.001
5	-1	2	2	3	15	0.001
6	0.5	1.5	0	1.5	25	0.001
7	-2	2	2	3	15	0.001

Результаты следует оформить в виде таблицы с выводом значений функции  $F(t_i)$ , вычисленной методом удвоения числа шагов и значением  $N$ , при котором достигнута заданная точность, значениями, полученными с использованием квадратур Гаусса с тремя и четырьмя узлами.

При сдаче работы необходимо знать оценки погрешности квадратурных формул и методы их получения, методы построения квадратурных формул Гаусса, свойства ортогональных многочленов.



## Лабораторная работа №5

### Численные методы решения задачи Коши и их применение к исследованию поведения решений обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности особых точек

В работе предлагается численно исследовать поведение решений системы дифференциальных уравнений в окрестности особых точек и сделать вывод о характере особой точки.

Пусть задана система

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y).\end{aligned}\tag{1}$$

Напомним, что особой точкой  $(x_0, y_0)$  называется такая точка, в которой

$$P(x_0, y_0) = 0, \quad Q(x_0, y_0) = 0.$$

Необходимо найти все особые точки системы, численно исследовать поведение траекторий в окрестности особой точки и сделать вывод о том, является ли данная точка устойчивым положением равновесия и к какому типу (узел, седло, фокус, центр) относится эта особая точка. Результат численного исследования должен быть согласован с выводами, полученными аналитическим путем. Напомним, что аналитическое исследование проводится по следующей схеме.

1. Система линеаризуется в окрестности исследуемого положения равновесия.

Это означает, что в системе делается замена

$$u = x - x_0, \quad v = y - y_0$$

и в полученной системе отбрасываются все нелинейные члены.

2. В полученной системе вида

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= au + bv, \\ \frac{dv}{dt} &= cu + dv \end{aligned}$$

находятся собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

3. Если собственные значения вещественные, различные и одного знака, то особая точка - узел, устойчивый или неустойчивый, в зависимости от того, отрицательны или положительны оба собственных значения. Если собственные значения вещественны и разных знаков, то особая точка - седло. Оно всегда неустойчиво. Если же собственные значения чисто мнимые, то особая точка будет центром, если система линейная. Для нелинейной системы эта точка может быть как центром, так и фокусом. В случае, когда собственные значения равны, особая точка - дискретический узел.

Численное исследование поведения интегральных кривых в фазовой плоскости  $XOY$  можно проводить по следующей схеме. Пусть найдено положение равновесия  $(a, b)$ . Используя предложенный вариант метода Рунге - Кутта, найдем несколько приближенных решений заданной системы, запуская метод Рунге - Кутта с разными начальными условиями. Так, например, можно численно просчитать траекторию, задав начальные условия  $x(0) = a + \varepsilon$ ,  $y(0) = b$ , от

0 до некоторого  $t_0$ , затем проделать то же самое, но уже с начальными условиями  $x(0) = a - \varepsilon$ ,  $y(0) = b$ , затем с начальными условиями  $x(0) = a$ ,  $y(0) = b + \varepsilon$ , затем  $x(0) = a$ ,  $y(0) = b - \varepsilon$  и так далее. В вариантах задания задается шаг по  $t$ , а величина  $t_0$  и  $\varepsilon$  выбирается по своему усмотрению.

Сделаем еще несколько замечаний относительно применения метода Рунге - Кутты для уравнений более высокого порядка и систем. Как известно, задача нахождения решения для дифференциального уравнения  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$$

при начальных условиях

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y_1$$

$$\dots$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

заменами легко сводится к задаче Коши для системы. В самом деле, обозначив через  $u_1 = y$ ,  $u_2 = y'$ ,  $u_3 = y''$ ,  $\dots$   $u_n = y^{(n-1)}$ , получим систему

$$u'_1 = u_2$$

$$u'_2 = u_3$$

$$\dots$$

$$u'_{n-1} = u_n$$

$$u'_n = f(x) - a_n u_1 - \dots - a_1 u_{n-1},$$

для которой начальные условия имеют вид:  $u_1(0) = y_0$ ,  $u_2(0) = y_1$ ,  $\dots$ ,  $u_n(0) = y_{n-1}$ , и можно применить методы Рунге - Кутта для систем. Следует отметить, что в вариантах заданий методы Рунге - Кутта приведены для одного уравнения 1-го порядка вида:

$$y' = f(x, y)$$

$$y(0) = y_0.$$

При численном интегрировании систем промежуточные величины  $Q_1$ ,  $Q_2$  и т.д. становятся массивами, длина которых равна размерности системы. Разберем для примера применение метода п. 3 для системы двух уравнений

$$x' = f_1(t, x, y)$$

$$y' = f_2(t, x, y)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0$$

$$y(0) = y_0.$$

Введем векторные переменные  $Q_1 = (Q_1^x, Q_1^y)$ ,  $Q_2 = (Q_2^x, Q_2^y)$ ,  $Q_3 = (Q_3^x, Q_3^y)$  и вычислим

$$Q_1^x = h f_1(t_k, x_k, y_k),$$

$$Q_1^y = h f_2(t_k, x_k, y_k).$$

Вычислим далее вектор  $Q_2$

$$Q_2^x = h f_1\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{Q_1^x}{2}, y_k + \frac{Q_1^y}{2}\right),$$

$$Q_2^y = h f_2\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{Q_1^x}{2}, y_k + \frac{Q_1^y}{2}\right)$$

и вектор  $Q_3$

$$Q_3^x = hf_1(t_k + h, x_k - Q_1^x + 2Q_2^x, y_k - Q_1^y + 2Q_2^y),$$

$$Q_3^y = hf_2(t_k + h, x_k - Q_1^x + 2Q_2^x, y_k - Q_1^y + 2Q_2^y)$$

и найдем значение  $x_{k+1} = x_k(t_k + h)$  и  $y_{k+1} = x_k(t_k + h)$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{(Q_1^x + 4Q_2^x + Q_3^x)}{6},$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{(Q_1^y + 4Q_2^y + Q_3^y)}{6}.$$

Ниже приводятся различные варианты метода Рунге - Кутта для скалярного случая и различные системы дифференциальных уравнений, для которых предлагается исследовать поведение решений в окрестности особых точек. При сдаче лабораторной работы необходимо:

1. Исследовать поведение траекторий в окрестности каждой особой точки. Если их бесконечно много, то в окрестности двух любых точек.

2. Для каждой особой точки вывести на один и тот же экран масштабированные графики не менее четырех кривых (каждая кривая разного цвета) с обозначением начальной и конечной точки.

3. Аналитически обосновать поведение решений в окрестности каждой особой точки.

4. Знать принципы получения формул для различных методов Рунге - Кутта и погрешность используемого метода на шаге.

Варианты заданий

Методы Рунге-Кутта

Пусть задано уравнение

$$y' = f(x, y)$$

и начальное условие

$$y(x_0) = y_0.$$

Требуется найти решение на некотором интервале  $(x_0, b)$ . Разобьем отрезок  $(x_0, b)$  на  $n$  частей с шагом  $h$ . Значения в точке  $x_{k+1} = x_k + h$  находятся по формулам:

а) Методы четвертого порядка. В методах 1 и 2 положить  $h=0.05$ .

$$1. \quad y_{k+1} = y_k + \frac{(Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3 + Q_4)}{6},$$

где

$$Q_1 = hf(x_k, y_k),$$

$$Q_2 = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{Q_1}{2}\right),$$

$$Q_3 = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{Q_2}{2}\right),$$

$$Q_4 = hf(x_k + h, y_k + Q_3).$$

$$2. \quad y_{k+1} = y_k + \frac{(Q_1 + 3Q_2 + 3Q_3 + Q_4)}{8},$$

где

$$Q_1 = hf(x_k, y_k),$$



$$Q_2 = hf(x_k + \frac{h}{3}, y_k + \frac{Q_1}{3}),$$

$$Q_3 = hf(x_k + \frac{2h}{3}, y_k - \frac{Q_1}{2} + Q_2),$$

$$Q_4 = hf(x_k + h, y_k + Q_1 - Q_2 + Q_3).$$

б) Методы третьего порядка. В методах 3 и 4 положить  $h=0.02$ .

$$3. \quad y_{k+1} = y_k + \frac{(Q_1 + 4Q_2 + Q_3)}{6},$$

где

$$Q_1 = hf(x_k, y_k),$$

$$Q_2 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{Q_1}{2}),$$

$$Q_3 = hf(x_k + h, y_k - Q_1 + 2Q_2),$$

$$4. \quad y_{k+1} = y_k + \frac{(Q_1 + 3Q_3)}{4},$$

где

$$Q_1 = hf(x_k, y_k),$$

$$Q_2 = hf(x_k + \frac{h}{3}, y_k + \frac{Q_1}{3}),$$

$$Q_3 = hf(x_k + \frac{2h}{3}, y_k - Q_1 + \frac{2Q_2}{3}),$$

в) Методы второго порядка. В методах 5 и 6 положить  $h=0.01$ .

$$5. \quad y_{k+1} = y_k + \frac{(Q_1 + Q_2)}{2},$$

где

$$Q_1 = hf(x_k, y_k),$$

$$Q_2 = hf(x_k + h, y_k + Q_1).$$



$$6. \quad y_{k+1} = y_k + Q_2,$$

где

$$Q_1 = hf(x_k, y_k),$$

$$Q_2 = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{Q_1}{2}\right).$$

Системы дифференциальных уравнений.

$$1. \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= x^2 + y^2 - 2 \end{aligned}$$

$$2. \quad \begin{aligned} \dot{x} &= (2x - y)(x - 2) \\ \dot{y} &= xy - 2 \end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - y \\ \dot{y} &= x^2 - (y - 2)^2 \end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y^2 - 1 \\ \dot{y} &= 6x - y^2 + 1 \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y^2 - 4x \\ \dot{y} &= 4y - 8 \end{aligned}$$

$$6. \quad \begin{aligned} \dot{x} &= 4 - 4x - 2y \\ \dot{y} &= xy \end{aligned}$$

$$7. \quad \begin{aligned} \dot{x} &= 1 - x^2 - y^2 \\ \dot{y} &= 2x \end{aligned}$$

$$8. \quad \begin{aligned} \dot{x} &= 2 + y - x^2 \\ \dot{y} &= 2x(x - y) \end{aligned}$$

9.  $\dot{x} = xy - 4$   
 $\dot{y} = (x - 4)(y - x)$
10.  $\dot{x} = 1 - x^2 - y^2$   
 $\dot{y} = 2xy$
11.  $\dot{x} = 2(x - 1)(y - 2)$   
 $\dot{y} = y^2 - x^2$
12.  $\dot{x} = (x + y)^2 - 1$   
 $\dot{y} = -y^2 - x + 1$
13.  $\dot{x} = (2x - y)^2 - 9$   
 $\dot{y} = 9 - (x - 2y)^2$
14.  $\dot{x} = (2x - y)^2 - 9$   
 $\dot{y} = (x - 2y)^2 - 9$
15.  $\dot{x} = x^2 + y^2 - 6x - 8y$   
 $\dot{y} = x(2y - x + 5)$
16.  $\dot{x} = x^2 - y$   
 $\dot{y} = (x - y)(x - y - 2)$
17.  $\dot{x} = x^2 + y^2 - 5$   
 $\dot{y} = (x - 1)(x + 3y - 5)$
18.  $\dot{x} = 2xy - 4y - 8$   
 $\dot{y} = 4y^2 - x^2$
19.  $\dot{x} = x^2 - y^2 - 1$   
 $\dot{y} = 2y$

## Лабораторная работа №6

### Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

В лабораторной работе предлагается найти приближенное и точное решение дифференциального уравнения

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad a \leq x \leq b, \quad (6.1)$$

удовлетворяющего граничным условиям:

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= \gamma_1 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) &= \gamma_2 \end{aligned} \quad (6.2)$$

на сетке  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $h = \frac{(b-a)}{n}$ , найдя точное решение в узлах сетки, построить и решить сеточную краевую задачу.

Построение точного решения задачи (6.1) - (6.2) проводится элементарно, используя стандартные приемы нахождения решений линейных дифференциальных уравнений. Напомним, что общее решение дифференциального уравнения второго порядка имеет вид:

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_0,$$

где  $y_1$  и  $y_2$  - два линейно независимых решения однородного уравнения, а  $y_0$  - частное решение неоднородного уравнения. Пусть определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a), & \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b), & \alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. В этом случае два граничных условия дают возможность определить константы  $C_1$  и  $C_2$  в формуле общего реше-

ния. Таким образом, конкретный вид решения определяется, и его следует вычислить в точках  $x_i$ .

Построение сеточной краевой задачи проводят по следующей схеме. Аппроксимируем  $y'(x_i)$  разностным аналогом производной

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}.$$

Производной на правом конце поставим в соответствие

$$y'(x_n) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}.$$

Здесь  $y_i = y(x_i)$ . Вторую производную обычно приближают выражением

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}.$$

Легко видеть, что при такой аппроксимации первой производной погрешность порядка  $O(h)$ , а при аппроксимации второй производной погрешность порядка  $O(h^2)$ . В итоге получаем разностное уравнение :

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + p \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + qy_i = f_i \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (6.3)$$

и разностный аналог краевых условий

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_0 + \beta_1 \frac{y_1 - y_0}{h} &= \gamma_1 \\ \alpha_2 y_n + \beta_2 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} &= \gamma_2 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Разностная краевая задача (6.3) - (6.4) представляет собой  $n+1$  уравнений для определения  $n+1$  неизвестного  $y_0, y_1, \dots, y_n$ . Запишем уравнение (6.3) и краевые условия (6.4) в виде

$$y_{i-1} + d_i y_i + e_i y_{i+1} = g_i \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} y_0 &= \chi_1 y_1 + \mu_1 \\ y_n &= \chi_2 y_{n-1} + \mu_2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Рассматриваемые ниже методы прогонки и метод стрельбы (пристрелки) представляют собой алгоритмы решения разностной задачи (6.5) - (6.6).

### Методы прогонки

*Метод правой (прямой) прогонки.* По индукции легко показывается, что с учетом левого краевого условия уравнения (6.5) можно записать в виде:

$$y_i = q_i y_{i+1} + \phi_i, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (6.7)$$

При этом для определения  $q_i$  и  $\phi_i$  имеют место рекуррентные соотношения

$$q_{i+1} = -\frac{e_{i+1}}{q_i + d_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (6.8)$$

$$\phi_{i+1} = \frac{g_{i+1} - \phi_i}{q_i + d_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (6.9)$$

Из левого граничного условия замечаем, что

$$q_0 = \chi_1, \quad \phi_0 = \chi_1. \quad (6.10)$$

Формулы (6.8), (6.9) дают возможность рекуррентно определить  $q_i$  и  $\phi_i$   $i=1,2,\dots,n$ . Далее, уравнение (6.7) при  $i=n-1$

$$y_{n-1} = q_{n-1}y_n + \phi_{n-1}$$

и правое граничное условие

$$y_n = \chi_2 y_{n-1} + \mu_2$$

дают систему для определения  $y_n$  и  $y_{n-1}$ , решая которую получаем

$$y_n = \frac{\mu_2 + \chi_2 \phi_{n-1}}{1 - q_{n-1} \chi_2},$$

и далее «обратным ходом» из (6.7) можно определить и  $y_i$   $i=n-1, \dots, 0$ .

*Метод левой (обратной) прогонки.* Аналогично показывается, что с учетом правого краевого условия уравнения (6.5) можно записать в виде:

$$y_{i+1} = \xi_{i+1} y_i + \eta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6.11)$$

При этом

$$\xi_i = -\frac{1}{d_i + e_i \xi_{i+1}}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 0, \quad (6.12)$$

$$\eta_i = \frac{g_i - e_i \eta_{i+1}}{d_i + e_i \xi_i + 1}, \quad i = n-1, n-1, \dots, 0, \quad (6.13)$$

где

$$\xi_n = \chi_2, \quad \eta_n = \mu_2.$$

Далее, уравнение (6.11) при  $i=0$

$$y_1 = \xi_1 y_0 + \eta_1$$

и левое граничное условие

$$y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1$$

дают систему для определения  $y_0$ , из которой

$$y_0 = \frac{\mu_1 + \chi_1 \eta_1}{1 - \xi_1}. \quad (6.14)$$

Таким образом, метод обратной прогонки состоит в следующем: из правого граничного условия задается  $\xi_n = \chi_2$  и  $\eta_n = \mu_2$ , затем рекуррентно из (6.12), (6.13) определяются  $\xi_i$  и  $\eta_i$   $i=n-1, n-2, \dots, 1$ , далее из (6.14) определяется  $y_0$  и затем из (6.11) последовательно определяются все  $y_i$   $i=1, \dots, n$ .

*Метод встречной прогонки.* Запустим метод прямой прогонки, определив  $q_i$  и  $\phi_i$  до некоторого  $i=k$ . Запустим далее метод обратной прогонки, определив  $\xi_i$  и  $\eta_i$  до некоторого  $i=k$ , где  $k$  - произвольное целое между 0 и  $n$ . Получим систему

$$y_k = q_k y_{k+1} + \phi_k$$

$$y_{k+1} = \xi_{k+1} y_k + \eta_{k+1}.$$

Определяем из этой системы  $y_k$  и  $y_{k+1}$ . Обратным ходом по методу прямой прогонки определяем  $y_i$ ,  $i=k-1, k-2, \dots, 0$  и прямым ходом по методу обратной прогонки определяем  $y_i$ ,  $i=k+1, k+2, \dots, n$ .

*Метод стрельбы (пристрелки).* Разностное уравнение (6.5) имеет такую же структуру общего решения, как и линейное дифференциальное уравнение второго порядка, т.е

$$Y = C_1 U + C_2 V + W, \quad (6.15)$$



где  $U$  и  $V$  - два линейно независимых решения однородного уравнения,

$$y_{i-1} + d_i y_i + e_i y_{i+1} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (6.16)$$

а  $W$  - частное решение неоднородного уравнения.

$$y_{i-1} + d_i y_i + e_i y_{i+1} = g_i \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (6.17)$$

Заметим, что при задании  $y_0$  и  $y_1$  уравнения (6.16) и (6.17) становятся рекуррентными соотношениями для определения  $y_{i+1}$  по известным  $y_i$  и  $y_{i-1}$ . Учитывая это, найдем вектор  $U = (u_0, u_1, \dots, u_n)$  как решение однородного уравнения (6.16), удовлетворяющего начальным условиям  $u_0 = 0, u_1 = 1$ . Найдем вектор  $V = (v_0, v_1, \dots, v_n)$  как решение однородного уравнения (6.16), удовлетворяющего начальным условиям  $v_0 = 1, v_1 = 0$  и вектор  $W = (w_0, w_1, \dots, w_n)$  как решение неоднородного уравнения (6.17), удовлетворяющего начальным условиям  $w_0 = w_1 = 0$ .

Таким образом, общее решение уравнения (6.16) построено, и осталось определить константы  $C_1$  и  $C_2$  так, чтобы выполнялись граничные условия. Из граничных условий получаем систему для определения  $C_1$  и  $C_2$ :

$$C_2 = \chi_1 C_1 + \mu_1$$

$$C_1 u_n + C_2 v_n + w_n = \chi_2 (C_1 u_{n-1} + C_2 v_{n-1} + w_{n-1}) + \mu_2,$$

из которой определяем  $C_1$  и  $C_2$  и, следовательно, решение краевой задачи.

Таким образом, применение метода стрельбы состоит в определении в цикле по  $i$  массивов  $U, V$  и  $W$  и определении в (6.15) констант  $C_1$  и  $C_2$ .

При сдаче работы необходимо вывести на экран точное и приближенное решение в точках  $x_i$ . Студент должен знать методы решения

краевых задач для линейных разностных уравнений второго порядка.

### Варианты заданий

#### I. Методы решения краевых задач.

1. Метод прямой прогонки.
2. Метод обратной прогонки.
4. Метод встречной прогонки.
5. Метод стрельбы.

#### II. Уравнения и краевые условия

1.  $y'' - 2y' - y = -2xe^{-x}$

$$y'(0) = 0 \quad y(1) + 2y'(1) = 0 \quad n = 20$$

2.  $y'' - y = -2e^{-2x}$

$$y(1) + y'(1) = 0 \quad y'(2) = 1 \quad n = 20$$

3.  $y'' - 4y' + 3y = \cos x$

$$y(1) = 1 \quad y'(2) = 1 \quad n = 20$$

4.  $y'' + y = -2x$

$$y(0) + y'(0) = 1 \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad n = 20$$

5.  $y'' + 4y' + 3y = -2x$

$$y'(1) = 0 \quad y'(2) - y(2) = 1 \quad n = 20$$

6.  $y'' - 3y' + 2y = \sin(x)$

$$y(0) + 2y'(0) = -1 \quad y'(1) = 1 \quad n = 20$$

7.  $y'' + y' - 2y = -2$

$$y(-1) - y'(-1) = 0 \quad y(1) = 1 \quad n = 25$$



$$8. \quad y'' - 4y' + 5y = -2x$$

$$y(0) = 1 \quad y'(1) = 1 \quad n = 25$$

$$9. \quad y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$$

$$y(0) + y'(0) = 0 \quad y'(1) = 1 \quad n = 20$$

$$10. \quad y'' - y = -2e^{-2x}$$

$$y(1) + y'(1) = 0 \quad y'(2) = 1 \quad n = 20$$

$$11. \quad y'' - 5y' + 4y = -2e^{2x}$$

$$y(0) + y'(0) = 0 \quad y(1) = 1 \quad n = 20$$

$$12. \quad y'' - 3y' - 4y = -2e^{2x}$$

$$y'(0) = 0 \quad y'(1) = 1 \quad n = 20$$

$$13. \quad y'' + 2y' - 3y = e^x$$

$$y(0) = 0 \quad y'(1) = 1 \quad n = 20$$

$$14. \quad y'' - 4y' + 8y = -2$$

$$y'(0) = 1 \quad y(1) = 0 \quad n = 20$$

$$15. \quad y'' - 9y = -2e^{3x}$$

$$y(0) = 0 \quad y(1) + y'(1) = 1 \quad n = 20$$

$$16. \quad y'' + y = -2\sin(x)$$

$$y(0) = 0 \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad n = 25$$

$$17. \quad y'' - 5y' = -2x^2$$

$$y'(0) = 1 \quad y(1) = 1 \quad n = 20$$

$$18. \quad y'' - 5y' + 4y = 1$$

$$y(1) + y'(1) = 1 \quad y'(2) = 0 \quad n = 20$$

$$19. \quad y'' + 3y' + 2y = -2$$

$$y(0) + 2y'(0) = 0 \quad y(1) = 1 \quad n = 20$$

$$20. \quad 2y'' - 5y' + 2y = 1$$

$$-y(0) + y'(0) = 1 \quad y'(1) = 0 \quad n = 20$$

$$21. \quad y'' - 2y' = 2e^x$$

$$y(-1) + y'(-1) = 0 \quad y'(1) = 1 \quad n = 20$$

$$22. \quad y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$$

$$y(1) + y'(1) = 0 \quad y'(2) = 1 \quad n = 20$$

$$23. \quad y'' + 4y = e^{2x}$$

$$y(0) - y'(0) = 0 \quad y'(1) = 0 \quad n = 20$$

$$24. \quad y'' + 3y' + 2y = -2$$

$$y(0) = 0 \quad y'(1) = 1 \quad n = 20$$

$$25. \quad y'' + y = \cos x$$

$$y(0) + y'(0) = 1 \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad n = 20$$

$$26. \quad y'' - 2y' + y = x$$

$$y(-1) = 0 \quad y(1) + 2y'(1) = \quad n = 20$$

$$27. \quad y'' - y = -2e^{-2x}$$

$$y(1) + y'(1) = 0 \quad y'(2) = 1 \quad n = 20$$

$$28. \quad y'' + y' = 1$$

$$y(0) = 1 \quad y'(1) = 0 \quad n = 20$$

$$29. \quad 4y'' - 4y' + y = x$$

$$y(0) + 2y'(0) = 0 \quad y(1) = 0 \quad n = 20$$

$$30. \quad y'' - y' = -2e^x$$

$$y(0) + y'(0) = -1 \quad y(1) = 0 \quad n = 20$$

## Лабораторная работа №7

### Численные методы решения краевых задач для уравнения теплопроводности

Лабораторная работа посвящена изучению разностных методов решения краевых задач для уравнения теплопроводности. Пусть задано уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (7.1)$$

при начальных условиях

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad (7.2)$$

и граничных условиях

$$\alpha_1 u(0, t) + \beta_1 \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \gamma_1(t) \quad (7.3)$$

$$\alpha_2 u(1, t) + \beta_2 \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = \gamma_2(t). \quad (7.4)$$

Требуется вычислить при  $t = t_0$  в точках  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  приближенное решение, полученное решением сеточной краевой задачи и приближенное решение, полученное применением метода разделения переменных (метода Фурье) в виде разложения решения в ряд до третьего члена, вычисленное в тех же точках.

Коротко напомним метод Фурье для решения задачи (7.1)–(7.4). Применение этого метода разбивается на этапы:

1. Заменой  $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$  необходимо свести задачу (7.1) – (7.4) к задаче с однородными ( $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ) граничными условиями. Здесь  $v(x, t)$  – новая неизвестная функция, а  $w(x, t)$  следует подобрать так, чтобы в задаче для  $v(x, t)$  граничные условия были однородными. Для функции  $v(x, t)$  получаем задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g(x, t) \quad 0 \leq x \leq 1$$

при начальных условиях

$$v(x, 0) = \Phi(x)$$

и граничных условиях

$$\alpha_1 v(0, t) + \beta_1 \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0$$

$$\alpha_2 v(1, t) + \beta_2 \frac{\partial v(1, t)}{\partial x} = 0.$$

2. Далее следует найти собственные значения  $\lambda_k$  и собственные функции  $e_k(x)$  дифференциального оператора

$$y'' = \lambda y \quad (7.5)$$

при граничных условиях

$$\alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0$$

$$\alpha_2 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0.$$

3. Решение задачи для  $v(x, t)$  ищется в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) e_k(x).$$

Разложив правую часть  $g(x, t)$  и начальное условие  $\Phi(x)$  в ряд по собственным функциям  $e_k(x)$ ,

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k e_k(x)$$

$$g(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) e_k(x)$$

получаем последовательность дифференциальных уравнений первого порядка для определения  $v_k(t)$

$$v_k(t) = \lambda_k v_k(t) + g_k(t),$$

которые следует решать при начальных условиях

$$v_k(0) = \Phi_k.$$

Следует заметить, что в явном виде собственные значения и собственные функции дифференциального оператора (7.5) находятся лишь для следующих краевых условиях:

$$v(0) = v(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0, \quad v(0) = v'(1) = 0, \quad v'(0) = v(1) = 0.$$

При построении сеточной краевой задачи, являющейся разностным аналогом задачи (7.1) - (7.4), отрезок  $(0,1)$  разбивается с шагом  $h = \frac{1}{n}$  точками  $x_i$ , отрезок  $(0, t_0)$  разбивается с шагом  $\tau = \frac{t_0}{m}$  точками  $t_i$  и используется разностная схема с весами

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \sigma \Lambda u_i^{j+1} + (1 - \sigma) \Lambda u_i^j + \varphi_i^j, \quad (7.6)$$

причем  $u_i^0 = \phi_i$ .

Граничные условия аппроксимируем следующим образом

$$\alpha_1 u_0^j + \beta_1 \frac{u_1^j - u_0^j}{h^2} = \gamma_1^j \quad (7.7)$$

$$\alpha_2 u_n^j + \beta_2 \frac{u_n^j - u_{n-1}^j}{h^2} = \gamma_2^j. \quad (7.8)$$

Здесь  $u_i^j = u(x_i, t_j)$ , а оператор  $\Lambda u_i^j$  — разностный аналог второй производной по  $x$



$$\Delta u_i^j = \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} \quad (7.9)$$

или более подробно

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \sigma \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2} + (1 - \sigma) \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} + \varphi_i. \quad (7.10)$$

При  $\sigma = 0$  схема называется явной. Она имеет вид

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} + f_i^j.$$

При использовании этой схемы для определения решения в точках  $x_i$   $i = 1, \dots, n - 1$  на слое  $j+1$ , т.е.  $u_i^{j+1}$ , надо знать решение на предыдущем слое, т.е.  $u_{i-1}^j$ ,  $u_i^j$ ,  $u_{i+1}^j$ . Но на нулевом слое оно задано начальными условиями. Определив  $u_1^{j+1}$  и  $u_{n-1}^{j+1}$  из граничных условий, можно определить  $u_0^{j+1}$  и  $u_n^{j+1}$ , тем самым вычислить решение во всех точках  $i+1$ -го слоя. Таким образом, поднимаясь слой за слоем, мы дойдем до  $m$ -го слоя, при котором необходимо получить решение. Погрешность аппроксимации этой схемой исходного уравнения  $O(h^2 + \tau)$ . Несмотря на свою простоту, эта схема редко применяется в вычислительной практике. Это связано с тем, что она условно устойчива, т.е. устойчива, когда выполняется соотношение  $\frac{h^2}{\tau} < \frac{1}{2}$ .

При  $\sigma = 1$  имеем:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2} + f_i^{j+1}. \quad (7.11)$$

Эта схема называется неявной. Погрешность аппроксимации этой схемой -  $O(h^2 + \tau)$ . Схема абсолютно устойчива.

Обозначив через  $y_i = u_i^{j+1}$  и умножая на  $h$ , получим

$$y_{i-1} - (2 + \frac{h^2}{\tau})y_i + y_{i+1} = -(h^2 f_i^{j+1} + \frac{h^2}{\tau} u_i^j). \quad (7.12)$$

Таким образом, правая часть этого разностного уравнения зависит от значения правой части уравнения теплопроводности на  $j+1$  слое и значения разностной задачи на предыдущем слое. В результате замечаем, что задача определения решения на  $j+1$  слое свелась к задаче, рассмотренной в лабораторной работе №7. Напомним, что на нулевом слое решение известно из начального условия. Итак, алгоритм решения задачи с помощью неявной схемы состоит в следующем:

1. Для определения  $u_i^1$  в (7.12) необходимо сформировать правую часть, положив  $u_i^0 = \phi_i$ .
2. Решить уравнение (7.12) с краевыми условиями (7.7) - (7.8). Полученная сеточная функция и есть  $u_i^1$ .
3. Переформировать правую часть в (7.12) с учетом полученных  $u_i^j$ .
4. Продолжить этот процесс, пока не найден слой  $u_i^m$ .

При  $\sigma = \frac{1}{2}$  получаем схему:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{2h^2} + \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{2h^2} + \frac{(f_i^{j+1} + f_i^j)}{2}. \quad (7.13)$$

Эта схема называется симметричной неявной, или схемой Кранка - Никольсона. Порядок аппроксимации этой схемы -  $O(h^2 + \tau^2)$ . Она абсолютно устойчива и наиболее часто встречается в вычислительной практике. Умножив на  $2h^2$  и обозначив через  $y_i = u_i^{j+1}$ , получим

$$y_{i-1} - (2 + \frac{2h^2}{\tau})y_i + y_{i+1} = \varphi_i,$$

где

$$\varphi_i = -[h^2(f_i^{j+1} + f_i^j) + \frac{2h^2}{\tau}u_i^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j].$$

Как и в неявной схеме, правая часть разностного уравнения зависит от правой части уравнения теплопроводности и значения искомой сеточной функции на предыдущем слое. Значение на нулевом слое, как обычно, задается начальным условием.

$$u_i^0 = \phi_i.$$

Алгоритм решения этой задачи такой же, как и у неявной схемы.

И наконец, схема

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \sigma \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2} + (1 - \sigma) \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} + \varphi_i^j$$

при

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$$

и

$$\varphi_i^j = f(x_i, t_j + \frac{\tau}{2}) + \frac{h^2}{12}f''_{x^2}(t_j + \frac{\tau}{2}, x_i)$$

называется схемой повышенного порядка аппроксимации. В этой схеме он равен  $(O(h^4 + \tau^2))$ . Переписав ее в виде

$$y_{i-1} - (2 + \frac{h^2}{\tau\sigma})y_i + y_{i+1} = \nu_i,$$

где

$$\begin{aligned} \nu_i = & -\frac{h^2}{\tau\sigma}u_i^j - \frac{1-\sigma}{\sigma}(u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j) - \\ & - \frac{h^2}{\sigma}(f(x_i, t_j + \frac{\tau}{2}) + \frac{h^2}{12}f''_{x^2}(t_j + \frac{\tau}{2}, x_i)), \end{aligned}$$

замечаем, что она решается так же, как и предыдущие две схемы.

При сдаче лабораторной работы студент должен быть знаком с основными понятиями теории разностных схем (аппроксимация, устойчивость, сходимость), уметь строить разностную схему для конкретной краевой задачи.

### Варианты заданий

#### I. Типы разностных схем

1. Неявная схема.
2. Схема Кранка - Никольсона.
3. Схема повышенного порядка аппроксимации.

#### II. Методы решения сеточной задачи

1. Метод прямой прогонки.
2. Метод обратной прогонки.
3. Метод встречной прогонки.
4. Метод стрельбы.

#### III. Значения $n$ , $m$ , $t_0$ .

$n$	$m$	$t_0$
20	25	1
15	25	1
15	15	0.5
15	25	1.5
25	25	1.5
15	25	0.5

#### IV. Уравнение, начальные и граничные условия.

$$1. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^t \cos \pi x (1 + \pi^2)$$

$$u(x, 0) = \cos \pi x \quad u'_x(0, t) = u'_x(1, t) = 0$$

$$2. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 - 2t$$

$$u(x, 0) = 0 \quad u(0, t) = 0 \quad u'_x(1, t) = 2t$$

$$3. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = \sin \pi x \quad u(0, t) = u(1, t) = 0$$

$$4. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x - 1$$

$$u(x, 0) = 1 - x \quad u'_x(0, t) = t - 1 \quad u(1, t) = 0$$

$$5. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 + x + 2t$$

$$u(x, 0) = 0 \quad u(0, t) = u(1, t) = 0$$

$$6. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t} \sin \pi x (\pi^2 - 1)$$

$$u(x, 0) = \sin \pi x \quad u(0, t) = u(1, t) = 0$$

$$7. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2t \cos x + (1 + t)(1 - x) \sin x$$

$$u(x, 0) = 0 \quad u(0, t) = u(1, t) = 0$$

$$8. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \cos t - 2 \sin t$$

$$u(x, 0) = x^2 \quad u'_x(0, t) = 0 \quad u(1, t) = \sin t$$

$$9. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^{-t}$$

$$u(x, 0) = 1 \quad u'_x(0, t) = u'_x(1, t) = 0$$

$$10. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \pi t \sin \frac{\pi}{2} x + x \cos \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{t\pi^2}{4}\right)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad u(0, t) = u(1, t) = 0$$

$$11. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x^2 - 2t)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad u(0, t) = u(1, t) = t$$

$$12. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = -e^t \quad u(0, t) = e^t \quad u(1, t) = e^{t-1}$$

$$13. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 - t)e^{-x}$$

$$u(x, 0) = 0 \quad u(0, t) = t \quad u(1, t) = te^{-1}$$

$$14. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(x^2 - 2t)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad u(0, t) = 0 \quad u(1, t) = 2t$$

$$15. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^3 - \frac{3}{2}x - (t+1)(6x-3)$$

$$u(x, 0) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 \quad u(0, t) = 0 \quad u'_x(1, t) = 0$$

$$16. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x^2 - 2t)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad u(0, t) = u(1, t) = t$$

$$17. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t$$

$$u(x, 0) = x \quad u(0, t) = 0 \quad u(1, t) = t$$

$$18. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = -e^t \quad u(0, t) = e^t \quad u(1, t) = e^{t-1}$$



## Лабораторная работа №8

### Численные методы решения задачи Дирихле

В лабораторной работе предлагается следующая задача. В некоторой области  $D$  с границей  $\Gamma$  требуется найти приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (8.1)$$

удовлетворяющего на границе области условию

$$u|_{\Gamma} = \varphi(s), \quad (8.2)$$

где  $s$  - параметр, меняющийся на границе области.

Выберем шаги  $h_1$  и  $h_2$  и построим множество точек с координатами  $x_k = x_0 + kh_1$ ,  $y_j = y_0 + jh_2$ , где точка  $x_0, y_0$  принадлежит  $D + \Gamma$ . Сеткой будем называть множество точек  $x_k, y_j$ , принадлежащих  $D + \Gamma$ . Для аппроксимации уравнения (8.1) будем использовать пятиточечный шаблон «крест». К внутренним точкам сетки обычно относят точки  $x_k, y_j$ , лежащие внутри области  $D$ . Граничными точками будем называть точки сетки, лежащие вне области  $D$ , на минимальном расстоянии от границы  $\Gamma$ , или принадлежащие границе  $\Gamma$ . Впрочем, к граничным узлам часто относят и такие точки, которые лежат внутри  $D$ , если расстояние по сетке этого узла до границы минимально. На рисунке на странице 77 показан один из вариантов расположения граничных узлов. Следующим шагом является определение значений функции  $u(x, y)$  в граничных узлах. Этому вопросу посвящены разобранные ниже примеры.

Уравнению (8.1) поставим в соответствие разностное уравнение

$$\frac{u_{m-1n} - 2u_{mn} + u_{m+1n}}{h_1^2} + \frac{u_{mn-1} - 2u_{mn} + u_{mn+1}}{h_2^2} = f(x_k, y_j) \quad (8.3)$$

$n, m = 1, 2, \dots$

Разностное уравнение (8.3) аппроксимирует уравнение (8.1) с погрешностью порядка  $O(h_1^2 + h_2^2)$ . Система уравнений (8.3), построенная для каждой внутренней точки сетки, с учетом значений в граничных узлах, представляет собой систему линейных уравнений для определения  $u_{km}$ . Если область есть прямоугольник, система уравнений составляется достаточно легко. Итак, пусть  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ . Тогда граничное условие (8.2) можно записать в виде

$$u(x, 0) = \alpha_1(x) \quad u(x, b) = \alpha_2(x) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$u(0, y) = \beta_1(y) \quad u(a, y) = \beta_2(y) \quad 0 \leq y \leq b$$

Пусть далее  $h_1 = a/N$ ,  $h_2 = b/M$ , где  $n$  и  $m$  - целые числа. Получим систему

$$u_{m+1n} + \sigma u_{mn+1} - 2(1 + \sigma)u_{mn} + \sigma u_{mn-1} + u_{m-1n} = h_1^2 f(x_m, y_n) \quad (8.4)$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1 \quad n = 1, 2, \dots, N-1$$

Здесь

$$\sigma = \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

и

$$u_{m0} = \alpha(x_m) \quad u_{mN} = \alpha_1(x_m) \quad m = 0, 1, \dots, M,$$

$$u_{0n} = \beta(y_n) \quad u_{MN} = \beta_1(y_n) \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Если область  $D$  имеет криволинейную границу  $\Gamma$ , то значения  $u_{mn}$  для граничных узлов можно найти путем переноса значений  $u(x, y)$  из точек на границе  $\Gamma$ . Погрешность аппроксимации условия (8.2) в

узле  $(x_m, y_n)$  будет величиной порядка  $O(\delta)$ , где  $\delta$  - расстояние этого узла до точки на границе, с которой переносится значение функции.

Погрешность аппроксимации можно уменьшить, если для определения  $u_{mn}$  в граничном узле воспользоваться значением  $u(x, y)$  в близком внутреннем узле либо значением на границе  $\Gamma$ . При построении такой аппроксимации обычно используют метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим пример. Пусть граница  $\Gamma$  области  $D$  есть окружность  $x^2 + y^2 = 1$ , а сеткой является совокупность точек  $(x_m, y_n)$  с координатами  $x_m = mh_1$ ,  $y_n = nh_2$ . Требуется построить аппроксимацию граничного условия  $u(x, y) = \varphi(x, y)$  в узле  $(x_1, y_k)$ ,  $k = [\sqrt{1 - \frac{h_1^2}{h_2^2}}]$ .

Обозначим через  $A$  точку  $(x_1, y_k)$ , через  $B$  точку  $(x_1\sqrt{1 - x_1^2}, y_k)$ , через  $C$  точку  $(x_1, y_{k-1})$ . Воспользуемся разложениями

$$u(B) = u(A) + \delta \frac{\partial u(A)}{\partial y} + \delta^2 \frac{\partial^2 u(\hat{B})}{2\partial y^2},$$

где

$$\delta = \sqrt{1 - h_1^2} - kh_2$$

и точка  $\hat{B}$  лежит между  $A$  и  $B$ . Аналогично

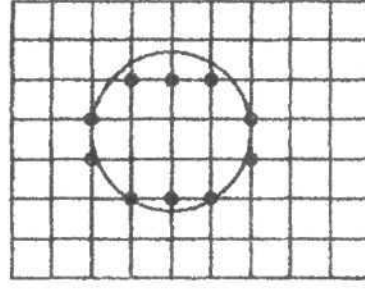
$$u(C) = u(A) - \delta \frac{\partial u(A)}{\partial y} + h_2^2 \frac{\partial^2 u(\hat{C})}{2\partial y^2},$$

и точка  $\hat{C}$  лежит между  $A$  и  $C$ .

Решая полученные соотношения относительно  $u(A)$  и  $\frac{\partial u(A)}{\partial y}$ , получим:

$$u(A) = \frac{h_2 u(B) + \delta u(C)}{h_2 + \delta} - h_2 \delta \frac{\partial^2 u(A)}{2\partial y^2}.$$

### Рисунок



Следовательно, так как  $\delta < h_2$ , то

$$u(A) = \frac{h_2 u(B) + \delta u(C)}{h_2 + \delta} + O(h_2^2).$$

Поэтому можно заключить, что равенство

$$u(A) = \frac{h_2 \varphi(x_1 \sqrt{1-x_1}) + \delta u_{1k-1}}{h_2 + \delta}$$

аппроксимирует граничное условие в точке  $(x_1, y_k)$  с погрешностью  $O(h_2^2)$ . Эти соображения позволяют сформулировать следующее правило при выборе граничных узлов. Для уменьшения погрешности аппроксимации граничных условий граничные узлы следует выбирать так, чтобы они имели две ближайшие точки на границе  $\Gamma$  по линиям сетки, либо так, чтобы погрешность аппроксимации граничных значений в соседних узлах была порядка  $O(h^2)$ . На рисунке приведен один из вариантов расположения граничных узлов.

Как следует из предпоследнего соотношения, если  $u|_{\Gamma} = 0$ , то, положив  $u=0$  в граничных узлах, мы допускаем погрешность порядка  $O(h^2)$ . Пусть  $w(x,y)$  – любая функция, равная  $u$  на границе. Сделав замену  $u=w+v$ , мы приходим к задаче для  $v$  с нулевыми граничными условиями. Это дает возможность утверждать, что погрешность аппроксимации граничных условий порядка  $O(h^2)$ .

В случае прямоугольных областей задача построения разностной схемы решается достаточно просто. Разберем в качестве примера задачу нахождения решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в прямоугольной области  $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$ , причем

$$u|_{x=0} = 45y(1-y), \quad u|_{y=1} = 25x, \quad u|_{x=1} = 25 \quad u|_{y=0} = 25 \sin \frac{\pi x}{2}.$$

Процесс решения разбивается на этапы:

1. Прямоугольную область  $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$  разобьем сеткой с шагом  $h = h_1 = h_2 = 0.2$  и вычислим значения в граничных узлах. Имеем при  $x=0$

$$u(0, 0) = 0; \quad u(0, 0.2) = 7.2; \quad u(0, 0.4) = 10.8;$$

$$u(0, 0.6) = 10.8; \quad u(0, 0.8) = 7.5; \quad u(0, 1) = 0.$$

При  $x=1$

$$u(1, 0) = u(1, 0.2) = u(1, 0.4) = u(1, 0.6) = u(1, 0.8) = u(1, 1) = 25.$$

При  $y=0$

$$u(0.2, 0) = 1.545; \quad u(0.4, 0) = 5.878; \quad u(0.6, 0) = 12.135; \quad u(0.8, 0) = 19.021.$$

При  $y=1$

$$u(0.2, 1) = 5; \quad u(0.4, 1) = 10; \quad u(0.6, 1) = 15; \quad u(0.8, 1) = 20; \quad u(1, 1) = 25.$$

2. Для определения значений во внутренних точках области используем конечно-разностную аппроксимацию уравнения Лапласа, которая имеет вид

$$u_{ij} = \frac{u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{ij+1}}{4}.$$



Пронумеруем  $u_{ij}$  следующим образом

$$u_k = u_{1,k}; \quad u_{k+4} = u_{2,k}; \quad u_{k+8} = u_{3,k}; \quad u_{k+12} = u_{4,k},$$

$$k = 1, 2, 3, 4.$$

В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{7.2 + 1,545 + u_2 + u_3}{4}, & u_2 &= \frac{5.878 + u_1 + u_3 + u_6}{4}, \\ u_3 &= \frac{12.135 + u_2 + u_4 + u_7}{4}, & u_4 &= \frac{19.021 + 25 + u_3 + u_8}{4}, \\ u_5 &= \frac{10.08 + u_1 + u_6 + u_9}{4}, & u_6 &= \frac{u_2 + u_5 + u_7 + u_{10}}{4}, \\ u_7 &= \frac{u_3 + u_6 + u_8 + u_{11}}{4}, & u_8 &= \frac{25 + u_4 + u_7 + u_{12}}{4}, \\ u_9 &= \frac{10.8 + u_5 + u_{10} + u_{13}}{4}, & u_{10} &= \frac{u_6 + u_9 + u_{11} + u_{14}}{4}, \\ u_{11} &= \frac{u_7 + u_{10} + u_{12} + u_{15}}{4}, & u_{12} &= \frac{25 + u_8 + u_{11} + u_{16}}{4}, \\ u_{13} &= \frac{7.2 + 5 + u_9 + u_{14}}{4}, & u_{14} &= \frac{10 + u_{10} + u_{13} + u_{15}}{4}, \\ u_{15} &= \frac{15 + u_{11} + u_{14} + u_{16}}{4}, & u_{16} &= \frac{20 + 25 + u_{12} + u_{15}}{4}. \end{aligned}$$

3. В силу того что разностный оператор, аппроксимирующий оператор Лапласа, является симметричным и положительно определенным [11], для отыскания решения полученной системы можно запустить итерационные методы, изученные в лабораторной работе №2. Это может быть метод Зейделя или его вариант метод Некрасова, а также методы спуска. Как известно, эти методы сходятся для симметричных и положительно определенных операторов с любого начального приближения. При выполнении работы студенту необходимо построить разностную аппроксимацию граничных условий для криволинейной области, выписать и решить итерационным методом

полученную систему. Итерационный метод выбирается студентом самостоятельно.

В случае криволинейной границы необходимо:

1. Определить минимальный прямоугольник, содержащий область  $D$ .

2. Определить значения искомой функции  $u$  в граничных узлах с возможно меньшей погрешностью.

3. Построить и решить разностную систему.

Шаги по  $x$  и  $y$  следует выбрать так, чтобы  $h_1$  и  $h_2$  были порядка 0.1.

### Варианты заданий

Во всех вариантах предлагается построить приближенное решение для уравнения Лапласа  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  в указанной области с заданными значениями на границе.

Область	Значения на границе
1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$	$u _{\Gamma} =  x  +  y $
2. $( x  + 2)( y  + 2) = 12$	$u _{\Gamma} = 2 x  +  y $
3. $ y  = 4 - x^2 \quad -2 \leq x \leq 2$	$u _{\Gamma} =  x  y $
4. $x^2 + y^2 = 16$	$u _{\Gamma} =  x  + 2 y $
5. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$	$u _{\Gamma} =  x  y $



- |     |  |                                     |              |
|-----|--|-------------------------------------|--------------|
| 6.  | $ x  = 4 - y^2 \quad -4 \leq x \leq 4$     | $u _{\Gamma} =  x  +  y $           |              |
| 7.  | $ y  = 4 - x^2 \quad -2 \leq x \leq 2$     | $u _{\Gamma} =  x  +  y $           |              |
| 8.  | $( x  + 2)( y  + 2) = 12$                  | $u _{\Gamma} =  x  y $              |              |
| 9.  | $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$       | $u _{\Gamma} = 2 x  +  y $          |              |
| 10. | $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$      | $u _{\Gamma} =  x  y $              |              |
| 11. | $x^2 + y^2 = 16$                           | $u _{\Gamma} = 0.5 x  +  y $        |              |
| 12. | $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$       | $u _{\Gamma} =  x  + 0.5 y $        | <i>array</i> |
| 13. | $ x  = 4 - y^2 = 1 \quad -4 \leq x \leq 4$ | $u _{\Gamma} =  x  + \frac{y^2}{2}$ |              |
| 14. | $( x  + 2)( y  + 2) = 12$                  | $u _{\Gamma} = 2 x  + 0.5 y $       |              |
| 15. | $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$       | $u _{\Gamma} =  x  +  y $           |              |
| 16. | $ y  = 9 - x \quad -3 \leq x \leq 3$       | $u _{\Gamma} =  x  + 0.5 y $        |              |
| 17. | $x^2 + y^2 = 16$                           | $u _{\Gamma} = 0.5 x  +  y $        |              |
| 18. | $ x  = 4 - y^2 \quad -4 \leq x \leq 4$     | $u _{\Gamma} =  x  +  y $           |              |

## Литература

- 1) Азаков А.И., Басик В.А., Мелешко И.И., Монастырский П.И. и др. Сборник задач по методам вычислений. М.: Физико-математическая литература, 1994. - 319 с.
- 2) Бахвалов Н.С. Численные методы. - 2-е изд. М.: Наука, 1975. - 632 с.
- 3) Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений.- Т. 1. М.: Наука, 1966. - 464 с.
- 4) Березин И.С., Жидков Н.П., Методы вычислений.- Т. 2. М.: Физматгиз, 1962. - 640 с.
- 5) Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. - М.: Высшая школа, 1990. - 208 с.
- 6) Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. 2-е изд. М.: Наука, 1977. - 440 с.
- 7) Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. 4-е изд. - М.: Наука, 1970. - 664 с.
- 8) Крылов В.И., Бобкова В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы высшей математики. - Т. 1.- Минск: Высшая школа, 1972. - 284с.
- 9) Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. 3-е изд. - М.: Наука, 1989. - 608 с.
- 10) Самарский А.А. Введение в численные методы. 2-е изд. - М.: Наука, 1987. - 288 с.

- 11) Самарский А.А. Теория разностных схем. 2-е изд. - М.: Наука, 1983. - 600 с.
- 12) Трифонов Н.П., Пасхин Е.Н. Практикум работы на ЭВМ. - М.: Наука, 1982. - 288 с.
- 13) Фадеев Д.К., Фадеева В.П. Вычислительные методы линейной алгебры. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1963. - 734 с.
- 14) Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. 6-е изд. М.: Наука, 1985. - 218 с.

Учебное издание

Матвеев Владимир Николаевич

**Лабораторные работы  
по курсу «Методы вычислений»**

Редактор, корректор В.Н. Чулкова  
Компьютерная верстка В.Н. Матвеев

Подписано в печать 16.07.2004. Формат 60×84/8. Бумага тип.  
Усл. печ. л. 9,76. Уч.-изд. л. 5,0. Тираж 100 экз. Заказ 488.

Оригинал-макет подготовлен  
Редакционно-издательским отделом ЯрГУ.

Ярославский государственный университет.  
150000, г. Ярославль, ул. Советская, 14.

Отпечатано  
ООО «Ремдер» ЛР ИД № 06151 от 26.10.2001.  
г. Ярославль, пр-т Октября, 94, оф. 37.  
Тел./факс (0852) 73-35-03.