

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

В.В. Литвинов, О.И. Литвинова

Элементы вычислительной гидродинамики

Учебное пособие

Ярославль 1996

ББК В 19я 73

Л64

УДК 531+681

Элементы вычислительной гидродинамики: Учеб. пособие / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 1996. с.

Изложены основные идеи и методы вычислительной гидродинамики моделирующей течение вязкой жидкости. Приводятся алгоритмы численного решения уравнений Навье - Стокса в переменных - функции тока и вихря и анализ граничных и начальных условий, результаты расчетов.

Ил. 15. Библиограф.: 6 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Ярославского государственного университета

Рецензенты: кафедра высшей математики Ярославского технического университета; доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования Ярославского государственного университета Е.П. Кубышкин.

Ярославский государственный
университет, 1996

Предисловие

Данное учебное пособие представляет собой изложение материалов спецкурса, читаемого одним из авторов студентам математического факультета Ярославского государственного университета. Целью пособия является первоначальное ознакомление с идеями и методами численного моделирования течений вязкой жидкости в каналах с различной геометрией границ. Пособие представляет собой конспективное и минимальное изложение идей вычислительной гидродинамики, подробно и с многочисленными деталями и примерами изложенных в книге П. Роуча “Вычислительная гидродинамика”, которая, к сожалению, практически недоступна для студентов.

В первой главе приводятся уравнения Навье - Стокса в переменных скорость - давление, и в переменных - функции тока и вихря и изложены некоторые общие сведения. Во второй и третьей главах приводятся алгоритмы решений уравнений для функций тока и вихря; проводится анализ устойчивости. Четвертая глава посвящена анализу численной аппроксимации граничных и начальных условий. В приложении рассматривается применение изложенных алгоритмов для двух частных случаев и приводятся результаты расчетов, выполненных в дипломной работе В.Г. Вьюшина (1993).

Глава 1. Математические модели однородной изотермической вязкой жидкости

1.1. Исходные уравнения в переменных скорости и давления. Начальные и граничные условия

Течение вязкой жидкости с ньютоновским законом трения описывается уравнениями Навье - Стокса. Вывод уравнений Навье - Стокса может быть сделан либо феноменологическим путем на основе известных постулатов Стокса [1], либо на основе молекулярно-кинетической теории [2]. Для однородной несжимаемой вязкой жидкости система уравнений Навье - Стокса имеет вид

(1.1)

В этой системе уравнений искомыми функциями являются вектор скорости \mathbf{u} , давление p , которые зависят от пространственных координат и времени t . Параметрами будут плотность ρ , коэффициент кинематической вязкости ν ($\nu = \mu / \rho$ - коэффициент динамической вязкости);

\mathbf{F} - силовая функция; \mathbf{e}_i - единичный вектор.

Первое из уравнений в системе (1.1), представляющее систему трех уравнений для проекций вектора скорости u_i , называется уравнением количества движения и представляет баланс между силами инерции, силами давления, трения и массовыми силами. Второе из уравнений системы (1.1) называется уравнением неразрывности (сплошности). Оно является следствием более общего уравнения неразрывности для сжимаемой жидкости

(1.2)

в предположении постоянства плотности ρ (последнее играет роль уравнения состояния для несжимаемой жидкости). В связи с этим второе уравнение в системе (1.1) называют также уравнением несжимаемости

Предположение о несжимаемости жидкости в этой форме приводит к существенным особенностям системы (1.1). В частности, давление из этой системы определяется с точностью до некоторой произвольной постоянной

Система (1.1) позволяет при заданных в некоторый момент времени значениях полей искоемых функций \mathbf{u} и p и соответствующих граничных условиях определить значение полей этих функций в некоторый момент времени t , где $t > t_0$. Движение жидкости, описываемое этой системой, осуществляется либо благодаря действию массовых сил, либо действию внешних сил, создающих перепад давления

. Последнее формально проявляется при постановке соответствующих граничных условий.

Обсудим более подробно вопрос о граничных условиях. При этом мы будем рассматривать класс двумерных движений в декартовой системе координат x, y , являющийся одним из частных случаев и задаваемый уравнениями

(1.3)

(1.4)

(1.5)

Здесь u, v - компоненты вектора скорости.

В зависимости от конкретной физической ситуации различаются следующие виды граничных условий:

1. Граничные условия на непроницаемой твердой поверхности $y=0$, называемые обычно условиями “прилипания”. Обозначим скорость движения поверхности U . Тогда граничное условие на этой поверхности имеет вид

(1.6)

Наиболее часто в различных приложениях встречается обтекание неподвижной твердой стенки, когда $U=0$.

2. Граничное условие вдали от обтекаемого тела, имеющее асимптотический характер:

при $y \rightarrow \infty$ (1.7)

где r - расстояние от поверхности обтекаемого тела. Несмотря на сравнительно простой вид условия, его достаточно точная численная реализация, осуществляемая обычно в области конечных размеров, связана со многими трудностями.

3. Периодические граничные условия, представляющие специальный тип граничных условий, которые обычно ставятся при обтекании бесконечной последовательности повторяющихся тел. При этом параметры потока перед телом равны параметрам потока в следе за телом:

(1.8)

В ряде теоретических исследований эти граничные условия используются как способ ограничения рассматриваемой области течения. С физической точки зрения этот тип граничных условий имеет для задач обтекания искусственный характер.

4. Условия симметрии, так же как периодические условия, представляющие специальный тип граничных условий, возникающих вследствие определенных предположений о свойствах симметрии течения. Например, при обтекании симметричного профиля равномерным потоком под нулевым углом атаки естественным граничным условием являются следующие условия на оси симметрии:

$$(1.9)$$

где v_n - составляющая скорости по нормали к оси симметрии; θ - направление, нормальное к оси симметрии. В определенном диапазоне режимных параметров (в первую очередь при малых значениях числа Рейнольдса) эти условия могут соответствовать реально наблюдаемым течениям, однако во многих случаях их постановка существенно сужает класс возможных движений и взаимодействий так же, как и постановка условий.

5. Граничные условия на поверхности раздела двух сред в случае, когда эта поверхность фиксирована и трением в одной из сред можно пренебречь (например поверхность жидкость - газ), имеющие вид

$$(1.10)$$

что аналогично условиям симметрии (1.9). Условие (1.10), в отличие от условий прилипания (1.6), допускает движение жидкости вдоль поверхности и позволяет совместно с решением системы (1.3) - (1.5) определить скорость этого движения.

Отметим, что в точной математической постановке задачи при записи исходных уравнений в форме (1.3) - (1.5) в рассмотренных выше случаях не требуется задания граничных условий для давления.

Уравнения вместе с начальными условиями

для полей скорости и давления и соответствующими граничными условиями представляют замкнутую систему, позволяющую определить поля скорости и давления однородной несжимаемой вязкой жидкости и их изменение во времени. Однако система уравнений с уравнением неразрывности в форме неудобна для проведения вычислений и может быть заменена эквивалентной системой. Для этого, например, можно продифференцировать уравнение по x и y , а результаты сложить, используя при последующих преобразованиях уравнение. Тогда получим

$$(1.11)$$

Система уравнений представляет одну из разновидностей уравнений Навье - Стокса в переменных скорость, давление, используемую в вычислительной практике. В этом случае граничные условия для давления, необходимые для проведения расчетов, могут быть получены из уравнений количества движения при использовании рассмотренных выше граничных условий для поля скорости. Например, на твердой неподвижной стенке

граничное условие для давления имеет вид

Ниже мы рассмотрим и другие формы записи исходных уравнений.

При выполнении вычислений обычно используется безразмерная форма записи исходных уравнений, начальных и граничных условий. Введем безразмерную величину в виде $\tilde{x} = x/L$, где L - некоторый масштаб. Безразмерная запись может быть получена подстановкой в уравнения, начальные и граничные условия вместо размерной величины

ее выражения в виде $\tilde{u} = u/U$. Выбор масштабов зависит от конкретной постановки задачи. Пусть, например, условиями задачи заданы характерная скорость U и размер области L . Течения с заданной характерной скоростью (расходом) или перепадом давления называются *вынужденной конвекцией*. Выбирая в качестве масштабов скорости и длины соответственно U и L , а для параметров μ , ρ , γ - их значения, заданные условиями задачи, можно получить, выполняя указанные выше операции, следующую безразмерную запись исходной системы:

В этой системе имеются два безразмерных параметра, построенные по величинам, выбранным в качестве масштабов:

- число Рейнольдса, представляющее отношение сил инерции к силам вязкости и определяющее интенсивность вынужденной конвекции;

- критерий подобия, представляющий отношение массовых сил к силам инерции, где Fr - число Фруда. Заметим, что для времени и давления в системе использованы масштабы в виде L/U и $\rho L^2/U$ соответственно. Использование безразмерной системы преследует две цели: приведение значений вычисляемых величин к соответствующей шкале, а также расчет и обработка результатов в общей критериальной форме, содержащей минимальное число параметров. Эти цели могут достигаться соответствующим выбором масштабов.

1.2. Переменные функции тока и вихря

Уравнения могут быть записаны в иной форме, не содержащей давления и в ряде случаев более удобной для численной реализации. В декартовых координатах эта система записывается в следующем безразмерном виде:

Здесь, \mathbf{r} где

Функция тока ψ и вихрь ω заданы соотношениями

(1.14)

(1.15)

При этом уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно. Связь вихря с функцией тока ψ в виде (1.13) следует из определения вихря. Уравнение для вихря можно получить из уравнений, дифференцируя первое по x , второе - по y , вычитая результаты и используя определение вихря: (1.3), (1.4).

Функция тока ψ имеет ясный физический смысл, а именно: касательная к линии определяет направление вектора скорости, а разность $\psi_2 - \psi_1$ между постоянными, соответствующими двум линиям

C_1 и C_2 , расположенным на некотором расстоянии ΔC , определяет расход жидкости через это сечение.

Граничные условия для системы следуют из их аналогов для системы. В частности, на неподвижной твердой стенке имеем, учитывая (1.14),

(1.16)

Так как значение функции тока находится с точностью до постоянной, то для замкнутой односвязной области можно положить

(1.17)

Для незамкнутой (многосвязной) области (например течение в трубе, обтекание потоком тела в трубе) значение постоянной будет различным на отдельных участках границы.

Особенность постановки граничных условий для системы состоит в том, что они заданы лишь для функции тока и формально не заданы для вихря непосредственно на границе области. Последнее оказывается существенным при численной реализации.

Решение системы (1.12), (1.13) определяет изменение во времени полей вихря $\omega(x, y, t)$ и функции тока $\psi(x, y, t)$, с помощью которых можно в соответствии с (1.14)

восстановить поле скорости и затем при необходимости определить поле давления, используя уравнение (1.11).

Для построения вычислительных схем в некоторых случаях используется также уравнение четвертого порядка относительно функции тока, получающееся при подстановке (1.13), (1.14) в (1.12) и имеющее вид

(1.18)

Начальные и граничные условия для этого уравнения являются следствием тех, которые ставятся для системы (1.12), (1.3).

Частному случаю стационарного “ползущего” движения при соответствует бигармоническое уравнение

(1.19)

где . Это уравнение с граничными условиями на твердой стенке (1.17) является одной из простейших математических моделей при построении численных методов уравнений Навье - Стокса для несжимаемой вязкой жидкости.

1.3. Некоторые особенности уравнений Навье - Стокса и их решений. Требования к вычислительным методам

Уравнения Навье - Стокса обладают рядом специфических особенностей, которые проявляются в численной реализации независимо от формы их записи. Одна из существенных особенностей - пространственно-эллиптический характер уравнений, обусловленный влиянием вязкости во всем поле течения. В связи с этим для решения уравнений Навье - Стокса необходимо использовать типичные для эллиптических уравнений методы решения. В отличие от уравнений пограничного слоя, при этом требуется постановка граничных условий на всех границах рассматриваемой области, которая в реальных условиях часто бывает бесконечна, но при численной реализации должна быть конечной. Это приводит в ряде задач внешнего обтекания к так называемой “проблеме замыкания”, что требует разработки приближенных асимптотических решений.

В системе уравнений Навье - Стокса имеется малый параметр при старшей производной , изменению которого соответствует существенное изменение гладкости решения. Это связано с появлением у стенок при росте числа пограничного слоя, толщина которого обычно пропорциональна величине .

Наконец, система нелинейна. Эта нелинейность, типичная для систем гидродинамического типа, обусловлена в случае несжимаемой жидкости инерционными составляющими в уравнениях количества движения. В сочетании с двумя упоминавшимися выше особенностями нелинейность уравнений Навье - Стокса приводит при достаточно больших числах Рейнольдса к образованию весьма сложных пространственно-временных структур.

В большинстве случаев для каждого типа течения в некотором диапазоне чисел существует единственное устойчивое стационарное решение уравнений Навье - Стокса, для получения которого можно использовать либо стационарные уравнения, либо нестационарные, рассматривая искомое решение как предел при (метод установления). При увеличении числа Рейнольдса стационарное решение перестает быть единственным и начинает зависеть от начальных данных. При дальнейшем увеличении числа реализуются только нестационарные режимы. Решение при этом имеет не только нерегулярный характер во времени, но существенно усложняется и его пространственная структура, в частности, теряет устойчивость и дробится пограничный слой, в ядре появляются вторичные течения, и т.д. Для описания режимов такого типа стационарные уравнения Навье - Стокса недостаточны.

В экспериментах при больших числах наблюдается неупорядоченное, хаотическое движение жидкости, называемое турбулентным движением, для которого представляет интерес описание средних пространственно-временных характеристик. Переход от ламинарного режима течения в турбулентный в круглой трубе происходит при числе

(масштаб скорости - средняя во времени скорость на оси трубы, масштаб длины - радиус трубы). В технических приложениях и явлениях природы значения числа Рейнольдса достигают значительно больших величин,

поэтому турбулентные режимы имеют широкое распространение. Информация об этих режимах, по-видимому, содержится в нестационарных уравнениях Навье - Стокса. До недавнего времени численные исследования при больших были связаны лишь с изучением поведения бесконечно малых возмущений на основе линейаризованных гидродинамических уравнений (теория гидродинамической устойчивости). В последнее время для отдельных классов течений делаются попытки прямого численного моделирования переходных и турбулентных режимов на основе нестационарных уравнений Навье - Стокса.

Из сказанного следует, что требования к вычислительным методам для решения уравнений Навье - Стокса должны различаться в зависимости от рассматриваемого диапазона чисел Рейнольдса и тех целей, которые ставятся при численном моделировании.

Общие требования к вычислительным методам можно сформулировать следующим образом:

- 1). Вычислительная устойчивость.
- 2). Точность расчета основных характеристик, приемлемая для соответствующих приложений.
- 3). Экономичность; минимальный объем оперативной памяти; простота реализации.

Первое требование заключается в том, чтобы весь вычислительный процесс в целом был устойчив. Оно относится как к самой разностной схеме, так и к методу решения соответствующей системы алгебраических уравнений.

Второе требование означает необходимость высокой пространственно-временной разрешимости, которой можно в принципе достигнуть, либо применяя схемы не слишком высокого порядка точности, реализуемые на подробных пространственно-временных сетках, либо существенно повышая порядок точности схем. Для уравне-

ний Навье - Стокса особенно важным является построение разностных схем, аппроксимирующих общие нестационарные уравнения (и позволяющих в частном случае определять стационарные решения, если таковые существуют). При этом практика показывает, что для расчета весьма широкого класса течений достаточно использования схем первого порядка точности по времени. В отличие от течений невязкой жидкости, при этом характерны более высокие требования к пространственной аппроксимации решения (пограничные слои, основные и вторичные течения, и т.д.). Наиболее удобными являются разностные схемы второго порядка точности по пространственной координате на неравномерной сетке, сгущающейся в зоне больших градиентов.

Третье требование на самом деле может состоять из двух (или даже трех) требований: минимального числа операций на временном слое, минимального объема оперативной памяти ЭВМ и минимальных затрат труда программиста на реализацию программы.

Перечисленные требования в известной мере условны, так как значение каждого из них зависит от ряда дополнительных факторов, таких, например, как режим течения по числу Рейнольдса, тип ЭВМ, квалификация исполнителя, ограничения на время для получения результата, серийность расчетов, и т.д. Эти требования, кроме того, противоречивы, так как одновременное и полное их выполнение практически невозможно, что требует компромиссных решений.

Глава 2. Основные численные методы расчета течений несжимаемой жидкости

В этом разделе рассматриваются основные численные методы решения задач о течении несжимаемой жидкости в области с регулярными границами, покрытой прямоугольной конечно-разностной сеткой.

Прежде чем погрузиться в изучении деталей, частных задач, вариантов и второстепенных вопросов, стоит, вероятно, описать в общих чертах всю процедуру решения полной задачи гидродинамики. Для конкретности мы опишем вычислительный цикл только для простейшего подхода, основанного на решении нестационарных уравнений.

Исследуемая область течения покрывается конечно-разностной сеткой. Конечно-разностное решение будет определяться в узлах сетки, лежащих на пересечении линий сетки.

Решение начинается с того, что во всех узлах сетки в момент времени

ставятся начальные условия для функций u , v , p . Эти начальные условия могут соответствовать некоторой реальной начальной ситуации (если речь идет о решении нестационарной задачи) или некоторому грубому приближению к стационарному решению (если речь идет только об установившемся режиме).

Далее начинается вычислительный цикл, когда для приближенного определения во всех внутренних точках рассчитываемой области используется некоторый конечно-разностный аналог дифференциального уравнения переноса вихря (1.12). Новые значения u , v , p вычисляют на новом временном слое, соответствующем приращению

времени t ,
 продвигая уравнение переноса вихря по времени, например полагая
 $(\text{новое } \psi) = (\text{старое } \psi) + \Delta t \cdot \dots$. Следующим шагом вычислительного
 цикла является решение конечно-разностного аналога уравнения Пуассона (1.13) для
 определения новых значений функции тока ψ , причем в “источниковом” члене урав-
 нения (1.13) используются новые значения

во внутренних узлах сетки. Существенно, что уравнение Пуассона для новых
 не зависит от граничных условий для новых ψ , которые пока еще не известны.
 Обычно решение для новых ψ получается итерационным путем, так что итерацион-
 ный процесс для нахождения ψ включается в общий вычислительный цикл. Теперь,
 используя конечно-разностный аналог уравнений (1.14) в безразмерных переменных,
 находим новые составляющие скорости. Последний шаг вычислительного цикла со-
 стоит в расчете новых значений на границах рассматриваемой области. Обычно эти
 новые граничные значения ψ зависят от новых (уже вычисленных) значений ψ и
 во внутренних точках области, расположенных вблизи ее границы. Затем вычисли-
 тельный цикл повторяется до тех пор, пока не будет достигнуто заданное значение
 времени или пока решение не выйдет на стационарное с заданной степенью точности.



Схематически данная процедура изображена на с. 13. Для различных конкретных задач некоторые детали этой процедуры будут меняться, но основная схема остается неизменной.

2.1. Методы решения уравнения переноса вихря

Параболистическое уравнение переноса вихря и эллиптическое уравнение Пуассона естественно рассматривать по отдельности, так как методы их решения, очевидно, различны. Однако сразу следует заметить, что при численном решении задачи гидродинамики фактически существует обратная связь между этими уравнениями. Например, в силу того, что эти уравнения решаются циклически, увеличение допустимых временных шагов для уравнения переноса вихря должно быть компенсировано увеличением числа итераций при итерационном решении уравнения Пуассона. Неправильное обращение с граничными условиями в одном уравнении может привести к нарушению сходимости в другом.

Еще важнее то обстоятельство, что приходится явно искусственно отделять нахождение решения во внутренних точках от расчета граничных условий, так как обе эти процедуры должны выполняться совместно.

Окончательный выбор метода решения уравнения переноса вихря зависит от многих факторов. Такой выбор не всегда очевиден, и читатель должен знать, что раз навсегда установленных рекомендаций по выбору лучшего метода не существует.

2.2. Некоторые основные конечно-разностные формулы

Основные конечно-разностные формулы для частных производных могут быть получены при помощи разложения в ряды Тейлора. Используемая прямоугольная сетка показана на рис. 1.

Рис. 1. Прямоугольная конечно-разностная сетка
Нижние индексы i и j относятся к x и y , а верхний индекс

относится к временному слою. Шаги сетки в направлениях x и y обозначаются через Δx и Δy соответственно. Для несжимаемой жидкости они будут постоянными. Переменная ϕ означает какую-либо функцию.

Формы односторонних разностных представлений для первой производной можно вывести следующим образом. Мы предполагаем непрерывность производных и раскладываем ϕ в ряд Тейлора в окрестности точки (x, y) . Верхний индекс (временной) для простоты опустим. Тогда

(2.1)

Разрешая относительно $\phi_{i+1/2}$, получаем

(сокращение ЧВП означает “члены высших порядков”) или

(2.2)

где запись $\phi_{i+1/2}$ читается так: “член порядка $i+1/2$ относится к членам, содержащим множители Δx , Δy и т.д.

Обозначим конечно-разностный аналог $\phi_{i+1/2}$ через $\phi_{i+1/2}^*$. Тогда для при разностной аппроксимации вперед получаем выражение

(2.3)

с ошибкой аппроксимации порядка Δx , т.е. с первым порядком точности.

Раскладывая ϕ в окрестности точки (x, y) , получаем для выражение при разностной аппроксимации назад:

(2.4)

которое также имеет первый порядок точности. Центральная (симметричная) разностная аппроксимация $\phi_{i+1/2}$ получается как разность разложений

(2.5)

(2.6)

Вычитая из первого второе, получим

Разрешая относительно u_i имеем

(2.7)

Таким образом, центральная разностная аппроксимация дает выражение

(2.8)

с ошибкой аппроксимации порядка $O(\Delta x^2)$, т.е. со вторым порядком точности. Аналогично можно получить выражения для производных по x и по y ; например, центрально-разностный аналог $\frac{\partial u}{\partial x}$ имеет вид

(2.9)

Выведем теперь центрально-разностный аналог $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Складывая (2.5) и (2.6), имеем

Разрешая относительно u_i , получаем

(2.10)

Из (2.10) для $u_{i,j}$ имеем

(2.11)

со вторым порядком точности.

Разностные аналоги вперед и назад более высокого порядка определяются рекуррентными соотношениями

(2.12)

В качестве примера приведем конечно-разностную аппроксимацию вперед второй производной

(2.13)

аналогично для разностей назад:

(2.14)

Однако последние два аналога имеют лишь первый порядок точности. С помощью выведенных формул (2.13) и (2.14) можно вывести конечно-разностные аналоги вперед и назад производной первого порядка, использующие три точки и имеющие второй порядок точности:

Заменим вторую производную конечно-разностным аналогом вперед

(2.15)

Аналогично - “назад”:

(2.16)

Комбинация полученных конечно-разностных выражений для частных производных можно использовать для написания конечно-разностных формул дифференциальных уравнений в частных производных. Например, уравнение Лапласа

будет иметь разностный аналог

или

(2.17)

где τ - отношение размеров шагов, σ . Это так называемый пятиточечный аналог уравнения Лапласа. При $\sigma = 1$ получается известное уравнение

(2.18)

которое означает, что $u_{i,j}$ является средним значением u в четырех соседних точках. Эти формулы схематично изображены на следующем рисунке

Рис. 2. Схематичное представление пятиточечного аналога уравнения Лапласа;
. Левая схема соответствует произвольному значению , правая

Используя для аппроксимации пространственных производных и производной по времени разностные выражения второго порядка точности, линейное модельное уравнение (1.12) переписывается в виде ()

позволяющее явным образом выразить через значения переменных на предыдущих временных слоях. Однако такая схема в действительности оказывается неприемлемой. Для всех и всех возможных

эта схема численно неустойчива, т.е. приводит к возникновению хаотических решений, не имеющих отношения к решению дифференциального уравнения. Такое поведение подчеркивает различие между точными конечно-разностными аналогами для производных и точным аналогом дифференциального уравнения.

Если вместо центральных разностей в нестационарном члене использовать разности вперед по времени, то получится разностный аналог линейного модельного уравнения, имеющий второй порядок точности по пространственным переменным и только первый - по времени.

(2.20)

В дальнейшем будет показано, что эта схема устойчива (по крайней мере, при некоторых условиях, наложенных на Δt , Δx и Δy).

Существуют и другие методы получения конечно-разностных выражений: метод полиномиальной аппроксимации, интегральный метод и метод контрольного объема. Каждый из методов обладает своими достоинствами, причем последний из перечисленных является лучшим в некотором среднем смысле. Подробно эти методы рассмотрены в [2].

2.3. Исследование устойчивости

Строгое обоснование устойчивости схем для тех уравнений, которые встречаются в современных прикладных исследованиях, как правило, провести не удастся. Объясняется это следующими причинами. Для большинства нелинейных уравнений механики сплошной среды пока еще не разработана достаточно полная математическая теория, в частности, не доказаны теоремы о существовании и единственности решения и непрерывной зависимости от исходных данных задачи. Сеточные аппроксимации обычно не менее сложны для исследования, чем соответствующие дифференциальные уравнения. Более того, при переходе от дифференциальных уравнений к сеточным аппроксимациям могут утрачиваться или маскироваться фундаментальные свойства, лежащие в основе соответствующей математической теории, например свойство максимума для параболических и эллиптических уравнений.

Для исследования схем, аппроксимирующих уравнения Навье - Стокса, разработаны некоторые практические алгоритмы, позволяющие относительно легко отсеивать неустойчивые схемы. Эти приемы проверены большим опытом практических расчетов и обоснованы теоретически на некоторых достаточно общих модельных задачах.

2.3.1. Описание неустойчивости

Для ознакомления с некоторыми аспектами численной неустойчивости рассмотрим одномерное модельное линейное уравнение для u . На рис. 3(а) показано стационарное решение u на временном слое, а на рис. 3(б) - наложение на u возмущения δu , форма которого представлена на рис. 3(в). Такие возмущения могут порождаться либо машинными ошибками округления, либо поперечными движениями в реальной двумерной задаче. Используя схему с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной, проследим за развитием наложенного возмущения. Линейное модельное уравнение в консервативной форме имеет вид

а разностное - вид

(2.21)

Представим величину u как сумму стационарной компоненты u_0 и возмущения u_1 : $u = u_0 + u_1$ (2.22)

После этого уравнение (2.21) запишется так:

(2.23)

Сумма первых двух членов в правой части уравнения (2.23) представляет собой конечно-разностное значение u_0 , равное нулю в силу предположения, что на временном слое существует стационарное решение. Тогда уравнение (2.23) сводится к следующему:

(2.24)

Рис. 3. Рост ошибки при использовании конечно-разностной схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной для модельного уравнения, описывающего конвекцию и диффузию: а) - стационарное решение на n -м слое по времени; б) - возмущенное решение на n -м слое; в) - возмущение на n -м слое; г) - колебательный рост ошибки, связанный с чрезмерно большим шагом (динамическая неустойчивость); д) - монотонный рост ошибки, обусловленный применением центральных разностей для конвективного члена (статическая неустойчивость)

Первый член в правой части уравнения (2.24) дает изменение, обусловленное конвекцией, а второй - обусловленное диффузией.

Рассмотрим уравнение (2.24) только с одним диффузионным членом и оценим его в точке. Поскольку Δx , Δt и Δy , имеем

$$(2.25)$$

Значит, для всех Δx превращение Δt положительно и стремится корректировать отрицательное возмущение Δy .

Аналогично, рассматривая Δx в точке (i, j) , имеем Δt , Δy ; поэтому

$$(2.26)$$

т.е. положительное возмущение $\delta\theta$ корректируется отрицательным приращением $\delta\theta$.

Заметим, что приращение $\delta\theta$ (а также $\delta\theta$ и т.д.) пропорционально шагу Δt . Если шаг Δt слишком велик, то поправка за счет приращения $\delta\theta$ окажется чрезмерной. Для таких слишком больших Δt величина нового θ будет больше начального возмущения, как это показано на рис. 3(г):

(2.27)

и аналогично

(2.28)

Появление таких осцилляций нарастающей амплитуды, обусловленных чрезмерно большим шагом по времени, называется динамической неустойчивостью, которую можно устранить уменьшением шага по времени, сделав его меньше некоторого “критического шага по времени”.

Рассмотрим теперь уравнение (2.24) только с одним конвективным членом. Оценим это уравнение в точке θ , полагая $\delta\theta = 0$. Предположим, что возмущение колеблется по θ , а его амплитуда растет с ростом Δt . Поэтому $\delta\theta$ $\propto \Delta t$, $\delta\theta$ $\propto \Delta t$ и $\delta\theta$ $\propto \Delta t$.

(2.29)

т.е. приращение $\delta\theta$, обусловленное конвекцией, отрицательно даже при $\delta\theta > 0$.

. Это означает, что ошибка растет монотонно (см. рис. 3(д)). Появление такой нарастающей ошибки называется статической неустойчивостью, которую нельзя устранить уменьшением шага по времени и можно устранить только переходом к какой-либо другой конечно-разностной схеме.

Если пространственное направление роста θ по отношению к θ отличается от показного на рис. 3(д), т.е. если либо $\theta > 0$, либо амплитуда $\delta\theta$ уменьшается по θ , то конвективный член становится статически устойчивым, но при достаточно больших Δt еще может иметь место динамическая неустойчивость. В любой реальной задаче начальные ошибки распределены более или менее случайно, и можно быть уверенным, что в некоторый момент времени и в некоторой точке их распределение будет похоже на изображенное на рис. 3 “катастрофическое” распределение.

Если в уравнение (2.24) входят и конвективный, и диффузионный члены, то они взаимодействуют. Как мы вскоре увидим, для рассматриваемой разностной схемы возникает ограничение на Δt , обусловленное диффузионным членом, и другое ограничение на Δx , зависящее от сравнительной величины статически неустойчивого конвективного члена и статически устойчивого диффузионного члена, т.е. от числа Рейнольдса. Эти моменты станут ясны в следующем разделе.

2.3.2. Исследование устойчивости методом дискретных возмущений

Метод исследования устойчивости, который мы называем методом дискретных возмущений, представляет собой обобщение метода, впервые использованного Томом и Апельтом (1961) и развитого Томаном и Шевчиком (1966). Этот метод полностью отвечает уже данному нами описанию неустойчивости. Он прост и понятен по идее. Коротко говоря, в уравнения в некоторой точке вводится дискретное возмущение величины и прослеживается влияние этого возмущения; конечно-разностная схема будет устойчивой, если возмущения затухают.

Простоты ради сначала рассмотрим уравнение (2.21) только с диффузионным членом и предположим, что найдено стационарное решение

для всех \mathbf{x} . Введем в решение возмущение \mathbf{u} и из (2.21) по схеме с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной получим

$$(2.30)$$

или

$$(2.31)$$

$$(2.32)$$

где диффузионное число Δt определяется равенством

$$(2.33)$$

В силу требования устойчивости эти возмущения должны затухать. Для первого шага по времени это приводит к условию

$$(2.34)$$

или

(2.35)

Правое неравенство является результатом требования статической устойчивости и автоматически выполняется при положительных α , т.е. при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Левое неравенство является требованием динамической устойчивости и выполняется при $\alpha > 0$. Если, следуя Томану и Шевчику (1966), потребовать еще, чтобы численное решение моделировало физическое явление, не допуская осцилляций, обусловленных чрезмерно большим шагом по времени, т.е. чтобы

(2.36)

то получается ограничение

(2.37)

Неравенство (2.36), однако, не является условием устойчивости в смысле уменьшения амплитуды возмущения. Интересно отметить, что если рассматривать достаточно большое число слоев по времени, то потребуется выполнение неравенства (2.37). Сначала по схеме с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной (уравнение (2.21)) вычислим возмущение в соседних точках:

(2.38)

Для следующего слоя по времени получим

Снова потребуем, чтобы имело место неравенство

(2.39)

откуда получается

(2.40)

Левое неравенство выполняется всегда, в то время как правое накладывает ограничение

Таким образом, рассмотрение первого временного слоя приводит к условию , а второго - к условию . Можно рассматривать и последующие временные слои, которые приводят к еще более ограничительным условиям для . Начальное единичное возмущение в точке асимптотически стремится к осциллирующему распределению , где - некоторое возмущение меньшей амплитуды, как показано на рис. 4.

Таким образом, видно, что наиболее ограничительное условие для появляется при таком типе распределения возмущений; начиная расчет с таким осциллирующим возмущением , наложенным на , и применяя схему (2.21) с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной, получаем

2.41)

Рис. 4. Асимптотическое распределение единичного возмущения в точке для уравнения диффузии, решаемого по схеме с разностями вперед по времени и с центральными разностями по пространственным переменным: а) - начальное возмущение; б) - возмущение после одного шага по времени; ; в) - возмущение после очень большого числа шагов по времени

Требование устойчивости

(2.42)

дает

(2.43)

или

(2.44)

Для последующих временных слоев условие (2.44) не меняется. Таким образом, это условие для больших значений времени эквивалентно условию (2.37) - условию отсутствия осцилляций, обусловленных чрезмерно большим шагом по времени, в случае изолированного возмущения.

Из формулы (2.33) следует, что при фиксированном шаге пространственной сетки и фиксированном условии накладывает ограничение на шаг по времени:

(2.45)

Отметим, что ограничение, накладываемое условием (2.45), является тяжелым в смысле затраты времени для численного решения уравнения диффузии. Предпопо-

жим, что расчет ведется с некоторым пространственным шагом до некоторого безразмерного времени , где

- максимально возможный шаг по времени. Если желательно повторить расчет с вдвое меньшим пространственным шагом

(например для того, чтобы контролировать уменьшение ошибок аппроксимации), то надо брать шаг по времени

. Значит, чтобы достигнуть того же значения безразмерного времени , потребуется вчетверо больше шагов по времени, т.е.

и . и кроме того, для расчета каждого временного слоя требуется вдвое больше времени, так как ,

а это означает, что число расчетных точек в исследуемой области возросло вдвое. Таким образом, для одномерного случая уменьшение вдвое шага пространственной сетки увеличивает затраты машинного времени в восемь раз!

В двумерной задаче* уменьшение вдвое шагов и увеличивает число расчетных точек в четыре раза, увеличивая тем самым необходимое машинное время в 16 раз. В трехмерной задаче диффузии уменьшение всех трех пространственных шагов вдвое увеличивает машинное время в 32 раза. В общем случае уменьшение размера шага с до при решении -мерной задачи диффузии с использованием явной схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным увеличивает машинное время в раз. Ясно, что методы, в которых удастся избежать условия устойчивости (2.45), были бы весьма желательны.

В приведенных выше рассуждениях предположение о стационарности решения несущественно. Если из возмущенного уравнения вычесть полное невозмущенное нестационарное уравнение, то получится уравнение для роста ошибки.

(2.46)

с условием устойчивости и т.д. Результаты в этом случае будут те же, что и выше.

Рассмотрим теперь уравнение (2.21) с конвективным и диффузионным членами и без потери общности положим . (Если , то изменится роль индексов и). Снова применим схему с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной, накладывая на в точке возмущение , что даст

* В двумерных и трехмерных задачах ограничения на шаг по времени имеют вид , где и соответственно.

(2.47)

Исследование этого уравнения не дает дополнительной информации по сравнению с предыдущим анализом уравнения с одним только диффузионным членом, так как на конвективных членах в точках \mathbf{x}_i не сказывается возмущение в точке \mathbf{x}_i . Применяя схему с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной в точке \mathbf{x}_i , получаем

(2.48)

или

(2.49)

где σ - число Куранта, а τ , как и ранее.
Для устойчивости опять потребуем, чтобы

(2.50)

или

(2.51)

Левое неравенство автоматически выполняется при $\sigma \leq 1$. Правое неравенство (требование статической устойчивости) дает другое необходимое условие устойчивости:

или

(2.52)

Обратившись теперь к точке , получим

(2.53)

и требование устойчивости здесь дает

(2.54)

Рассматривая сначала правое неравенство (2.54) (статистическая устойчивость), получаем

(2.55)

Если член в квадратных скобках отрицателен, то это неравенство будет справедливо для всех , если же член положителен, то получаем

(2.56)

Поскольку знаменатель положителен, условие (2.56) менее ограничительно, чем (2.52), и поэтому перекрывается им.

Исследование левого неравенства (2.54) (динамическая устойчивость) дает

(2.57)

Если член в квадратных скобках положителен, то это неравенство выполняется для всех , если же этот член отрицателен, то получаем

(2.58)

где знаменатель положителен. Условие (2.58) также менее ограничительно, чем (2.52), и поэтому им перекрывается.

Таким образом, из анализа устойчивости уравнения, включающего конвективный и диффузионный члены, при помощи метода дискретных возмущений следуют два необходимых условия-уравнения: (2.45) и (2.52). Если распространить этот анализ на

последующие слои по времени, то могут появиться другие более ограничительные условия, но метод анализа при этом становится очень неудобным. заметим (и это будет показано ниже), что анализ устойчивости по Дж. фон Нейману дает другое условие (неравенство (2.82)).

Кроме того, если следовать работе Томана и Шевчика (1966) и дополнительно потребовать отсутствия в точке осцилляций, обусловленных чрезмерно большим шагом по времени, то должно быть

$$(2.59)$$

2.3.3. Анализ устойчивости по Дж. фон Нейману

В этом методе решение модельного уравнения предоставляется рядом Фурье с конечным числом членов и устойчивость (или неустойчивость) определяется тем, что каждое отдельное колебание затухает (или нарастает).

Рассмотрим сначала линейное модельное уравнение с одним только диффузионным членом, снова используя схему (2.21) с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной:

или

где . Каждая фурье-компонента решения записывается в виде

$$(2.64)$$

где - амплитуда отдельной компоненты с волновым числом (длина волны) на -м временном слое и . Пространственная область считается бесконечной).

Если ввести фазовый угол , то (2.64) примет вид
а уравнение (2.53) даст , (2.60)
т.е. (2.61)

или (2.61)

В уравнение переноса вихря и член представляет собой сеточное число Рейнольдса . Таким образом, есть число Рейнольдса, полученное по локальной скорости и характерной длине, равной размеру шага пространственной сетки . Для отсутствия осцилляций, обусловленных чрезмерно большим шагом по времени, требуется, чтобы (2.62) независимо от . Если требование отсутствия осцилляций (2.61) скомбинировать с

условием (2.45), накладываемым диффузией, то в результате получаются следующие ограничения: число Куранта $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2D}$ и $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{v}$.

(2.65)

Аналогично,

(2.66)

Подставляя в уравнение (2.63) выражения (2.65) и (2.66), получаем

(2.67)

или, после деления на общий множитель Δx^2 ,

(2.68)

Используем тождество

(2.69)

и определим множитель перехода Δt равенством

(2.70)

Из (2.68) для Δt имеем

(2.71)

Заметим, что $\Delta t_{\text{max}} = \frac{\Delta x^2}{2D}$, т.е. в этом случае множители перехода для различных фурье-компонент различны.

Равенство (2.70) ясно показывает, что для того чтобы решение оставалось ограниченным, для всех k должно выполняться условие

(2.72)

Это условие является критерием устойчивости для уравнения (2.63) с диффузионным членом.

Из (2.71) и (2.72) получаем условия

(2.73)

которые должны выполняться для всех возможных k , т.е. всех возможных фурье-компонент. Правое неравенство выполняется для всех k . Левое неравенство становится критическим при $k = k_c$, что накладывает на α условие устойчивости $\alpha \geq \alpha_c$ или

(2.74)

Это условие совпадает с критерием (2.45), полученным при помощи метода дискретных возмущений.

Теперь рассмотрим схему с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной для уравнения (2.21), включающего конвективный и диффузионные члены; это даст

(2.75)

Подставляя (2.65) и (2.66) и сокращая на Δt , снова получаем (2.70), но с множителем перехода θ , имеющим вид

(2.76)

Используя тождество (2.69) и тождество

(2.77)

получаем

(2.78)

В отличие от предыдущего случая уравнение, включающее конвективный и диффузионный члены, приводит к комплексному множителю перехода (2.78). Этот комплексный множитель сводится к действительному множителю θ , определенному равенством (2.70), при $\alpha \geq \alpha_c$, т.е. когда уравнение, включающее конвективный и диффузионный члены, сводится к уравнению, содержащему только диффузионный член.

Рис. 4. Годограф множителя перехода λ , записанного в виде (2.70). При $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ и $\lambda = j$ эллипс лежит внутри единичного круга, что соответствует устойчивости

Условие устойчивости в рассматриваемом случае имеет вид

$$(2.79)$$

где теперь λ - модуль комплексного множителя перехода λ , годограф которого построен на рис. 4. Уравнение (2.78) можно переписать в виде

$$(2.80)$$

что соответствует уравнению эллипса с центром в точке $\lambda = 1$ на действительной оси и с полуосями a и b . Устойчивость имеет место в том случае, когда этот эллипс целиком лежит внутри единичного круга.

Для устойчивости, очевидно, необходимо, чтобы $a < 1$ и $b < 1$. Более общее условие можно найти, используя для модуля λ следующее выражение:

$$(2.81)$$

(здесь через λ^* обозначена величина, комплексно-сопряженная λ).

Используя элементарные методы определения максимума λ в зависимости от ω , можно убедиться в том, что при

$$(2.82)$$

внутри интервала ω максимума λ не существует. Этот максимум достигается при $\omega = 0$ и просто дает условие $\lambda < 1$, которое было получено для

уравнения с одним диффузионным членом. При $\lambda \rightarrow \infty$ максимум имеет место в интервале $(0, \lambda^{-1/2})$ и всегда $\lambda^{-1/2} < \lambda^{-1}$. Следовательно, двойное неравенство является необходимым и достаточным условием для устойчивости.

Условие (2.82) можно записать в виде

$$(2.83)$$

откуда сразу следует, что при отсутствии вязкости ($\nu = 0$) схема с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной неустойчивости при всех λ .

Два условия $\lambda \Delta t < 1$ и $\lambda \Delta x < 1$ являются достаточными для устойчивости в случае линейного уравнения в бесконечной области при постоянном ν . Случай, когда ν является функцией пространственной переменной, также можно исследовать при помощи данного метода, но это трудно.

В случае более общих конечно-разностных схем, использующих не менее трех временных слоев, уравнение, соответствующее (2.70), становится матричным уравнением. Для устойчивости при этом требуется, чтобы

$\lambda \Delta t < 1$, где λ_i - все собственные значения матрицы A . Когда

λ_i - просто число, это условие эквивалентно условию (2.72).

Рассмотрим применение метода Дж. фон Неймана непосредственно для уравнения (2.20).

Выразим из (2.20) u^{n+1} на n -м временном слое.

$$(2.84)$$

Запишем каждую фурье-компоненту решения в виде

$$(2.85)$$

где u_0 является амплитудой на временном слое n -частной фурье-компоненты, имеющей в направлениях x и y волновые числа k_x и k_y (длины волн $\lambda_x = 2\pi/k_x$ и $\lambda_y = 2\pi/k_y$), а θ - фазовый угол. Вводя фазовые углы θ_x и θ_y для координат x и y , запишем выражение (2.85) в виде

$u = u_0 \exp(i(k_x x + k_y y - \omega t))$, аналогично

(2.86)

Обозначим через

перепишем (2.84) в виде

(2.87)

Подставляя в это выражение фурье-компоненты и сократив на одинаковый член , получим

отсюда

Используя формулы Эйлера:

перепишем полученное выражение в виде:

(2.88)

Таким образом пришли к виду

где

(2.89)

Равенство (2.89) показывает, что для того чтобы решение оставалось ограниченным для всех t и x должно выполняться условие

(2.90)

Это выполняется при условиях

Отсюда можно получить соотношения между шагом по пространственной переменной и шагом по времени:

или

(2.91)

То есть Δt должно быть порядка Δx^2 . Это условие достаточное для сходимости данной схемы, но в реальности часто коэффициент, который мы приняли за константу, сильно может влиять на сходимость, особенно при $\Delta x \rightarrow 0$.

2.3.4. Неявные схемы

Рассмотренная выше схема является явной, т.е. в ней для вычисления значений на $(n+1)$ -м слое по времени необходимы только известные значения на n -м, $(n-1)$ -м, ... слоях. Теперь приступим к обсуждению неявных схем, в которых в пространственных производных используются значения на $(n+1)$ -м слое по времени и поэтому для продвижения расчета нужно одновременно решать систему уравнений на $(n+1)$ -м слое.

Запишем общую схему модельного уравнения, описывающего течение невязкой жидкости, в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.92)$$

Здесь будет рассматриваться представление пространственной производной только центральными разностями, так что

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{\Delta x} \quad (2.93)$$

где слой по времени $n+1$ пока еще не определен. Аналогично, для уравнения диффузии положим

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (2.94)$$

Если пространственные производные в (2.92) или (2.94) выписать на $(n+1)$ -м слое по времени, то получится рассмотренная ранее явная схема с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной и с ошибкой порядка Δx^2 . Если же член $\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ в уравнении конвекции (2.92) записать на новом $(n+1)$ -м слое, то получится так называемая полностью неявная схема

$$\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{\Delta t} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{\Delta x} = \nu \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (2.95)$$

Ошибка при этом по-прежнему имеет порядок Δx^2 , но эта схема обладает существенным преимуществом в смысле устойчивости. Исследуя устойчивость методом Дж. фон Неймана и полагая $u_i^n = \hat{u}_i e^{ikx}$, получаем

(2.96)

(2.97)

(2.98)

(2.99)

Таким образом, для полностью неявной схемы имеем независимо от величины Δt . Данная схема абсолютно устойчива, что дает возможность вести расчеты с произвольно большим шагом по времени, а это является значительным преимуществом.

Полностью неявная схема первого порядка точности абсолютно устойчива также и для уравнения диффузии. При $\Delta t \leq \Delta x^2 / 2D$ получаем

Так как $\Delta t \leq \Delta x^2 / 2D$ для любых Δx и Δt , имеем для любых Δx или любых Δt . Заметим также, что $\Delta t \leq \Delta x^2 / 2D$ для любых Δx и Δt ; как было указано ранее, это условие отвечает случаю, когда осцилляции, обусловленные чрезмерно большим шагом по времени, отсутствуют.

Если в уравнении конвекции (2.92) величину u вычислять как среднее значение на n -м и $(n+1)$ -м слоях, то будем иметь

(2.100)

Данная схема также неявная, но поскольку осреднение центрирует пространственную производную относительно \bar{x} , ошибка имеет порядок $O(\Delta x^2)$. Множитель перехода для этой схемы тождественно равен единице, $\bar{t} = t$. Действительно,

где

тогда

и

(2.101)

Такое же усреднение по времени, примененное к уравнению диффузии (2.94), приводит к схеме, также имеющей ошибку порядка $O(\Delta t^2)$:

(2.102)

Анализ устойчивости по методу Дж. фон Неймана дает

(2.103)

Для Δt имеем $\Delta t \leq \Delta x / U$. Рассмотрим теперь случай, когда $\Delta t > \Delta x / U$. Если $\Delta t > \Delta x / U$, то $\Delta x < U \Delta t$, как это и должно быть при $\Delta t > \Delta x / U$. Если $\Delta t > \Delta x / U$, то $\Delta x < U \Delta t$. Таким образом, данная схема абсолютно устойчива и $\Delta x < U \Delta t$ для больших Δt ; но большие по величине Δt приводят к обусловленным чрезмерно большим шагом по времени осцилляциям некоторых фурье-компонент.

Один из недостатков неявных схем, применяемых к уравнению конвекции в случае невязкой жидкости, заключается в том, что они приводят к бесконечной скорости распространения возмущения. Для модельного уравнения в случае невязкой жидкости возмущение величины ϕ распространяется за время Δt на расстояние Δx . Для простой явной конечно-разностной схемы возмущение всегда распространяется за любое время Δt в соседнюю узловую точку на расстояние Δx . Но для неявной схемы, поскольку в ней все ϕ рассматриваются одновременно, возмущение распространяется на расстояние Δx (или до границ расчетной сетки). Заметим, однако, что это свойство желательно для уравнения диффузии, которое в дифференциальной форме имеет бесконечную скорость распространения возмущения.

Другим очевидным недостатком рассмотренных неявных схем является необходимость одновременного решения на новом шаге по времени алгебраических уравнений, где N - число точек ϕ по пространственной переменной, в которых решение не определяется известными граничными условиями.

Другой заслуживающий внимания подход к решению системы (1.3) - (1.5) состоит в решении уравнения четвертого порядка для единственной переменной - функции тока. Подставляя уравнение Пуассона (1.13) и выражения для составляющих скорости в уравнение переноса вихря, получаем

(2.104)

Несмотря на то, что это уравнение в принципе описывает нестационарное течение, оно обычно рассматривается в стационарной форме, когда его левая часть равна нулю. Большинство исследователей - Браиловская, Чудов, Парис и Уитекер (1965) столкнулись здесь с трудностями, связанными с граничными условиями и с малой скоростью сходимости. Пирсон (1964, 1965) выполнил расчеты в предельном случае отсутствия конвективных членов, т.е. когда для стационарного течения уравнение (2.104) сводится к уравнению

(2.105)

с простейшими граничными условиями Дирихле. Он обнаружил, что даже в этом простом случае скорость сходимости на порядок меньше, чем в случае, когда решается система двух уравнений (для функции тока и для вихря). Действительно, известно, что наиболее эффективный итерационный метод решения бигармонического уравнения (2.105), общепринятый в задачах теории упругости, заключается в разделении этого уравнения на два уравнения Пуассона, если это допускается заданными граничными условиями.

Глава 3. Методы решения уравнений для функции тока

В предыдущих разделах была рассмотрена одна из трех частей полной задачи динамики несжимаемой жидкости, а именно решение параболического уравнения переноса вихря. При этом решалась задача с начальными данными, т.е. задача “маршевого” типа по времени. Рассмотрим теперь вторую часть полной задачи, а именно методы решения эллиптического уравнения Пуассона (1.13) для функции тока :

(3.1)

Здесь имеет место краевая задача, для решения которой требуются другие методы. Мы будем рассматривать решения уравнения Пуассона с двумя типами граничных условий вдоль различных частей границы: либо с условием Дирихле, когда на границе известны значения функций , либо с условием Неймана, когда на границе известны значения нормальной производной . Именно вопрос о том, когда эти условия являются подходящими, составляет заключительную часть полной задачи и будет рассматриваться в гл. 4.

Дискретизированная форма уравнения Пуассона

(3.2)

использующая разности второго порядка, представляет собой пятиточечный шаблон

(3.3)

где известно

3.1. Прямые методы

В прямоугольной области, где и , уравнения (3.3) и граничные условия образуют в совокупности систему линейных алгебраических уравнений. Эта система является блочно-трехдиагональной, как и система, которая была получена при использовании полностью неявной схемы для решения двумерного уравнения диффузии, отличается от последней лишь наличием “источникового” неоднородного члена и также не может быть решена при помощи метода прогонки.

Наиболее элементарными методами решения такой системы являются правило Крамера и различные варианты метода исключения Гаусса. Для задач, представляющих практический интерес, весьма велико и эти методы становятся неподходящими. В правиле Крамера требуется выполнить невероятно большое число операций - приблизительно ()! умножений, и даже если имеется достаточно машинного времени, то точность решения будет фактически сведена на нет ошибками округления. Число умножений в методах Гаусса прямо пропорционально , и можно ожидать, что точность решения будет ухудшаться при , больших пятидесяти.

За последние годы были разработаны высокоэффективные прямые методы. Однако эти методы обладают одним или несколькими из следующих недостатков: ограничены прямоугольными, или -образными областями и выбором граничных условий типа ; требуют большого объема памяти ЭВМ; неприменимы в случае системы координат, отличной от декартовой; из-за накопления ошибки округления могут быть использованы лишь для областей ограниченного размера (т.е. для ограниченных значений и); накладывают ограничение на выбор узлов расчетной сетки (например и должны иметь вид , где - целое число); требуют громоздких предварительных вычислений для построения сетки; приводят к сложным программам и алгоритмам. Однако для решения больших задач все большее применение находят именно прямые методы, особенно методы, основанные на разложении в ряды Фурье.

По сравнению с прямыми методами различные итерационные методы проще с точки зрения понимания и программирования и являются достаточно гибкими. Скорость сходимости в таких методах существенно больше скорости сходимости в старых прямых методах.

3.2. Метод Рундсона и метод Либмана

Как обсуждалось ранее, решение (стационарных) уравнений эллиптического типа аналогично получению асимптотически стационарного решения нестационарной задачи. Предположим, что рассматривается нестационарное уравнение диффузии для с “источниковым членом” и с коэффициентом диффузии, равным единице:

$$(3.4)$$

Физический смысл нестационарного решения здесь не играет роли, но когда решение такого уравнения диффузии приближается к стационарному, оно стремится к интересующему нас решению Пуассона (3.2).

В некоторых случаях такая аналогия выполняется точно. Для того чтобы продемонстрировать подобную эквивалентность, выведем итерационный метод Рундсона для эллиптического уравнения Пуассона из нестационарной схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным для уравнения диффузии параболического типа.

Применяя к уравнению (3.4) разностную схему с разностями вперед по времени и с центральными разностями по пространственным переменным, получаем

(3.5)

Для простоты временно ограничимся случаем, когда
и уравнение (3.5) принимает следующий вид:

(3.6)

Покажем сначала, что не оказывает влияния на устойчивость уравнения (3.6). Далее будем рассматривать граничные условия Дирихле и обозначим через точное конечно-разностное решение конечно-разностного уравнения Пуассона (3.2). Тогда ошибка значения после итерации будет составлять

(3.7)

Подставляя полученное отсюда выражение для в уравнение (3.2), будем иметь

(3.8)

Так как в точности удовлетворяет уравнению (3.2), уравнение (3.8) сводится к уравнению Лапласа

(3.9)

Поскольку граничные условия заданы, на всех границах , или . Тогда аналогично итерационному конечно-разностному уравнению (3.8) можно записать для ошибки следующее уравнение:

(3.10)

Таким образом, итерационное уравнение (3.8) для эквивалентно итерационному уравнению (3.10) для , причем последнее, очевидно, не зависит от .

Условие устойчивости уравнения (3.8) или (3.10) имеет вид
или при , . Поскольку желательно

достичь асимптотического решения как можно скорее, выберем максимально возможное значение α . Подстановка этого значения в уравнение (3.8) дает

$$(3.11)$$

Приводя подобные члены, содержащие α , получаем

$$(3.12)$$

Этот алгоритм представляет собой метод Ричардсона при $\alpha = 1/4$. В частном случае для уравнения Лапласа (3.1) он сводится просто к требованию, чтобы значение $u_{i,j}$ на новой итерации равнялось среднему арифметическому значению в четырех соседних точках.

Уравнение (3.12) представляет собой тот же результат, который можно получить, разрешая стационарное уравнение (3.3) эллиптического типа относительно $u_{i,j}$, при условии, что этот член в левой части уравнения берется на итерации n , а все члены в правой части берутся на итерации $n-1$. Введем величину отношения размеров шагов сетки $h_x/h_y = \gamma$; тогда

$$(3.13)$$

Этот алгоритм представляет собой метод Ричардсона при $\alpha = 1/(1+\gamma^2)$.

Исследование скорости сходимости методов можно привести так же, как и исследование устойчивости для уравнения переноса вихря, подставляя в уравнение для ошибки (3.10)

$$(3.14)$$

или раскладывая оператор Лапласа в дискретизированной форме по его собственным функциям; результаты оказываются идентичными при условии, что граничные условия правильно учтены.

Компоненты ошибки с наибольшей и наименьшей длинами волн затухают наиболее слабо (т.е. имеют наибольшую величину ρ). Таким образом, независимо от начального распределения ошибки по

данные компоненты будут доминировать при асимптотически больших n . Обе эти компоненты имеют одну и ту же величину $\frac{1}{2}$, но коротковолновая компонента ошибки ($\frac{1}{2}$) совершает знакопеременные колебания при n , что в некотором смысле оптимально.

Уравнение (3.13) является двухслойным уравнением, и в памяти вычислительной машины необходимо хранить массивы для величин u_i и v_i . Если обход расчетных точек вести в направлении возрастания i и j в уравнении (3.13) использовать, где это возможно, уже полученные новые значения u_i и v_i , то получится следующая схема:

$$(3.15)$$

которая называется методом Либмана. При программировании этого метода достаточно в памяти хранить лишь один массив для величины u_i в уравнении (3.15), предусмотрев в программе оператор замещения. Кроме того, Франкел (1950) показал, что для наиболее “стойких” компонент ошибки с большими и малыми волновыми числами в методах Либмана и Ричардсона имеет место соотношение

$$(\text{Либман}) = \frac{1}{2} (\text{Ричардсон}) \quad (3.16)$$

Асимптотически при достаточно большом числе итераций итераций по методу Либмана эквивалент $\frac{1}{2}$ итерациям по методу Ричардсона; кроме того в методе Либмана требуется вдвое меньший объем памяти.

3.3. Метод последовательной верхней релаксации

Практика показала, что для достижения наибольшей скорости сходимости нужно устранять не наибольшую невязку ϵ , а ту невязку ϵ , для ликвидации которой требуется наибольшее “смещение”

Δu_i . Такой прием, очевидно, может быть применен только достаточно квалифицированным вычислителем, который может быстро приближенно вычислить максимальное смещение при визуальном переборе невязок. Затем был развит другой подход. Было обнаружено, что оптимальная скорость сходимости достигается не приравниванием невязок нулю, а использованием “верхней” или “нижней” релаксации в зависимости от того, какие знаки имеют невязки в соседних точках: одинаковые или противоположные.

Сложив уравнение (3.15) и тождество
а затем перегруппировав члены, получим

(3.17)

Теперь при приближении к решению для всех
член в квадратных скобках становится равным нулю в силу уравнения (3.3), а уравнение (3.7) переходит в отвечающее сходимости равенство
. Если положить, что член в квадратных скобках равен нулю и что в точке (,) , то получится метод Либмана. В методе последовательной верхней релаксации член в квадратных скобках в уравнении умножается на релаксационный множитель (параметр релаксации) , где ; таким образом, в общем случае невязка
, но при . Метод последовательной верхней релаксации приводит к уравнениям

(3.18)

Для сходимости требуется, чтобы Франкел и Янг определили “оптимальное” значение параметра , причем их критерий оптимальности основывался на асимптотическом уменьшении наиболее стойкой ошибки. Оптимальное значение зависит от сетки, конфигурации области и типа граничных условий. Используя подход Франкела для решения задачи Дирихле в прямоугольной области размером с постоянными и , можно показать, что

(3.19)

где

(3.20)

При $\frac{1}{2}$ число итераций $\frac{1}{2}$, необходимое для уменьшения невязки до некоторого заданного уровня, прямо пропорционально полному числу итерируемых уравнений N , тогда как для метода Либмана $\frac{1}{2}$. Поэтому метод последовательной верхней релаксации с оптимальным параметром релаксации (иногда называемый оптимальным методом верхней релаксации) лучше для больших задач.

Аналитическая оценка величины $\frac{1}{2}$ имеется только для довольно узкого класса задач.

Глава 4. Граничные условия для уравнения переноса вихря и устранения для функции тока

В своей книге [1] П. Роуч писал: “Нетрудно представить себе некоторые типы правдоподобных граничных условий для ψ и ω , но попытки определить реальные точные условия, приводящие к устойчивым решениям, могут оказаться весьма неудачными. Было обнаружено, что адекватность любого граничного условия, определенного при помощи численных экспериментов, может зависеть от числа Рейнольдса, разностных схем, используемых во внутренних точках, других граничных условий, а иногда и от начальных условий. Многочисленность этих факторов затрудняет аналитические исследования и ограничивает их применимость”.

Для многих задач отсутствуют математически строгие решения. Наши выводы в основном будут базироваться на интуиции, на экспериментах в аэродинамических трубах и на численных экспериментах. Большинство численных экспериментов по исследованию граничных условий осуществлялось при помощи простых двухслойных явных схем для уравнения переноса вихря. Заметим, что известно несколько случаев, когда те же граничные условия, взятые в иных схемах, приводят к неустойчивости. (Термин “неустойчивость” используется здесь в смысле отсутствия итераций, а не в смысле экспоненциального роста ошибки.) Эти примеры могут послужить предостережением от применения таких существенно частных методов. В данной связи мы предполагаем на начальном этапе построения вычислительного алгоритма и отладки программы и выяснения устойчивости схемы, применяемой во внутренних точках, брать граничные условия, которые имеют наинизший порядок и являются наиболее ограничительными. Затем можно будет попробовать граничные условия, накладывающие меньшие ограничения.

Большинство задаваемых граничных условий являются и условиями типа Дирихле (задано значение функции), или условиями типа Неймана (задан градиент функции по нормали к границе). До настоящего времени гидродинамические задачи с условием смешанного типа (условие Роббина), где задана линейная комбинация значений функции нормальной производной, при численной реализации встречаются существенные трудности.

4.1. О первостепенной важности численных граничных условий

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

определяет решение задачи с точностью до аддитивной постоянной; граничное условие позволяет определить эту постоянную. Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

дает сравнительно мало информации о решении; такому дифференциальному уравнению в частных производных удовлетворяет любая функция, и граничные условия должны определить эту функцию. Дифференциальное уравнение действительно дает очень мало информации о функции. Все многообразие течений как газов, так и жидкостей описывается решениями одних и тех же дифференциальных уравнений в частных производных уравнений Навье - Стокса. Различные течения (т.е. решения) отличаются не только граничными и начальными условиями, а также параметрами течения, такими, как число Рейнольдса.

Поэтому неудивительно, что задание численных граничных условий оказывает существенное влияние не только на устойчивость, но и на точность решения конечно-разностного уравнения. Следует удивляться другому: почему важность этих условий не была широко признана в течение многих лет. Ричардсон охарактеризовал важность граничных условий, но в последующие годы в большинстве работ внимание уделялось разностным схемам во внутренних точках. Одной из возможных причин этого было то, что основное внимание тогда уделялось задачам теплопроводности, в которых граничные условия, как правило, просты и однозначны.

Обсудим граничные условия на примере плоской задачи об обтекании прямоугольного обратного уступа, изображенного на рис. 5, где представлены все типы границ, присущие составленной из прямоугольников области.

Рис. 5. Границы расчетной области в задаче об обтекании обратного уступа: B1 - осевая линия (линия симметрии); B2 - наветренная часть твердой поверхности; B3 - верхняя граница; B4 - входная граница потока; B5 - основание уступа; B6 - выходная граница потока.

4.2. Стенка в расчетной сетке первого типа

Твердая стенка, обозначенная на рис. 5 через B2, соответствует наветренной части твердой поверхности, а B5 - основанию уступа. На расчетной сетке первого типа значения функций ψ и ω будут определяться в узлах, расположенных вдоль этих стенок.

Так как линия B2 - B5 - B1 является линией тока, на ней можно принять любое постоянное значение ψ (обычно полагают $\psi = 0$).

Особенно важно определить значения вихря на стенке. Уравнение (2.20) переноса вихря описывает распространение вихря за счет конвекции и диффузии, но вихрь зарождается не во внутренних точках, а на границах, где ставится условие прилипания. Именно диффузия и последующая конвекция этого возникшего на стенке вихря фактически определяет содержание задачи.

Значение вихря на стенке получается из условия прилипания. В качестве примера рассмотрим границу B2 и запишем разложение в ряд Тейлора в окрестности точки (0,0):

(4.1)

Но $\omega = 0$ в силу условия прилипания, а $\psi = 0$; кроме того, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$.
Поскольку ω (т.е. $\frac{\partial \omega}{\partial y}$) вдоль стенки,
Таким образом, $\omega = 0$. Подставляя эти выражения в (4.1) и разрешая относительно ω с учетом условия $\omega = 0$, получаем $\omega = 0$. Независимо от ориентации стенки и от значения ω на границе можно записать

(4.2)

где r - расстояние по нормали к стенке от ближайшей к стенке узловой точки до ее проекции на стенку. Это условие очень надежно и часто приводит к результатам, достаточно хорошо согласующимся с результатами, полученными при помощи форм высших порядков граничного условия для вихря; см., например, эксперименты Эша, описанные в работе Пирсона (1965).

Как было отмечено, альтернативное определение вихря в виде

не меняет форму уравнения переноса вихря. Но при этом принятый знак “войдет” в расчет переноса вихря через граничные условия, и аналогом соотношения (4.2) будет

(4.3)

Сохраняя в разложении (4.1) члены порядка $O(\Delta x^2)$, Вудс (1954) предложил формулу второго порядка точности для граничного условия для вихря на твердой стенке. Дифференцируя выражение, определяющее вихрь, получаем

(4.4)

Из уравнения неразрывности (1.2) имеем $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Учитывая это и записывая (4.4) на стенке, находим

(4.5)

Второй член $\nabla^2 \omega$ равен нулю в силу условия прилипания. Член $\nabla \cdot \mathbf{u}$ вычисляется по схеме с разностями назад, имеющей первый порядок точности:

(4.6)

Подставив это выражение для $\nabla \cdot \mathbf{u}$ в уравнение (4.1) и разрешив относительно ω , получим условие Вудса для вихря на стенке:

(4.7)

Рис. 6. Определение значения вихря на стеке, не параллельной оси x: а) - произвольный угол наклона стенки ; б) - угол наклона стенки .

Для случая наклонной стенки, проходящей по диагонали через ячейки сетки, как показано на рис. 6, значение вихря на стенке можно найти при помощи формулы первого порядка точности (4.2) следующим образом. Значения на стенке в точках , , не являющихся узлами сетки, находятся так:

$$(4.7)$$

$$(4.8)$$

где Δx - отношение шагов сетки. Аналогично вычисляются Δy и Δz . Далее интерполяцией вдоль стенки определяются значения на стенке в узлах , , . В частном случае, когда угол наклона стенки равен 45° (), для точки (), изображенной на рис. 6, получается

$$(4.9)$$

где Δx . Такой способ оказывается точнее, чем расчет по формуле

$$(4.10)$$

так как значения , входящие в выражение берутся в узлах, расположенных дальше от стенки, чем узлы, в которых берутся значения , входящие в (4.9).

Необходимо сделать замечание о возможной переопределенности граничных условий. Для простоты рассмотрим некоторое течение в замкнутой плоскости, все стенки которой неподвижны. Если стенки, параллельные оси z , непроницаемы и на них удовлетворяется условие прилипания, то на них $v_z = 0$ и $\frac{\partial v_z}{\partial n} = 0$. Записывая эти условия через функцию тока ψ , приходим к следующим соотношениям: $\psi = 0$ и $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$, откуда получаем, что (скажем, 0) вдоль стенки и по нормали к стенке. Если рассматривать одно уравнение Пуассона $\Delta \psi = -\omega$, то каждое из этих двух условий является достаточным граничным условием для нахождения решения. Очевидно, для уравнения Пуассона нельзя брать оба условия одновременно, так как это делает задачу переопределенной. Но условия недостаточно для того, чтобы определить вихрь ω на стенке; здесь, как и при выводе формул (4.2) или (4.7), необходимо также использовать условие $\psi = 0$. Поэтому за неимением иного граничного условия для вихря ω используется градиентное условие $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$, а условие $\psi = 0$ берется для уравнения Пуассона для ω . Это единственно правильное распределение данных условий.

4.3. Линия симметрии

Если центральная граница B1 на рис. 5 является разделяющей твердой пластиной, то на ней ставятся такие же граничные условия, как и на твердой стенке с условием прилипания. Если считать, что на этом рисунке представлена только верхняя полуплоскость симметричного течения около плоскостного уступа, то на прямой B1 по-прежнему необходимо поставить условие $\psi = 0$, имеющее смысл только для доктрических решений задачи о следе. В этом случае прямая B1 играет роль разделяющей пластины с условием скольжения, а граничное условие для вихря имеет очень простой вид. На всей центральной линии $\omega = 0$, и поэтому $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$. Далее, поскольку скорость v_z симметрична относительно центральной линии, здесь $\frac{\partial v_z}{\partial n} = 0$. Таким образом,

$$(4.11)$$

Наряду с условием $\psi = 0$ нельзя использовать условия симметрии для производных от ψ , так как это переопределило бы задачу для уравнения Пуассона.

В случае асимметричного течения в цилиндрической системе координат имеем и условие (4.11) по-прежнему выполняется. Но уравнение в этом случае удобнее записать для ω , где r - локальный радиус, причем на центральной линии $\omega = 0$.

4.4. Верхняя граница

Верхняя граница (граница B3 на рис. 5.1.) также представляет большой интерес при постановке задачи. Конечно, можно выбрать такие физические задачи, в которых граничные условия на верхней границе очевидны; например, в задаче о течении в несимметрично расширяющемся канале границы B3 будет твердой стенкой с условием

прилипания и на ней будут применимы формулы для расчета вихря, полученные в гл. 4.2. Величина ω на границе В3 постоянна и может быть найдена при помощи интегрирования профиля скорости u во входном сечении В4 канала. Если же рис. 5 рассматривать как нижнюю полуплоскость задачи о течении в симметричном расширяющемся канале, то в силу условий симметрии (как и в случае разделяющей пластины с условием скольжения на центральной линии в гл. 4.3.) на границе В3 будем иметь $\omega = 0$. Величина ω в этом случае также получается интегрированием профиля скорости u на границе В4. Если же условия симметрии ставятся и на В1, и на В3, то это будет соответствовать элементарной части поля течения при обтекании бесконечного ряда прямоугольных тел.

Можно добиться существенного улучшения, рассматривая границу В 3 как движущуюся стенку трубы; так делается в работах Фромма (1963) и Фромма и Харлоу (1963). В этих работах на границе ставились условия

$u = 0$ и $\omega = 0$, где u можно интерпретировать как скорость невозмущенного потока. Тогда граничные условия для системы уравнений, определяющих u и ω , будут условиями для движущейся стенки с условием прилипания на ней, т.е. $u = 0$, а ω находится по формулам

$$(4.12)$$

или

$$(4.13)$$

4.5. Условия на входной и выходной границе потока

Граничные условия на входной границе В4 (рис. 5) нельзя представить единственным образом, поскольку они будут меняться в зависимости от физических условий вверх по потоку от рассматриваемой границы и зависят решения в исследуемой области. Обычно для того, чтобы фиксировать на В4 как u так и ω при решении задачи о течении во внезапно расширяющемся канале берутся профиль скорости для полностью развитого течения Пуазейля или задают на входной границе равномерный поток со скоростью u_0 ($\omega = 0$) и ω_0 ($u = 0$).

Томан и Шевчик (1966) ставили менее жесткие условия на входной границе перед цилиндром. Они потребовали, чтобы $u = 0$, что приводит к условию

$$(4.14)$$

Это условие дает возможность находить в процессе вычислений. В постановке этих авторов на верхней границе В3 задается , также получается в результате расчета. При использовании условия (4.14) влияние вверх по потоку сказывается даже на входной границе.

При изучении задач, подобных задаче о течении около обратного уступа (рис. 5), влияние вязкости важно на входной границе, поэтому желательно фиксировать , а дать возможность развиваться свободно. Роуч и Мюллер (1970) задавали при помощи решения уравнений пограничного слоя, фиксируя таким образом . Это также означает, что фиксировалась производная

, являющаяся первым членом в выражении для вихря . Второй член также можно было задать при помощи решения для пограничного слоя, но вместо этого авторы брали менее жесткое условие. Оказалось, что лучше всего получать эту величину из условия

$$(4.15)$$

откуда

$$(4.16)$$

или окончательно

$$(4.17)$$

Таким образом, на входной границе потока фиксируются и , в то время как величина находится по значению на входе и при помощи уравнения (4.17).

Определение значений и на выходной границе В6 (рис. 5) является одной из наиболее интересных задач о вычислительных граничных условиях. Необходимо каким-то образом пренебречь деталями течения далеко вниз по потоку и при этом обеспечить получение реального решения в области вверх по границе В 6. Опыт проведения расчетов [1] показал, что неустойчивость, зарождающаяся на входной границе, может распространяться и вверх по потоку и искажать решение в интересующей нас области. Таким образом, цель заключается в постановке условий, дающих максимально допустимую свободу потока на границе В 6 и в то же время обеспечивающих решение задачи. Наиболее надежный с точки зрения устойчивости способ основан на полном задании условий на выходной границе или полагая , , или для течений с малыми числами берутся решения Стокса для плоских течений между двумя бесконечными пластинами. Общая идея постановки граничных ус-

ловий, отвечающих бесконечности на наиболее удаленной границе разностной сетки, была предложена Ричардсоном. Заметим, что асимптотическое решение, используемое в качестве граничного условия, должно рассматриваться в переменных задачи: например, если исходные конечно-разностные уравнения записаны в переменных (x, y) , то и решение Пуазейля должно быть записано в переменных (x, y) .

Вместо того чтобы ставить граничное условие вниз по потоку, соответствующее “бесконечности”, можно использовать асимптотические решения, применяемые на достаточно больших, но конечных расстояниях.

Приложение

В качестве примеров расчета течения вязкой нестекаемой жидкости рассмотрены два примера, цель которых - иллюстрировать рассмотренные выше идеи. Кроме того, существенный интерес вызывает наглядное графическое представление результатов расчетов. Некоторые идеи по организации этого процесса также приведены в разделах 5.1 и 5.2.

Задача о течении в прямоугольной каверне с движущейся верхней крышкой

Рассматривается установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной каверне с движущейся верхней крышкой. Результаты для этой задачи были известны, и она использовалась в качестве тестовой для обработки вычислительных схем и построенного алгоритма. На стенках поставим граничные условия прилипания, $u = 0$ и $v = 0$.
Теперь выведем формулы для аппроксимации граничных условий.

Рис. 7. Прямоугольная каверна с движущейся верхней крышкой

Расположим оси координат так, как показано на рис. 7. Стенки, в том числе и движущаяся крышка, твердые. Крышка движется в направлении возрастания x . Расчетную сетку введем так же, как показано на рисунке, а именно: первый индекс отвечает за движение по расчетной сетке в направлении x , а второй - y в направлении y . Скорость движения крышки равна U . На расчетной сетке значения

функций

и будут определяться в узлах, расположенных вдоль этих стенок.

Так как линия В4 - В3 - В2 является линией тока, то на ней можно принять любое постоянное значение (например).

Особенно важно определить значения вихря на стенке. Уравнение (2.12) переноса вихря описывает распространение вихря за счет конвекции и диффузии, но вихрь зарождается не во внутренних точках, а на границах, где ставится условие прилипания. Именно диффузия и последующая конвекция этого возникшего на стенке вихря фактически определяют содержание задачи.

Значение вихря на стенке получается из условия прилипания. В качестве примера рассмотрим границу В3 и запишем разложение в ряд Тейлора в окрестности точки ():

(5.1)

Но в силу условия прилипания , а

; кроме того, .

Поскольку (т.е.) вдоль стенки, .

Таким образом, . Подставляя эти выражения в (5.1) и разрешая относительно с учетом условия

, получаем .

Аналогично рассуждая для стенок В2 и В4, получим .

Вообще, независимо от ориентации стенки и от значения на границе, можно записать:

(5.2)

где - расстояние по нормали к стенке от ближайшей к стенке узловой точки до ее проекции на стенку.

Выведем граничное условие для твердой стенки второго порядка. Сохраняя в разложении (5.1.) члены порядка , получим

(5.3)

Дифференцируя выражение, определяющее вихрь, получаем

(5.4)

Из уравнения неразрывности (1.5) имеем
Учитывая это и записывая (5.4) на стенке, находим

(5.5)

Второй член равен нулю в силу условия прилипания
. Член вычисляется по схеме разностями назад, имеющей первый порядок точности.

(5.6)

Подставив это выражение в уравнение (5.3) и разрешив относительно , получим условие Будса для вихря на стенке:

(5.7)

Применяя это условие, автор получал почти аналогичные результаты.

Рассмотрим теперь границу В1, которая является движущейся крышкой. Так как на крышке действует условие прилипания, то можно принять условие ; в выражении для вихря член на стенке, поэтому можно записать

(5.8)

а выражение для скорости , для внутренних точек

(5.9)

Таким образом, мы полностью определили задачу для вычисления функций вихря и тока в каверне с движущейся верхней крышкой. Программа, реализующая данный алгоритм решения, и анализ результатов будут приведены далее.

Задачи о движении жидкости в канале, имеющем различную прямоугольную геометрию границ

Рассмотрим теперь задачу с качественно отличными границами - задачу об обтекании прямого уступа.

Так как граница B4 - B5 - B6 является линией тока и твердой стенкой, то на ней можно поставить условие прилипания аналогично условиям (5.2.) или (5.7).

Рассмотрим верхнюю границу B1. Будем ее рассматривать как движущуюся стенку со скоростью U_1 . На границе поставим $\psi = 0$, а $\omega = U_1$, где U_1 можно интерпретировать как скорость невозмущенного потока. Тогда граничные условия для системы уравнений, определяющих ψ и ω , будут условиями для движущейся стенки с условием прилипания на ней, т.е. $\psi = 0$; а определяется по формулам

(5.9)

или

(5.10)

которые получаются из выражения (5.1) аналогично (5.20 и (5.7) при условии, что

Теперь поставим граничные условия на входной границе потока. Граничные условия на границе B2 (рис. 8) нельзя представить единственным образом, поскольку они будут меняться в зависимости от физических условий вверх по течению от рассматриваемой границы и зависят от решения в исследуемой области.

Рис. 8. Границы расчетной области в задаче об обтекании прямого уступа

Потребуем, чтобы $u = 0$, а профиль v зададим формулой

(5.11)

Так как $v = 0$ то это приводит к условию

(5.12)

Поток на границе определим как невозмущенный и

Рассмотрим выходную границу потока В3. Поставим на ней условия $u = 0$ и $v = 0$. Первое из них дает

(5.13)

а второе - (т.к. $u = 0$), откуда линейная интерполяция при постоянном шаге дает

(5.14)

или

Мы задали граничные условия во всех точках границы, за исключением (A_1) и (A_2). Постановка граничных условий в первой из этих точек, расположенной в вершине вогнутого уступа (рис. 8) с условием прилипания не составляет труда. Здесь ставится $u = 0$ и $v = 0$. Значение ψ в этой точке не входит даже в расчеты, но она нам понадобится для построения графиков.

Определение функции тока в угловой точке (A_2) также не составляет проблемы: как и на всей остальной части стенки $u = 0$. Однако для определения функции вихря имеется несколько возможностей. Если полагать, что угловая точка принадлежит границе В6, то

а если границе В5, то $\psi = 0$.

Возьмем второе из этих условий.

Итак, мы задали граничные условия во всех точках границы и вычислили конечно-разностные аналоги дифференциальных уравнений в частных производных во

внутренних точках. Следующим этапом будет написание программы для расчета на ЭВМ.

Кроме задачи с прямым уступом, автором были рассмотрены задачи с обратным уступом и с двумя уступами одновременно, а также с твердым препятствием внутри канала. Граничные условия в этих задачах ставятся аналогично вышерассмотренной, за исключением, может быть, ориентации границ. Все программы и результаты будут показаны ниже.

Критерии сходимости и начальные условия

В данном контексте термин “сходимость” употребляется в двух различных смыслах. Термин “итерационная сходимость” относится к окончательному выходу на решение конечно-разностного уравнения, рассчитываемое при помощи итераций. Этот термин означает, что достигается приемлемое решение дискретного уравнения Пуассона в пределах некоторой точности, для чего требуется выполнение в известном смысле равенства

. Он означает также, что при разрешении при помощи итераций неявного граничного условия для вихря достигается выполнение равенства . Оба эти итерационные процессы включаются в итерационный цикл, сходимость итераций в котором приводит к стационарному решению (если оно существует), когда выполняется равенство . Другое значение термина “сходимость” относится к обычно используемому математиками понятию сходимости, которую здесь мы будем называть аппроксимационной сходимостью, для чего чтобы отличать ее от итерационной. Аппроксимационная сходимость есть не что иное, как сходимость решения конечно-разностного уравнения к решению дифференциального уравнения в частных производных при

Обычно в качестве критерия итерационной сходимости, например для достижения стационарного значения , берется условие вида

$$(5.15)$$

и аналогичные условия для функции тока.

Наиболее наглядно демонстрируют поведение графики, которые будут приведены ниже.

Если для нахождения стационарного решения полной задачи о течении несжимаемой жидкости применяются нестационарные двухслойные схемы и если в итерационном процессе для нахождения и используются неявные достаточно хорошо сходящиеся методы, то начальные условия будут несущественны.

Начальные условия не оказывают обычно существенного влияния не требуемое для расчета машинное время, поскольку ошибки для выбираемого начального приближения обычно ограничены и по величине на много порядков превосходят величину, входящую в критерий сходимости.

Для лучшего понимания процесса сходимости следует помнить, что при расчете течений с большими числами Re ошибка в значении вихря в единственной узловой точке вблизи входной границы и вне пограничного слоя должна за счет конвекции уноситься из рассчитываемой области. Тогда нужное для сходимости число шагов по времени будет ограничено снизу величиной Δt , где Δt - время переноса частицы из указанного положения через всю рассчитываемую область. Это время не зависит от размера ошибки, и поэтому приближение представляет собой время, нужное для сходимости.

В качестве примера несущественности начальных условий можно рассмотреть задачу об обтекании прямого уступа. Если взять в качестве начальных условий $u=0$ во всех внутренних точках и задавая граничные условия на твердых стенках, как было рассмотрено выше, а на входе и выходе задавался треугольный профиль скорости, значение же вихря везде полагалось равным нулю. Такое начальное приближение кажется неразумным. Однако уже после первой итерации при решении уравнения Пуассона с граничными условиями на входной границе, заданными по формулам (5.2) - (5.14), всюду появилась отличная от нуля скорость конвекции. К моменту формирования вполне реальная зона возвратно-циркулярного течения, а это указывало на то, что начальное приближение оказалось лучше, чем можно было ожидать.

Поскольку данные на предыдущем слое по времени иногда могут быть очень хорошим начальным приближением для последующего слоя, точность начального условия может также оказывать существенное влияние на итерируемое решение уравнения Пуассона. Сошедшееся решение на новом слое по времени отличается от за счет источников члена S и за счет граничных условий для u . Если S достаточно мала или если сходимость по времени нестационарной задачи в целом почти достигнута, то u и v на границах. Тогда выбор решения u в качестве начального приближения будет очень эффективным.

Программа для вычисления значений функции тока и вихря в узловых точках

Для вычисления значений функции тока и вихря в узловых точках в приложении представлена программа на языке Turbo-Pascal 5.0 для ПЭВМ IBM PC-286, разработанная в дипломной работе В.Г.Вьюшина.

Рассмотрим некоторые особенности программы. Так как для вычислений необходимо брать по возможности более большие массивы, то, кроме ограничений в оперативной памяти, возникают проблемы с временем выполнения программы.

Как уже было рассмотрено при решении уравнения для функций тока использовался метод Либмана (3.13), позволяющий от “двухслойного” уравнения (3.12) перейти к схеме, которая использует лишь один массив, если предусмотреть оператор замещения, что дает выигрыш в оперативной памяти в 2 раза, и, кроме этого, значительно уменьшается количество итераций.

В программе была рассмотрена возможность такого подхода к решению и уравнения вихря (1.12). Оказалось, что этот подход дает аналогичные результаты. Кроме того, было сокращено до минимума число умножений как в основных формулах для вычислений функций тока и вихря. Так, например, в исходной формуле (2.84) имеется 14 умножений и 3 деления. Приведя подобные члены и предусмотрев операторы замещения, основная формула свелась к виду:

где лишь 5 умножений, так и во всех вычислениях. Эти, казалось бы, простые преобразования привели к убыстрению вычислений в 2 - 3 раза. Блок-схема данной программы и ее текст будут приведены ниже.

Кроме того, В.Г. Вьюшиным были разработаны вспомогательные программы для наглядного вывода результатов решения на экран, а именно линейная интерполяция в вывод на экран графиков функций вихря и тока. Наибольший интерес представляют графики функций тока. Если соединить примерно одинаковые значения, то получим линии тока. А на графиках, где есть вихревые образования, наглядно видны выпуклости с выраженными и . Это значительно облегчает процесс оценки результатов, так как с большими массивами очень неудобно работать, а на графиках, даже если нет возможности вывести все точки, можно ограничиться наиболее интересующими нас “местами” в матрице результатов или выводить на экран определенное количество узлов.

Но еще более наглядным является вывод на экран дисплея плоского поля скоростей, т.е. в каждой точке вектор скорости с координатами (). Интересным является и использование цветного дисплея для вывода на экран распределения интенсивности скорости.

Некоторые распечатки результатов представлены далее. Также для более эффективного представления различных файлов данных разработана программа типа “меню”.