

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра общей математики

И. П. Иродова

СПЛАЙНЫ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебно-методическое пособие

Ярославль
ЯрГУ
2022

УДК 517.518(075.8)
ББК В161.5я73
И83

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2022 года*

Рецензенты:
кафедра общей математики
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Иродова, Ирина Павловна.

И83 Сплаины в вычислительной математике : учебно-методическое
пособие / И. П. Иродова ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль:
ЯрГУ, 2022. — 44 с.

В пособии рассматриваются задачи приближения функций сплайнами с фиксированными и свободными узлами. Аппроксимация осуществляется в пространстве непрерывных функций и в гильбертовом пространстве. Изложение материала сопровождается подробно разобранными примерами, которые помогают понять особенности описанных алгоритмов и сравнить их эффективность, и задачами для самопроверки.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по дисциплине «Сплаины в вычислительной математике».

Библиогр.: 9 назв.

УДК 517.518(075.8)
БК В161.5я73

© ЯрГУ, 2022

Оглавление

| | | |
|-----|--|----|
| 1. | Введение | 4 |
| 2. | Пространство сплайнов | 5 |
| 3. | Приближение ломаными | 6 |
| 4. | Приближение интерполяционными кубическими сплайнами дефекта 2 | 12 |
| 5. | Приближение кубическими интерполяционными сплайнами дефекта 1 | 14 |
| 6. | Приближение параболическими сплайнами | 19 |
| 7. | B -сплайны | 21 |
| 8. | Интерполяция с помощью B -сплайнов | 26 |
| 9. | Сплайны Шенберга | 29 |
| 10. | Квазинтерполяционный сплайн | 31 |
| 11. | Адаптивная аппроксимация сплайнами | 32 |

1. Введение

В настоящем пособии изложены алгоритмы, связанные с приближением функций сплайнами, которые являются удобным аппаратом для решения ряда задач вычислительной математики. Данное пособие можно считать продолжением пособия [1], где изложены методы приближения функций многочленами. Монография К. де Бора [2] и пособие Ю. А. Брудного и И. П. Иродовой [3] являются основой для написания этого пособия.

В [1] отмечалось, что приближение многочленами наряду с достоинствами имеет и существенные недостатки. Меняя аппарат приближения, мы можем существенно расширить класс приближаемых функций. Сплайны являются эффективным способом приближения. Это связано с тем, что они лучше чем многочлены приспособляются к особенностям функции, имеют хорошую сходимости, что позволяет увеличить скорость приближения не только за счёт увеличения степени сплайна (как в случае многочленов), а и за счёт увеличения узлов разбиения, что уменьшает вычислительную погрешность.

Коротко опишем содержание пособия.

Вначале даётся определение пространства сплайнов. В частных случаях мы получаем известные пространства ломаных, параболических и кубических сплайнов, которые будут более подробно изучены в следующих разделах.

Далее речь пойдёт о приближении интерполяционной ломаной в пространстве $C[a, b]$ и ломаной наилучшего приближения в пространстве $L_2[a, b]$. Выбор пространства приближения зависит от того, что известно о приближаемой функции. Если есть погрешность в исходных данных, то лучше использовать пространство $L_2[a, b]$.

В следующих двух разделах описаны алгоритмы приближения интерполяционными кубическими сплайнами дефекта 1 и дефекта 2. Особое внимание уделяется выбору граничных условий.

Далее изучается приближение параболическими сплайнами. На их примерах показывается, что правильный выбор базиса может существенно уменьшить вычислительную погрешность.

В следующих разделах даются определение и свойства B -сплайнов, показывается, как их можно использовать для решения интерполяционных задач. B -сплайны используются и в определении сплайнов Шенберга и квазиинтерполяционных сплайнов. Они дают неплохие результаты в алгоритмах приближения функций, хотя и не являются интерполяционными.

Последний раздел пособия посвящен адаптивной аппроксимации сплайнами. Это более сложный, но и более эффективный способ приближения, когда разбиение, по которому строится сплайн, заранее не фиксируется, а подбирается в зависимости от заданной функции.

В пособии отсутствуют теоретические обоснования алгоритмов, но есть ссылки на книги и статьи, где эти доказательства можно найти.

2. Пространство сплайнов

Обозначим, как обычно, через \mathcal{P}_k пространство алгебраических многочленов степени не выше k :

$$\mathcal{P}_k = \{p : p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^k, \quad a_i \in R\}.$$

Перейдем теперь к определению пространства кусочно-полиномиальных функций $\mathcal{P}_k(\Pi)$.

Для этого разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $\xi := \{x_i\}_{i=0}^n$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Точки $\xi := \{x_i\}_{i=0}^n$ будем называть узлами разбиения Π_ξ .

Определение 1. Функция $s \in \mathcal{P}_k(\Pi_\xi)$, если

$$\begin{aligned} s(x) &= p_i(x), \quad p_i \in \mathcal{P}_k \quad \text{если } x_i \leq x < x_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1; \\ s(b) &= p_{n-1}(b), \quad \text{здесь } \xi := \{x_i\}_{i=0}^n. \end{aligned}$$

Несложно проверить, что $\mathcal{P}_k(\Pi_\xi)$ является линейным пространством, причем $\dim \mathcal{P}_k(\Pi_\xi) = n \cdot (k+1)$.

Будем писать Π_n , если отрезок $[a, b]$ разбиваем на n равных частей.

Часто в практических приложениях нужно, чтобы кусочно-полиномиальная функция обладала некоторой гладкостью. Определим подпространство $S_{k\nu}(\Pi_\xi)$ пространства $\mathcal{P}_k(\Pi_\xi)$. Для этого сначала дадим определение **скачка функции** f в точке x :

$$jump_x f := f(x+0) - f(x-0).$$

Очевидно, что если функция непрерывна в точке x , то ее скачок в этой точке равен нулю.

Определение 2. Функция $s \in S_{k\nu}(\Pi_\xi)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n-1})$, если

- 1) $s \in \mathcal{P}_k(\Pi_\xi)$
- 2) $jump_{x_i} s^{(j)} = 0,$

где $j = 0, \dots, \nu_i - 1$ и $i = 1, \dots, n-1$.

Пространство $S_{k\nu}(\Pi_\xi)$ будем называть пространством сплайнов степени не выше k , подчиненных разбиению Π_ξ и имеющих гладкость $\nu_i - 1$ в каждом внутреннем узле x_i разбиения Π_ξ .

Рассмотрим частные случаи. Прежде всего заметим, что если $\nu = (0, \dots, 0)$, то $S_{k\nu}(\Pi_\xi) = \mathcal{P}_k(\Pi_\xi)$, так как в этой ситуации нет ограничения на поведение функции s в узлах разбиения Π_ξ .

Рассмотрим другой частный случай $\nu = (l, \dots, l)$, $l \geq k + 1$. Тогда $S_{k\nu} = \mathcal{P}_k$, так как в каждом узле функция s должна иметь не менее k непрерывных производных. Учтем, что s составлена из многочленов степени не выше k , а это возможно только в случае совпадения всех многочленов.

Из рассмотренных примеров становится понятно: для того, чтобы в узле был разрыв, следует брать соответствующую координату вектора ν равную нулю, а если нужно убрать узел разбиения, то соответствующая координата вектора ν должна равняться $k + 1$.

Наиболее часто используется пространство $S_{k\nu}(\Pi_\xi)$, если $\nu = (k, \dots, k)$. Будем обозначать это пространство $S_k(\Pi_\xi)$ и называть его **пространством сплайнов степени не выше k дефекта 1**. Например, $S_1(\Pi)$ – это пространство ломаных, а $S_2(\Pi)$ – пространство гладко склеенных парабол.

В общем случае если $\nu = (k - l) \cdot (1, \dots, 1)$, то $S_{k\nu}(\Pi_\xi)$ называется пространством сплайнов дефекта $l + 1$.

Задача 1. Доказать линейность пространства $S_k(\Pi)$ и найти его размерность.

Задача 2. Как можно выбрать базис в пространстве $S_1(\Pi)$?

Задача 3. Пусть $k = 2$, $x_0 = 1 < x_1 = 2 < x_2 = 3 < x_3 = 4 < x_4 = 5$, $\nu = (0, 1, 2)$. Нарисовать функцию, которая принадлежит пространству $S_{k\nu}(\Pi_\xi)$.

Задача 4. Написать программу приближения функции с точностью ε кусочно-полиномиальными функциями из пространства $\mathcal{P}_2(\Pi_n)$. Разбиение Π_n подобрать в зависимости от ε . Сравнить результаты с приближением интерполяционными многочленами r_k , где степень k увеличивается до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность.

3. Приближение ломаными

Мы рассмотрим два случая приближения ломаными: в пространстве непрерывных функций $C[a, b]$ и в пространстве $L_2[a, b]$.

Интерполяция ломаной

Пусть задано разбиение $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$ и задана функция f . Ее нужно приблизить ломаной так, чтобы узлы интерполяции совпадали с узлами разбиения. Получившуюся ломаную обозначим $l_I = l_I(f)$. Несложно проверить, что

$$l_I(x) = f(x_i) + (x - x_i)f(x_i, x_{i+1}), \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}.$$

Если f имеет две непрерывные производные, то, как известно, (см., например, [4])

$$\|f - l_I\| \leq \frac{1}{8} |\Pi_\xi|^2 \|f\|_{C[a,b]}; \quad \text{здесь} \quad |\Pi_\xi| = \max_{0 \leq i \leq n-1} |x_{i+1} - x_i|.$$

Сравним теперь точность приближения интерполяционной ломаной l_I и наилучшей ломаной $l^* = l^*(f)$ из пространства $S_1(\Pi_\xi)$

$$\|f - l^*\|_{C[a,b]} = \min_{l \in S_1(\Pi_\xi)} \|f - l\|_{C[a,b]}.$$

Так как $l_I \in S_1(\Pi_\xi)$, то $\|f - l^*\|_{C[a,b]} \leq \|f - l_I\|_{C[a,b]}$.
Докажем теперь, что

$$\|f - l_I\|_{C[a,b]} \leq 2 \|f - l^*\|_{C[a,b]}.$$

Для это введем оператор $I_1 : C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ такой, что $I_1(f) = l_I(f)$. Заметим, что I_1 является проектором на пространстве ломаных $S_1(\Pi_\xi)$, то есть $I_1(s) = s$, $s \in S_1(\Pi_\xi)$. Тогда для любой ломаной l

$$\|f - I_1(f)\| = \|(f - l) + I_1(l) - I_1(f)\| \leq \|f - l\| + \|I_1\| \|f - l\| = (1 + \|I_1\|) \|f - l\|.$$

Взяв минимум по всем l , получим

$$\|f - I_1(f)\| \leq (1 + \|I_1\|) \|f - l^*\|.$$

Несложно показать, что $\|I_1\| = 1$.

Таким образом, приближая интерполяционной ломаной, мы увеличиваем погрешность в самом худшем случае в два раза по сравнению с ломаной наилучшего приближения.

Перейдем теперь к приближению функции f ломаной в пространстве $L_2[a,b]$. В отличие от пространства $C[a,b]$ сейчас несложно найти ломаную $L_2(f)$ наилучшего приближения. Для этого воспользуемся методом наименьших квадратов. Пусть в пространстве $S_1(\Pi)$ выбран базис l_0, \dots, l_n , тогда

$$L_2(f)(x) = \sum_{i=0}^n a_i^* l_i(x).$$

Чтобы найти числа a_i^* , $i = 0, \dots, n$, нужно решить систему линейных уравнений

$$G \cdot a^* = c,$$

здесь G – это матрица Грама, элементы которой $g_{ij} = (l_i, l_j)$ $i, j = 0, \dots, n$, а координаты вектора c определяются по формуле $c_i = (f, l_i)$, $i = 0, \dots, n$.

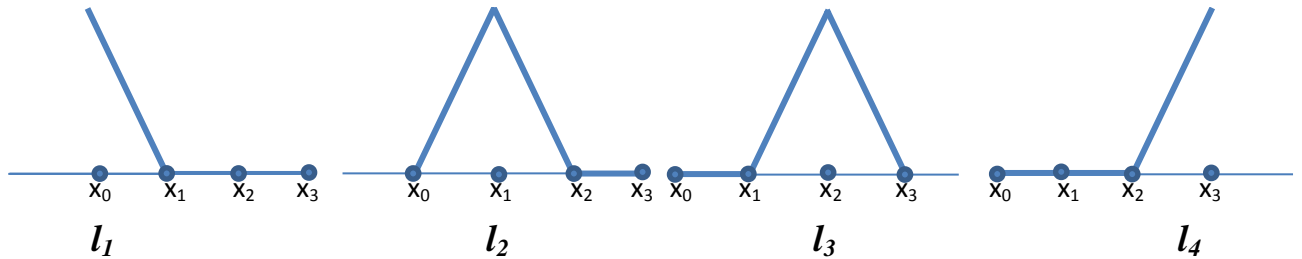
Теперь нужно выбрать базис пространства $S_1(\Pi)$. Это можно сделать разными способами, но наиболее удобным является базис из B -сплайнов. Позднее мы покажем, как базис из B -сплайнов выбрать в пространстве $S_{k\nu}(\Pi)$.

Ломаные l_i , $i = 0, \dots, n$ определяются по формуле

$$l_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i; \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}; \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

здесь $x_{-1} := x_0$; $x_{n+1} := x_n$.

Например, базис пространства $S_1(\Pi)$, где $\Pi : a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = b$, состоит из четырех функций:



Теперь нужно вычислить матрицу Грама G . Для этого найдем

$(l_i, l_j) = \int_a^b l_i(x)l_j(x)dx$. Прежде всего заметим, что $(l_i, l_j) = 0$, если $|i - j| \geq 2$, то есть матрица G симметричная и трехдиагональная. Вычислим (l_i, l_i) . Здесь нужно выделить два случая: $i = 0, n$ или $i = 1, \dots, n - 1$. Пусть $i = 0$, тогда

$$\int_a^b l_0(x)l_0(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \right)^2 dx = \frac{(x_1 - x)^3}{3(x_1 - x_0)^2} \Big|_{x_0}^{x_1} = \frac{x_1 - x_0}{3} = \frac{x_1 - x_{-1}}{3}.$$

Аналогично

$$\int_a^b l_n(x)l_n(x)dx = \frac{x_n - x_{n-1}}{3} = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{3}.$$

Если $1 \leq i \leq n - 1$, то

$$\int_a^b l_i^2(x)dx = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{3}.$$

Вычислим теперь (l_i, l_{i+1}) :

$$\begin{aligned} \int_a^b l_i(x) l_{i+1}(x) dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} l_i(x) l_{i+1}(x) dx = \\ &= \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x) d \frac{(x - x_i)^2}{2} = \frac{1}{6} (x_{i+1} - x_i). \end{aligned}$$

Итак, имеем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{6} \right) \cdot a_{i-1}^* + \left(\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{3} \right) \cdot a_i^* + \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{6} \right) \cdot a_{i+1}^* = \\ = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} l_i(x) f(x) dx, \quad i = 0, \dots, n. \end{aligned} \quad (1)$$

Полезно заметить, что G – это матрица с диагональным преобладанием. Для решения такой системы можно применить метод прогонки.

Ломаную $L_2(f)$, построенную по методу наименьших квадратов, можно применять для приближения и в пространстве $C[a, b]$.

Теорема 1. Пусть $f \in C[a, b]$, тогда

$$\|f - L_2(f)\|_{C[a,b]} \leq 4 \cdot \min_{l \in S_1(\Pi)} \|f - l\|_{C[a,b]}.$$

Доказательство. Рассмотрим оператор $L_2 : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, который каждой функции f ставит в соответствие ломаную $L_2(f)$, определяемую из системы (1). Так как L_2 – линейный оператор и $L_2(l) = l$ для $l \in S_1(\Pi)$, то

$$\|f - L_2(f)\|_{C[a,b]} \leq (1 + \|L_2\|) \cdot \min_{l \in S_1(\Pi)} \|f - l\|.$$

Оценим теперь $\|L_2\|$. Для этого заметим, что

$$\|L_2(f)\|_{C[a,b]} = \max_{i=0, \dots, n} |a_i^*| = |a_j^*|,$$

здесь a_i^* – это значения ломаной в узлах разбиения. Умножим j -е уравнение системы (1) на $\frac{6}{x_{j+1} - x_j}$, получим

$$2a_j^* = \tilde{b}_j - \frac{(x_j - x_{j-1})a_{j-1}^* + (x_{j+1} - x_j)a_{j+1}^*}{x_{j+1} - x_{j-1}}.$$

Учтем, что $|a_{j-1}^*| \leq |a_j^*|$, $|a_{j+1}^*| \leq |a_j^*|$, тогда $2|a_j^*| \leq |\tilde{b}_j| + |a_j^*|$ или

$$|a_j^*| \leq \frac{6}{x_{j+1} - x_{j-1}} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} |f(x)| l_j(x) dx.$$

Остается заметить, что $\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} l_j(x) dx = \frac{x_{j+1} - x_j}{2}$. Вместе с предыдущим неравенством отсюда следует, что

$$\|L_2(f)\|_{C[a,b]} \leq 3 \cdot \|f\|_{C[a,b]}.$$

Теорема доказана.

Пример 1. Задана функция $f(x) = x^2$ и разбиение $x_{-1} = -1$, $x_0 = -1 < x_1 = 0 < x_2 = 1 < x_3 = 3$, $x_4 = 3$. Найти ломаную $L_2(f)$.

Подставив значение узлов в систему (1), получим

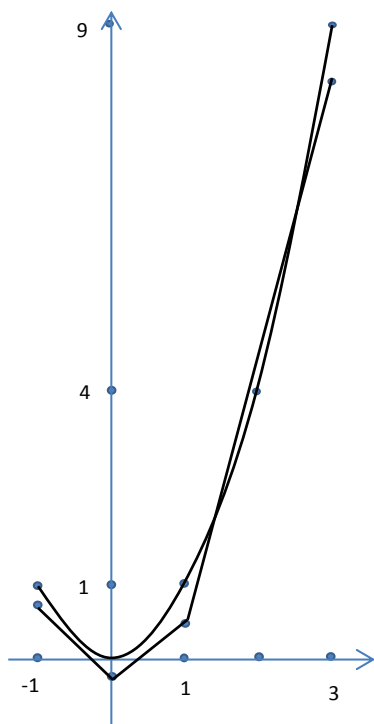
$$\begin{cases} \frac{1}{3} \cdot a_0^* + \frac{1}{6} \cdot a_1^* = c_0 \\ \frac{1}{6} \cdot a_0^* + \frac{2}{3} \cdot a_1^* + \frac{1}{6} \cdot a_2^* = c_1 \\ \frac{1}{6} \cdot a_1^* + a_2^* + \frac{1}{3} \cdot a_3^* = c_2 \\ \frac{1}{3} \cdot a_2^* + \frac{2}{3} \cdot a_3^* = c_3 \end{cases}$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \\ a_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$c_0 = - \int_{-1}^0 x^3 dx = \frac{1}{4}; \quad c_1 = \int_{-1}^0 x^2(x+1) dx + \int_0^1 x^2(1-x) dx = \frac{1}{6};$$

$$c_2 = \int_0^1 x^2 \cdot x dx + \int_1^3 \frac{x^2(3-x)}{2} dx = \frac{13}{4}; \quad c_3 = \int_1^3 x^2 \left(\frac{x-1}{2} \right) dx = \frac{17}{3}.$$



Решив систему, найдем, что

$$\begin{aligned} a_0^* &= \frac{26}{33} \approx 0.78; & a_1^* &= -\frac{5}{66} \approx -0.07; \\ a_2^* &= \frac{17}{33} \approx 0.5; & a_3^* &= \frac{272}{33} \approx 8.24. \end{aligned}$$

Графики заданной функции f и полученной ломаной $L_2(f)$ изображены на рисунке.

Задача 5. Пусть задана функция $f(x) \in S_1(\Pi_\xi)$. Случайным образом немного "испортить" эту функцию. Получившуюся функцию приблизить

- интерполяционной ломаной;
- ломаной $L_2(f)$.

Сравнить погрешности приближения.

Задача 6. Найти ломаную из пространства $S_1(\Pi_\xi)$ для функции f , используя систему (1):

а) $f(x) = |x - 2|$, $\Pi_\xi : 0 < 1 < 2 < 4$;

б) $f(x) = \sin x$, $\Pi_\xi : 0 < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} < \pi$;

в) $f(x) = \cos x$, $\Pi_\xi : -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < 0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$;

г) $f(x) = x^2 + |x - 2|$, $\Pi_\xi : 0 < 1 < 2 < 4$;

д) $f(x) = e^x + |x|$, $\Pi_\xi : -1 < 1 < 2 < 4$.

Задача 7. Написать программу приближения функции с точностью ε интерполяционными ломаными из пространства $S_1(\Pi_n)$. Разбиение Π_n подобрать в зависимости от ε .

Задача 8. Доказать, что функции $1, x - x_0, (x - x_i)_+, i = 1, \dots, n - 1$ являются базисом в пространстве $S_1(\Pi_\xi)$; здесь $x_+ = \max\{0, x\}$. Отметим, что такой базис называется **усеченным степенным**.

Задача 9. Разложить функцию $f \in S_1(\Pi_\xi)$ по степенному усеченному базису, если $\xi = (0; 1; 2; 3; 3.3; 4; 6; 7; 8)$, $f(3) = 2.1$, $f(3.3) = -2.1$, а во всех остальных узлах разбиения f принимает значение 0.1 . При вычислении брать только две значащие цифры. Используя полученное раз-

ложение, вычислить $f(7.5)$. Почему результат отличается от точного значения $f(7.5) = 0.1$? Решить эту же задачу, используя B -сплайны.

4. Приближение интерполяционными кубическими сплайнами дефекта 2

Пусть задана функция f на отрезке $[a, b]$ и задано разбиение $\Pi : x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. В узлах разбиения известны производные функции f . Требуется найти сплайн s из пространства $S_{3\nu}(\Pi)$, $\nu = (2, 2, \dots, 2)$, такой что $s(x_i) = f(x_i)$, $s'(x_i) = f'(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Сплайн, удовлетворяющий этим условиям, будем называть **сплайном Эрмита**. Итак, нам нужно построить сплайн s такой, что

- 1) $s(x) = p_i(x)$, $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $p_i \in \mathcal{P}_3$;
- 2) $s \in C^1[a, b]$;
- 3) $s(x_i) = f(x_i)$, $s'(x_i) = f'(x_i)$, $i = 0, \dots, n$.

Многочлены p_i определим из условий:

$$\begin{aligned} p_i(x_i) &= f(x_i); & p_i(x_{i+1}) &= f(x_{i+1}); \\ p'_i(x_i) &= f'(x_i); & p'_i(x_{i+1}) &= f'(x_{i+1}). \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} s(x_i + 0) &= p_i(x_i) = f(x_i); \\ s(x_i - 0) &= p_{i-1}(x_i) = f(x_i), \end{aligned}$$

то сплайн s непрерывен в точке x_i . Аналогично доказывается, что у s есть непрерывная производная.

Перейдем к нахождению многочлена p_i . Для этого воспользуемся схемой кратной интерполяции. Составим таблицу разделенных разностей.

Таблица разделенных разностей

| $\mathbf{x_i}$ | $\mathbf{f(x_i)}$ | $\mathbf{f(x_i, x_j)}$ | $\mathbf{f(x_i, x_j, x_k)}$ | $\mathbf{f(x_i, x_j, x_k, x_l)}$ |
|----------------|-----------------------|----------------------------|--|---|
| x_i | $f(x_i) \searrow$ | $f'(x_i) \searrow$ | $\frac{f(x_i, x_{i+1}) - f'(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \alpha_i \searrow$ $\frac{f'(x_{i+1}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} = \beta_i \nearrow$ | $\frac{\beta_i - \alpha_i}{x_{i+1} - x_i} = \gamma_i$ |
| x_i | $f(x_i) \swarrow$ | | | |
| x_{i+1} | $f(x_{i+1}) \swarrow$ | $f(x_i, x_{i+1}) \swarrow$ | | |
| x_{i+1} | $f(x_{i+1}) \nearrow$ | $f'(x_{i+1}) \nearrow$ | | |

Используем интерполяционную форму Ньютона:

$$p_i(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \alpha_i(x - x_i)^2 + \gamma_i(x - x_i)^2(x - x_{i+1}). \quad (2)$$

Схема построения сплайна Эрмита носит локальный характер. Это позволяет оценить погрешность на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$:

$$|p_i(x) - f(x)| \leq \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^4 \cdot \frac{\|f^{(4)}\|_{C[x_i, x_{i+1}]}}{4!}.$$

Например, если есть равномерное разбиение отрезка на n частей, то

$$\|f - s\|_{C[a, b]} = O(n^{-4})$$

для функции $f \in C^4[a, b]$.

Рассмотрим теперь случай, когда известны только значения функции f в точках x_i . Мы хотели бы использовать описанную выше схему. Для этого нужно приближенно вычислить $f'(x_i)$. Найдем многочлен p степени не выше 2, для которого $p(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$, $p(x_i) = f(x_i)$, $p(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$. Так как $p(x) \approx f(x)$, то $s_i = p'(x_i) \approx f'(x_i)$. Обозначим $s_i = p'(x_i)$.

Известно, что s_i дает порядок приближения производной $f'(x_i)$, равный $O((x_{i+1} - x_i)^2)$. Заменяя в таблице разделенных разностей $f'(x_i)$ на s_i , получим формулы для вычисления интерполяционного сплайна дефекта 2, который называют **сплайном Бесселя**.

Сплайн Бесселя хуже приближает функцию, чем сплайн Эрмита, но зато не нуждается в дополнительной информации о производной функции f .

Задача 10. Для функции f и разбиения Π найти сплайн Эрмита, используя формулы (2):

$$а) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \geq 0 \\ x, & x \leq 0; \end{cases} \quad \Pi : -2 < -1 < 1 < 2.$$

$$б) \quad f(x) = |x^2 - 1|; \quad \Pi : -2 < 0 < 2 < 3.$$

$$в) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \geq 1 \\ x^2 + 2, & x \leq 1; \end{cases} \quad \Pi : -1 < 0 < 2 < 4.$$

Построить графики функции и сплайна.

Задача 11. Для функции f и разбиения Π из предыдущего задания найти сплайн Бесселя.

Построить графики функции и сплайна и сравнить с приближением сплайном Эрмита.

Задача 12. Вывести формулу для нахождения s_i .

Задача 13. Написать программу приближения функции f на отрезке $[a, b]$ с точностью ε с помощью сплайнов Эрмита и Бесселя. Сравнить результаты работы программ.

Задача 14. Вывести формулу, выражающую s_i через значения функции f , в точках x_{i-1}, x_i, x_{i+1} , если считать, что угол наклона касательной к f в точке x_i равен углу между секущей, проходящей через точки x_{i-1}, x_i , и секущей, проходящей через x_i, x_{i+1} .

5. Приближение кубическими интерполяционными сплайнами дефекта 1

Напомним, что кубические сплайны дефекта 1 – это кусочно-полиномиальные функции, дважды непрерывно дифференцируемые. Сохраним обозначения предыдущего раздела. Тогда условия интерполяции:

$$p_i(x_i) = f(x_i), \quad p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Условия гладкости во внутренних точках:

$$p'_i(x_i) = s_i, \quad p'_i(x_{i+1}) = s_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2.$$

Числа $\{s_i\}$ определим позднее.

Проверим, что s - непрерывно дифференцируемая функция. Действительно,

$$s'(x_i - 0) = p'_{i-1}(x_i) = s_i \quad \text{и} \quad s'(x_i + 0) = p'_i(x_i) = s_i.$$

Числа s_i определим из условий

$$p''_i(x_i) = p''_{i-1}(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (3)$$

Заменяя в таблице 1 $f'(x_i)$ на s_i , получим, что

$$p_i(x) = f(x_i) + s_i(x - x_i) + \alpha_i(x - x_i)^2 + \gamma_i(x - x_i)^2(x - x_{i+1}),$$

где $\alpha_i = \frac{a_i - s_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad \beta_i = \frac{s_{i+1} - a_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad \gamma_i = \frac{\beta_i - \alpha_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad (4)$

здесь $a_i = f(x_i, x_{i+1})$.

Вычислив $p''_i(x)$, получим

$$p''_i(x_i) = 2\alpha_i + 2\gamma_i(x_i - x_{i+1}) \quad (5)$$

и

$$p''_i(x_{i+1}) = 2\alpha_i + 4\gamma_i(x_{i+1} - x_i). \quad (6)$$

Из формул (5), (6) и условия (3) имеем

$$\alpha_i + \gamma_i(x_i - x_{i+1}) = \alpha_{i-1} + 2\gamma_{i-1}(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Остается использовать (4), и мы получим систему линейных уравнений относительно неизвестных s_i .

Особенно просто эта система выглядит, когда задано равномерное разбиение, то есть $x_{i+1} - x_i = h$. Тогда

$$s_{i-1} + 4s_i + s_{i+1} = 3(a_i + a_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (7)$$

Заметим, что полученная система имеет $n-1$ уравнений и $n+1$ неизвестных. Чтобы система имела единственное решение, нужно добавить два дополнительных условия.

Выбор граничных условий

Выбор граничных условий зависит от информации, которая известна в точках a и b (или вблизи этих точек).

1. Пусть мы знаем $f'(a)$ и $f'(b)$. Тогда $s_0 = f'(a)$ и $s_n = f'(b)$.

2. Пусть известны $f''(a)$ и $f''(b)$. Тогда $p''_0(x_0) = f''(a)$ и $p''_{n-1}(x_n) = f''(b)$.

Чтобы записать эти условия в терминах s_i , используем (5) при $i = 0$ и (6) при $i = n-1$. Получим

$$2\alpha_0 + 2\gamma_0(x_0 - x_1) = f''(a) \quad \text{и} \quad 2\alpha_{n-1} + 4\gamma_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = f''(b).$$

Из (4) окончательно имеем

$$2s_0 + s_1 = 3f(x_0, x_1) - \frac{f''(a)}{2}(x_1 - x_0),$$

$$s_{n-1} + 2s_n = 3f(x_{n-1}, x_n) + \frac{f''(b)}{2}(x_n - x_{n-1}).$$

3. Если известны значения функции f вблизи точек a и b , то можно поступить следующим образом. По a и трем ближайшим к a точкам построим интерполяционный кубический многочлен g_a . Тогда $s_0 = g'_a(a)$. Аналогично $s_n = g'_b(b)$.

4. Если нет никакой дополнительной информации, то можно применить условие "отсутствие узла". Числа s_0 и s_n выбирают так, чтобы $p_0 = p_1$ и $p_{n-2} = p_{n-1}$. В этом случае точки x_1 и x_{n-1} не будут узлами разбиений. Покажем, какие два уравнения нужно будет добавить к системе (7). Так как $p_0^{(i)}(x_1) = p_1^{(i)}(x_1)$ и $p_{n-2}^{(i)}(x_{n-1}) = p_{n-1}^{(i)}(x_{n-1})$, $i = 0, 1, 2$, то остаётся потребовать, чтобы $p_0^{(3)}(x_1) = p_1^{(3)}(x_1)$ и $p_{n-2}^{(3)}(x_{n-1}) = p_{n-1}^{(3)}(x_{n-1})$.

Из формулы (4) следует, что $p_i^{(i)}(x) = 6\gamma_i$, $i = 0, 1$, тогда получаем условия

$$\gamma_0 = \gamma_1 \quad \text{и} \quad \gamma_{n-1} = \gamma_{n-2}.$$

Итак, в терминах s_i :

$$s_0(x_2 - x_1)^2 - s_1((x_1 - x_0)^2 - (x_2 - x_1)^2) - s_2(x_1 - x_0)^2 =$$

$$= 2a_0(x_1 - x_0)^2 - 2a_1(x_1 - x_0)^2$$

и

$$s_{n-2}(x_n - x_{n-1})^2 - s_{n-1}((x_{n-1} - x_{n-2})^2 - (x_n - x_{n-1})^2) - s_n(x_{n-1} - x_{n-2})^2 =$$

$$= 2a_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2})^2 - 2a_{n-2}(x_n - x_{n-1})^2.$$

Наиболее просто эти условия выглядят в случае равномерного разбиения:

$$s_0 - s_2 = 2(a_0 - a_1) \quad \text{и} \quad s_{n-2} - s_n = 2(a_{n-2} - a_{n-1}). \quad (8)$$

Пример 2. Пусть $f(x) = x^2$, $x_0 = 0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3$. Нужно построить кубический сплайн дефекта 1, считая, что $f'(0) = 0$, $f'(3) = 6$.

Ответ в этой задаче можно написать сразу, так как функция f удовлетворяет всем условиям (напомним, что $\mathcal{P}_k \subset S_{k\nu}(\Pi_\xi)$). Тем не менее мы решим эту задачу, чтобы проверить правильность написанных формул. Такие функции полезны в качестве отладочных примеров для разработки программ.

Перейдём к решению. Так как разбиение равномерное, то система имеет вид:

$$\begin{cases} s_0 + 4s_1 + s_2 = 3(a_0 + a_1) \\ s_1 + 4s_2 + s_3 = 3(a_1 + a_2). \end{cases}$$

Учитывая, что $a_i = f(x_i, x_{i+1})$, получим $a_0 = 1$; $a_1 = 3$; $a_2 = 5$. Из условия следует, что $s_0 = f'(0) = 0$, $s_3 = f'(3) = 6$.

Решив систему, получим, что $s_2 = 4$, $s_1 = 2$. Теперь в формуле (4) подставим s_i . Получим $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 1$, $\gamma_0 = 0$, поэтому $p_0(x) = x^2$. Аналогично найдём, что $p_i(x) = x^2$, $i = 1, 2$.

Пример 3. Пусть заданы функция $f(x) = 2x^2 + |x - 1|$ и разбиение $x_0 = -1 < x_1 = 0 < x_2 = 1 < x_3 = 2$, найти интерполяционный кубический сплайн с дефекта 1. Считать, что значение $f'(2)$ известно, а второе граничное условие выбрать,

- а) используя приём "отсутствия"узла;
- б) приближённо вычислив $f'(-1)$.

Решение. Используем приём "отсутствия"узла. Из формулы (8) получим уравнение

$$s_0 - s_2 = -8. \quad (9)$$

Здесь учли, что $a_0 = f(-1, 0) = -3$; $a_1 = f(0, 1) = 1$, $a_2 = f(1, 2) = 7$. Добавив к системе (7) уравнение (9) и учитывая, что $s_3 = 9$, получим систему

$$\begin{cases} s_0 - s_2 = -8 \\ s_0 + 4s_1 + s_2 = -6 \\ s_1 + 4s_2 + 9 = 24 \end{cases}$$

Решив ее, получим $s_1 = -\frac{11}{7}$; $s_2 = \frac{29}{7}$; $s_0 = -\frac{27}{7}$. Имеем

$p_0 = 1 - \frac{11}{7}x + 2x^2 + \frac{4}{7}x^3$. Из построения следует, что $p_1(x) = p_0(x)$ (проверьте!).

Из формулы (4) получим

$$p_2(x) = 2 + \frac{29}{7}(x - 1) + \frac{20}{7}(x - 1)^2 - \frac{6}{7}(x - 1)^2(x - 2)$$

или

$$p_2(x) = \frac{17}{7} - \frac{41}{7}x + \frac{44}{7}x^2 - \frac{6}{7}x^3.$$

Для контроля полученного результата полезно проверить, что $p_2^{(i)}(1) = p_1^{(i)}(1)$, $i = 0, 1, 2$.

Итак,

$$s_1(x) = \begin{cases} 1 - \frac{11}{7}x + 2x^2 + \frac{4}{7}x^3, & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{17}{7} - \frac{41}{7}x + \frac{44}{7}x^2 - \frac{6}{7}x^3, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Перейдём теперь к нахождению сплайна s_1 , приближенно вычислив $f'(a)$.

Для этого построим многочлен \tilde{p} , выбрав, например, $x_0 = -1$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$ в качестве узлов интерполяции функции f . Заметим, что можно было выбрать любые четыре числа из области определения функции f , близкие к a . Тогда $\tilde{p}(x) = 1 - \frac{4}{3}x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$. Так как $\tilde{p}'(-1) = -\frac{13}{3}$, то $s_0 = -\frac{13}{3}$. Далее поступаем как в предыдущем примере. Решаем систему

$$\begin{cases} -\frac{13}{3} + 4s_1 + s_2 = -6 \\ s_1 + 4s_2 + 9 = 24, \end{cases}$$

и по числам $s_0 = -\frac{13}{4}$, $s_1 = \frac{13}{9}$, $s_2 = \frac{37}{9}$, $s_3 = 9$, используя формулы (4), находим p_0, p_1, p_2 .

В результате получаем

$$s_2(x) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{3}x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - \frac{13}{9}x + \frac{16}{9}x^2 + \frac{2}{3}x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{23}{9} - \frac{55}{9}x + \frac{58}{9}x^2 - \frac{8}{9}x^3, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Задача 15. Найти интерполяционный кубический сплайн дефекта 1 для функции f . Разбиение, состоящее из 4 точек, выбрать самостоятельно. Граничные условия выбрать тремя различными способами. Нарисовать графики f и найденных сплайнов s_1, s_2, s_3 . Сравнить точность приближения.

- а) $f(x) = |x(x-1)(x-2)|$; в) $f(x) = x^4 - x^2$;
б) $f(x) = x^4$; г) $f(x) = |2x-4| - |x+1|$.

Задача 16. Написать программу для нахождения интерполяционного кубического сплайна с дефекта 1 с точностью ε для заданной на отрезке $[a, b]$ функции f . Равномерное разбиение подобрать так, чтобы погрешность приближения не превосходила ε .

Задача 17. Написать программу для приближённого вычисления интеграла, используя интерполяционный кубический сплайн: $\int_a^b f(x) \approx \int_a^b s(x)dx$.

6. Приближение параболическими сплайнами

В этом разделе мы рассмотрим два способа приближения параболическими сплайнами. Первый способ будет аналогичен тому, как это было сделано в случае приближения кубическими сплайнами. Однако, как будет показано позднее, этот способ обладает существенным недостатком: небольшие локальные изменения в данных приводят к большой погрешности приближения на всём отрезке, где задана функция. Второй способ приближения более устойчив к локальным погрешностям в исходных данных, но для этого придётся взять узлы интерполяции, не совпадающие с узлами разбиения.

Перейдём к описанию первого алгоритма. Сохраним обозначения предыдущих разделов: будем приближать функцию f на отрезке $[a, b]$ параболическим сплайном s дефекта 1, у которого узлы разбиения $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ совпадают с узлами интерполяции. Так как $s(x) = p_i(x)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, то $p_i(x_i) = f(x_i)$, $p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$. Оставшийся свободный параметр зададим в виде $p_i\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = \nu_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$. Неизвестные $\{\nu_i\}$ найдём, учитывая, что сплайн s является непрерывно дифференцируемой функцией.

В случае равномерного разбиения с шагом h получим систему

$$\nu_{i+1} + \nu_i = \frac{f_{i-1} + 6f_i + f_{i+1}}{2}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (10)$$

здесь $f_i = f(x_i)$.

Эта система состоит из $n-1$ уравнений с n неизвестными. Если задать дополнительное условие, то система (10) будет иметь единственное решение. Пусть мы разными способами задали ν_1 и $\tilde{\nu}_1$. Тогда получим два параболических сплайна s и \tilde{s} . Найдём их разность $\hat{s} = s - \tilde{s}$, ($\hat{\nu}_i = \nu_i - \tilde{\nu}_i$). Из (10) имеем $\hat{\nu}_{i+1} = -\hat{\nu}_i$, откуда следует, что $\hat{\nu}_{i+1} = (-1)^i \hat{\nu}_1$, $i = 1, \dots, n-1$. Напомним, что $\hat{\nu}_1 = \nu_1 - \tilde{\nu}_1 = s\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) - \tilde{s}\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)$.

Тогда

$$p_i(x) - \tilde{p}_i(x) = (-1)^{i-1} \tilde{\nu}_1 \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1}) \cdot 4}{h^2};$$

здесь учли, что $p_i(x_j) = \tilde{p}_i(x_j)$, $j = i, i+1$.

Отсюда следует, что выбор ν_1 влияет на s на всём отрезке $[a, b]$.

Пример 4. Пусть задана функция $f(x) = |x - 2|$ на отрезке $[-2, 3]$. Нужно приблизить параболическими сплайнами s и \tilde{s} , если задано равномерное разбиение с шагом $h = 1$ и $\nu_1 = f(-1, 5)$; $\tilde{\nu}_1 = f(-1, 5) + 0, 1$.

Решение. В первом случае из системы (10) получим

$$s(x) = \begin{cases} 2 - x, & -2 \leq x \leq 2 \\ 10 - 9x + 2x^2, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Во втором случае имеем

$$\tilde{s}(x) = \begin{cases} 12 - 2, 2x - 0, 4x^2, & -2 \leq x \leq -1 \\ 2 - 72, 6x - 71, 6x^2, & -1 \leq x \leq 0 \\ 2 - 24, 6x + 23, 6x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ -93, 2 + 141, 8x - 47, 6x^2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 259, 6 - 217x + 43, 6x^2, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Если нарисовать графики f , s , \tilde{s} , то мы увидим что сплайн \tilde{s} даёт очень плохое приближение функции f .

Перейдём ко второму способу приближения. Пусть теперь $\{\tau_i\}_{i=0}^{n-1}$ – узлы интерполяции, а $\{x_i\}_{i=0}^n$ – узлы разбиения параболического сплайна. Узлы интерполяции и узлы разбиения выберем так, чтобы $\tau_i = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$, $i = 0, \dots, n-1$, а $x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{n}$. Обозначим $p_i(x) = \nu_i$, $p_i(x_{i+1}) = \nu_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$. При любом выборе чисел ν_i сплайн s является непрерывной функцией. Так как $p_i(\tau_i) = f(x_i)$, то, используя интерполяционную схему Ньютона, получим

$$p_i(x) = \nu_i + \frac{2(f_i - \nu_i)}{h}(x - x_i) + \alpha_i(x - x_i)(x - \tau_i);$$

$$\text{здесь } \alpha_i = \frac{2(\nu_{i+1} + \nu_i - 2f_i)}{h^2}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}.$$

Откуда имеем

$$p'_i(x_i) = \frac{4f_i - 3\nu_i + \nu_{i+1}}{h}, \quad p'_i(x_{i+1}) = \frac{-4f_i + \nu_i + 3\nu_{i+1}}{h}.$$

Неизвестные числа $\{\nu_i\}$ найдём из условия

$$p'_{i-1}(x_i) = p'_i(x_i).$$

Получим систему

$$\nu_{i-1} + 6\nu_i + \nu_{i+1} = 4f_{i-1} + 4f_i, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (11)$$

Для того чтобы система (11) имела единственное решение, нужно взять два дополнительных граничных условия. Это можно сделать так, как мы это делали в случае приближения кубическими сплайнами.

Задача 18. Для функции f , заданной на отрезке $[a, b]$, построить два параболических интерполяционных сплайна s, \tilde{s} дефекта 1. Узлы интерполяции выбрать совпадающими с узлами разбиения

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. В первом случае выбрать $\nu_1 = f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)$, во втором — $\tilde{\nu}_1 = f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + 0,1$. Нарисовать графики f, s, \tilde{s} и сравнить погрешности приближения.

$$a) f(x) = x^2 + 2x + 3, \quad [a, b] = [-2, 2], \quad x_{i+1} - x_i = 1;$$

$$б) f(x) = x^2 + 2|x| + 3, \quad [a, b] = [-2, 2], \quad x_{i+1} - x_i = 1;$$

$$в) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & x \geq 0, \\ 2x^2 + 2x + 1, & x \leq 0 \end{cases} \quad [a, b] = [-2, 4], \quad x_{i+1} - x_i = 2;$$

$$г) f(x) = |x + 1|, \quad [a, b] = [-2, 2], \quad x_{i+1} - x_i = 1.$$

Задача 19. Для функции f , заданной на отрезке $[a, b]$, построить параболический сплайн s вторым способом (узлы интерполяции не совпадают с узлами разбиения). Считать $\nu_0 = f(a)$, $\nu_n = f(b)$. Затем построить второй параболический сплайн \tilde{s} , считая $\tilde{\nu}_n = f(b)$, а $\tilde{\nu}_0 = \nu_0 + 0,1$. Сравнить погрешность приближений, нарисовав графики f, s, \tilde{s} . Сравнить первый и второй способы приближения. Все исходные данные взять из задачи 18.

Задача 20. Найти параболические сплайны s_a, s_b с узлами разбиения x_0, \dots, x_n и узлами интерполяции $\tau_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, $x_{i+1} - x_i = h$, которые обращаются в нуль во всех узлах интерполяции $\tau_0, \dots, \tau_{n-1}$ и $s_a(a) = 1$, а $s_b(b) = 1$. Показать, что $s_a(b) \approx 0$, $s_b(a) \approx 0$, ($n \gg 1$).

Задача 21. Пусть s и \tilde{s} — параболические сплайны, полученные из системы (11) из тех же исходных данных, но с разными дополнительными значениями ν_0, ν_n и $\tilde{\nu}_0$ и $\tilde{\nu}_n$. Доказать, что $s - \tilde{s} = \alpha s_a + \beta s_b$ и $\alpha \approx (s - \tilde{s})(a)$, $\beta \approx (s - \tilde{s})(b)$. Как из этого сделать вывод о том, что выбор ν_0 и ν_n сильно влияет на параболический сплайн s лишь в окрестности точек a и b .

7. В-сплайны

Ранее (см. определение 2 на стр. 5) мы ввели пространство $S_{k\nu}(\Pi)$. Более подробно мы изучили пространство ломаных $S_1(\Pi)$ и показали, как можно

выбрать базис, состоящий из B -сплайнов. Сейчас мы найдём базис в пространстве $S_{k\nu}(\Pi)$, состоящий из B -сплайнов.

Определение 3. Пусть $t = (t_i)_{i=1}^N$ – неубывающая последовательность узлов. B -сплайн степени не более чем k для последовательности t определяется равенством

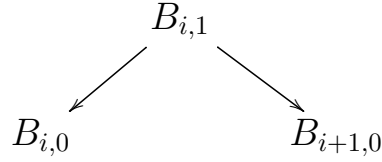
$$B_{i,k,t}(x) := \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1,t}(x) + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1,t}(x)$$

$и$

$$B_{j,0,t}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [t_j, t_{j+1}) \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (12)$$

В дальнейшем индексы k и t мы будем иногда опускать.

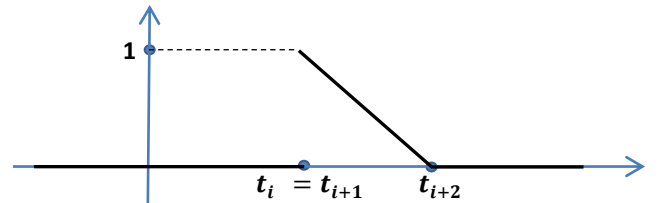
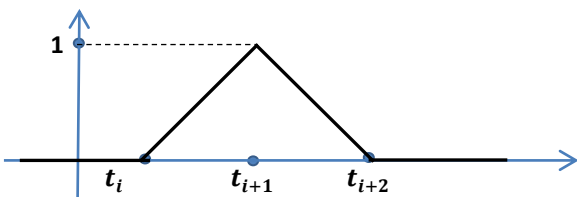
Рассмотрим некоторые примеры. Пусть $k = 1$, $t = (t_i, t_{i+1}, t_{i+2})$, $t_i < t_{i+1} < t_{i+2}$. Тогда, чтобы вычислить $B_{i,1}$, нужно знать $B_{i,0}$ и $B_{i+1,0}$:



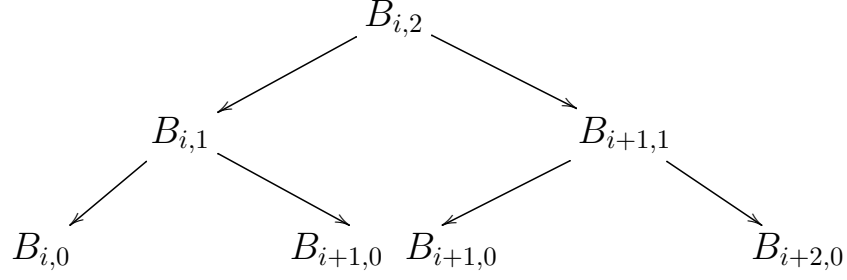
Рассмотрим два случая: $x \in [t_i, t_{i+1})$ и $x \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$. В результате из формул (12) получим $B_{i,1}$ (см. рис. ниже слева).

Пусть теперь $t_i = t_{i+1} < t_{i+2}$ (см. рис. ниже справа). Тогда $B_{i,0}(x) \equiv 0$ и

$$B_{i,1}(x) = \begin{cases} \frac{t_{i+2} - x}{t_{i+2} - t_{i+1}} & x \in [t_{i+1}, t_{i+2}), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$



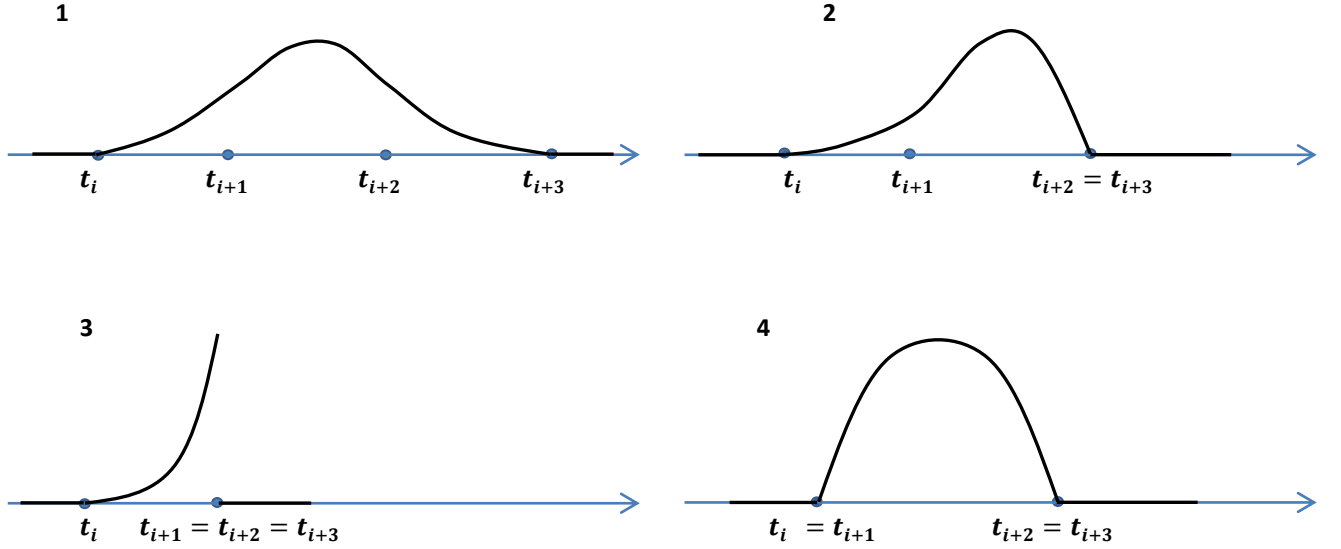
Рассмотрим случай $k = 2$. Можно нарисовать следующую схему для нахождения сплайна $B_{i,2}$:



Теперь всё зависит от выбора узлов $t = (t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3})$. Возможны такие случаи:

- 1) $t_i < t_{i+1} < t_{i+2} < t_{i+3}$;
- 2) $t_i < t_{i+1} < t_{i+2} = t_{i+3}$;
- 3) $t_i < t_{i+1} = t_{i+2} = t_{i+3}$;
- 4) $t_i = t_{i+1} < t_{i+2} = t_{i+3}$.

Графики соответствующих B -сплайнов $B_{i,2}$ см. на рисунках ниже.



Заметим, что есть зависимость гладкости сплайна в точке t_j от кратности этого узла. Если узел t_j простой (повторяется один раз), то $B_{i,2}$ в этой точке имеет непрерывную производную. Если узел t_j повторяется два раза, то сплайны $B_{i,2}$ будут непрерывными в точке t_j . Если же узел t_j повторяется три раза, то $B_{i,2}$ будет иметь разрыв в точке t_j . Итак, число условий непрерывности в t_j в сумме с числом повторений узла t_j дают 3.

Напомним теперь определение пространства $S_{k\nu}(\Pi_\xi)$. $S_{k\nu}(\Pi_\xi)$ – это пространство сплайнов s степени не более k , которое построено по разбиению Π_ξ : $x_0, x_1 < \dots, < x_n$, причём в каждой внутренней точке $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$ задано ν_i условий гладкости функции s :

$$\text{jump}_{x_i} D^j s = 0, \quad j = 0, \dots, \nu_i - 1, \quad \nu_i \leq k + 1.$$

Так как $S_{k\nu}(\Pi_\xi) \subset P_k(\Pi_\xi)$, то $\dim S_{k\nu}(\Pi_\xi) = (k+1)n - \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i$.

Сформулируем теорему (доказательство см., например, в [2]), которая помогает построить базис пространства $S_{k\nu}(\Pi_\xi)$.

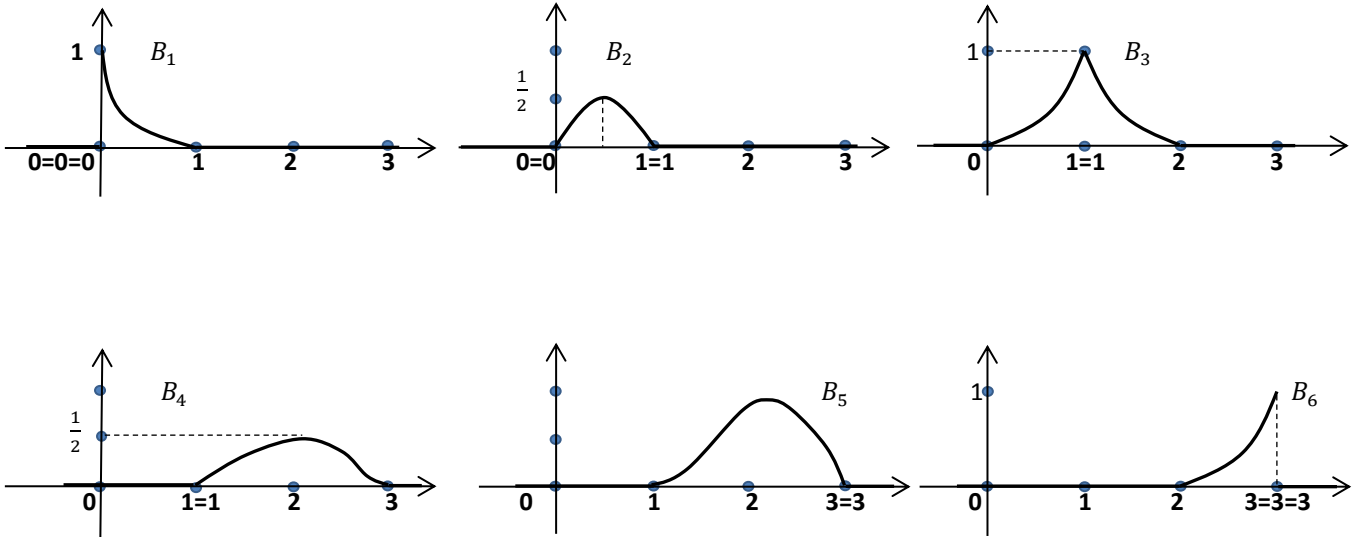
Теорема 2 (Карри и Шенберг). Пусть $\xi = \{x_i\}_{i=0}^n$ – возрастающая последовательность узлов, $\nu = (\nu_i)_{i=1}^{n-1}$ – последовательность неотрицательных целых чисел, $\nu_i \leq k+1$. Пусть $N := \dim S_{k\nu}(\Pi_\xi)$ и последовательность $t = (t_i)_{i=1}^{N+k+1}$ выбрана так, что

- 1) $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{k+1} = x_0$; $t_{N+1} = t_{N+2} = \dots = t_{N+k+1} = x_n$;
- 2) число x_i в последовательности t встречается ровно $k+1 - \nu_i$ раз ($i = 1, \dots, n-1$).

Тогда последовательность B_1, \dots, B_N из B -сплайнов степени не более k , построенная по последовательности узлов t , есть базис пространства $S_{k\nu}(\Pi_\xi)$.

Пример 5. Дана последовательность узлов $\xi = (0, 1, 2, 3)$, вектор $\nu = (1, 2)$. Найти базис пространства $S_{2\nu}(\Pi_\xi)$.

Решение. Построим последовательность t : $t_1 = t_2 = t_3 = 0$; $t_4 = t_5 = 1$; $t_6 = 2$; $t_7 = t_8 = t_9 = 3$. Так как $N = 6$, то получим базис:



Отметим некоторые свойства B -сплайнов. Подробный перечень и доказательство всех свойств можно найти, например, в [2].

- 1) $B_{i,k,t}(x) > 0$, если $t_i < x < t_{i+k+1}$;
- 2) $B_{i,k,t}(x) = 0$, если $x < t_i$ или $x > t_{i+k+1}$;
- 3) $\sum_i B_{i,k,t}(x) = 1$, если $x_0 < x < x_n$;
- 4) $B_{i,k,t}(x) \cdot B_{j,k,t}(x) = 0$, если $|i - j| > k$;

$$5) D^j \left(\sum_i \alpha_i B_{i,k,t}(x) \right) = \sum_i \alpha_i^{(j+1)} B_{i,k-j,t}(x),$$

$$\text{где } \alpha_i^{(j+1)} = \begin{cases} \frac{\alpha_i^{(j)} - \alpha_{i-1}^{(j)}}{t_{i+k+1-j} - t_i}, & j > 0 \\ \alpha_i, & j = 0; \end{cases}$$

$$6) \int_{t_1}^x \sum_{i=1}^N \alpha_i B_{ik}(y) dy = \sum_{i=1}^{s-1} \left(\sum_{j=1}^i \alpha_j \frac{(t_{j+k+1} - t_j)}{k+1} \right) B_{i,k+1}(x),$$

где $x \in [t_1, t_s]$.

Оособо отметим следующее свойство, доказанное в [5] (см. также [2]). В дальнейшем мы будем его часто использовать.

7) Пусть λ_i - линейный функционал, заданный формулой

$$\lambda_i f = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \varphi^{(k-j)}(\tau_i) f^{(j)}(\tau_i),$$

на пространстве k раз непрерывно дифференцируемых функций. Здесь $\varphi(x) = (t_{i+1} - x) \dots (t_{i+k} - x)/k!$ и $\tau_i \in (t_i, t_{i+k+1})$.

Тогда $\lambda_i(B_{j,k,t}) = \delta_{ij}$ при всех j .

Заметим, что τ_i всегда найдётся, так как в последовательности узлов t каждая точка повторяется не более чем $k+1$ раз.

Рассмотрим частные случаи задания функционала λ_i . Пусть $k=1$, тогда $\varphi(x) = t_{i+1} - x$, $\tau_i = t_{i+1}$ и

$$\lambda_i f = f(t_{i+1}).$$

$$\text{Если } k=3, \text{ то } \varphi(x) = \frac{(t_{i+1} - x)(t_{i+2} - x)(t_{i+3} - x)}{6}, \tau_i = t_{i+2} \text{ и}$$

$$\lambda_i f = f(t_{i+2}) + \frac{1}{3}(h_{i+3} - h_{i+2})f'(t_{i+2}) - \frac{h_{i+2} \cdot h_{i+3}}{6}f''(t_{i+2}),$$

здесь $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Задача 22. Для последовательности узлов $\xi = (0, 1, 2, 3)$ найти базис пространства $S_{2\nu}(\Pi_\xi)$, если $\nu = (1, 2)$. Проверить выполнение первых четырёх свойств.

Задача 23. В пространстве $S_2(\Pi_n)$ параболических сплайнов дефекта 1 найти базис из B -сплайнов. Напомним, что через Π_n мы обозначили равномерное разбиение отрезка $[a, b]$ на n равных частей.

Задача 24. Найти разложение функции $f(x) = x$, заданной на $[0, 4]$, по базису пространства $S_2(\Pi_4)$. Использовать результат предыдущей задачи и 7-е свойство B -сплайнов.

Задача 25. Написать программу графического изображения последовательности B -сплайнов по заданной степени и набору узлов t .

Задача 26. Вычислить $\int_a^b B_i(x)B_j(x)dx$, здесь B_i – базисные функции пространства $S_k(\Pi_n)$, $k = 2, 3$.

Задача 27. Приблизить функцию f на отрезке $[a, b]$ по методу наименьших квадратов параболическими сплайнами из пространства $S_2(\Pi_n)$:

1) $f(x) = |x|$, $x \in [-2, 2]$;

2) $f(x) = x^2 + |x|$, $x \in [-1, 2]$;

1) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-1, 0], \\ x^2, & x \in [0, 1]. \end{cases}$

Написать программу для решения этой задачи.

Задача 28. Проверить выполнение свойства 5 для пространства $S_1(\Pi_n)$.

Задача 29. Проверить выполнение свойства 6 для пространства $S_0(\Pi_n)$.

8. Интерполяция с помощью B -сплайнов

Рассмотрим задачу интерполяции функции f , заданной на отрезке $[a, b]$ с помощью сплайна s из пространства $S_{k\nu}(\Pi_\xi)$.

Начнём с нахождения базиса пространства $S_{k\nu}(\Pi_\xi)$. Выберем последовательность $t = (t_i)_1^{N+k+1}$ в соответствии с теоремой Карри - Шенберга. По этой последовательности найдем базис $\{B_{i,k,t}\}$, $i = 1, \dots, N$. Тогда

$$s(x) = \sum_{i=1}^N a_i B_{i,t}(x).$$

Неизвестные числа a_j , $j = 1, \dots, N$ найдём из условия

$$s(\tau_j) = f(\tau_j),$$

здесь τ_j , $j = 1, \dots, N$ – узлы интерполяции.

Получим систему N уравнений с N неизвестными:

$$\sum_{i=1}^N a_i B_{i,t}(\tau_j) = f(\tau_j). \quad (13)$$

Как было доказано в теореме Шенберга - Уитни (см. [6]), система (13) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\tau_i \in (t_i, t_{i+k+1})$ для всех i .

Заметим, что если выбрать, например,

$$\tau_i = \frac{1}{k+2} \sum_{j=0}^{k+1} t_{i+j}, \quad (14)$$

то условие выполняется, а, значит, система имеет единственное решение.

Если же сплайн s имеет дефект 1 (то есть $\nu = (k, \dots, k)$), тогда узлы интерполяции можно выбрать совпадающими с узлами разбиения Π_ξ .

Пример 6. Для функции f , заданной на отрезке $[0, 2]$, найти интерполяционный сплайн s из пространства $S_{2\nu}(\Pi_\xi)$, где $\Pi_\xi : 0 < 1 < 2$, $\nu = (1)$. Выбрать узлы интерполяции $\tau = \left(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right)$. Задачу решить для $f(x) = |x - 1|$ и $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$.

Решение. На первом этапе найдем базис пространства $S_{2\nu}(\Pi_\xi)$. Последовательность t имеет вид $t = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2)$. Теперь по этой последовательности строим 5 B -сплайнов:

$$1) B_1(x) = \begin{cases} (1-x)^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$2) B_2(x) = \begin{cases} 2x(1-x), & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$3) B_3(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ (2-x)^2, & x \in [1, 2]; \end{cases}$$

$$4) B_4(x) = \begin{cases} 2(2-x)(x-1), & x \in [1, 2] \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$5) B_5(x) = \begin{cases} (1-x)^2, & x \in [1, 2] \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

Пусть $f(x) = |x - 1|$. Получаем систему

$$|\tau_j - 1| = \sum_{i=1}^5 a_i B_i(\tau_j),$$

здесь $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Решив ее, найдём $a_1 = 1$; $a_2 = \frac{1}{2}$; $a_3 = 0$; $a_4 = \frac{1}{2}$; $a_5 = 1$. Тогда $s(x) = |x - 1|$. Сплайн совпал с исходной функцией f , так как $f \in S_{2\nu}(\Pi_\xi)$.

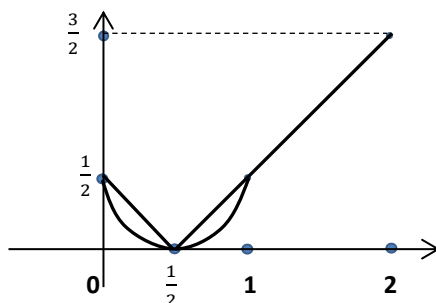
Пусть теперь $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$, тогда

$$s(x) = \frac{1}{2}B_1(x) - \frac{1}{2}B_2(x) + \frac{1}{2}B_3(x) + B_4(x) + \frac{3}{2}B_5(x).$$

Учитывая определение сплайнов B_i , получим

$$s(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x + \frac{1}{2}, & x \in [0, 1] \\ x - \frac{1}{2}, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

На рисунке изображены графики функций f и s .



Задача 30. Для функции f , заданной на $[a, b]$, найти интерполяционный сплайн из пространства $S_{k\nu}(\Pi_\xi)$. Узлы интерполяции выбрать самостоятельно:

а) $f(x) = |x - 1| - |x - 2|$, $[a, b] = [1, 3]$, $k = 2$,

$\Pi_\xi : -1 < 0 < 2 < 3$, $\nu = (1, 2)$;

б) $f(x) = 2x + 1 + |x|$, $[a, b] = [-2, 2]$, $k = 2$,

$\Pi_\xi : -2 < -1 < 1 < \frac{3}{2} < 2$, $\nu = (1, 2, 3)$;

в) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ x, & -2 \leq x \leq 0, \end{cases} \quad [a, b] = [-2, 2], \quad k = 2,$

$\Pi_\xi : -2 < -1 < 0 < 2$, $\nu = (2, 2)$.

Задача 31. Доказать, что матрица $(B_i(\tau_j))_{i,j=1}^N$ является ленточной. Определить число лент и трудоёмкость метода Гаусса при решении системы (13).

Задача 32. Написать программу построения интерполяционного сплайна s из пространства $S_{k\nu}(\Pi_\xi)$ для функции f , заданной на отрезке $[a, b]$. Узлы интерполяции выбрать по формуле (14).

9. Сплаины Шенберга

Пусть, как и ранее, f – непрерывная функция, заданная на $[a, b]$. Наша цель – приблизить f сплайном s из пространства $S_{k\nu}(\Pi_\xi)$, $k \geq 1$ так, чтобы он "сохранял форму" функции f . Такие задачи возникают при автоматизации задач проектирования.

Определим оператор $V : C[a, b] \rightarrow S_{k\nu}(\Pi_\xi) \subset C[a, b]$ по формуле

$$Vf(x) = \sum_{i=1}^N f(t_i^*) B_{i,t}(x),$$

здесь $\{B_{i,t}\}$ – базис пространства $S_{k\nu}(\Pi_\xi)$, а

$$t_i^* = \frac{t_{i+1} + \dots + t_{i+k}}{k}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Сплайн Vf называется **сплайном Шенберга**.

Отметим свойства сплайнов Шенберга.

Во-первых, если $f \in P_1$, то $Vf(x) = f(x)$. Действительно, любой многочлен p степени не выше 1 можно разложить по базису пространства $S_{k\nu}(\Pi_\xi)$:

$$p(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i B_{i,k,t}(x).$$

Используя 7-е свойство B -сплайнов, имеем

$$\alpha_i = \lambda_i(p).$$

Из определения функционала λ_i следует, что

$$\alpha_i = p(\tau_i) + p'(\tau_i) \varphi^{(k-1)}(\tau_i).$$

Так как

$$\varphi^{(k-1)}(x) = (-1)^{k-1}(-x + t_i^*),$$

то, взяв $\tau_i = t_i^*$, получим

$$\alpha_i = p(t_i^*).$$

Имеем

$$p(x) = \sum_{i=1}^N p(t_i^*) B_{i,k,t}(x) = Vp(x).$$

Перейдём к доказательству второго свойства сплайнов Шенберга. Пусть сейчас функция f дважды непрерывно дифференцируема. Возьмем $\tilde{x} \in [t_i, t_{i+1}]$. Определим интерполяционный многочлен

$$p_i(x) := f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}), \quad x \in [a, b].$$

Несложно доказать, что

$$\|f - p_i\|_{C[\alpha, \beta]} \leq c(k) \|f''\|_{C[\alpha, \beta]} |t|^2, \quad (15)$$

здесь $|t| = \max_j |t_{j+1} - t_j|$, а $[\alpha, \beta]$ – отрезок, содержащий точку \tilde{x} и $|\beta - \alpha| = O(|t|)$.

Оценим теперь разность $f(\tilde{x})$ и $Vf(\tilde{x})$. Используя 1-е свойство и определение p_i , получим

$$f(\tilde{x}) - Vf(\tilde{x}) = (f - p_i)(\tilde{x}) - V(f - p_i)(\tilde{x}) = -V(f - p_i)(\tilde{x}).$$

Имеем

$$f(\tilde{x}) - Vf(\tilde{x}) = - \sum_{j=i-k}^i (f - p_i)(t_j^*) B_j(\tilde{x}). \quad (16)$$

Из (15), (16) и 1 - 3 свойств B -сплайнов получим

$$|f(\tilde{x}) - Vf(\tilde{x})| \leq c(k) \|f''\|_{C[a, b]} |t|^2.$$

Итак,

$$\|f - Vf\|_{C[a, b]} \leq c(k) \|f''\|_{C[a, b]} |t|^2.$$

И, наконец, последнее, самое интересное свойство сплайнов Шенберга. Сплайн Шенберга Vf пересекает любую прямую линию столько же (или меньше) раз, сколько и сама функция f . Из этого следует, например, что если f – неотрицательная или выпуклая функция, то и Vf является неотрицательным или выпуклым сплайном.

Задача 33. Приблизить функцию f на $[a, b]$ сплайном Шенберга из пространства $S_{k\nu}(\Pi_\xi)$. Нарисовать графики f и Vf . Проверить на примере свойство "сохранения формы".

а) $f(x) = \sqrt{x}$, $k = 3$, $\nu = (2, 2)$, $\Pi_\xi : 0 < 1 < 4 < 9$;

б) $f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x \leq 0; \\ 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2; \end{cases} \quad k = 3, \quad \nu = (2, 2), \quad \Pi_\xi : -1 < 0 < 1 < 2$;

в) $f(x) = x^3$, $k = 2$, $\nu = (1, 1)$, $\Pi_\xi : 0 < 1 < 2 < 3$.

Задача 34. Сравнить трудоемкость и погрешность приближения функции f сплайном Шенберга и интерполяционным сплайном из пространства $S_{k\nu}(\Pi_\xi)$. Написать программу, решающую эту задачу.

Задача 35. Пусть $A : C[a, b] \rightarrow S_{2\nu}(\Pi_\xi) \subset C[a, b]$ и

$$Af(x) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \left(-f(t_{i+1}) + 4f\left(\frac{t_{i+1} + t_{i+2}}{2}\right) - f(t_{i+2}) \right) B_{i,t}(x); \quad (17)$$

здесь $\{B_{i,t}\}_{i=1}^N$ – базис пространства $S_{2\nu}(\Pi_\xi)$.

Доказать, что $Ap = p$, если $p \in P_2$.

Задача 36. Доказать что если f – дважды непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\|f - Af\|_{C[a,b]} \leq c \cdot \|f''\|_{C[a,b]} |t|^2;$$

здесь, как и ранее, $|t| = \max_i |t_{i+1} - t_i|$.

Задача 37. Приблизить функции f из задачи 33 сплайнами, определяемыми формулой (17). Сравнить с результатами задачи 33.

10. Квазиинтерполяционный сплайн

Дадим определение квазиинтерполяционного оператора, введенного К. де Бором и Г. Фиксом в [5].

Пусть $Q_\xi: C^k[a, b] \subset C[a, b] \rightarrow S_k(\Pi_\xi) \subset C[a, b]$ и Q_ξ определяется по формуле

$$Q_\xi f(x) := \sum_{i=1}^N (\lambda_i f) B_{i,k,t}(x);$$

здесь $\{B_{i,k}\}_{i=1}^N$ – базис пространства $S_k(\Pi_\xi)$, а λ_i – линейные функционалы, заданные в свойстве 7 (см. стр. 25). $Q_\xi f$ будем называть **квазиинтерполяционным** сплайном.

В частности, квазиинтерполяционный сплайн совпадает с интерполяционной ломаной, если $Q_\xi: C[a, b] \rightarrow S_1(\Pi_\xi)$.

Отметим, что оператор Q_ξ сохраняет пространство $S_k(\Pi_\xi)$. Это сразу следует из того, что $s(x) = \sum (\lambda_i s) B_{i,k}(x)$ (см. 7-е свойство B -сплайнов).

Квазиинтерполяционный оператор Q_ξ даёт приближение наилучшего порядка не только для самой функции f , но и для её производных. Сформулируем теорему К. де Бора (см., например [2]).

Теорема 3 (К. де Бор). Пусть $f \in C^k[a, b]$, тогда

$$\|(f - Q_\xi f)^{(j)}\|_{C[a,b]} \leq c(k, j) |t|^{k-j} \omega(f^{(k)}, |t|);$$

здесь $j \leq \frac{k+1}{2}$ и точка τ_i , которая входит в определение линейного функционала λ_i , выбирается следующим образом:

$$\tau_i = \frac{t_{i+1} + \dots + t_{i+k}}{k}, \quad i = 1, \dots, N,$$

здесь $\{t_i\}$ – узлы разбиения Π_ξ .

Задача 38. Приблизить функции f квазиинтерполяционным сплайном $Qf \in S_2(\Pi_n)$; здесь Π_n – разбиение отрезка $[a, b]$ на n равных частей. Нарисовать графики f и Qf . Оценить погрешность приближения. Нарисовать графики f' и $(Qf)'$.

$$a) f(x) = x^3 + x, \quad x \in [-2, 2], \quad n = 3;$$

$$б) f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & 0 \leq x \leq 2; \\ x, & -2 \leq x \leq 0; \end{cases} \quad n = 4;$$

$$в) f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & 0 \leq x \leq 2; \\ x^2, & -2 \leq x \leq 0; \end{cases} \quad n = 3.$$

Задача 39. Написать программу приближения функции f квазиинтерполяционным сплайном $Qf \in S_k(\Pi_n)$. Увеличивая k (или n), добиться заданной погрешности приближения.

11. Адаптивная аппроксимация сплайнами

До сих пор мы приближали сплайнами, у которых узлы разбиения были заранее известны. Но, оказывается, правильный выбор узлов разбиения может существенно повлиять на погрешность приближения.

Рассмотрим такой пример. Пусть на отрезке $[0, 4]$ функцию $f(x) = \sqrt{x}$ нужно приблизить n ступеньками. Сделаем это двумя разными способами. Сначала разобьем отрезок $[0, 4]$ на n равных частей, тогда узлы разбиения $x_i = \frac{4}{n}i, i = 0, \dots, n$, то есть мы находим сплайн $s \in S_0(\Pi_n)$. Несложно проверить, что

$$\text{dist}(f, S_0(\Pi_n)) = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Теперь на n частей мы разделим область значений функции f , то есть отрезок $[0, 2] : y_i = \frac{2}{n}i, i = 0, \dots, n$. Так как функция f монотонна, то существует обратная к ней, тогда $x_i = \left(\frac{2}{n}i\right)^2, i = 0, \dots, n$. Мы нашли новые узлы разбиения отрезка $[0, 4]$. Обозначим его $\tilde{\Pi}_n$. В этом случае

$$\text{dist}(f, S_0(\tilde{\Pi}_n)) = \frac{1}{2n}.$$

Таким образом, мы уменьшили погрешность в $2\sqrt{n}$ раз за счёт правильного выбора узлов разбиения.

Заметим, однако, что если бы мы взяли функцию $f_1(x) = x^2$ и к ней применили оба способа выбора узлов, то получили бы

$$\text{dist}(f_1, S_0(\Pi_n)) = \frac{2n-1}{n^2}$$

и

$$\text{dist}(f_1, S_0(\tilde{\Pi}_n)) = \frac{1}{2n}.$$

В этом случае нет существенного выигрыша в погрешности приближения.

Эти примеры показывают, что более предпочтительным оказался способ, где разбиение заранее не было известно, а подбиралось в зависимости от заданной функции. Такие алгоритмы называются **адаптивными**. Мы рассмотрим два адаптивных алгоритма: алгоритм К. де Бора и "жадный" алгоритм.

Алгоритм К. де Бора. Мы уже применили алгоритм К. де Бора к монотонной функции (в качестве такой функции мы взяли $f(x) = \sqrt{x}$). Пусть теперь f – произвольная непрерывная функция, заданная на $[a, b]$ ($f \not\equiv \text{const}$), и мы по-прежнему будем приближать n ступеньками. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \text{Var}_{[a,x]} f.$$

Напомним, что

$$\text{Var}_{[a,c]} f = \sup_{\{t_i\}} \left\{ \sum_i |f(t_{i+1}) - f(t_i)| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq c \right\};$$

здесь точная верхняя грань берется по всем разбиениям отрезка $[a, c]$.

Функция g непрерывна в силу непрерывности f , g не убывает от 0 до $V = \text{Var}_{[a,b]} f$. Повторим для g описанное выше построение ступенчатой функции.

Разобьём отрезок $[0, V]$ на n равных частей, точки разбиения $y_i = \frac{V}{n}i$; $i = 0, \dots, n$. Для нахождения разбиения отрезка $[a, b]$ решим уравнение

$$g(x) = \frac{V}{n}i, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (18)$$

Так как g – неубывающая функция, то уравнение может иметь более одного решения. Пусть x_i – наибольший из корней уравнения (18). Заметим, что $x_0 = a$; $x_n = b$. Тогда из (18) следует, что

$$g(x_{i+1}) - g(x_i) = \frac{V}{n},$$

а из определения функции g получим

$$g(x_{i+1}) - g(x_i) = \text{Var}_{[x_i, x_{i+1}]} f,$$

то есть

$$\text{Var}_{[x_i, x_{i+1}]} f = \frac{V}{n}.$$

Следовательно, точки $\{x_i\}$ выбирать нужно так, чтобы вариация функции f на отрезке была постоянной, равной $\frac{V}{n}$.

Предложенный алгоритм даёт погрешность приближения $\frac{1}{2n} \text{Var}_{[a,b]} f$. Оказывается, такой же порядок аппроксимации даёт и сплайн наилучшего приближения. Чтобы сформулировать соответствующий результат, дадим определение множества S_k^{nl} сплайнов со свободными узлами.

Определение 4. Множество S_k^{nl} состоит из сплайнов степени не более k , гладкости l , подчинённых разбиению отрезка $[a, b]$ на не более чем n частей.

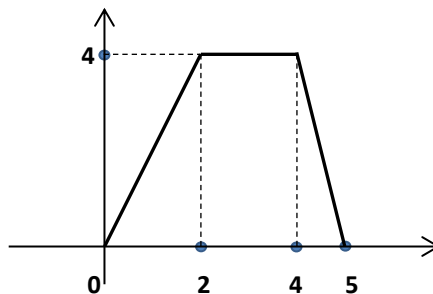
Если $l = k - 1$, то l в обозначении будем опускать.

В отличие от пространства $S_k(\Pi_n)$ здесь фиксируются не узлы разбиения, а только их количество. Очевидно, что $S_k(\Pi_n) \subset S_k^n$ и $\text{dist}(f, S_k^n) \leq \text{dist}(f, S_k(\Pi_n))$. Однако множество S_k^n не является линейным пространством, поэтому алгоритмы построения сплайнов со свободными узлами не сводятся к решению систем линейных уравнений или поиску базиса. Теперь мы можем сформулировать теорему о скорости приближения непрерывной функции ступеньками (см. [7]).

Теорема 4 (Ю. А. Брудный). Если $f \in C[a, b]$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \text{dist}(f, S_0^n) = \frac{1}{2} \cdot \text{Var}_{[a,b]} f. \quad (19)$$

Пример 7. Пусть задана функция



Нужно приблизить её $\approx n$ ступеньками так, чтобы получить погрешность $\frac{1}{2n} Var_{[0,5]} f$.

Решение. Используем описанный выше алгоритм. Прежде всего найдём $V = Var_{[0,5]} f$. Из определения вариации следует, что $V = 8$. Наша цель – найти

$\{x_i\}$ так, чтобы $Var_{[x_i, x_{i+1}]} f = \frac{8}{n}$. Пусть $0 \leq x_i, x_{i+1} \leq 2$, тогда

$$Var_{[x_i, x_{i+1}]} f = f(x_{i+1}) - f(x_i) = 2(x_{i+1} - x_i).$$

Имеем уравнение для нахождения $\{x_i\}$: $x_{i+1} = \frac{4}{n} + x_i$. Так как $x_0 = 0$, то $x_i = \frac{4}{n}i$, $i \leq \frac{n}{2}$. Если $i < \frac{n}{2}$, то добавим к узлам $x = 2$. Получили равномерное разбиение отрезка $[0, 2]$.

Так как $Var_{[2,4]} f = 0$, то на отрезке $[2, 4]$ нет новых узлов сплайна. Пусть теперь $4 \leq x'_j, x'_{j+1} \leq 5$. Тогда

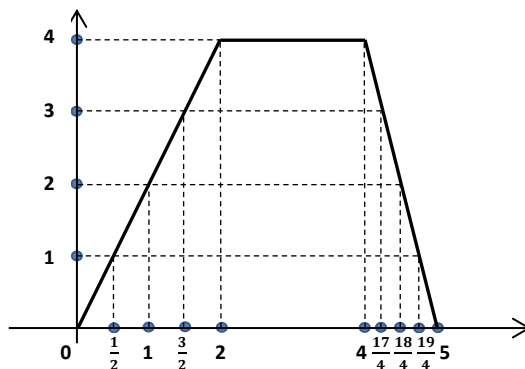
$$Var_{[x'_j, x'_{j+1}]} f = f(x'_j) - f(x'_{j+1}) = 4(x'_{j+1} - x'_j)$$

и из уравнения $4(x'_j - x'_{j+1}) = \frac{8}{n}$ найдем, что $x'_j = 4 + \frac{2}{n}j$, $0 \leq j \leq \frac{n}{2}$. Как

и ранее, если $j < \frac{n}{2}$, то добавим $x = 5$. Мы нашли разбиение $\tilde{\Pi}$ отрезка $[0, 5]$. Узлы разбиения состоят из точек $\{x_i\}$ или точек $\{x'_j\}$.

Искомый сплайн $s(x) = \frac{f(\tilde{x}_i) + f(\tilde{x}_{i+1})}{2}$, $\tilde{x}_i \leq x \leq \tilde{x}_{i+1}$.

На рисунке показано разбиение для $n = 8$.



Заметим, что искать узлы разбиения для приближения f ступенчатой функцией s из S_0^n можно с помощью ломаной. Для этого на первом этапе нужно функцию f хорошо приблизить ломаной l , выбрав равномерное разбиение. Затем l аппроксимировать ступенчатой функцией s из S_0^n и учесть, что $\|f - s\| \leq \|f - l\| + \|l - s\|$.

Перейдем к приближению сплайнами из S_k^n . Сформулируем следующий результат (см. [2]):

Теорема 5 (К. де Бор, S. Dodson). *Пусть функция f непрерывно дифференцируема k раз на $[a, b]$, а функция $|f^{(k)}|^{\frac{1}{k}}$ монотонно убывает и несобственно интегрируема на $(a, b]$. Тогда*

$$\text{dist}(f, S_{k-1}^n) = c \cdot n^{-k} \left(\int_a^b |f^{(k)}(x)|^{\frac{1}{k}} dx \right)^k.$$

Узлы разбиения для сплайна наилучшего приближения выбирают из условия

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f^{(k)}(x)|^{\frac{1}{k}} dx = \frac{1}{n} \int_a^b |f^{(k)}(x)|^{\frac{1}{k}} dx. \quad (20)$$

Заметим, что при $k = 1$ (20) является частным случаем (19), так как если f – непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\text{Var}_{[a,b]} f = \int_a^b |f'(x)| dx.$$

Чтобы найти узлы $\{x_i\}$, используя (20), введем функцию

$$\varphi(x) = \int_a^x |f^{(k)}(t)|^{\frac{1}{k}} dt. \quad (21)$$

Если функция φ будет монотонно возрастающей, тогда $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i = \varphi^{-1} \left(\frac{i\varphi(b)}{n} \right)$, $i = 1, \dots, n-1$.

Сложность, с которой сразу же сталкиваемся на практике, состоит в вычислении $f^{(k)}$, функции φ и нахождении φ^{-1} .

Можно поступить следующим образом. Приблизить функцию f сплайном $s \in S_k(\Pi_n)$. Равномерное разбиение Π_n подобрать так, чтобы

$$\|f - s\|_{C[a,b]} < \varepsilon.$$

Затем использовать кусочно-постоянную функцию $|s^{(k)}|$ в качестве приближения для $|f^{(k)}|$.

Тогда функция

$$\tilde{\varphi}(x) = \int_a^x |s^{(k)}(t)| dt \quad (22)$$

будет непрерывной кусочно-линейной неубывающей функцией. Если $\tilde{\varphi}$ – возрастающая функция, то такой же будет и её обратная функция. В отличие от (21) вычисления по формуле (22) не вызывают больших затруднений.

Наконец, находим узлы $\tilde{x}_0 = a$, $\tilde{x}_n = b$, $\tilde{x}_i = \tilde{\varphi}^{-1} \left(\frac{i\tilde{\varphi}(b)}{n} \right)$, $i = 1, \dots, n-1$.

Эти узлы задают разбиение $\tilde{\Pi}$. Тогда искомым будет интерполяционный сплайн \tilde{s} степени не более k , построенный по разбиению $\tilde{\Pi}$.

Замечание. Если $\tilde{\varphi}$ будет неубывающей кусочно-линейной функцией, то у нее не будет обратной функции. В этом случае можно поступить так. Найти $\tilde{\varphi}^{-1}$ только на отрезках, где функция $\tilde{\varphi}$ возрастает. Все отрезки, где $\tilde{\varphi}$ является постоянной, нужно включить в искомое разбиение.

Пример 8. Найти почти оптимальные узлы разбиения для приближения функции f ступеньками, используя описанный выше алгоритм. Применить полученные формулы для приближения $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.

Решение. 1-й шаг. Приближим f интерполяционной ломаной $s \in S_1(\Pi_N)$. N подберем так, чтобы $\|f - s\|_{C[a,b]} = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Пусть

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i, \quad i = 0, \dots, N \text{ узлы ломаной } s, \quad s(x_i) = f(x_i) = y_i.$$

2-й шаг. Вычислим $s'(x)$. Так как

$$s(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + y_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

то $s'(x) = k_i$; здесь $k_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$, $i = 0, \dots, N-1$.

3-й шаг. Введём функцию

$$\tilde{\varphi}(x) := \int_a^x |s'(t)| dt.$$

Найдём формулы для вычисления $\tilde{\varphi}$. Пусть $x \in [a, x_1]$. Тогда $\tilde{\varphi}(x) = |k_0|(x - a)$. Если $x \in [x_1, x_2]$, то, разбивая интеграл на два интеграла, получим $\tilde{\varphi}(x) = |k_0|(x_1 - a) + |k_1|(x - x_1)$. Итак, если $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

то

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{j=0}^{i-1} |k_j|(x_{j+1} - x_j) + |k_i|(x - x_i).$$

Остаётся учесть, что $\{x_i\}$ – узлы равномерного разбиения Π_N , тогда

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{i-1} |k_j| + |k_i|(x - x_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (23)$$

4-й шаг. Найдём $\tilde{\varphi}^{-1}$. Если $|k_i| > 0$, то

$$\tilde{\varphi}^{-1}(x) = \frac{x - b_i}{|k_i|} + x_i, \quad x \in [f(x_i), f(x_{i+1})];$$

здесь $b_i = \sum_{j=0}^{i-1} |k_j|$.

Если же $k_i = 0$ (то есть $f(x_i) = f(x_{i+1})$), то $\tilde{\varphi}^{-1}$ имеет в точке $f(x_i)$ разрыв. Поэтому нужно найти отрезки, где функция φ постоянна и включить их в искомое разбиение (см. замечание на стр. 37)

5-й шаг. Вычислим $\tilde{x}_i = \tilde{\varphi}^{-1}\left(i \frac{\tilde{\varphi}(b)}{n}\right)$, $i = 1, \dots, n$.

6-й шаг. Построим интерполяционную ломанную, используя найденное разбиение $a = \tilde{x}_0 \leq \tilde{x}_1 \leq \dots \leq \tilde{x}_n = b$.

Пусть теперь $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$. Возьмем разбиение Π_{n^2} , $x_i = \frac{i}{n^2}$, $y_i = \frac{\sqrt{i}}{n}$, $i = 0, \dots, n^2$. Тогда интерполяционная ломаная s , построенная по разбиению Π_{n^2} , дает погрешность $\frac{1}{4n}$:

$$\|f - s\|_{C[0,1]} = \|f - s\|_{C[0, \frac{1}{n^2}]} = \frac{1}{4n}.$$

Из формулы (23) получим

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{\sqrt{i}}{n} + n(\sqrt{i+1} - \sqrt{i}) \left(x - \frac{i}{n^2}\right), \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Тогда

$$\tilde{\varphi}^{-1}(x) = \frac{\left(x - \frac{\sqrt{i}}{n}\right) \left(\sqrt{i+1} + \sqrt{i}\right)}{n} + \frac{i}{n^2}, \quad x \in \left[\frac{\sqrt{i}}{n}, \frac{\sqrt{i+1}}{n}\right].$$

Так как $\tilde{\varphi}(1) = 1$, то $\tilde{x}_j = \tilde{\varphi}^{-1}\left(\frac{j}{n}\right)$, $j = 1, \dots, n$.

Учитывая, что $\frac{j}{n} \in \left[\frac{\sqrt{j^2}}{n}, \frac{\sqrt{j^2+1}}{n}\right]$ ($i = j^2$), получим $\tilde{x}_j = \frac{j^2}{n^2}$, $j = 0, \dots, n$. Это и будет искомым разбиением. Интерполяционная ломаная l приближает s с погрешностью $\frac{1}{n}$. Таким образом,

$$\|f - l\|_{C[0,1]} \leq \frac{5}{4n}.$$

Задача 40. Применить алгоритм К. де Бора к функции f :

а) $f(x) = \sqrt{x+1} + 2$, $x \in [-1, 3]$;

б) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in [0, 1] \\ 1, & x \in [1, 4] \\ \sqrt{5-x}, & x \in [4, 5]; \end{cases}$

в) $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in [-1, 1]$;

г) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - 1, & x \in [2, 4] \\ 1, & x \in [4, 10] \\ 2x - 19, & x \in [10, 11] \end{cases}.$

В каждом случае приблизить сплайном из пространства S_n^k , $k = 0, 1, 2$.

Задача 41. Написать программу приближения функции f , заданной на отрезке $[a, b]$, сплайном s из пространства S_n^k , используя алгоритм К. де Бора. Число узлов разбиения увеличивать до тех пор, пока

$$\|f - s\|_{C[a,b]} < \varepsilon;$$

здесь ε – заданная точность приближения.

Жадный алгоритм. Перейдём к описанию второго адаптивного алгоритма, в котором используется разложение по B -сплайнам. С помощью этого алгоритма можно одновременно приближать функцию и ее производные (если они существуют), применяя гладкие сплайны со свободными узлами. Прежде всего приведём результат (см., например, [8] или [9]), который указывает скорость сходимости и область действия алгоритма.

Теорема 6. Пусть $f \in H_p^\alpha(a, b)$, то есть величина

$$\|f\|_{H_p^\alpha} := \frac{\omega_k(f, t)p}{t^\alpha} + \|f\|_p$$

конечна. Пусть, кроме того, $\alpha > r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, где r – целое неотрицательное число; $p < q \leq \infty$. Тогда для любого n существует сплайн $s_n \in S_{k-1}^{2^n}$ такой, что

$$\|(f - s_n)^{(\gamma)}\|_{L_q} \leq c \cdot \|f\|_{H_p^\alpha} \cdot 2^{-n(\alpha - |\gamma|)};$$

здесь $\gamma \leq r$.

Так как для построения сплайна s_n нужно будет находить сплайн наилучшего приближения в пространстве L_p , то выберем $p = 2$. Кроме того, пусть $q = \infty$.

Описание алгоритма.

1. Исходные данные: функция f , числа α, k, r, n . Обозначим $N = \lceil n^{1+\frac{1}{2\alpha-1}} \rceil$.
2. Используя метод наименьших квадратов для функции f , построим сплайн $F_l \in S_{k-1}(\Pi_{2^l})$, $l = 0, \dots, N$.
3. Найдём сплайн $G_l = F_l - F_{l-1}$ ($l = n+1, \dots, N$). Заметим, что $S_{k-1}(\Pi_{2^{l-1}}) \subset S_{k-1}(\Pi_{2^l})$, поэтому $G_l \in S_{k-1}(\Pi_{2^l})$.
4. Разложим сплайн G_l по базису пространства $S_{k-1}(\Pi_{2^l})$, состоящему из B -сплайнов. Для этого применим линейные функционалы λ_i к сплайну G_l :

$$\alpha_i^l = \lambda_i(G_l), \quad i = -k+1, \dots, 2^l-1, \quad l = n+1, \dots, N.$$

Тогда

$$G_l(x) = \sum_{i=-k+1}^{2^l-1} \alpha_i^l B_{i, \Pi_{2^l}}(x).$$

5. Отбросим лишние координаты. Для этого обозначим

$$\tilde{\alpha}_i^l = \begin{cases} \alpha_i^l, & \text{если } |\alpha_i^l| \geq 2^{-n\alpha + \frac{1}{2}(n-l)(\alpha - \frac{1}{2} + r)} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

6. Искомый сплайн имеет вид

$$s_n(x) = F_n(x) - F_0(x) + \sum_{l=n+1}^N \sum_{i=-k+1}^{2^l-1} \tilde{\alpha}_i^l B_{i, \Pi_{2^l}}(x).$$

Пример 9. Задана функция f , $\alpha = \frac{3}{2}$, $k = 2$, $n = 4$, $r = 0$, $N = 8$.

Решение. 1-й шаг. Находим F_l – ломаные наилучшего приближения в пространстве $L_2[a, b]$. Применяя метод наименьших квадратов, получим систему линейных уравнений для коэффициентов $\{\alpha_i^l\}$ разложения F_l по базису из B -сплайнов. Система имеет вид

$$\sum_{i=1}^{2^l-1} (B_{i,l}, B_{m,l}) \cdot \alpha_i^l = (f, B_{m,l}), \quad m = -1, \dots, 2^l-1.$$

Здесь для сокращения обозначено $B_{m,l} := B_{m,\Pi_{2^l}}$. Так как $(B_{i,l}, B_{j,l}) = 0$, если $|i - j| \geq 2$, то система имеет трехдиагональную матрицу порядка $(2^l + 1) \times (2^l + 1)$ и, несмотря на большой размер (при больших l), легко может быть решена с помощью метода прогонки.

2-й шаг. Находим ломаные $G_l = F_l - F_{l-1}$, $l = 5, \dots, 8$. Для дальнейших вычислений нам потребуется знать G_l только в узлах разбиения Π_{2^l} .

Так как

$$F_l(x) = \sum_{i=-1}^{2^l-1} a_I^l B_{i,l}(x),$$

то $F_l(j \cdot 2^{-l}) = a_{j-1}^l$.

Вычислим теперь $F_{l-1}(j \cdot 2^{-l})$. Рассмотрим два случая. Пусть j – чётное число, тогда

$$F_{l-1}(j \cdot 2^{-l}) = \sum_{i=-1}^{2^{l-1}-1} a_i^{l-1} B_{i,l-1}(j \cdot 2^{-l}) = a_{\frac{j}{2}-1}^{l-1}.$$

Если j – нечётное число то

$$F_{l-1}(j \cdot 2^{-l}) = \frac{1}{2} \left(a_{\frac{j-1}{2}+1}^{l-1} + a_{\frac{j+1}{2}-1}^{l-1} \right).$$

Итак,

$$G_l\left(\frac{j}{2^l}\right) = a_{j-1}^l - a_{\frac{j}{2}-1}^{l-1},$$

если j – четное число, и

$$G_l\left(\frac{j}{2^l}\right) = a_{j-1}^l - \frac{1}{2} \left(a_{\frac{j-1}{2}+1}^{l-1} + a_{\frac{j+1}{2}-1}^{l-1} \right)$$

в случае нечетного j .

3-й шаг. Найдём коэффициенты $\{\alpha_i^l\}$. Для этого используем функционалы λ_j , которые в случае сплайнов первой степени имеют вид

$$\lambda_j f = f\left(\frac{j+1}{2^l}\right).$$

Поэтому

$$\alpha_j^l = \lambda_j(G_l) = G_l\left(\frac{j+1}{2^l}\right),$$

а эти числа были найдены на предыдущем шаге.

4-й шаг. Обнуллим все числа α_j^l , $j = 0, \dots, 2^l - 1$, которые меньше $2^{-4+\frac{l}{2}}$, $l = 5, 6, 7, 8$, тогда

$$\tilde{\alpha}_j^l = \begin{cases} \alpha_j^l, & \text{если } |\alpha_j^l| \geq 2^{-4+\frac{l}{2}} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

5-й шаг. Искомый сплайн

$$s(x) = F_4(x) - F_0(x) + \sum_{l=5}^8 \sum_{j=-1}^{2^l-1} \tilde{\alpha}_j^l B_{i, \Pi_{2^l}}.$$

Задача 42. Доказать, что

$$(B_i, B_i) = \frac{2}{3} \cdot 2^{-l}, \quad (B_i, B_{i+1}) = \frac{1}{6} \cdot 2^{-l}, \quad \text{где } B_j \in S_1(\Pi_{2^l}).$$

Задача 43. Найти матрицу Грама (то есть вычислить (B_i^i, B_i^j)) для B -сплайнов из пространства $S_k(\Pi_{2^l})$, $k = 2, 3$.

Задача 44. Применить "жадный алгоритм" к функции $f(x) = \sqrt{x}$, заданной на отрезке $[0, 1]$.

Задача 45. Применить "жадный алгоритм" и алгоритм К. де Бора к функции f , используя параболические и кубические сплайны. Сравнить погрешности приближений, если

- а) $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in [-1, 1]$;
- б) $f(x) = x^3$, $x \in [0, 1]$;
- в) $f(x) = \sqrt{|x-1|} + x$, $x \in [-1, 2]$;
- г) $f(x) = \sin x$, $x \in [0, 100]$.

Задача 46. Приблизить функции, заданные в предыдущей задаче, параболическими и кубическими сплайнами с фиксированными узлами. Сравнить с результатами применения адаптивных алгоритмов.

Задача 47. Написать программу приближения функции f , заданной на $[a, b]$, используя "жадный алгоритм".

Литература

- [1] *Иродова, И. П.* Алгоритмы теории приближения : учебное пособие / И. П. Иродова. – Ярославль : ЯрГУ, 2019. – 40 с.
- [2] *Де Бор, К.* Практическое руководство по сплайнам / К. Де Бор. – М. : Радио и связь, 1985. – 304 с.
- [3] *Брудный, Ю. А.* Прикладная теория приближения : учебное пособие / Ю. А. Брудный, И. П. Иродова. – Ярославль : ЯрГУ, 1986. – 88 с.
- [4] *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : МГУ, 2011. – 640 с.
- [5] *De Boor, C., Fix, G.* Spline approximation by quaasi-interpolants / C. de Boor, G. Fix // Approx. Theory. – 1973. – № 8. – P. 19 - 45.
- [6] *Schoenberg I. J., Whitney, A.* On Polea frequency functions of translation determinants with application to the interpolation problem by spline cuves / I. J. Schoenberg, A. Whitney // Trans. Amer. Soc. – 1953. – № 74. – P. 246 - 259.
- [7] *Брудный, Ю. А.* Сплайн-аппроксимация и функции ограниченной вариации / Ю. А. Брудный // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 215, № 3. – С. 511 - 513.
- [8] *Иродова, И. П.* Методы кусочно-полиномиальной аппроксимации в теории пространств Никольского-Бесова / И. П. Иродова // Функциональный анализ. СМНФ. – М. : РУДН. – 2013. – № 50. – С. 3-159.
- [9] *Иродова, И. П.* Совместное приближение функции и ее производных в $L_p([0, 1]^n)$ с помощью нелинейных сплайнов / И. П. Иродова; ЯрГУ им. П. Г. Демидова. – Ярославль, 1982. – 23 с. – Деп. в ВИНТИ 15.03.1982, № 1135-82.

Учебное издание

Иродова Ирина Павловна

Сплайны в вычислительной математике

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова
Компьютерный набор, верстка И. П. Иродова

Подписано в печать 06.07.2022. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 2,6. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 2 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.