

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Е. П. Кубышкин, А. Н. Куликов, Д. А. Куликов

**Основные методы решения уравнений
математической физики**

Учебное пособие

**Ярославль
ЯрГУ
2018**

УДК 517.958:52/59(075)

ББК В161.68я73

К88

Рекомендовано

*Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2018 года.*

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор Д. О. Бытев;
кафедра математического анализа Ярославского государственного
педагогического университета им. К. Д. Ушинского

Кубышкин, Евгений Павлович.

К88 Основные методы решения уравнений математической физики :
учебное пособие / Е. П. Кубышкин, А. Н. Куликов, Д. А. Куликов;
Яросл. гос. ун.-т. – Ярославль : ЯрГУ, 2018. – 130 с.

ISBN 978-5-8397-1161-7

Пособие содержит основные понятия лекционного курса "Уравнения математической физики". Большое внимание уделено методам решения основных задач для классических уравнений с частными производными. Пособие включает достаточно большое число задач и упражнений для самостоятельной работы, а также содержит примеры экзаменационных заданий. Основное внимание уделено методу Фурье.

Учебное пособие написано для курса "Уравнения математической физики" ("Уравнения с частными производными") и предназначено для студентов бакалавриата по направлениям "Прикладная математика и информатика", "Математика и компьютерные науки". Оно может быть использовано студентами физического факультета, студентами магистратуры по указанным направлениям.

Библиогр.: 16 назв.

УДК 517.958:52/59(075)

ББК В161.68я73

ISBN 978-5-8397-1161-7

© ЯрГУ, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	4
Глава 1. Основные понятия и определения	5
Глава 2. Гармонические функции	15
Глава 3. Задача Дирихле	19
Глава 4. Задача Неймана	35
Глава 5. Уравнение колебаний струны	42
Глава 6. Интегрирование первой краевой задачи методом Фурье	50
Глава 7. Неоднородное уравнение колебаний струны	62
Глава 8. Уравнение колебаний балки	74
Глава 9. Уравнение колебаний мембраны	81
Глава 10. Уравнение теплопроводности	85
Глава 11. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности	90
Глава 12. Неоднородное уравнение теплопроводности	98
Глава 13. Понятие корректности задач математической физики	109
Глава 14. Интегральные уравнения	115
Глава 15. Примеры контрольных и экзаменационных задач	122
Литература	128

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие "Основные методы решения уравнений математической физики" – это переработанный и дополненный текст учебного пособия Е. П. Кубышкина, А. Н. Куликова «Задачи и упражнения по курсу "Уравнения математической физике"», изданного в 2008 году до перехода на многоуровневую подготовку студентов. Именно переход на новые программы потребовал изменить содержание многих разделов, дополнить многие из них, а также расширить список задач для самостоятельного решения. В учебное пособие включен раздел, в котором рассматриваются интегральные уравнения.

Основное внимание в учебном пособии уделено методике решения тех задач, которые формируют базовый уровень усвоения данной дисциплины при подготовке бакалавров по направлениям "Прикладная математика и информатика", "Математика и компьютерные науки". Авторы надеются, что данное пособие сможет помочь в подготовке по данной дисциплине студентам других естественно-научных направлений, например студентам, обучающимся на физическом факультете.

В первую очередь в пособии речь идет о методе Фурье при решении смешанных (краевых) задач. Метод Фурье, безусловно, является наиболее востребованным методом при решении прикладных задач из физики, механики и, быть может, иных приложений уравнений с частными производными, дополненными краевыми условиями.

В учебном пособии можно найти ряд упражнений и задач для самостоятельного решения. Выполнение этих заданий при соответствующем контроле со стороны преподавателя обязательно для усвоения предмета на базовом уровне. На последних страницах пособия студенты смогут найти примеры экзаменационных задач и контрольных работ.

Глава 1. Основные понятия и определения

Уравнение, содержащее, кроме независимых переменных и искомой функции, частные производные этой функции, называется дифференциальным уравнением с частными производными. Наивысший порядок входящих в уравнение частных производных называется порядком дифференциального уравнения. Так, например, если рассмотреть три следующих дифференциальных уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = x \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где независимая функция $u(x, t)$, то первое уравнение будет уравнением первого порядка, второе уравнение имеет пятый порядок и, наконец, последнее – уравнение второго порядка.

Упражнение 1.1. Определить порядок следующих уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \exp \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Для математической физики наиболее важны и поэтому лучше всего изучены уравнения второго порядка. В случае двух независимых переменных уравнение второго порядка может быть записано в следующей форме:

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0,$$

где $u = u(x, y)$.

Уравнение называется линейным, если оно линейно относительно искомой функции и всех ее производных. Линейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными может быть записано в следующей общей форме:

$$\begin{aligned} & A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ & + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = f(x, y), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $f(x, y)$ – некоторые заданные гладкие функции переменных $(x, y) \in \mathcal{D} \subseteq R^2$. Здесь \mathcal{D} – некоторая область из R^2 .

Если $f(x, y) \equiv 0$, то уравнение (1.1) называется однородным, в противном случае – неоднородным.

Рассмотрим линейное уравнение относительно старших производных. Такое уравнение в случае двух независимых переменных имеет следующий вид:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}),$$

где $u = u(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D} \subseteq R^2$. Если коэффициенты A, B, C зависят только от x, y , то уравнение называется квазилинейным.

Линейное уравнение второго порядка от n независимых переменных может быть записано в следующей общей форме:

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + Cu = f,$$

где $A_{ij} = A_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $B_j = B_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $C = C(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – заданные функции от n независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_n .

Приведем некоторые примеры. Пусть $u = u(x, y, z)$, то уравнение

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

называется уравнением Лапласа. Понятно, что это уравнение является уравнением второго порядка. Оно линейное и однородное. Уравнение

$$\Delta u = f(x, y, z)$$

также является уравнением второго порядка. Это уравнение линейное, но неоднородное. Важным частным случаем является уравнение

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

где $u = u(x, y)$, а также

$$\Delta u = f(x, y).$$

Неоднородное уравнение Лапласа имеет собственное название – уравнение Пуассона.

Пусть $u = u(x, y, z, t)$. Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$

Последнее уравнение носит название уравнения теплопроводности. Особенно часто на первом этапе рассматривают частный случай, когда $u = u(x, t)$. В этом случае уравнение теплопроводности приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Пусть опять $u = u(x, y, z, t)$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u(x, y, z) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Последнее уравнение также является уравнением второго порядка. Это линейное, однородное уравнение. Оно носит название волнового уравнения. Его частный случай

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $u = u(x, t)$, носит название уравнения колебаний струны. Здесь и выше $a = \text{const} > 0$.

Приведенные выше уравнения играют особо важную роль в теории уравнений с частными производными как эталонные уравнения, на примере которых изучаются свойства решений и других уравнений второго порядка. Они играют важную роль и в приложениях. Впрочем, в приложениях можно встретить и другие уравнения. Например, к таковым можно отнести уравнение четвертого порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0,$$

известное под названием уравнения колебания балки ($u = u(x, t)$). Последнее уравнение играет важную роль в теории упругости.

Общее уравнение порядка m может быть записано в следующем виде:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}) = 0,$$

где $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$.

Будем рассматривать уравнение в частных производных порядка m . Функция $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D} \subseteq R^n$ называется решением данного уравнения (интегралом), если в этой области функция u имеет непрерывные частные производные до порядка m включительно и при подстановке в это уравнение обращает его в тождество. В данном случае решение u часто называют „классическим“. Требование существования частных производных до порядка m часто бывает неоправданным с физической точки зрения (а иногда и с математической). Поэтому наряду с данным понятием классического решения вводят понятие обобщенного решения уравнения с частными производными. Понятие обобщенного решения в рамках данного пособия рассматриваться не будет, так как оно носит вводный характер. Ограничимся рассмотрением задач, имеющих базовый характер.

Тем не менее дадим простейшее определение обобщенного решения. Если в области $\mathcal{D} \subseteq R^n$ существует последовательность классических решений данного дифференциального уравнения, которые в любой внутренней подобласти данной области \mathcal{D} равномерно сходятся к некоторой функции $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то данная функция и называется обобщенным решением данного дифференциального уравнения в области \mathcal{D} . Понятие обобщенного решения было введено Л. С. Соболевым. Еще раз подчеркнем, что здесь приведено простейшее определение обобщенного решения. В математической литературе можно найти и иные определения обобщенного решения.

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u = & A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ & + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u. \end{aligned}$$

Уравнение (1.1) может быть записано в виде

$$\mathcal{L}u = f,$$

а однородное уравнение

$$\mathcal{L}u = 0.$$

Для линейных однородных дифференциальных уравнений полезно отметить, что справедливы следующие свойства:

1) если u – решение, а C – постоянная, то произведение Cu также есть решение;

2) если u_1, u_2 – решения, то сумма $u_1 + u_2$ также есть решение; данное свойство распространяется на сумму с произвольным числом слагаемых.

Для неоднородных уравнений можно отметить следующие свойства:

1) если u – решение однородного уравнения ($\mathcal{L}u = 0$), а v – решение неоднородного уравнения ($\mathcal{L}v = f$), то $u + v$ есть решение неоднородного уравнения;

2) если u_1, u_2 – два решения неоднородного уравнения, то $u_1 - u_2$ – решение однородного уравнения.

Хорошо известно, что для обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть приведены достаточные условия для существования решений, по крайней мере для некоторого интервала изменения независимого переменного. Для дифференциальных уравнений с частными производными ситуация другая. Пусть $x_0 \in R^m$. Можно указать такое дифференциальное уравнение, что в окрестности этой точки у него нет ни одного решения. При этом коэффициенты этого уравнения достаточно гладкие функции (имеют непрерывные частные производные достаточно высокого порядка). Впервые такой пример был построен Г. Леви. Л. Хермандер доказал, что уравнение

$$(y^2 - z^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + x^2) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \\ - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (xyu) + xz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (xzu) = f(x, y, z)$$

не имеет ни одного решения при некоторой функции $f(x, y, z)$, если даже она имеет бесконечное число производных.

Поэтому при изучении дифференциальных уравнений с частными производными, как правило, интересуются некоторыми содержательными классами таких уравнений, для которых может быть построена законченная теория и которые важны для приложений. Теория уравнений с частными производными возникла на базе уравнений математической физики. Для конкретных уравнений с частными производными, таких как уравнение Лапласа, уравнение теплопроводности, в XVIII и XIX веках была построена теория, созданы мощные методы их исследования. Эти результаты позволили выделить и изучить важные классы уравнений и систем уравнений с частными производными, напоминающие

по свойствам три основных уравнения математической физики: уравнение Лапласа, уравнение теплопроводности, волновое уравнение (колебаний струны).

О классификации уравнений с частными производными

Приведем классификацию линейных относительно старших производных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка в случае двух переменных. Итак, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}). \quad (1.2)$$

Здесь $(x, y) \in \mathcal{D} \subseteq R^2$, (\mathcal{D} – область в R^2), $u = u(x, y)$. Функции $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ предполагаем гладкими, т. е. имеющими достаточно большое число непрерывных частных производных. Аналогичное предположение следует сделать и относительно функции $F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$: она непрерывна по совокупности переменных и имеет непрерывные частные производные до порядка l включительно ($l \geq 1$).

Пусть точка $(a_1, a_2) \in \mathcal{D}$. Уравнение (1.2) в точке A называется эллиптическим, если квадратичная форма

$$\varphi_0(\xi, \eta) = A_0 \xi^2 + 2B_0 \xi \eta + C_0 \eta^2$$

положительно (отрицательно) определена. Данное уравнение будет эллиптическим в области \mathcal{D} , если оно является эллиптическим в каждой точке \mathcal{D} . Здесь $A_0 = A(a_1, a_2)$, $B_0 = B(a_1, a_2)$, $C_0 = C(a_1, a_2)$.

Уравнение (1.2) называется параболическим в точке (a_1, a_2) , если $\varphi_0(\xi, \eta) \geq 0$ и существует ненулевой вектор (ξ_0, η_0) такой, что $\varphi_0(\xi_0, \eta_0) = 0$. Понятно, что уравнение (1.2) можно определить как параболическое в области \mathcal{D} , если в каждой его точке оно является параболическим.

Наконец, уравнение (1.2) в точке (a_1, a_2) называется гиперболическим, если $\varphi_0(\xi, \eta)$ меняет знак в зависимости от выбора (ξ, η) . Иначе говоря, квадратичная форма $\varphi_0(\xi, \eta)$ знакопеременна. Если уравнение (1.2) в каждой точке области \mathcal{D} гиперболическое, то в таком случае его называют гиперболическим в области \mathcal{D} .

Определения, приведенные выше, можно сформулировать иначе.

Для того чтобы в точке (a_1, a_2) уравнение (1.2) было эллиптическим, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$B_0^2 - A_0 C_0 < 0.$$

Если $B_0^2 - A_0 C_0 = 0$, то уравнение (1.2) – уравнение параболического типа. При выполнении неравенства

$$B_0^2 - A_0 C_0 > 0$$

это уравнение классифицируется как уравнение гиперболического типа.

Подчеркнем, что приведенная классификация зависит от выбора точки. Например, уравнение Трикоми в R^2 – уравнение смешанного типа, которое имеет вид

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

При $y < 0$ оно гиперболического типа ($B^2 - AC = -y > 0$), при $y > 0$ – эллиптического типа, а при $y = 0$ – параболического типа.

В любой точке из R^2 уравнение Лапласа – уравнение эллиптического типа, так как $B_0^2 - A_0 C_0 = -1$. Уравнение теплопроводности – уравнение параболического типа, а уравнение колебаний струны – уравнение гиперболического типа.

Упражнение 1.2. Проверьте два последних утверждения.

Пусть рассматривается уравнение (1.2), а также задана некоторая кривая в R^2 в неявной форме.

$$\varphi(x, y) = 0, \quad (\varphi(x, y) = \text{const}). \quad (1.3)$$

Здесь функция $\varphi(x, y)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \frac{\partial \varphi}{\partial y}$

и $\text{grad} \varphi \equiv \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \neq 0$.

Кривая, заданная уравнением (1.3), называется характеристической кривой для уравнения (1.2), если для $\varphi(x, y)$ справедливо равенство

$$A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) принято называть характеристическим уравнением.

Задача 1.1. Если мы рассмотрим уравнение Лапласа, то соответствующее ему характеристическое уравнение примет вид

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Очевидно, что решений в рассматриваемом классе функций оно не имеет. Тем самым установлено, что уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

не имеет характеристических кривых (характеристик). Последнее утверждение остается верным для всех уравнений эллиптического типа (докажите данное утверждение).

Задача 1.2. Рассмотрим теперь уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

где $a = \text{const} > 0$. Соответствующее ему характеристическое уравнение приобретает вид

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - a^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Его можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - a\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0.$$

Для нахождения характеристик, следовательно, следует рассмотреть два дифференциальных уравнения первого порядка:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} - a\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + a\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Первое из них имеет решение $\varphi = \varphi(ax + y)$, а второе — $\varphi = \varphi(ax - y)$, где $\varphi(\cdot)$ — произвольная дифференцируемая функция.

Равенства

$$\varphi(ax + y) = C_1, \quad \varphi(ax - y) = C_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, определяют два семейства прямых:

$$ax + y = C_3, \quad ax - y = C_4,$$

где $C_3, C_4 \in R$. Эти прямые и будут характеристиками уравнения колебаний струны.

Задача 1.3. Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

приводит к уравнению характеристик $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0$. Общее его решение $\varphi = \varphi(y)$. Следовательно, из анализа уравнения $\varphi(y) = l_1$ вытекает, что $y = l_2$ – характеристические прямые уравнения теплопроводности.

Изложение вопросов, связанное с классификацией дифференциальных уравнений с частными производными, можно найти также в широко известных учебниках и учебных пособиях [1–4, 8–10]. Ниже приведены задачи для самостоятельного решения.

Определить тип следующих уравнений:

- 1.1. $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 2u - xy = 0$;
- 1.2. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 2u_y - u = 0$;
- 1.3. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 2u_y - 3u = 0$;
- 1.4. $4u_{xx} + 2u_{xy} - 5u_{yy} + e^u = 0$;
- 1.5. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_x u_y = 0$.

В плоскости x, y выделить область D , где уравнение имеет эллиптический (гиперболический, параболический) тип:

- 1.6. $xu_{xx} + yu_{yy} - u^2 = 0$;
- 1.7. $(1 + x^2)u_{xx} + (4 + x^2 + y^2)u_{xy} + (1 + y^2)u_{yy} = 0$;
- 1.8. $(1 + y)u_{xx} + 2xyu_{xy} + (1 + y)u_{yy} - u_x = 0$;
- 1.9. $(1 + x^2 + y^2)u_{xx} - 8(x^2 + y^2)u_{xy} + (1 + x^2 + y^2)u_{yy} = 0$;
- 1.10. Привести пример уравнения гиперболического типа, у которого было бы два семейства характеристик, расположенных под углом 90° ; 45° ; 30° ;

1.11. Привести пример уравнения параболического типа, у которого характеристики были бы расположены под углом 45° к оси Ox .

В данном разделе была изложена достаточно полная классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными. В случае уравнений второго

порядка с большим числом независимых переменных ситуация менее однозначная и, как правило, речь идет только о частичной классификации таких уравнений. Так, например, следуя формально методике, изложенной выше, два следующих уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} = 0$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} = 0,$$

где $u = u(x_1, x_2, x_3, x_4)$, следовало бы занести в один класс гиперболических уравнений, несмотря на очевидное между ними различие.

Ещё более затруднительная ситуация с уравнениями иных порядков. Так, например, уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$, которое принято называть уравнением колебаний балки ($u = u(t, x)$), с формальной точки зрения после применения аналогий из построений выше "можно отнести" к уравнениям эллиптического типа. Действительно, с данным уравнением связана, форма 4-го порядка $\xi^2 + \eta^4$, которая, безусловно, положительно определена. В гл. 8 также будет показано, что для этого уравнения содержательны краевые задачи, аналогичные тем, которые изучаются для уравнения колебаний струны. Таким образом, быть может, естественней назвать его уравнением гиперболического типа.

Изложенный в данном разделе подход к классификации дифференциальных уравнений второго порядка становится совсем неконструктивным при рассмотрении дифференциальных уравнений нечетного порядка. Тем не менее изложенный выше подход к классификации уравнений второго порядка является общепризнанным, "классическим", так как сформирован в XIX веке в работах основоположников теории дифференциальных уравнений с частными производными. На первом этапе, как правило, рассматривались именно дифференциальные уравнения второго порядка и с двумя независимыми переменными.

Глава 2. Гармонические функции

В данной главе рассмотрим уравнение

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (2.1)$$

где $u = u(x, y, z)$. Уравнение (2.1), как уже ранее упоминалось, называется уравнением Лапласа. Наряду с уравнением (2.1), можно рассматривать уравнение Лапласа в случае двух пространственных переменных x, y , то есть когда $u = u(x, y)$:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2.2)$$

Определение 2.1. Функция $u = u(x, y, z)$ ($u = u(x, y)$), непрерывная со своими частными производными до второго порядка включительно в некоторой области $\mathcal{D} \subseteq R^3$ ($\mathcal{D} \subseteq R^2$) и удовлетворяющая там уравнению (2.1) ((2.2)), называется гармонической в области \mathcal{D} .

В силу линейности уравнения Лапласа очевидно, что линейная комбинация гармонических функций – гармоническая функция.

Некоторые примеры гармонических функций:

- 1) $u = ax + by + cz + d$, a, b, c, d – действительные числа;
- 2) $u = axy + bxz + cyz + d$;
- 3) $E_3(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, если $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$.

В последнем случае имеет место пример гармонической функции в $R^3 \setminus \{0\}$. В R^2 аналогичный пример выглядит следующим образом:

- 4) $E_2(x, y) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, при $x^2 + y^2 \neq 0$.

Функция $E_3(x, y, z)$ ($E_2(x, y)$) является примером так называемого фундаментального решения уравнения (2.1) ((2.2)). Строгое с математической точки зрения понятие фундаментального решения читатель может найти в [1].

В двумерном случае (R^2) существует непосредственная связь между гармоническими функциями и аналитическими (голоморфными) функциями комплексного переменного.

Напомним, что $f(z), z \in C$ (C – поле комплексных чисел) называют аналитической функцией, если она дифференцируема в смысле комплексного анализа. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где функции $u(x, y), v(x, y)$

дифференцируемы. Тогда для того, чтобы $f(z)$ была аналитической, следует проверить условия Коши - Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.3)$$

Элементарно проверяется, что действительная часть аналитической функции, то есть $u(x, y)$, является решением уравнения Лапласа (2.2), то есть гармонической функцией. Для этого достаточно первое уравнение (2.3) продифференцировать по x , а второе – по y . Затем полученные равенства сложить. Аналогично проверяется, что и $\Delta v = 0$.

Пример 2.1. Пусть $f(z) = e^z$. Тогда $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, в данном случае $u(x, y) = e^x \cos y, v(x, y) = e^x \sin y$ служат еще одним примером пары гармонических функций.

Задача 2.1. Найти гармонические функции, используя то обстоятельство, что $f(z)$ – аналитическая (голоморфная) функция комплексного переменного

- а) $f(z) = z^2$;
- б) $f(z) = z^3$;
- в) $f(z) = z^n, n \in N$ – множество натуральных чисел;
- г) $f(z) = e^{z^2}$.

Напомним некоторые основные свойства гармонических функций.

Принцип максимума. Пусть $\mathcal{D} \subseteq R^3(R^2)$ и \mathcal{D} – ограниченная область. Функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) $u(x, y, z)$ непрерывна в $\bar{\mathcal{D}}$ – замыкании \mathcal{D} ;
- 2) в области \mathcal{D} она является гармонической.

Тогда $u(x, y, z)$ достигает своего максимума на $\partial\mathcal{D}$ – границе области, то есть

$$\max_{(x,y,z) \in \bar{\mathcal{D}}} u(x, y, z) = \max_{(x,y,z) \in \partial\mathcal{D}} u(x, y, z).$$

Доказательство принципа max

Обозначим через m максимум значений гармонической функции $u(x, y, z)$ на границе ∂D .

Предположим, что $\max_{\bar{D}} u(x, y, z) = M > m$ и $P(x_0, y_0, z_0) \in D$ – точка, где достигается этот max, т. е. $u(x_0, y_0, z_0) = M$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v = v(x, y, z) = u(x, y, z) + \frac{M - m}{2d^2} \left\{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right\},$$

где d — диаметр области D , т. е.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq d^2.$$

Очевидно, что на границе ∂D

$$v \leq m + \frac{M - m}{2d^2} d^2 = \frac{M + m}{2} < M.$$

В то же время $v(x_0, y_0, z_0) = u(x_0, y_0, z_0)$. Отсюда следует, что максимум $v(x, y, z)$ внутри D не меньше, чем M , а, следовательно, больше, чем \max на ∂D . Итак, функция $v(x, y, z)$ достигает своего \max во внутренней точке $Q(x_1, y_1, z_1) \in D$. Как известно, в точке \max Q

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leq 0, \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \leq 0.$$

Следовательно,

$$\Delta v|_Q \leq 0.$$

Однако

$$\Delta v = \Delta u + \Delta w,$$

где $u = u(x, y, z)$ — гармоническая функция в D ($\Delta u = 0$), а

$$w = \frac{M - m}{2d^2} \left\{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right\}.$$

Итак,

$$\Delta v = \left(\frac{M - m}{2d^2} \right) 6 > 0.$$

Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Из этого утверждения вытекают два следствия.

Следствие 2.1.

$$\min_{(x,y,z) \in \overline{D}} u(x, y, z) = \min_{(x,y,z) \in \partial D} u(x, y, z).$$

Следствие 2.2.

$$\max_{(x,y,z) \in \overline{D}} |u(x, y, z)| = \max_{(x,y,z) \in \partial D} |u(x, y, z)|.$$

Отметим, еще два свойства гармонических функций.

Пусть в ограниченной области \mathcal{D} с гладкой границей $\partial\mathcal{D}$ для функции $u(x, y, z)$ выполнены следующие условия:

- 1) $u(x, y, z)$ – непрерывно дифференцируемая функция в $\overline{\mathcal{D}}$;
- 2) при $(x, y, z) \in \mathcal{D}$ функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то есть является гармонической.

Тогда справедливо равенство

$$\iint_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

Здесь $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по направлению нормали к $\partial\mathcal{D}$ (обычно по направлению внешней нормали).

Напомним важное свойство гармонических функций. Если функция $u(x, y, z)$ гармонична в $\mathcal{D} \subset R^3$ ($\mathcal{D} \subset R^2$), то она бесконечное число раз дифференцируема (принадлежит классу $C^\infty(\mathcal{D})$). Последнее, как известно, означает, что у данной функции $u(x, y, z)$ существуют непрерывные частные производные любого порядка, то есть $\frac{\partial^n u}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2} \partial z^{n_3}}$

($n = n_1 + n_2 + n_3$).

Более подробное изложение теории гармонических функций можно найти в любом доступном учебнике (см., например, главу 3 из учебника [2]). В рамках этого пособия далее ограничимся рассмотрением некоторых задач для конкретных областей, где удастся найти соответствующую функцию в явном виде, используя, как правило, метод Фурье (метод разделения переменных).

Глава 3. Задача Дирихле

Пусть $\mathcal{D} \subset R^3(R^2)$ и $\partial\mathcal{D}$ – граница этой области. Под задачей Дирихле понимают задачу по нахождению следующей гармонической функции $u(x, y, z)(u(x, y))$, если дополнительно справедливы следующие требования:

- 1) $u \in C(\overline{\mathcal{D}})$, то есть она непрерывна в замыкании области \mathcal{D} ;
- 2) $u|_{\partial\mathcal{D}} = f(x, y, z)$, где $f(x, y, z)$ – заданная функция на $\partial\mathcal{D}$, то есть f определена во всех точках $\partial\mathcal{D}$. Обычно считаем, что эта функция непрерывна.

В этом параграфе рассмотрим прежде всего частный случай, когда $\mathcal{D} = K_R = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}$, т. е. круг радиуса R с центром в нуле $\overline{\mathcal{D}} = \overline{K}_R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Наконец, $\partial\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}$. Здесь $R > 0$. Перейдем к полярным координатам, то есть положим

$$x = r \sin \varphi, y = r \cos \varphi,$$

где $r \geq 0, \varphi \in R(\varphi \in [0; 2\pi])$.

Упражнение 3.1. Показать, что оператор Лапласа в полярных координатах приобретает следующий вид:

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \quad (3.1)$$

или

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

В таком случае задачу Дирихле можно записать в виде двух равенств:

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (3.2)$$

$$u(r, \varphi)|_{r=R} = f(\varphi). \quad (3.3)$$

Здесь $f(\varphi)$ – непрерывная периодическая функция при $\varphi \in R$ и ее период равен 2π . Оператор Лапласа уместно переписать в виде (3.1).

В первой части этого раздела будет изложен метод Фурье. При его обосновании следует ввести дополнительные ограничения для функции, заданной на границе, то есть для $f(\varphi)$. Временно будем считать, что при всех рассматриваемых φ она непрерывно дифференцируема.

Алгоритм метода Фурье для задачи Дирихле в круге

На первом этапе найдем все решения уравнения Лапласа (3.2) в форме $u(r, \varphi) = A(r)B(\varphi)$, где $A(r) \neq 0, B(\varphi) \neq 0$, функция $B(\varphi)$ по переменной φ имеет период 2π . Функция $A(r)$ определена при $r = 0$, то есть $A(0) < \infty$ в символической записи, которая используется в некоторых рекомендованных учебных пособиях. Подставим $u(r, \varphi)$ в уравнение. Получим, что справедливо равенство

$$\frac{1}{r}(rA')'B + \frac{1}{r^2}A\ddot{B} = 0.$$

Здесь и ниже в этом параграфе штрихом обозначается производная по r , а точкой – по φ .

Домножим обе части последнего уравнения на $r^2/(AB)$. Тогда справедливо равенство

$$\frac{r(rA')'}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} = 0.$$

Первое слагаемое данного равенства зависит только от r , а второе – только от φ . Следовательно,

$$\frac{r(rA')'}{A} = \lambda, \quad \frac{\ddot{B}}{B} = -\lambda,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$. Итак, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} r(rA')' &= \lambda A, \\ \ddot{B} + \lambda B &= 0. \end{aligned}$$

Напомним, что последние два уравнения следует дополнить условиями $|A(0)| < \infty, B(\varphi + 2\pi) \equiv B(\varphi)$. Здесь $\lambda \in \mathbb{R}$ – параметр, который определяется из того условия, что у этой системы существуют нетривиальные решения, удовлетворяющие дополнительным условиям.

Для этого рассмотрим сначала краевую задачу

$$\ddot{B} + \lambda B = 0, \tag{3.4}$$

$$B(0) = B(2\pi), \dot{B}(0) = \dot{B}(2\pi). \tag{3.5}$$

Такую задачу обычно называют периодической краевой задачей, а для решения уравнения (3.4) условие (3.5) и условие $B(\varphi + 2\pi) = B(\varphi)$ эквивалентны. Напомним, что те λ , при которых существует нетривиальное решение, называют собственными значениями краевой задачи.

Пусть сначала $\lambda < 0$. Тогда общее решение уравнения (3.5) можно записать в следующем виде:

$$B(\varphi) = b_1 e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + b_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi},$$

где $b_1, b_2 \in R$. Подстановка $B(\varphi)$ в краевые условия (3.5) приводит к системе двух алгебраических уравнений для определения b_1, b_2 :

$$\begin{aligned} b_1 e^{\sqrt{-\lambda}2\pi} + b_2 e^{-\sqrt{-\lambda}2\pi} &= b_1 + b_2, \\ \sqrt{-\lambda}(b_1 e^{\sqrt{-\lambda}2\pi} - b_2 e^{-\sqrt{-\lambda}2\pi}) &= \sqrt{-\lambda}(b_1 - b_2). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\sqrt{-\lambda} \neq 0$, нетрудно проверить, что последняя система линейных уравнений имеет лишь нулевое решение.

Упражнение 3.2. Показать, что определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} e^{\sqrt{-\lambda}2\pi} - 1 & e^{-\sqrt{-\lambda}2\pi} - 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}2\pi} - 1 & -e^{-\sqrt{-\lambda}2\pi} + 1 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Все это означает, что среди действительных чисел $\lambda < 0$ нет собственных значений у краевой задачи (3.4), (3.5).

Пусть теперь $\lambda = 0$. Тогда общее решение уравнения (3.4) имеет вид

$$B(\varphi) = b_1 + b_2 \varphi.$$

При $b_2 = 0$ это решение периодически, т. е. $\lambda = 0$ – собственное число краевой задачи (3.4), (3.5). Соответствующая собственная функция имеет вид $B_0(\varphi) = \alpha_0, \alpha_0 \in R$.

При $\lambda > 0$ общее решение уравнения (3.4) можно записать в следующей форме:

$$B(\varphi) = \alpha \cos \sqrt{\lambda}\varphi + \beta \sin \sqrt{\lambda}\varphi (\alpha, \beta \in R).$$

Понятно, что при любых α, β функция $B(\varphi)$ периодична с периодом $2\pi/\sqrt{\lambda}$. Данная функция будет 2π - периодической, если $\sqrt{\lambda} = n, n \in N$ – множество натуральных чисел. Итак, $\lambda = \lambda_n = n^2$, а соответствующее такому λ_n решение может быть записано в следующей форме:

$$B_n(\varphi) = \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi,$$

где $\alpha_n, \beta_n \in R$, т. е. произвольные постоянные.

Определим теперь $A(r)$. Пусть $\lambda = \lambda_0 = 0$. Для $A_0(r)$ получаем уравнение $r(rA_0)' = 0$. Откуда, последовательно его интегрируя, находим, что $A_0(r) = q_0 \ln r + p_0$, ($p_0, q_0 \in R$). Из условия определенности $A_0(r)$ при $r = 0$ вытекает, что $A_0(r) = p_0$ (q_0 следует выбрать равным нулю).

Пусть теперь $\lambda = \lambda_n = n^2$. Для определения $A_n(r)$ мы имеем уравнение Эйлера $r^2 A_n'' + r A_n' - n^2 A_n = 0$. Его общее решение, как известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, можно записать в следующем виде:

$$A_n(r) = p_n r^n + q_n r^{-n} \quad (p_n, q_n \in R).$$

В нашем случае следует положить $q_n = 0$ ($|A_n(0)| < \infty$).

Итак, уравнение Лапласа в форме (3.2) допускает счетное семейство частных решений:

$$u_n(r, \varphi) = A_n(r) B_n(\varphi),$$

где

$$A_0(r) = p_0, A_n(r) = p_n r^n,$$

$$B_0(\varphi) = \alpha_0, B_n(\varphi) = \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi.$$

Решение задачи (3.2), (3.3) будем искать в виде суммы частных решений:

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(r, \varphi) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi),$$

где $c_0, c_n, d_n \in R$ и пока произвольные постоянные. Положим $r = R$. Получаем равенство (см.(3.3))

$$f(\varphi) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi). \quad (3.6)$$

Пусть известная функция $f(\varphi)$ разложена в ряд Фурье:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \quad (3.7)$$

Напомним, что для коэффициентов Фурье справедливы формулы:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

Сравнение формул (3.6), (3.7) приводит к равенствам:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{a_n}{R^n}, d_n = \frac{b_n}{R^n}.$$

В результате получаем формулу для решения задачи (3.2), (3.3):

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \quad (3.8)$$

Обоснование справедливости формулы (3.8) предполагает проверку двух свойств:

- 1) при $(r, \varphi) \in \overline{K}_R$ она непрерывна;
- 2) при $(r, \varphi) \in K_R$ данная функция, по крайней мере, дважды дифференцируема.

Для проверки первого из этих свойств достаточно доказать равномерную сходимость ряда (3.8) при $r \leq R$. Напомним, что при выполнении условия о непрерывной дифференцируемости и периодичности функции $f(\varphi)$ вытекает сходимость следующих числовых рядов:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|, \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|,$$

где a_k, b_k – коэффициенты Фурье функции $f(\varphi)$. Тем самым ряд в правой части (3.8) мажорируется числовым рядом

$$|\frac{a_0}{2}| + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|).$$

Из известной теоремы Вейерштрасса (вспомним математический анализ) вытекает, что ряд в правой части (3.8) сходится, а его сумма – непрерывная функция.

Для проверки второго свойства достаточно рассмотреть круг радиуса $R_1(K_{R_1})$, где $R_1 < R$, после чего проверить дифференцируемость ряда (3.8) в круге \overline{K}_{R_1} .

Упражнение 3.3. Доказать, что продифференцированный m раз по r и $2k$ раз по φ ряд сходится равномерно при $r \leq R_1$.

Известно, что ряд (3.8) можно преобразовать и тогда решение будет записано в интегральной форме. Для этого надо подставить явные выражения для a_n, b_n и просуммировать получившийся функциональный ряд (более подробно вариант вывода интегральной формулы можно найти в учебнике [1]). В результате получим

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi)} d\psi,$$

где $r < R$.

Данная формула носит название формулы Пуассона. В [1] можно найти и доказательство того утверждения, что формула Пуассона справедлива и для любой непрерывной функции $f(\varphi)$, т. е. можно отказаться от требования непрерывной дифференцируемости. Последнее было необходимо требовать для обоснования метода Фурье.

Пусть $I = I(r, \varphi, \psi) = (R^2 - r^2)/(R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi))$. Функция I носит название ядра Пуассона. Для ядра Пуассона справедливы следующие свойства:

- 1) $I(r, \varphi, \psi) > 0$ при $r < R$;
- 2) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(r, \varphi, \psi) d\psi \equiv 1$.

Упражнение 3.4. Проверить первое свойство ядра Пуассона.

Второе из отличительных свойств вытекает из теоремы единственности решения задачи Дирихле в круге.

Рассмотрим следующую задачу Дирихле $\Delta u = 0$, $u(r, \varphi)|_{r=R} = 1$. Она имеет единственное решение $u(r, \varphi) \equiv 1$. Вместе с тем решение этой задачи может быть найдено с помощью формулы Пуассона, т. е.

$$1 = u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(r, \varphi, \psi) d\psi.$$

Последнее равенство доказывает соответствующее утверждение.

Упражнение 3.5. В декартовых координатах формулу Пуассона следует записать в виде

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{R^2 - (x^2 + y^2)}{R^2 + (x^2 + y^2) - 2R(x \cos \psi + y \sin \psi)} d\psi.$$

Упражнение 3.6. Показать, что формулу Пуассона можно записать в комплексной форме:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left(-1 + \frac{Re^{i\psi}}{Re^{i\psi} - (x + iy)} + \frac{Re^{-i\psi}}{Re^{-i\psi} - (x - iy)} \right) d\psi.$$

Вывод формулы Пуассона

Рассмотрим задачу Дирихле в круге, т. е.

$$\Delta u = 0, \quad u|_{r=R} = f(\varphi).$$

При выводе этой формулы будем считать, что $f(\varphi) \in C^1(R)$ и $f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$, т. е. $f(\varphi)$ — непрерывно дифференцируемая, 2π — периодическая функция. Решение данной задачи, как было показано на предшествующих страницах данной главы, будет функция

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \left\{ a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi \right\},$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ — коэффициенты Фурье функции $f(\varphi)$, т. е.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin n\psi d\psi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Следовательно, ряд в правой части формулы для решения задачи Дирихле сходится равномерно. Она может быть записана в следующем виде:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} \left\{ \cos n\varphi \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi \right) + \right. \\ \left. + \sin n\varphi \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin n\psi d\psi \right) \right\}.$$

В силу равномерной сходимости рядов в правых частях двух последних формул операции суммирования и интегрирования можно поменять местами. Итак,

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n [\cos n\varphi \cos n\psi + \sin n\varphi \sin n\psi] \right\} d\psi = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n(\varphi - \psi) \right\} d\psi,$$

где $t = \frac{r}{R}$. В силу формул Эйлера

$$2 \cos n(\varphi - \psi) = e^{in(\varphi - \psi)} + e^{-in(\varphi - \psi)}.$$

Поэтому

$$\rho = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n(\varphi - \psi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} t^n e^{in(\varphi - \psi)} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n e^{-in(\varphi - \psi)}.$$

Два последних слагаемых – это геометрические прогрессии со знаменателями $q = te^{i(\varphi - \psi)}$ и \bar{q} соответственно. Напомним, что $|q| = |t| = \left| \frac{r}{R} \right| =$

$\frac{r}{R} < 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\rho &= 1 + \frac{te^{i(\varphi-\psi)}}{1-te^{i(\varphi-\psi)}} + \frac{te^{-i(\varphi-\psi)}}{1-te^{-i(\varphi-\psi)}} = \\
&= \frac{1 - (te^{i(\varphi-\psi)} + te^{-i(\varphi-\psi)}) + t^2 + te^{i(\varphi-\psi)} + te^{-i(\varphi-\psi)} - t^2 - t^2}{1 - (te^{i(\varphi-\psi)} + te^{-i(\varphi-\psi)}) + t^2} = \\
&= \frac{1 - t^2}{1 + t^2 - 2t \cos(\varphi - \psi)} = \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\frac{r}{R} \cos(\varphi - \psi)} = \\
&= \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \psi)} = I(r, \varphi, \psi).
\end{aligned}$$

Вывод формулы завершен.

Задача 3.1. Решить задачу Дирихле в круге $K_R = \{x^2 + y^2 < R^2\}$, если на границе круга имеем условие $u(R, \varphi) = f(\varphi)$:

- а) $R = 1, f(\varphi) = \cos^2 \varphi + \sin^3 2\varphi$;
- б) $R = 2, f(\varphi) = \sin^2 \varphi + \cos^2 3\varphi$;
- в) $R = 3, f(\varphi) = \begin{cases} 0, \varphi \in [-\pi; 0), \\ \sin^2 \varphi, \varphi \in [0; \pi], \end{cases}$

а на остальные значения φ функция $f(\varphi)$ продолжена по периодичности.

Задача 3.2. Найти все значения параметра a , при которых задача Дирихле в круге $R = 1$ имеет такое решение $u(r, \varphi)$, что $\iint_{K_R} u^2 dx dy = 10$.

Здесь $\Delta u = 0, u(1, \varphi) = a + \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi$.

Кроме задачи Дирихле внутри круга K_R с центром в нуле, можно рассмотреть другие области, связанные с кругом, где решение может быть найдено методом Фурье в полярных координатах. К таковым относится, например, задача Дирихле во внешности круга

$$\Delta u = 0, \quad (3.9)$$

$$u(R, \varphi) = f(\varphi), \quad (3.10)$$

где $u = u(r, \varphi)$, а $r > R$. По переменной φ с необходимостью эта функция имеет период 2π . Наконец, $f(\varphi) \in C^1(R)$, т. е. данная функция непрерывно дифференцируема. Решение задачи (3.11), (3.12) ищем как функцию $u(r, \varphi)$, удовлетворяющую дополнительному условию:

$$|u(r, \varphi)| \leq M,$$

если $r \in [R, \infty)$.

Задача 3.3. Решение задачи (3.9), (3.10) может быть задано формулой

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

где $\{a_n\}, \{b_n\}$ – коэффициенты Фурье функции $f(\varphi)$, то есть

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Задача 3.4. Пусть в условиях задачи 3.3

а) $R = 1, f(\varphi) = \cos^2 \varphi;$

б) $R = 2, f(\varphi) = \sin^3 \varphi;$

в) $R = 1, f(\varphi) = \begin{cases} \sin^2 \varphi, \varphi \in [-\pi; 0), \\ 0, \varphi \in [0; \pi]. \end{cases}.$

Найти $u(r, \varphi)$.

Следующая аналогичная задача – это задача Дирихле в кольце $V = \{(\rho, \varphi), R_1 < \rho < R_2\}$, где $0 < R_1 < R_2$, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$:

$$\Delta u = 0, \quad u|_{r=R_1} = f_1(\varphi), \quad u|_{r=R_2} = f_2(\varphi).$$

Последовательно применяя алгоритм метода Фурье (разделения переменных), сначала получаем, что решение последней задачи может быть представлено в виде ряда

$$u(\rho, \varphi) = A_0 \ln \rho + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}) \cos n\varphi + (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) \sin n\varphi \},$$

где коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n могут быть определены из граничных условий.

Пусть функции $f_1(\varphi)$, $f_2(\varphi)$ представлены в виде рядов

$$f_1(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi,$$

$$f_2(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi,$$

где при $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\varphi) \sin n\varphi d\varphi,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(\varphi) \sin n\varphi d\varphi,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\varphi) d\varphi, \quad \alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(\varphi) d\varphi.$$

Поэтому получаем систему

$$\begin{cases} A_0 \ln R_1 + B_0 = \frac{a_0}{2}, \\ A_0 \ln R_2 + B_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \end{cases}$$

а также

$$\begin{cases} A_n R_1^n + B_n R_1^{-n} = a_n, \\ A_n R_2^n + B_n R_2^{-n} = \alpha_n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_n R_1^n + D_n R_1^{-n} = b_n, \\ C_n R_2^n + D_n R_2^{-n} = \beta_n. \end{cases}$$

Решая эти системы, получаем, что

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\alpha_0 - a_0}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}}, & B_0 &= \frac{a_0 \ln R_2 - \alpha_0 \ln R_1}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}}, \\ A_n &= \frac{\alpha_n R_2^n - a_n R_1^n}{R_2^{2n} - R_1^{2n}}, & B_n &= \frac{R_1^n \alpha_n - R_2^n a_n}{R_2^{2n} - R_1^{2n}} R_1^n R_2^n, \\ C_n &= \frac{\beta_n R_2^n - b_n R_1^n}{R_2^{2n} - R_1^{2n}}, & D_n &= \frac{R_1^n \beta_n - R_2^n b_n}{R_2^{2n} - R_1^{2n}} R_1^n R_2^n. \end{aligned}$$

Отметим, что знаменатели последних шести формул отличны от 0, так как $R_2 > R_1$.

Задача 3.5. Найти решение следующей задачи Дирихле:

$$\Delta u = 0,$$

$$u(R_1, \varphi) = f_1(\varphi), u(R_2, \varphi) = f_2(\varphi).$$

Здесь $\varphi \in R, r \in [R_1, R_2]$, функции $f_1(\varphi), f_2(\varphi)$ периодичны с периодом 2π и непрерывно дифференцируемы.

Найти решение этой задачи в частном случае:

- а) $R_1 = 1, R_2 = 2, f_1(\varphi) = \cos^2 \varphi, f_2(\varphi) = \sin^2 \varphi$;
- б) $R_1 = 2, R_2 = 4, f_1(\varphi) = 0, f_2(\varphi) = \sin^3 \varphi$.

Следующая задача для сектора, то есть для области $\rho_R = \{(r, \varphi) : 0 \leq r < R, \varphi \in (0, a)\}$, где $a \leq 2\pi$.

$$\Delta u = 0, \tag{3.11}$$

$$u(R, \varphi) = f(\varphi), \tag{3.12}$$

$$u(r, 0) = u(r, a) = 0. \tag{3.13}$$

Здесь $f(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая функция, для которой справедливы следующие равенства: $f(0) = f(a) = 0$. Эти условия в данном и аналогичных случаях носят название условий согласования. Здесь

изучен частный случай задачи Дирихле, так как рассмотрен вариант однородных граничных условий (3.13). В общем случае следовало бы условия (3.13) заменить на следующие:

$$u(r, 0) = \varphi_0(r), u(r, a) = \varphi_a(r).$$

Задача 3.6. Решить задачу (3.11) – (3.13), а также рассмотреть следующие частные случаи:

- а) $f(\varphi) = \sin 2\varphi, \varphi \in [0, \pi]$;
- б) $f(\varphi) = \sin 6\varphi, \varphi \in [0, \frac{\pi}{3}]$.

Отметим, что общее решение задачи (3.11) – (3.13) имеет вид

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{(\frac{\pi n}{a})} \sin((\frac{\pi n}{a})\varphi).$$

Напомним, что уравнение Пуассона (неоднородное уравнение Лапласа) в полярных координатах приобретает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varphi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2} = F(r, \varphi).$$

Далее ограничимся частным случаем, когда $F(r, \varphi) = F(r)$, т. е. не зависит от φ .

Задача 3.7. Решить задачу Дирихле:

$$\Delta u = F(r), \tag{3.14}$$

$$u(R, \varphi) = f(\varphi), \tag{3.15}$$

где $r \in [0, R]$, $f(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $F(r)$ – непрерывная функция. Найти решение задачи (3.14), (3.15), если

- а) $f(\varphi) = \cos^2 2\varphi, F(r) = r^2, R = 1$;
- б) $f(\varphi) = \sin^3 2\varphi, F(r) = r^4, R = 2$;
- в) $f(\varphi) \equiv 0, F(r) = r^2, R = 4$;
- г) $f(\varphi) \equiv 1, F(r) = 1, R = 1$.

Решим для примера задачу 3.7 г). Ее решение будем искать в виде суммы $u = w + v$, где $w(r, \varphi)$ – решение задачи:

$$\Delta w = 0, w(1, \varphi) = 1.$$

Легко определить, что $w(r, \varphi) \equiv 1$. Второе слагаемое будем искать как частное решение $\Delta v = 1, v(1) = 0$, и, конечно, $v(r)$ определена при $r = 0$. Тем самым, учитывая то обстоятельство, что $v(r)$ не зависит от r , функция $v(r)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $\frac{1}{r}(rv')' = 1$.

Последовательно его интегрируя, находим, что $rv' = \frac{r^2}{2} + c_1$, а затем $v(r) = \frac{r^2}{4} + c_1 \ln r + c_2$. Но с необходимостью имеем, что $c_1 = 0$. Наконец, $v(1) = \frac{1}{4} + c_2 = 0$, то есть $c_2 = -\frac{1}{4}$. Откуда получим, что

$$u(r, \varphi) = 1 + \frac{r^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{r^2}{4} + \frac{3}{4}.$$

Здесь выписали решение в полярных координатах, но $r^2 = x^2 + y^2$. Поэтому нетрудно переписать явный вид решения уже в декартовых координатах:

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) + \frac{3}{4}.$$

Задача 3.8. Пусть

$$\mathcal{D} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}.$$

В данном прямоугольнике рассматривается задача Дирихле:

$$\Delta u = 0,$$

$$u(x, 0) = f_1(x), u(x, b) = f_2(x),$$

$$u(0, y) = u(a, y) = 0,$$

где функции $f_1(x), f_2(x)$ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям согласования:

$$f_1(0) = f_1(a) = f_2(0) = f_2(a) = 0.$$

Решить эту задачу, применяя метод Фурье.

Указание. На первом этапе следует найти все решения вида $u(x, y) = A(x)B(y)$, где $A(0) = A(a) = 0$. Функции $A(x), B(y)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + \lambda A = 0, \frac{d^2 B}{dx^2} - \lambda B = 0.$$

Следовательно, для $A(x)$ сформирована краевая задача. Из ее анализа находим $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2$ и $A_n(x) = \sin \frac{\pi n}{a} x$ ($n = 1, 2, \dots$). Определяя теперь линейно независимые решения уравнения для $B(y)$ в виде $\operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} y$ и $\operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} (b - y)$, находим общее решение задачи (3.8):

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi n}{a} x \right) \left(C_n \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} y \right) + D_n \operatorname{sh} \left(\frac{\pi n}{a} (b - y) \right) \right).$$

Задача 3.9. Пусть $\mathcal{D} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$. Для него решить следующую задачу Дирихле:

$$\Delta u = 0,$$

$$u(x, 0) = u(x, b) = 0,$$

$$u(0, y) = g_1(y), u(a, y) = g_2(y),$$

где $g_1(y), g_2(y)$ – непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$g_1(0) = g_1(b) = g_2(0) = g_2(b) = 0.$$

Задача 3.10. В прямоугольнике \mathcal{D} решить задачу Дирихле:

$$\Delta u = 0,$$

$$u(x, 0) = f_1(x), u(x, b) = f_2(x),$$

$$u(0, y) = g_1(y), u(a, y) = g_2(y),$$

здесь непрерывно дифференцируемые функции $f_1(x), f_2(x), g_1(y), g_2(y)$ удовлетворяют условиям согласования:

$$g_1(0) = f_1(0), g_1(b) = f_2(0), g_2(0) = f_1(a), g_2(b) = f_2(a).$$

Указание. Свести решение задачи к последовательному решению задач 3.8 и 3.9.

Задача 3.11. Пусть в условиях задачи (3.10) выбрано:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } a = \pi, b = \pi, f_1(x) = \sin 3x, f_2(x) = \sin x, g_1(y) = g_2(y) = 0, \\
&\text{б) } a = 2, b = 1, f_1(x) = f_2(x) = 0, g_1(y) = \sin^3 \pi y, g_2(y) = \sin 2\pi y, \\
&\text{в) } a = 1, b = 1, f_2(x) \equiv 0, g_2(x) \equiv 0, f_1(x) = x(1 - x), \\
&\quad g_1(y) = y(1 - y), \\
&\text{г) } a = 1, b = 1, f_1(x) = 1, f_2(x) = 2, g_1(y) = y + 1, g_2(y) = 1 - y, \\
&\text{д) } a = \pi, b = \pi, f_1(x) = \sin x, f_2(x) = \sin 2x, g_1(y) = \sin 3y, \\
&\quad g_2(y) = \sin 4y.
\end{aligned}$$

Глава 4. Задача Неймана

Пусть $D \in R^3$ (R^2) и ∂D — гладкая граница области. Под задачей Неймана понимается задача построения гармонической функции $u(x, y, z)$ ($u(x, y)$), удовлетворяющей следующим условиям:

1) $u \in C^1(\overline{D})$, т. е. функция непрерывно дифференцируема в \overline{D} (в точках границы, как обычно, производная понимается односторонней);

2) $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D} = f(x, y, z)$ ($f(x, y)$), где $f(x, y, z)$ ($f(x, y)$) — заданная непрерывная функция, n — направление внешней нормали.

Как известно из математического анализа,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\hat{x}\hat{n}) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\hat{y}\hat{n}) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\hat{z}\hat{n}).$$

В этом параграфе, как и ранее, рассмотрим частный случай, когда $D = K_R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq R\}$ — круг радиуса R с центром в нуле. В этом случае задачу перепишем в полярных координатах для $u(r, \varphi)$ в виде

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 < r < R, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = f(\varphi). \quad (4.2)$$

Здесь $f(\varphi) = f(R \cos \varphi, R \sin \varphi)$ — 2π -периодическая функция, которую будем считать непрерывно дифференцируемой. Очевидно, что

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Покажем, что решение задачи (4.1), (4.2) определяется с точностью до произвольной постоянной.

Пусть $u_1(r, \varphi)$ и $u_2(r, \varphi)$ решения (4.1), (4.2). Обозначим $v(r, \varphi) = u_1(r, \varphi) - u_2(r, \varphi)$. Тогда для $v(r, \varphi)$ имеем краевую задачу:

$$\Delta v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0. \quad (4.3)$$

Вычислим

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^R \int_0^{2\pi} r \Delta v(r, \varphi) v(r, \varphi) d\varphi dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right] v(r, \varphi) dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} v \Big|_0^R \right) d\varphi + \\
&\quad + \int_0^R \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} v \Big|_0^{2\pi} \right) dr - \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[r \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)^2 \right] d\varphi dr.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Первые два интеграла в правой части (4.4), очевидно, равны нулю. Из последнего интеграла вытекает, что $\partial v / \partial r = \partial v / \partial \varphi \equiv 0$. Отсюда следует, что $v(r, \varphi) = \text{const}$.

Согласно общим свойствам гармонических функций (см. гл. 2)

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0. \tag{4.5}$$

Упражнение 4.1. Показать, что для круга K_R условие (4.5) эквивалентно условию

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u(R, \varphi)}{\partial r} d\varphi = 0. \tag{4.6}$$

Из (4.6) вытекает, что необходимым условием разрешимости задачи (4.1), (4.2) является справедливость равенства

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0. \tag{4.7}$$

В гл. 4 показано, что общим формальным решением уравнения Лапласа в круге является ряд

$$u(r, \varphi) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n (c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi). \tag{4.8}$$

Построим решение краевой задачи (4.1), (4.2). Представим функцию $f(\varphi)$ в виде ряда Фурье:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad (4.9)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

Отметим, что ряд (4.9) сходится равномерно. Согласно (4.7) $a_0 = 0$.

Подставим (4.8) в (4.2). С учетом (4.9) получим следующие соотношения на коэффициенты:

$$c_n = a_n \frac{R}{n}, \quad d_n = b_n \frac{R}{n}.$$

В результате решение краевой задачи (4.1), (4.2) будет иметь вид

$$u(r, \varphi) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^{n-1}} \frac{1}{n} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \quad (4.10)$$

Упражнение 4.2. Показать, что ряд (4.10) представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию в K_R и непрерывно дифференцируемую функцию в \bar{K}_R .

Упражнение 4.3. Построить решение внешней задачи Неймана, т. е. задачи

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad R < r < \infty, \quad (4.11)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = f(\varphi). \quad (4.12)$$

Задача 4.1. Указать значение параметра a , при котором краевая задача

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in K_R,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial K_R} = f(x, y, a)$$

имеет решение, и построить это решение, если

- a) $f(x, y, a) = a + 2x + 4x^2y + y^2x, \quad R = 2;$
- b) $f(x, y, a) = 4 + 2ay^2 + 6x^4y, \quad R = 3;$
- c) $f(x, y, a) = 12x + 6a(x^2 + y^2) + x^5y^3, \quad R = 1;$
- d) $f(x, y, a) = ay^2x^2 + 6x^3y^3 + 7x^4y^2, \quad R = 3.$

Задача 4.2. Указать значение параметра a , при котором краевая задача

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in R^2 \setminus K_R,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial K_R} = f(x, y, a)$$

имеет решение, и построить это решение, если

- a) $f(x, y, a) = a + 6x^2 + 4y^2x + x^2y^4, \quad R = 1;$
- b) $f(x, y, a) = 2 + 6ax^2 + 7y^2x^4, \quad R = 2;$
- c) $f(x, y, a) = 12y + 4(ay^2 + x) + x^5, \quad R = 3;$
- d) $f(x, y, a) = 16ax^2y^2 + 4xy^5 + x^5y, \quad R = 3.$

Рассмотрим теперь задачу Неймана в кольцевой области $V = \{(x, y) : R_1 < x^2 + y^2 < R_2\}$:

$$\Delta u = 0, \tag{4.13}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial V} = f(x, y). \tag{4.14}$$

Здесь $f(x, y)$ считаем непрерывно дифференцируемой функцией. Перейдем в (4.13), (4.14) к полярным координатам. В результате имеем для $u(r, \varphi)$ краевую задачу

$$\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad R_1 < r < R_2, \tag{4.15}$$

$$-\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R_1} = f_1(\varphi), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R_2} = f_2(\varphi), \tag{4.16}$$

где $f_j(\varphi) = f(R_j \cos \varphi, R_j \sin \varphi)$, $j = 1, 2$.

Общее формальное решение краевой задачи (4.15), (4.16) имеет вид (см. гл. 3)

$$u(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\varphi + (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\varphi]. \tag{4.17}$$

Последняя формула может быть получена с использованием алгоритма метода Фурье (разделения переменных) при изучении уравнения Лапласа в кольце (см. также предыдущий раздел, где рассматривалась задача Дирихле).

Разложим функции $f_1(\varphi)$, $f_2(\varphi)$ в ряды Фурье, т. е. пусть

$$f_1(\varphi) = \frac{a_{10}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{1n} \cos n\varphi + b_{1n} \sin n\varphi),$$

$$f_2(\varphi) = \frac{a_{20}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} \cos n\varphi + b_{2n} \sin n\varphi),$$

где

$$a_{j0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_j(\varphi) d\varphi, \quad j = 1, 2,$$

$$a_{jn} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f_j(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad b_{jn} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_j(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_1} B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (nA_n R_1^{n-1} - nB_n R_1^{-n-1}) \cos n\varphi + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (nC_n R_1^{n-1} - nD_n R_1^{-n-1}) \sin n\varphi = \\ & = -\frac{a_{10}}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (a_{1n} \cos n\varphi + b_{1n} \sin n\varphi), \\ & \frac{1}{R_2} B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (nA_n R_2^{n-1} - nB_n R_2^{-n-1}) \cos n\varphi + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (nC_n R_2^{n-1} - nD_n R_2^{-n-1}) \sin n\varphi = \\ & = -\frac{a_{20}}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} \cos n\varphi + b_{2n} \sin n\varphi). \end{aligned}$$

Из двух последних равенств вытекает, что справедливы равенства

$$\frac{B_0}{R_1} = -a_{10}, \quad \frac{B_0}{R_2} = a_{20},$$

т. е. с необходимостью

$$a_{20}R_2 = -a_{10}R_1$$

или

$$R_2 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(\varphi) d\varphi + R_1 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\varphi) d\varphi = 0.$$

Последнее равенство — условие разрешимости для рассматриваемого варианта задачи Неймана (задачи Неймана в кольце).

Данное условие разрешимости может быть получено иначе. Его можно вывести из условий разрешимости задачи Неймана в случае произвольной области (см. формулы (4.5)). При этом величина A_0 — произвольная.

Упражнение 4.5. Проверить такой вариант.

Остальные коэффициенты формулы (4.17) могут быть найдены как решения вспомогательных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (nR_1^{n-1}) A_n - (nR_1^{-n-1}) B_n = -a_{1n}, \\ (nR_2^{n-1}) A_n - (nR_2^{-n-1}) B_n = a_{2n}, \end{cases}$$

а также

$$\begin{cases} (nR_1^{n-1}) C_n - (nR_1^{-n-1}) D_n = -b_{1n}, \\ (nR_2^{n-1}) C_n - (nR_2^{-n-1}) D_n = b_{2n}. \end{cases}$$

Обе последние системы имеют единственное решение, так как их определители $\Delta_1, \Delta_2 \neq 0$ (и одинаковы, т. е. $\Delta_1 = \Delta_2$). Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \Delta_2 &= n^2 \{ R_2^{n-1} R_1^{-n-1} - R_1^{n-1} R_2^{-n-1} \} = \\ &= n^2 \frac{R_2^{2n} - R_1^{2n}}{(R_1 R_2)^{n+1}} \neq 0. \end{aligned}$$

Упражнение 4.6. Найти A_n, B_n, C_n, D_n .

Задача 4.3. Указать значение параметра a , при котором краевая задача (4.15), (4.16) разрешима, и построить решение, если

- а) $f_1(\varphi, a) = a + \cos^2 2\varphi + \cos^4 \varphi$, $f_2(\varphi) = \cos^5 \varphi$, $R_1 = 1$, $R_2 = 2$;
 б) $f_1(\varphi, a) = a \cos^2 2\varphi + \sin^2 3\varphi$, $f_2(\varphi) = \cos^3 \varphi + \cos^4 \varphi$,
 $R_1 = 2$, $R_2 = 3$;
 в) $f_1(\varphi, a) = a \sin^2 3\varphi + \cos^3 \varphi$, $f_2(\varphi) = \cos^6 \varphi$, $R_1 = 1$, $R_2 = 3$;
 г) $f_1(\varphi, a) = \cos^2 \varphi + a \cos^2 4\varphi$, $f_2(\varphi) = \sin^5 \varphi$, $R_1 = 1$, $R_2 = 4$.

Задача 4.4. В круге радиуса R с центром в начале координат решить методом Фурье краевую задачу

$$\Delta u = \frac{1}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,$$

$$\alpha u(r, \varphi)|_{r=R} - \beta \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = f(\varphi),$$

где $\alpha, \beta \in R$, а $f(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая, 2π периодическая функция.

Показать, то данная задача разрешима, если

$$\alpha \neq 0 \text{ и } \alpha \neq \beta \frac{n}{R}$$

ни при одном натуральном n .

Если $\alpha = 0$ или $\alpha = \beta \frac{k}{R}$ при некотором натуральном k , то данная задача имеет решение, если для $f(\varphi)$ выполнены условия разрешимости. Вывести эти условия.

Глава 5. Уравнение колебаний струны

Уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (5.1)$$

где $a = \text{const} > 0$, $u = u(x, t)$, как уже упоминалось ранее, называют уравнением колебаний струны. Для него обычно рассматривают задачи трех типов.

Первая задача (Задача на всей оси).

Пусть $x \in (-\infty, \infty)$, а $t \geq 0$. Требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую начальным условиям

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x). \quad (5.2)$$

Вторая задача (Задача на полуоси).

Пусть $x \geq 0, t \geq 0$. Требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую начальным условиям (5.2) при $x \geq 0$, а также одному краевому условию

$$u(0, t) = \varphi(t) \quad (5.3)$$

или

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \psi(t). \quad (5.4)$$

Впрочем, могут быть рассмотрены и иные условия, отличные от (5.3), (5.4). Здесь $\varphi(t), \psi(t)$ – заданные непрерывные функции. Особенно важен частный случай, когда $\varphi(t) \equiv 0, \psi(t) \equiv 0$. Тогда речь идет об однородных краевых условиях.

Краевые задачи.

Здесь $x \in [0; l], t \in [0, T]$, а l, T – заданные положительные постоянные. Требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую начальным условиям (5.2), а также краевым условиям.

Приведем 3 простейших варианта таких краевых условий:

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad u(l, t) = \varphi_2(t), \quad (5.5)$$

или

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \psi_1(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \psi_2(t), \quad (5.6)$$

или

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} - \alpha_1 u|_{x=0} = \theta_1(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} + \alpha_2 u|_{x=l} = \theta_2(t). \quad (5.7)$$

Здесь $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \theta_1(t), \theta_2(t)$ – заданные непрерывные функции, а $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Особую роль играет важный частный случай, когда $\varphi_1(t) \equiv 0, \varphi_2(t) \equiv 0, \psi_1(t) \equiv 0, \psi_2(t) \equiv 0, \theta_1(t) \equiv 0, \theta_2(t) \equiv 0$. При таком выборе правых частей равенств (5.5), (5.6), (5.7) рассматриваемые краевые условия называют однородными. Указанные краевые условия, по-видимому, простейший их вариант. Для них часто используют термин краевые условия типа Штурма-Лиувилля. Понятно, что возможен иной выбор краевых условий. Например,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, u|_{x=1} + ku|_{x=0} = 0.$$

Эти краевые условия встречаются в некоторых задачах радиофизики и не входят в класс краевых условий, выделяемый названием "краевые условия Штурма-Лиувилля". В рамках этого учебного пособия основное внимание будет уделено традиционным краевым условиям, т. е. (5.5), (5.6), (5.7).

Задача на всей оси

Обратимся сначала к задаче на всей оси, для которой можно вывести формулу, выражающую $u(x, t)$ через $f(x), g(x)$:

$$u(x, t) = \frac{f(x + at) + f(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(z) dz. \quad (5.8)$$

Формула (5.8) носит название формулы Даламбера и дает классическое решение задачи (5.1), (5.2), если $f(x) \in C^2(R)$, т. е. $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема при всех $x \in R$, а $g(x) \in C^1(R)$, т. е. $g(x)$ непрерывно дифференцируема.

Вывод формулы Даламбера

Введем новые независимые переменные:

$$\xi = x - at, \eta = x + at \quad (a > 0).$$

Последняя замена взаимно однозначная, так как

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\eta - \xi}{2a}.$$

Поэтому можно считать, что решение зависит от ξ, η , т. е. функция $u(\xi, \eta)$ является решением уравнения колебаний струны.

Отметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} a, \end{aligned}$$

а также, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right). \end{aligned}$$

После подстановки полученных для $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ выражений в уравнение (5.1) приходим уже к уравнению

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right).$$

После упрощений получим, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0 \right).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \psi_1(\eta).$$

т. е. последняя функция не зависит от ξ . Поэтому после интегрирования по переменной η имеем

$$u(\xi, \eta) = \psi(\eta) + \varphi(\xi), \quad \psi(\eta) = \int \psi_1(\eta) d\eta.$$

Возвращаемся к старым переменным (x, t) . В результате получим

$$u(x, t) = \psi(x + at) + \varphi(x - at).$$

Теперь следует функции $\varphi(z_1)$, $\varphi(z_2)$ выразить через известные (заданные) функции $f(z_1)$, $f(z_2)$. Получаем, что

$$\psi(x) + \varphi(x) = f(x),$$

$$a\psi'(x) - a\varphi'(x) = g(x).$$

После дифференцирования предпоследнего уравнения получим систему

$$\begin{cases} \psi'(x) + \varphi'(x) = f'(x), \\ \psi'(x) - \varphi'(x) = \frac{g(x)}{a}. \end{cases}$$

Отсюда получим, что

$$\begin{cases} \psi'(x) = \frac{f'(x)}{2} + \frac{g(x)}{2a}, \\ \varphi'(x) = \frac{f'(x)}{2} - \frac{g(x)}{2a} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \psi(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^x g(z) dz + \alpha, \\ \varphi(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^x g(z) dz + \beta. \end{cases}$$

Но так как $\psi(x) + \varphi(x) = f(x)$, то $\alpha + \beta = 0$. Следовательно,

$$u(x, t) = \frac{f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} g(z) dz + \frac{f(x - at)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} g(z) dz.$$

Используя аддитивные свойства определенных интегралов, получаем окончательную редакцию формулы Даламбера (см. (5.8)).

Упражнение 5.1. Пусть в уравнении (5.1) $a = 1$, а начальные условия (5.2) рассматриваются в частном случае, когда

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x), \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Тогда решение задачи (5.1), (5.2)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\operatorname{arctg}(x+t) + \operatorname{arctg}(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \frac{1}{1+z^2} dz = \\ &= \frac{\operatorname{arctg}(x+t) + \operatorname{arctg}(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{arctg}(z) \Big|_{x-t}^{x+t} \right\} = \operatorname{arctg}(x+t). \end{aligned}$$

Решение уравнения (5.1) имеет форму бегущей волны, если

$$u(x, t) = f_1(x - at) \quad (5.9)$$

или

$$u(x, t) = f_2(x + at), \quad (5.10)$$

если, конечно, $f_1(z), f_2(z)$ имеют непрерывные производные до второго порядка включительно.

Упражнение 5.2. Проверить, что функции, полученные с помощью формул (5.9), (5.10) удовлетворяют уравнению колебаний струны.

Задача 5.1. Найти такие $f(x), g(x)$ при которых решение задачи (5.1), (5.2) имело бы вид бегущей волны (5.9) или (5.10).

Задача 5.2. Найти решение задачи (5.1), (5.2), если

а) $a = 1, f(x) = x^2, g(x) = x$;

б) $a = 1, f(x) = \operatorname{arctg} x, g(x) = \frac{1}{1+x^2}$;

в) $a = 2, f(x) = \sin x, g(x) = \sin 2x$;

г) $a = \sqrt{3}, f(x) = \cos x, g(x) = \sin 2x$.

Задача 5.3. Пусть $f(x), g(x)$ периодические функции, период которых равен 2π . Будет ли решение задачи (5.1), (5.2) периодической функцией относительно переменной x (относительно переменной t)?

Задача 5.4. Пусть $f(x)$ – ограничена, а $g(x) \equiv 0$. Верно ли утверждение, что решение задачи (5.1), (5.2) ограничено при всех t и $x \in R$?

Пусть теперь $f(x) \equiv 0$, а $g(x)$ ограничена. Будет ли в этом случае ограничено решение (5.1), (5.2) при всех x и $t > 0$.

Задачи на полуоси

Рассмотрим теперь задачи на полуоси, т. е. (5.1), (5.2), (5.3) или (5.1), (5.2), (5.4). Их решение в случае однородных краевых условий может быть найдено с помощью ранее указанной формулы Даламбера.

Рассмотрим задачу (5.1), (5.2), (5.3). При этом будем предполагать, что $f(x) \in C^2[0, \infty)$, $f(0) = f'(0) = 0$, $g(x) \in C^1[0, \infty)$, $g(0) = 0$.

Положим

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0; \\ -f(-x), & x < 0; \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0; \\ -g(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Тогда $F(x) \in C^2(R)$, $G(x) \in C^1(R)$ (проверить это) и функция

$$u(x, t) = \frac{F(x + at) + F(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} G(z) dz \quad (5.11)$$

будет решением задачи (5.1), (5.2), (5.3).

Пусть теперь рассматривается задача (5.1), (5.2), (5.4). Предположим, что для начальных условий, т. е. функций $f(x)$, $g(x)$, выполнены следующие условия: $f(x) \in C^2[0, \infty)$, $f'(0) = 0$, $g(x) \in C^1[0, \infty)$, $g'(0) = 0$. Положим тогда

$$F_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0; \\ f(-x), & x < 0; \end{cases} \quad G_1(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0; \\ g(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Проверьте, что тогда $F_1(x) \in C^2(R)$, $G_1(x) \in C^1(R)$.

Решение задачи (5.1), (5.2), (5.4) после доопределения $f(x)$, $g(x)$ на всю ось четным образом может быть получено по формуле (5.11), где F следует заменить на F_1 , а G – на G_1 .

Задача 5.5. Решить задачу на полуоси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = 1 + x^3, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = (1 + x)^3 - (1 - x)^3,$$

$$u(0, t) = 1.$$

Задача 5.6. Решить задачу на полуоси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = x + x^2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = (1+x)^2 + (1-x)^2,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 1.$$

Задача 5.7. Решить задачу на полуоси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = x^2 - x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \cos^2 x,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = -1.$$

Задача 5.8. Рассмотреть задачу Коши для телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial t} + a^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 1.$$

где $a > 0$ ($b = a^2$). В таком случае в физике принято говорить, что рассматривается линия без искажений.

Показать, что замена

$$u(x, t) = \exp(-at)v(x, t)$$

сводит задачу к интегрированию обычного уравнения колебаний струны. Вывести аналог формулы Даламбера

$$u(x, t) = \exp(-at) \left[\frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(z) dz \right].$$

Задача 5.9. Решить первую краевую задачу для телеграфного уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial t} + a^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x), \\ u(t, 0) &= u(t, 1) = 0,\end{aligned}$$

где $t \geq 0$, а $x \in [0; l]$.

Указание. Замена

$$u(x, t) = \exp(-at)v(x, t)$$

сводит последнюю краевую задачу к соответствующей краевой задаче для уравнения колебаний струны.

Глава 6. Интегрирование первой краевой задачи методом Фурье

В этом параграфе будет рассмотрена первая краевая задача для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \quad (6.1)$$

которое будем рассматривать вместе со следующими условиями. Пусть

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x). \quad (6.2)$$

Условия (6.2) называют начальными. Наконец

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad u(l, t) = \varphi_2(t). \quad (6.3)$$

Здесь $x \in [0, l]$, $t \in [0; T]$, $T > 0$. В (6.1), (6.2), (6.3) $F(x, t)$, $f(x)$, $g(x)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – заданные функции. Их свойства отметим ниже, когда приступим к интегрированию соответствующих задач. Отметим важные частные случаи:

1. Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $F(x, t)$ тождественно равны нулю. В этом случае данную краевую задачу называют однородной краевой задачей для уравнения колебаний струны.

Отметим, что при $F(x, t) \neq 0$ речь идет о неоднородном уравнении колебаний струны, а физический смысл $F(x, t)$ состоит в том, что посредством включения $F(x, t)$ учитывают внешнюю силу;

2. Пусть $\varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t) \equiv 0$. В таком случае мы имеем дело с неоднородным уравнением колебаний струны, но краевые условия однородны.

Задача (6.1), (6.2), (6.3) – краевая задача, так как при интегрировании ее учитывают краевые условия (6.3). Часто такие задачи называют смешанными, чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что, кроме краевых условий (6.3), присутствуют и начальные условия (6.2).

Как обычно, решением краевой задачи (6.1), (6.2), (6.3) будем называть функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $u(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема при $x \in [0; l]$, $t \in [0; T]$;

2. Она удовлетворяет уравнению (6.1), начальным условиям (6.2) и краевым условиям (6.3).

Есть и другие определения решения, которые не предполагают, что $u(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема. В таких вариантах речь

идет об определении обобщенных решений. Здесь и ниже пока речь идет об определении классического решения.

Теорема 6.1. Если задача (6.1), (6.2), (6.3) имеет решение, то это решение единственно.

Доказательство этого проведем методом от противного. Предположим, что у (6.1), (6.2), (6.3) есть два решения $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ таких, что $u_1 \neq u_2$. Положим

$$v(x, t) \equiv u_1(x, t) - u_2(x, t).$$

Понятно, что $v \neq 0$. С другой стороны, функция $v(x, t)$ удовлетворяет (как разность двух решений задачи (6.1), (6.2), (6.3)) уже следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ v(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \\ v(0, t) &= v(l, t) = 0. \end{aligned}$$

Для получения противоречия осталось доказать, что эта краевая задача имеет лишь нулевое решение.

Рассмотрим функцию

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx,$$

где $v(x, t)$ – решение рассматриваемой краевой задачи. Определенную так функцию $E(t)$ иногда называют интегралом энергии. Вычислим производную в силу рассматриваемой краевой задачи:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(2 \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2a^2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right) dx.$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части интегрированием по частям. Действительно,

$$\int_0^l \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} dx = \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial t} dx.$$

Отметим, что $\frac{\partial v}{\partial t}|_{x=0, x=l} = 0$. Окончательно получаем

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx \equiv 0.$$

Следовательно, $E(t) = E_0$ ($E_0 = \text{const}$). Но

$$E_0 = E(0) = \int_0^l \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} dx = 0,$$

так как $\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} \equiv 0$.

Проинтегрируем теперь базовую задачу методом Фурье. Итак, рассмотрим краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6.4)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x), \quad (6.5)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (6.6)$$

Условия

$$\begin{aligned} f(x) &\in C^3[0; l], \quad f(0) = f(l) = f''(0) = f''(l) = 0, \\ g(x) &\in C^2[0; l], \quad g(0) = g(l) = 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

являются достаточными для обоснования метода Фурье в данном случае.

Сначала изложим алгоритмическую часть метода. Как обычно, первый шаг алгоритма состоит в нахождении решений вида $u(x, t) = A(t)B(x)$ уравнения (6.4), которые удовлетворяют краевым условиям (6.6). Понятно, что $B(0) = B(l) = 0$. Подставляя решение в предложенной форме в уравнение (6.4), получаем

$$\ddot{A}B = a^2 AB''.$$

Здесь точками обозначены производные по переменной t , а штрихами – по x .

Разделив последнее равенство на произведение $A(t)B(x)$, получим

$$\frac{\ddot{A}}{A} = a^2 \frac{B''}{B}.$$

Следовательно,

$$\frac{B''}{B} = -\lambda, \quad \frac{\ddot{A}}{A} = -a^2\lambda,$$

где $\lambda \in R$ и подлежит, в свою очередь, определению. Следовательно,

$$\ddot{A} + a^2\lambda A = 0, \quad (6.8)$$

$$B'' + \lambda B = 0, \quad (6.9)$$

$$B(0) = B(l) = 0. \quad (6.10)$$

Анализ спектральной краевой задачи (6.9), (6.10) позволяет найти те λ (собственные значения), при которых у нее есть нетривиальные решения (ее собственные функции).

Пусть сначала $\lambda < 0$. Тогда общее решение уравнения (6.9) можно записать в виде

$$B(x) = b_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + b_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \quad (b_1, b_2 \in R).$$

Постоянные b_1, b_2 следует выбрать так, чтобы функция $B(x)$ удовлетворяла краевым условиям (6.9). Следовательно, для b_1, b_2 получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$b_1 + b_2 = 0, \quad b_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + b_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0,$$

которая имеет лишь решение $b_1 = b_2 = 0$, так как ее определитель отличен от 0. Тем самым показано, что $\lambda < 0$ не является собственным значением краевой задачи (6.9), (6.10).

Пусть теперь $\lambda = 0$. При таком значении λ общее решение (6.9) имеет вид: $B(x) = b_1 x + b_2$, ($b_1, b_2 \in R$). Лишь при $b_1 = b_2 = 0$ эта функция может удовлетворять краевым условиям (6.10) (проверьте это).

Итак, собственные значения следует искать среди $\lambda > 0$. В таком случае общее решение дифференциального уравнения (6.9) можно записать в следующем виде:

$$B(x) = \alpha \cos \sqrt{\lambda}x + \beta \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Так как $B(0) = 0$, находим $\alpha = 0$. Краевая задача (6.9), (6.10) имеет нетривиальные решения ($\beta \neq 0$), если $\sin \sqrt{\lambda}l = 0$.

Следовательно, собственные значения $\lambda = \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$, ($n = 1, 2, \dots$), а соответствующие собственные функции (нетривиальные решения (6.9), (6.10)) равны $B_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}$ или $B_n(x) = \beta_n \sin \frac{\pi n x}{l}$ (понятно, что собственные функции определяются не однозначно, а с точностью до мультипликативной постоянной).

Из (6.8) теперь уже нетрудно найти $A_n(t)$ соответствующие указанным выше λ_n :

$$A_n(t) = c_n \cos \frac{a\pi n t}{l} + d_n \sin \frac{a\pi n t}{l} \quad (n \in N).$$

Решение всей краевой задачи (6.4), (6.5), (6.6) будем искать в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos \frac{a\pi n t}{l} + d_n \sin \frac{a\pi n t}{l}) \sin \frac{\pi n x}{l},$$

а $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ — определяются из начальных условий (6.5):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{\pi n x}{l},$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{\pi n a}{l} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Напомним, что функции $\{\sin \frac{\pi n x}{l}\}$ образуют полную ортогональную систему функций в $L_2[0, l]$ и существуют единственные разложения в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n x}{l}; g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l},$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, b_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Следовательно,

$$c_n = a_n, d_n = \frac{b_n l}{a\pi n}.$$

В окончательной редакции получаем формулу для решения краевой (смешанной) задачи (6.4), (6.5), (6.6) :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi a n t}{l} + b_n \frac{l}{\pi n a} \sin \frac{\pi a n t}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (6.11)$$

где еще раз подчеркнем – a_n коэффициенты ряда Фурье функции $f(x)$, а b_n – $g(x)$.

Пример 6.1. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(0, x) = \sin^3 x, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sin 2x,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

Здесь $f(x) = \sin^3 x$, $g(x) = \sin 2x$. Поэтому $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_2 = 0$, $a_3 = -\frac{1}{4}$, $a_k = 0$ для остальных натуральных k , $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ и, наконец, оставшиеся $b_k = 0$.

Поэтому из (6.11) получаем решение в данном конкретном случае:

$$u(x, t) = \frac{3}{4} \cos t \sin x + \frac{1}{2} \sin 2t \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 3t \sin 3x.$$

(напомним, что здесь $a = 1, l = \pi$).

Обоснование метода Фурье. Оно предусматривает доказательство того, что функция (6.11) при $(x, t) \in \mathcal{D}_{l,T} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ дважды непрерывно дифференцируема.

Для завершения изложения метода Фурье следует доказать, что формула (6.11) дает нам функцию $u(t, x)$ у которой есть соответствующие производные. В нашем случае $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – непрерывные функции переменных t, x , если $t \in [0, T]$, $x \in [0, l]$. Достаточно последнее утверждение проверить для функции

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{a\pi n}{l}t\right) + \frac{b_n l}{\pi a n} \sin\left(\frac{a\pi n}{l}t\right) \right) \left(-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} \right) \sin \frac{\pi n x}{l}$$

и, в частности, доказать, что ряд в правой части последней формулы сходится равномерно. Именно для этого предложим условия (6.7).

Для равномерности сходимости ряда

$$\rho = \frac{\pi^2}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 a_n \cos \left(a \frac{\pi n t}{l} \right) + \frac{l}{a} b_n n \sin \left(a \frac{\pi n t}{l} \right) \right) \sin \frac{\pi n x}{l}$$

достаточно показать, что данный функциональный ряд сложно мажорировать сходящимся числовым рядом. В нашем случае

$$|\rho| \leq \frac{\pi^2}{l^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n| + \frac{l}{a} \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n| \right\},$$

т. е. утверждение о дифференцируемости ряда в правой части формулы (6.11) будет доказано, если показать, что справедливо утверждение.

Лемма. Пусть выполнены условия (6.7). Тогда сходятся два следующих числовых ряда:

$$\rho_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n| \quad \text{и} \quad \rho_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|.$$

Докажем сходимость числового ряда ρ_1 . Напомним, что

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Преобразуем правую часть последней формулы, используя формулы интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx &= - \left(\frac{l}{\pi n} \right) \frac{2}{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l + \\ &+ \left(\frac{l}{\pi n} \right) \frac{2}{l} \int_0^l f'(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx. \end{aligned}$$

При этом внеинтегральные слагаемые равны 0, так как $f(0) = f(l) = 0$. Продолжив аналогичные преобразования, получим, что

$$\frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = - \left(\frac{l}{\pi n} \right)^3 \frac{2}{l} \int_0^l f'''(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Отсюда вытекает, что

$$a_n = - \left(\frac{l}{\pi n} \right)^3 \alpha_n,$$

где α_n — коэффициенты Фурье функции $f'''(x)$ на $[0, l]$ в разложении данной функции в ряд Фурье по ортогональной и полной системе в $L_2[0, l]$

$$\left\{ 1, \cos \frac{\pi n x}{l} \right\},$$

т. е. $f'''(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{\pi n x}{l}.$

В нашем случае $\alpha_0 = 0$. Итак, получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n| &= \left(\frac{l}{\pi} \right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{n} \leqslant \\ &\leqslant \left(\frac{l}{\pi} \right)^3 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(|\alpha_n|^2 + \frac{1}{n^2} \right) \right\} = \\ &= \left(\frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}. \end{aligned}$$

При этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (вспомним математический анализ), а ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ сходится в силу известных теорем о рядах Фурье. Из равенства Парсеваля вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \frac{2}{l} \int_0^l (f'''(x))^2 dx.$$

Анализ сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|$ аналогичен.

Задача 6.1. Решить краевую задачу (6.4), (6.5), (6.6), если

- а) $a = 1, l = \pi, f(x) = \sin 3x, g(x) = \sin^3 x$;
- б) $a = 2, l = 1, f(x) = 0, g(x) = x(1 - x)$;
- в) $a = 3, l = \pi, f(x) = \sin^4 x, g(x) = 0$.

Аналогично может быть рассмотрена первая краевая задача для телеграфного уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2p \frac{\partial u}{\partial t} + qu = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6.12)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad (6.13)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (6.14)$$

Здесь p, q – постоянные. Как известно [4], уравнение (6.11) описывает электрические колебания в электрическом проводе. Поэтому постоянные p, q могут быть выражены через реальные физические параметры задачи:

$$2p = \frac{RC + \mathcal{L}G}{\mathcal{L}C}; \quad q = \frac{GR}{\mathcal{L}C}; \quad a^2 = \frac{1}{\mathcal{L}C},$$

где, в свою очередь, C, R, \mathcal{L}, G характеризуют емкость, активное сопротивление, самоиндукцию и утечку единицы длины провода, т. е. без нарушения общности можно считать, что $p \geq 0, g \geq 0$.

Предельный случай $p = 0, g = 0$ имеет смысл идеализации физического процесса, а с математической точки зрения мы приходим к уравнению колебаний струны. Близкая ситуация, но уже физически осмысленная реализуется, если $p^2 = q$ ($G\mathcal{L} = RC$). В таком случае говорят о линии без искажений (термин был введен известным физиком Хевисайдом). Замена

$$u(x, t) = e^{-pt} v(x, t)$$

сводит уравнение (6.11) к уравнению колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Задача 6.2. Показать, что решение краевой задачи (6.12) – (6.14) может быть записано в виде

$$u(x, t) = e^{-pt} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \omega_n t + \frac{b_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \sin \frac{\pi n x}{l},$$

где a_n – коэффициенты Фурье $f(x)$, b_n – коэффициенты Фурье $g(x)$,
 $\omega_n = q - p^2 + \frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}$. Здесь предполагается, что $q - p^2 + \frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} > 0$.

Следует дополнительно заметить, что для телеграфного уравнения краевые условия (6.14) достаточно искусственны с физической точки зрения. Их выполнение означает, что оба конца линии заземлены. В реальных физических задачах встречаются иные краевые условия. Наиболее простые из них

$$u(0, t) = E, u(l, t) = 0. \quad (6.15)$$

Первое из них теперь означает, что к одному из концов подключен источник постоянного тока.

Задача 6.3. Найти решение краевой задачи (6.12) – (6.14), если $p^2 \neq q$.

Задача 6.4. Используя метод Фурье, найти решение краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6.16)$$

$$u(x, 0) = f(x), \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad (6.17)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (6.18)$$

Приведем сразу ответ для этой задачи:

$$u(x, t) = \frac{a_0 + b_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi a n t}{l} + b_n \frac{l}{\pi a n} \sin \frac{\pi a n t}{l} \right) \cos \frac{\pi n x}{l}.$$

Здесь a_0, a_1, a_2, \dots – коэффициенты Фурье в разложении $f(x)$ по ортогональной системе функций на $[0; l]$: $\{1, \cos \frac{\pi n x}{l}\}$; b_0, b_1, b_2, \dots – аналогичные коэффициенты уже для $g(x)$.

Показать, что следующие условия

- 1) $f(x) \in C^3[0; l], f'(0) = f'(l) = 0$,
- 2) $g(x) \in C^2[0; l], g'(0) = g'(l) = 0$

достаточны для проверки условия $u(x, t) \in C^2(\mathcal{D})$, где $\mathcal{D} = \{(x, t), 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$.

Задача 6.5. Найти решение краевой задачи (6.4), если

- а) $l = \pi, a = 1, f(x) = \cos^2 x, g(x) = \sin^2 x$;

- б) $l = \pi, a = 1, f(x) = \cos^4 x, g(x) = \cos^3 x$;
 в) $l = 1, a = 2, f(x) \equiv 0, g(x) = 2x^2 - 3x^3$;
 г) $l = 1, a = 3, f(x) = \sin^2 \pi x, g(x) = 2 \cos^4 \pi x$.

Задача 6.6. Показать, что решение краевой задачи (6.16) – (6.18) ограничено при $t \rightarrow \infty$, если

$$\int_0^l g(x) dx = 0. \quad (6.19)$$

Задача 6.7. Показать, что для периодичности решения по t краевой задачи (6.16) – (6.18) необходимо и достаточно выполнение равенства (6.19).

Задача 6.8. Проинтегрировать краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2p \frac{\partial u}{\partial t} + qu &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= g(x), \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} &= 0, \end{aligned}$$

т. е. вторую краевую задачу для телеграфного уравнения.

Задача 6.9. Проинтегрировать краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= g(x), \\ u(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} &= 0, \end{aligned}$$

где $x \in [0; l]$. Рассмотреть частные случаи, если

- а) $a = 1, l = \pi, f(x) = \sin \frac{3x}{2}, g(x) = \sin^3 \frac{3x}{2}$;
 б) $a = 2, l = 1, f(x) = 0, g(x) = x(1 - x)^2$;
 в) $a = 2, l = 1, f(x) = 0, g(x) = \sin^2 \pi x$.

Задача 6.10. Проинтегрировать краевую задачу:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0, \quad u(l, t) = 0.\end{aligned}$$

Рассмотреть частные случаи, если

- а) $a = 1, l = \pi, f(x) = \cos \frac{3x}{2}, g(x) = 0$;
 б) $a = 2, l = 1, f(x) = 0, g(x) = x^2(1 - x)$.

Приведем ответы к общей части задач 6.9 и 6.10, которые решаются методом Фурье (см. с. 41, 42, где была решена аналогичная задача).

Ответ к задаче 6.9.

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos a\omega_n t + \frac{b_n}{a_n \omega_n} \sin a\omega_n t \right) \sin \omega_n x,$$

где $\omega = \frac{\pi}{l}(n + \frac{1}{2})$, а a_n, b_n – коэффициенты Фурье при разложении в ряд Фурье функций $f(x), g(x)$, соответственно. Как известно,

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \omega_n x dx, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \omega_n x dx.$$

Ответ к задаче 6.10.

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos a\omega_n t + \frac{b_n}{a_n \omega_n} \sin a\omega_n t \right) \cos \omega_n x,$$

где $\omega_n = \frac{\pi}{l}(n + \frac{1}{2})$,

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \omega_n x dx, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \omega_n x dx.$$

Замечание. Как известно, функции $\{\sin \omega_n x\}$ и $\{\cos \omega_n x\}, n = 0, 1, \dots$ образуют полные ортогональные системы функций в $L_2[0, l]$.

Глава 7. Неоднородное уравнение колебаний струны

Рассмотрим для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) \quad (7.1)$$

первую краевую задачу. Уравнение рассматривается с начальными условиями

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) \quad (7.2)$$

и краевыми условиями

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad u(l, t) = \varphi_2(t). \quad (7.3)$$

На первом этапе ограничимся рассмотрением однородных краевых условий

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (7.4)$$

Будем предполагать, что известная функция $F(x, t)$ непрерывно дифференцируема и для нее выполнены условия согласования

$$F(0, t) \equiv F(l, t) \equiv 0. \quad (7.5)$$

В этом случае возможно и целесообразно представить эту функцию в виде ряда

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (7.6)$$

где

$$F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(x, t) \sin \frac{\pi n x}{l} dx,$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Отметим, что (7.6) равномерно сходится при $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$.

Решение краевой задачи (7.1), (7.2), (7.4) будем искать в виде аналогичного ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (7.7)$$

где определению подлежит счетное семейство функций $\{u_n(t)\}$. Сразу отметим, что функция (7.7) удовлетворяет краевым условиям (7.4). Подставляя (7.7), (7.6) в (7.1), после элементарных преобразований получаем (группируя все в левой части)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ddot{u}_n + a^2 \frac{\pi^2 n^2}{l^2} u_n - F_n(t) \right) \sin \frac{\pi n x}{l} = 0.$$

Ортогональность системы функций $\{\sin \frac{\pi n x}{l}\}$ приводит к системе уравнений

$$\ddot{u}_n + \omega_n^2 u_n = F_n(t), \quad (7.8)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$, $\omega_n^2 = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} a^2$. Систему (7.8) следует дополнить начальными условиями для $u_n(t)$:

$$u_n(0) = a_n, \dot{u}_n(0) = b_n, \quad (7.9)$$

где $\{a_n\}$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$, а $\{b_n\}$ – коэффициенты Фурье функции $g(x)$. Напомним, что

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx; b_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что для нахождения $u_n(t)$ справедлива формула

$$u_n(t) = a_n \cos \omega_n t + \frac{b_n}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin \omega_n(t-s) F_n(s) ds. \quad (7.10)$$

На практике при более конкретном указании $F(x, t)$ можно находить $u_n(t)$ и способом, не предусматривающим использование формулы (7.10). Главное состоит в том, что для $\{u_n(t)\}$ удастся выписать дифференциальное уравнение второго порядка и соответствующие условия (7.9). Для демонстрации этого замечания приведем пример.

Упражнение 7.1. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^t \sin 4x,$$

$$u(x, 0) = \sin 2x, \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sin^3 x,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

В этом случае $F_4(t) = e^t$, остальные $F_n(t) \equiv 0$. Поэтому задачи (7.6), (7.7) приобретают следующий вид:

$$\ddot{u}_1 + u_1 = 0, u_1(0) = 0, \dot{u}_1(0) = \frac{3}{4};$$

$$\ddot{u}_2 + 4u_2 = 0, u_2(0) = 1, \dot{u}_2(0) = 0;$$

$$\ddot{u}_3 + 9u_3 = 0, u_3(0) = 0, \dot{u}_3(0) = -\frac{1}{4};$$

$$\ddot{u}_4 + 16u_4 = e^t, u_4(0) = 0, \dot{u}_4(0) = 0.$$

При остальных k эти задачи однотипны:

$$\ddot{u}_k + k^2 u_k = 0, u_k(0) = \dot{u}_k(0) = 0.$$

Очевидно, что $u_k \equiv 0$ ($k = 5, 6, 7, \dots$). Решения первых четырех задач находятся элементарно:

$$u_1(t) = \frac{3}{4} \sin t, u_2(t) = \cos 2t,$$

$$u_3(t) = -\frac{1}{12} \sin 3t, u_4(t) = -\frac{1}{17} \cos 4t - \frac{1}{68} \sin 4t + \frac{1}{17} e^t.$$

В уравнении для $u_4(t)$ легко найти частное решение в виде Ae^t , где $A = \text{const}$. В данном случае $A = \frac{1}{17}$.

Итак, получаем, что

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{3}{4} \sin t \sin x + \cos 2t \sin 2x - \frac{1}{12} \sin 3t \sin 3x + \\ & + \left(\frac{1}{17} e^t - \frac{1}{17} \cos 4t - \frac{1}{68} \sin 4t \right) \sin 4x. \end{aligned}$$

Аналогичные методы можно использовать при решении и иных неоднородных краевых задач.

Упражнение 7.2. Методом Фурье проинтегрировать следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.\end{aligned}$$

Здесь для $F(x, t)$ выполнены условия

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

Положим

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) \cos \frac{\pi n x}{l}, \quad u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \cos \frac{\pi n x}{l}.$$

Показать, что $\{u_n(t)\}$ решения следующих задач

$$\begin{aligned}\ddot{u}_n + \omega_n^2 u_n &= F_n(t), \\ u_n(0) &= a_n, \quad \dot{u}_n(0) = b_n\end{aligned}$$

при $n \geq 1$, а при $n = 0$

$$\begin{aligned}\ddot{u}_0 &= F_0(t), \\ u_0(0) &= \frac{a_0}{2}, \quad \dot{u}_0(0) = \frac{b_0}{2}.\end{aligned}$$

Здесь $\{a_n\}$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l}.$$

Наконец,

$$g(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{\pi n x}{l}.$$

Упражнение 7.3. Проинтегрировать краевую задачу:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \\ u(0, t) &= 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.\end{aligned}$$

Здесь для $F(x, t)$ выполняется условие

$$\begin{aligned}F(0, t) &= \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \\ f(x) &\in C^3[0; l], f(0) = f''(0) = f'(l) = 0, \\ g(x) &\in C^2[0; l], g(0) = g'(l) = 0.\end{aligned}$$

Упражнение 7.4. Проинтегрировать краевую задачу:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0, u(l, t) = 0.\end{aligned}$$

Здесь для $F(x, t)$ выполняется условие

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=0} &= F(l, t) = 0, \\ f(x) &\in C^3[0; l], f'(0) = f(l) = f''(l) = 0, \\ g(x) &\in C^2[0; l], g'(0) = g(l) = 0.\end{aligned}$$

В случае неоднородных краевых условий (7.3) во многих случаях рассматриваемую задачу удастся свести к той, которая была рассмотрена в начале параграфа, т. е. к задаче с однородными краевыми условиями.

Для этого следует выполнить замену

$$u(x, t) = v(x, t) + W(x, t),$$

где $v(x, t)$ удовлетворяет вспомогательной краевой задаче:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + F_1(x, t),$$

$$v(x, 0) = f_1(x), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = g_1(x),$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

Здесь гладкая функция $W(x, t)$ выбрана так, чтобы

$$W(0, t) = \varphi_1(t), \quad W(l, t) = \varphi_2(t).$$

Тогда

$$F_1(x, t) = F(x, t) + a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2},$$

$$f_1(x) = f(x) - W(x, 0), \quad g_1(x) = g(x) - \left. \frac{\partial W}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Функцию $W(x, t)$ можно выбрать различными способами. Самый простой и часто используемый способ – выбрать функцию в следующем виде:

$$W(x, t) = \varphi_1(t) + \frac{x}{l}(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)).$$

При этом следует считать, что функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы. При таком выборе функции $W(x, t)$ не всегда функции $f_1(x)$, $g_1(x)$, $F_1(x, t)$ обладают набором свойств, характерных для постановки краевой задачи с однородными краевыми условиями.

Иной вариант выбора функции $W(x, t)$ возможен, если выполнены условия согласования:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = \ddot{\varphi}_1(0) = \ddot{\varphi}_2(0) = 0.$$

Изложим методику построения $W(x, t)$ в таком случае.

Положим

$$W(x, t) = a_1(t)x + a_2(t)(l - x) + a_{21}(t)x^2(l - x) + a_{12}(t)x(l - x)^2,$$

где $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_{21}(t)$ и $a_{12}(t)$ – подлежащие определению функции. Условия $W(0, t) = \varphi_1(t)$ и $W(l, t) = \varphi_2(t)$ дают $a_2(t) = \varphi_1(t)/l$, $a_1(t) = \varphi_2(t)/l$. Условия $F_1(0, t) = 0$ и $F_1(l, t) = 0$ дают равенства

$$\begin{aligned} 2a^2 a_{21}(t) - 4a^2 a_{12}(t) &= \ddot{\varphi}_1(t)/l, \\ -4a^2 a_{21}(t) + 2a^2 a_{12}(t) &= \ddot{\varphi}_2(t)/l, \end{aligned}$$

из которых находим

$$\begin{aligned} a_{12}(t) &= -(2\ddot{\varphi}_1(t) + \ddot{\varphi}_2(t))/(6a^2 l), \\ a_{21}(t) &= -(2\ddot{\varphi}_2(t) + \ddot{\varphi}_1(t))/(6a^2 l). \end{aligned}$$

Выполнение условий (6.7) легко проверить непосредственно.

Упражнение 7.5. Решить краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= g(x), \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \varphi_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \varphi_2(t). \end{aligned}$$

Упражнение 7.6. Решить краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= g(x), \\ u(0, t) = \varphi_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} &= \varphi_2(t). \end{aligned}$$

Упражнение 7.7. Решить краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= g(x), \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \varphi_1(t), u(l, t) = \varphi_2(t).$$

Задача 7.1. Решить краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x,$$

$$u(x, 0) = \sin x + a \sin 2x, \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

Найти a , при которых у данной краевой задачи есть состояние равновесия (решения, не зависящие от t).

Задача 7.2. Проинтегрировать краевую задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} + 2 \sin 2x, x \in [0, \pi],$$

$$u(x, 0) = \sin 2x, u_t(x, 0) = \sin x,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

Задача 7.3. Решить краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin t \sin x, x \in [0, \pi]$$

$$u(x, 0) = 1 + \sin 2x, \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sin 3x,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 1.$$

Задача 7.4. Проинтегрировать краевую задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} + e^t \sin x, x \in [0, \pi],$$

$$u(x, 0) = 1 + \sin 2x, u_t(x, 0) = \sin 4x,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 1.$$

Задача 7.5. Проинтегрировать краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos 4t \cos 4x, x \in [0, \pi],$$

$$u(x, 0) = 1 + \sin^3 x, u_t(x, 0) = \sin 3x,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 1.$$

Задача 7.6. Проинтегрировать краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos^2 \pi t \cos^2 \pi x, x \in [0, 1],$$

$$u(x, 0) = x + \cos^4 \pi x, u_t(x, 0) = 0,$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 1.$$

Задача 7.7. Проинтегрировать краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^t \cos 2x, x \in [0, \pi],$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = \cos^2 2x,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0.$$

Задача 7.8. Проинтегрировать краевую задачу:

$$u_{tt} = 2u_{xx} + e^t \cos \pi x, x \in [0, 1],$$

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = x + \cos^2 \pi x,$$

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = t.$$

Задача 7.9. Проинтегрировать краевую задачу:

$$u_{tt} = 4u_{xx} + u + t \sin x, x \in [0, \pi],$$

$$u(x, 0) = \sin x, u_t(x, 0) = \sin 2x,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

Задача 7.10. Проинтегрировать краевую задачу для неоднородного телеграфного уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial t} + bu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t, x), x \in [0, l],$$

$$u(x, 0) = f(x), \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x),$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Задача 7.11. Проинтегрировать краевую задачу для неоднородного телеграфного уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial t} + bu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t, x), x \in [0, l],$$

$$u(x, 0) = f(x), \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

Здесь $a, b \geq 0$.

Задача 7.12. Решить краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^t \sin 2x, x \in [0, \pi],$$

$$u(x, 0) = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sin^3 3x,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

Задача 7.13. Решить краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos t \cos x, x \in [0, \pi],$$

$$u(x, 0) = x + \cos^2 x, \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \cos^2 2x,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 1.$$

Задача 7.14. При каких значениях параметра a решение краевой задачи ограничено:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos t \cos 2x, x \in [0, \pi],$$

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = a + \cos^2 4x,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0.$$

Задача 7.15. При каких значениях параметра a краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos t \cos x, x \in [0, \pi],$$

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0,$$

имеет ограниченное решение при $t \rightarrow \infty$.

Задача 7.16. Найти решение краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t, x), x \in [0, l],$$

$$u(x, 0) = f(x), \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x),$$

$$u(0, t) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0,$$

а также рассмотреть примеры, если

а) $a = 1, l = \pi, f(x) = g(x) = 0, F(t, x) = t \sin^3 \frac{x}{2};$

б) $a = 1, l = 1, f(x) = g(x) = 0, F(t, x) = x(1 - x)^2;$

в) $a = 2, l = 1, f(x) = x(1 - x)^2, g(x) = 0, F(t, x) = t \sin \frac{\pi x}{2}.$

Задача 7.17. Найти решение краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t, x), x \in [0, l],$$

$$u(x, 0) = f(x), \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = u(l, t) = 0,$$

а также рассмотреть примеры, если

а) $a = 1, l = \pi, f(x) = g(x) = 0, F(t, x) = t \cos^3 \frac{3x}{2};$

б) $a = 1, l = 1, f(x) = g(x) = 1, F(t, x) = x^2(1 - x);$

в) $a = 2, l = 1, f(x) = x^2(1 - x), g(x) = 0, F(t, x) = t \cos \frac{3\pi x}{2}.$

Задача 7.18. Проинтегрировать методом Фурье краевую задачу:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial x} + bu, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0,\end{aligned}$$

где a, b – постоянные.

Указание. Замена $u(x, t) = e^{-ax}v(x, t)$ сводит данную задачу к аналогичной для телеграфного уравнения, если $b - a^2 < 0$. Впрочем, от этого ограничения можно и отказаться.

Задача 7.19. Проинтегрировать методом Фурье краевую задачу:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial t} + bu &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2c \frac{\partial u}{\partial x}, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0,\end{aligned}$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Глава 8. Уравнение колебаний балки

В этом параграфе будет рассмотрено уравнение четвертого порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad (8.1)$$

где $u = u(x, t)$, $x \in [0; \pi]$. Уравнение (8.1) предложено к рассмотрению в перенормированном и безразмерном виде. Более детально его обсуждение можно найти в [1]. Оно носит название "уравнение колебаний балки".

В данном параграфе его будем рассматривать вместе с теми или иными краевыми условиями.

Вариант 1. Найти решение уравнения (8.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) \quad (8.2)$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=\pi} = 0. \quad (8.3)$$

В механике краевые условия (8.3) обычно называют условиями шарнирного опирания.

Уравнение (8.1) вместе с начальными условиями (8.2) может быть, естественно, рассмотрено вместе с иными отличными от (8.3) краевыми условиями.

Вариант 2. Найти решение уравнения (8.1), удовлетворяющее начальным условиям (8.2), а также краевым условиям:

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0. \quad (8.4)$$

Условия (8.4) обычно называют условиями жесткого закрепления.

Если один из концов закреплен, а второй свободен, то рассматривают следующие краевые условия:

$$u(0, t) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=\pi} = \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{x=\pi} = 0. \quad (8.5)$$

Здесь мы ограничимся случаем шарнирного опирания. Иные варианты краевых задач рассмотрены, например, в [12,13].

Решение краевой задачи (8.1), (8.2), (8.3) можно искать в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx. \quad (8.6)$$

Понятно, что функция (8.6) удовлетворяет краевым условиям (8.3). Подстановка (8.6) в уравнение (8.1) приводит к равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{u}_n + n^4 u_n) \sin nx = 0. \quad (8.7)$$

Откуда заключаем, что $u_n(t)$ – решения уравнений

$$\ddot{u}_n + n^4 u_n = 0. \quad (8.8)$$

Здесь при переходе от (8.7) к (8.8) уместно вспомнить, что функции $\sin nx$, ($n \in N$) на отрезке $[0; \pi]$ образуют полную ортогональную систему.

Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (8.9)$$

Из (8.2), (8.7), (8.9) выводим, что для $u_n(t)$ справедливы следующие начальные условия:

$$u_n(0) = a_n, \quad \dot{u}_n(0) = b_n. \quad (8.10)$$

Рассматривая (8.8), (8.10), находим, что

$$u_n(t) = a_n \cos n^2 t + \frac{b_n}{n^2} \sin n^2 t. \quad (8.11)$$

Задача 8.1. Показать, что условия

$$\begin{aligned} f(x) &\in C^5[0; \pi], & g(x) &\in C^3[0; \pi], \\ f(0) = f(\pi) = f''(0) = f''(\pi) = f^{(IV)}(0) = f^{(IV)}(\pi) &= 0, \\ g(0) = g(\pi) = g''(0) = g''(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

являются достаточными для того, чтобы формулой (8.6) было задано классическое решение краевой задачи (8.1), (8.2), (8.3).

Напомним, что для проверки справедливости утверждения задачи (8.1) следует, в частности, проверить дифференцируемость функции $u(x, t)$ при $x \in [0; \pi]$, $t \in [0; T]$. Чуть более детально: они должны иметь 4 непрерывные частные производные по x и 2 по t .

Задача 8.2. Показать, что краевая задача (8.1), (8.2), (8.3) имеет единственное решение.

Указание. Как и для уравнений колебаний струны, следует рассмотреть интеграл энергии

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx,$$

а затем найти его производную в силу краевой задачи.

Задача 8.3. Рассмотреть краевую задачу (8.1), (8.2), (8.3), если

- а) $f(x) = \sin^3 x$, $g(x) = \sin 3x$;
- б) $f(x) \equiv 0$, $g(x) = x^2(x - \pi)^2$;
- в) $f(x) = \sin^3 x$, $g(x) = \sin^3 2x$.

Задача 8.4. Решить методом Фурье неоднородную краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= F(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x), \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=\pi} = 0. \end{aligned}$$

Задача 8.5. Решить методом Фурье краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x), \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=\pi} = 0. \end{aligned}$$

Иные краевые задачи для балочного уравнения решаются аналогично, но они более трудоемки. Более подробное обсуждение этих вопросов можно найти в [12, 13].

Поясним кратко особенности этих задач на примере, когда концы балки жестко закреплены. Итак, рассмотрим краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad (8.12)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad x \in [0; 1], \quad (8.13)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = 0. \quad (8.14)$$

Как обычно, сначала найдем решение уравнения (8.12), удовлетворяющее краевым условиям (8.14) в форме $u(x, t) = A(t)B(x)$. После разделения переменных получим равенство

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{B''''}{B} = 0,$$

которое удобно решать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{A} + \lambda A = 0, \quad (8.15)$$

$$B'''' - \lambda B = 0. \quad (8.16)$$

Уравнение (8.16) следует дополнить краевыми условиями:

$$B(0) = B(1) = B'(0) = B'(1) = 0. \quad (8.17)$$

Как обычно, для краевой задачи (8.16), (8.17) следует исследовать следующие вопросы. При каких λ данная краевая задача имеет нетривиальные решения? Определить вид собственных функций (нетривиальных решений краевой задачи при ранее определенных значениях λ).

Задача 8.6. Показать, что собственные значения краевой задачи (8.15), (8.16), (8.17) определяются как корни уравнения

$$\operatorname{ch} \mu \cos \mu = 1, \quad (8.18)$$

где $\mu = \sqrt[4]{\lambda}$. Собственные функции

$$B_k(x) = \beta_k \left[U(\mu_k x) - \frac{U(\mu_k)}{V(\mu_k)} V(\mu_k x) \right]. \quad (8.19)$$

Здесь μ_k – положительный корень с номером k уравнения (8.18). Так, например, $\mu_1 = 4.73$, $\mu_2 = 7.85$. При больших k корни

$$\mu_k \approx \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

Наконец,

$$U(x) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} x - \cos x), \quad V(x) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} x - \sin x).$$

Данные две функции вместе с функциями

$$S(x) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} x + \cos x), \quad T(x) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} x + \sin x)$$

играют важную роль в прикладных вопросах теории упругости и носят название балочных функций.

Показать, что $\int_0^1 B_k(x) B_m(x) dx = 0$ при $k \neq m$, и β_k можно выбрать таким образом, чтобы

$$\int_0^1 B_k^2(x) dx = 1.$$

Напомним, что при таком выборе система $\{B_k(x)\}$ будет ортонормированной. Из общей теории краевых задач вытекает, что она будет полной. Поэтому решение краевой задачи (8.12), (8.13), (8.14) можно записать в виде следующего ряда:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \mu_k^2 t + \frac{b_k}{\mu_k^2} \sin \mu_k^2 t \right) B_k(x),$$

$$a_k = \int_0^1 f(x) B_k(x) dx, \quad b_k = \int_0^1 g(x) B_k(x) dx,$$

Задача 8.7. Проинтегрировать методом Фурье краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \tag{8.20}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad x \in [0; 1], \tag{8.21}$$

$$u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=1} = 0. \quad (8.22)$$

Краевые условия (8.22) моделируют ту ситуацию, при которой левый конец ($x = 0$) жестко закреплен, а правый – свободен.

Показать, что решение задачи (8.20), (8.21), (8.22) имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \mu_k^2 t + \frac{b_k}{\mu_k^2} \sin \mu_k^2 t \right) \varphi_k(x),$$

где

$$a_k = \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx, \quad b_k = \int_0^1 g(x) \varphi_k(x) dx.$$

Здесь $\{\varphi_k(x)\}$ – полная ортонормированная система функций в $L_2[0, 1]$, определенная как собственные функции краевой задачи:

$$y^{(IV)}(x) - \mu^4 y = 0, \quad (8.23)$$

$$y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0. \quad (8.24)$$

Указание. Собственные функции краевой задачи (8.23), (8.24) удастся выразить через балочные функции:

$$\varphi_j(x) = \alpha_j \left[U(\mu_j x) - \frac{V(\mu_j)}{S(\mu_j)} V(\mu_j x) \right], \quad (j = 1, 2, \dots),$$

а μ_j – положительные корни уравнения

$$\operatorname{ch} \mu \cos \mu + 1 = 0,$$

взятые в порядке возрастания ($\mu_1 \approx 1,875$, $\mu_2 \approx 4,694$, $\mu_3 \approx 7,855$, $\mu_4 \approx 10,996$). При больших j они могут быть определены как корни уравнения

$$\cos \mu \approx 0, \quad (\mu_j \approx \frac{\pi}{2} + \pi j).$$

Задачи (8.6), (8.7) могут быть использованы как темы учебных курсовых работ по данному предмету.

Задача 8.9. Найти все a , при которых краевая задача может иметь ненулевые состояния равновесия:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=\pi} = 0.$$

Напомним, что состоянием равновесия краевой задачи для эволюционных уравнений с частными производными называют такое ее решение, которое не зависит от переменной t , т. е.

$$u(t, x) = v(x).$$

В нашем случае функция $v(x)$ может быть найдена как решение вспомогательной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$v^{(IV)} + av'' = 0, \quad v = v(x),$$

где $v(x)$ удовлетворяет краевым условиям

$$v(0) = v(\pi) = v''(0) = v''(\pi) = 0.$$

Общее решение уравнения для определения $v(x)$ при $a > 0$ может быть записано в виде

$$v(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x + C_3 x + C_4,$$

где $\alpha = \sqrt{a}$, $C_1, C_2, C_3, C_4 \in R$.

Следовательно, $v''(x) = -\alpha^2(C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x)$. Краевые условия для функции $v''(x)$ ($v''(0) = v''(\pi) = 0$) приводят к равенствам

$$C_1 = 0, \quad C_2 \sin \alpha \pi = 0.$$

Краевые условия для самой функции $v(x)$ дают еще два уравнения для определения коэффициентов C_1, C_2, C_3, C_4 общего решения:

$$0C_3 + C_4 = 0, \quad C_2 \sin \alpha \pi + C_3 \pi + C_4 = 0.$$

Откуда с необходимостью $C_4 = 0$, а также $\alpha = n$. При этом $C_2 \in R$ и произволен.

Ответ к задаче 8.9. Краевая задача имеет состояние равновесия

$$u(t, x) = v_n(x) = \gamma_n \sin nx, \quad n \in N, \quad \gamma_n \in R,$$

если $a = n^2$.

Глава 9. Уравнение колебаний мембраны

До этого параграфа мы рассматривали уравнения, когда неизвестная функция зависела лишь от двух пространственных переменных. В этом параграфе будем рассматривать уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (9.1)$$

где $u = u(x, y, t)$. Уравнение (9.1) носит название "уравнение колебаний мембраны" и является одним из частных случаев волнового уравнения.

В этом параграфе ограничимся случаем, когда $(x, y) \in \mathcal{D} \subset R^2$, $t \in [0; T]$. Здесь \mathcal{D} – ограниченная область пространства R^2 . В этом случае уравнение (9.1) следует дополнить начальными условиями

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x, y) \quad (9.2)$$

и, конечно, граничными (краевыми) условиями. В рамках данного параграфа ограничимся следующим их вариантом:

$$u(x, y, t)|_{\partial \mathcal{D}} = 0, \quad (9.3)$$

т. е. на границе области \mathcal{D} решение уравнения (9.1) обращается в 0.

Решение этой задачи может быть найдено методом Фурье. Опишем общую схему этого метода в данном случае.

Для реализации этого алгоритма сначала следует найти все решения уравнения (9.1), удовлетворяющие условию (9.3), которые можно представить в виде

$$u(x, y, t) = A(t)B(x, y).$$

Следовательно, функции $A(t)$, $B(x, y)$ удовлетворяют следующей системе уравнений. Первое из них – дифференциальное уравнение для $A(t)$:

$$\ddot{A}(t) + \lambda A(t) = 0. \quad (9.4)$$

Второе – это уравнение с частными производными для $B(x, y)$:

$$\Delta B \equiv \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = -\lambda B, \quad (9.5)$$

где для $B(x, y)$ справедливо следующее условие на границе:

$$B(x, y)|_{\partial\mathcal{D}} = 0. \quad (9.6)$$

Хорошо известно [9], что задача (9.5), (9.6) имеет счетное число собственных значений $\lambda = \lambda_n > 0$, а соответствующие им собственные функции $B_n(x, y)$ образуют полную ортонормированную систему. В частности, для них справедливо следующее равенство:

$$\iint_{\mathcal{D}} B_j(x, y) B_k(x, y) dx dy = 0 \quad (k \neq j),$$

$$\iint_{\mathcal{D}} B_j^2(x, y) dx dy = 1.$$

После этого решение задачи (9.1), (9.2), (9.3) можно записать в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + \frac{b_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t \right) B_n(x, y),$$

где

$$a_n = \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) B_n(x, y) dx dy, \quad b_n = \iint_{\mathcal{D}} g(x, y) B_n(x, y) dx dy.$$

Отметим, что основную трудность представляет нахождение собственных значений и собственных функций (9.5), (9.6). Она решается в явном виде лишь при выборе \mathcal{D} в более конкретном виде, для достаточно простых областей. При этом даже для такой области, как круг, при ее исследовании приходим к необходимости введения специальных функций. В данном случае – Бесселевых функций. Подробное изложение решения (9.5), (9.6) читатель может найти в учебниках [1, 4].

Одним из немногих случаев, когда решение может быть выражено через элементарные функции, является прямоугольник $\mathcal{D} = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$. Отметим, что $\bar{\mathcal{D}} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$. Здесь a, b – положительные постоянные. Граница состоит из точек, принадлежащих контуру этого прямоугольника. Итак, в данном случае уравнение (9.1) следует рассматривать со следующими условиями:

$$u(x, 0, t) = u(x, b, t) = u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0, \quad (9.7)$$

которые уточняют (9.3).

Задача 9.1. Показать, что собственные значения задачи (9.5), (9.6) в случае прямоугольника задаются формулой

$$\lambda_{k,m} = \frac{k^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}, \quad k, m \in N,$$

а соответствующие собственные функции –

$$B_{k,m}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{\pi k x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}.$$

Задача 9.2. Решить задачу (9.1), (9.2), (9.7) если

- а) $c = 1, f(x, y) = \sin x \sin 2y, g(x, y) = \sin 2x \sin y, a = \pi, b = \pi;$
- б) $c = 2, f(x, y) = x(1-x) \sin \pi y, g(x, y) = \sin \pi x \sin 2\pi y, a = b = 1;$
- в) $c = 3, f(x, y) = \sin \pi x \sin \pi y, g(x, y) = 0, a = 2, b = 1.$

Задача 9.3. Найти решение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (9.8)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x, y), \quad (9.9)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=b} = 0, \quad (9.10)$$

где $a, b, c \in R_+, \mathcal{D} = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$.

Найти решение этой задачи в следующих частных случаях:

- а) $c = 1, f(x, y) = \cos^2 x, g(x, y) = \cos^2 y, a = \pi, b = \pi;$
- б) $c = 2, f(x, y) = 1, g(x, y) = \cos \pi x \cos \pi y, a = 1, b = 1;$
- в) $c = 3, f(x, y) = \cos^2 x \cos^2 y, g(x, y) \equiv 0, a = \pi, b = \pi.$

Задача 9.4. Для задачи (9.8), (9.9), (9.10) найти множество тех функций $g(x, y)$, при выборе которых ее решение будет ограничено при $t \rightarrow +\infty$.

Задача 9.5. Найти все a , при которых решение краевой (граничной) задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$u(x, y, 0) = \sin x \sin y, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sin x (\sin y + a \sin 2y),$$

$$u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0$$

будет периодической функцией переменного t .

Задача 9.6. Решить краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \Delta u, \Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$u(0, x, y) = f(x, y), u_t(0, x) = g(x, y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0,$$

где $a, b, c > 0$, $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$.

Найти решение данной краевой задачи в следующих частных случаях:

$$a) c = 1, f(x, y) = \cos x \cos y, g(x, y) = \cos 2x \cos 2y, a = b = \pi;$$

$$b) c = 2, f(x, y) = \cos^2 x \sin^2 y, g(x, y) = \cos^4 x \cos y, a = b = \pi.$$

Глава 10. Уравнение теплопроводности

Пусть $u = u(x, y, z, t)$. Если $u = u(x, y, z, t)$ – нормированная температура некоторого тела в момент времени t и в точке с координатами (x, y, z) , то уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u = a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (10.1)$$

называют уравнением теплопроводности. Здесь $a > 0$. Этот коэффициент иногда называют коэффициентом температуропроводности. Заменой $t = \alpha\tau$ можно добиться того, чтобы он был равен 1.

Далее будем считать, что $a = 1$. Более того, в рамках данной главы ограничимся рассмотрением случая, когда $u = u(x, t)$, т. е. неизвестная функция зависит только от одной пространственной переменной. Такое предположение допустимо, если рассматривается, например, тело, у которого один размер превосходит значительно остальные. Пример представляет нам стержень.

Итак, в этом параграфе будем рассматривать уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (10.2)$$

Иногда вместо (10.2) рассматривают неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \quad (10.3)$$

где $F(x, t)$ – известная функция x, t , $t \geq 0$, $x \in [A, B]$ ($x \in R$).

Напомним, что, согласно классификации уравнений с частными производными (см. гл. 1), (10.2) или (10.3), это уравнение параболического типа.

Пусть $\mathcal{D}_T \in R^2$ – прямоугольник, выделяемый неравенствами $(x, t) \in \mathcal{D}_T$, если $A < x < B$, $0 < t < T$. Его контур $\partial\mathcal{D}$ – граница, а боковые стороны и нижнее основание образует множество $\Gamma \subset \partial\mathcal{D}$. Это множество часто называют "двойной" границей, и оно играет особую роль при изучении уравнения (10.1).

Теорема 10.1. (Принцип "max") Пусть $u(x, t) \in C^2(\mathcal{D}) \cap C(\bar{\mathcal{D}})$ и удовлетворяет уравнению (10.1). Тогда $u(x, t)$ достигает максимума на двойной границе Γ .

Сформулируем это утверждение в иной форме. Справедливо неравенство

$$u(x, t) \leq \max_{\Gamma} u(x, t)$$

при всех $(x, t) \in \bar{\mathcal{D}}$.

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в учебнике [2].

Следствие 10.1. (Принцип "min") *Решение уравнения (10.2) достигает минимума на "двойной" границе Γ . Иначе справедливо неравенство*

$$u(x, t) \geq \min_{\Gamma} u(x, t).$$

Следствие 10.2. *Пусть $u(x, t) \in C^2(\mathcal{D}_T) \cap C(\bar{\mathcal{D}})$ и удовлетворяет уравнению (10.2). Тогда для этой функции справедливо неравенство*

$$|u(x, t)| \leq \max_{\Gamma} |u(x, t)|,$$

выполненное при всех $(x, t) \in \bar{\mathcal{D}}_T$.

Уравнение (10.2) обычно рассматривают вместе с теми или иными условиями.

Задача 10.1. Пусть $x \in R$. Тогда уравнение (10.2) дополняют лишь начальным условием

$$u(x, 0) = f(x). \quad (10.4)$$

Достаточными условиями корректной разрешимости начальной задачи (10.2), (10.4) будут следующие 2 условия:

- 1) $f(x) \in C(R)$;
- 2) справедливо неравенство

$$|f(x)| \leq M e^{a|x|},$$

где M – некоторая положительная, a – неотрицательная постоянная.

При рассмотрении этой задачи интерес представляют лишь те ее решения $u(x, t)$, для которых априори выполнено неравенство

$$|u(x, t)| \leq M(t) e^{a|x|},$$

где a – неотрицательная постоянная, а $M(t)$ – непрерывная, положительная, неубывающая функция переменного $t \in (0, \infty)$.

Ограничиваясь таким классом функций, можно доказать, что решение такой задачи задается известной формулой Пуассона:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4t}} dz.$$

Ее вывод и обоснование можно найти практически в каждом из учебников, включенных в список литературы.

Одно историческое замечание. Именно при выводе этой формулы Пуассон вычислил известный несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

названный впоследствии его именем (интеграл Пуассона). Он играет важную роль и в других разделах математики, например в теории вероятностей. Но все же впервые появился при рассмотрении задач математической физики.

Можно рассмотреть и иные задачи для (10.2). Наиболее популярны и осмыслены с точки зрения физики и иных приложений различные краевые задачи.

Задача 10.2. Пусть $x \in [0; l]$, $t \in [0; T]$. Уравнение (10.2) будем рассматривать вместе с начальным условием

$$u(x, 0) = f(x) \tag{10.5}$$

и краевыми

$$u(0, t) = \varphi_1(t), u(l, t) = \varphi_2(t). \tag{10.6}$$

Здесь $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – непрерывные (или непрерывно дифференцируемые) функции переменного $t \in [0; T]$, а $f(x)$ – так же непрерывные (непрерывно дифференцируемые) функции $x \in [0; l]$.

Для корректной постановки часто рассматривают условия

$$\varphi_1(0) = f(0), \varphi_2(0) = f(l),$$

которые носят название условий согласования.

На первом этапе рассматривают вариант однородных краевых условий:

$$\varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t) \equiv 0.$$

В таком случае условия согласования переписываются таким образом:

$$f(0) = f(l) = 0.$$

Если функция $f(x)$ – непрерывно дифференцируема, то решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) &= f(x), u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{aligned}$$

может быть получено методом Фурье. Этот вопрос будет рассмотрен в следующей главе.

Задача 10.3. Пусть $x \in [0; l]$, $t \in [0; T]$. Уравнение (10.2) будем рассматривать вместе с начальным условием (10.5) и краевыми

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \psi_1(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \psi_2(t). \quad (10.7)$$

В случае когда $\psi_1(t) = \psi_2(t) = 0$ краевые условия называют однородными.

Задача 10.4. Предыдущие две краевые задачи могут быть включены в краевую задачу более общего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) &= f(x), \\ \alpha_1 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} + \beta_1 u|_{x=0} &= \chi_1(t), \\ \alpha_2 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} + \beta_2 u|_{x=l} &= \chi_2(t), \end{aligned} \quad (10.8)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ – действительные постоянные, $\chi_1(t), \chi_2(t)$ – заданные непрерывные функции.

Если $\chi_1(t) \equiv \chi_2(t) \equiv 0$, то речь идет об однородных краевых условиях. Обычно краевые условия (10.8) носят название условий Штурма-Лиувилля.

При $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, но $\beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0$ получаем первую краевую задачу, а при $\beta_1 = \beta_2 = 0$, но $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$ – соответственно, вторую краевую задачу.

Имеются краевые задачи, отличные от краевых задач Штурма-Лиувилля, например:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = f(x), u(0, t) = u(l, t), \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l}.$$

Последняя задача называется периодической краевой задачей. Замена периодических краевых условий на следующие:

$$u(0, t) + u(l, t) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$$

приводит к антипериодической краевой задаче. Последние две краевые задачи не входят в класс краевых задач Штурма-Лиувилля.

При рассмотрении неоднородного уравнения (10.3) возможно рассмотрение аналогичных краевых задач.

Глава 11. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности

В первой части параграфа ограничимся рассмотрением следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (11.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (11.2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (11.3)$$

Будем искать решения уравнения (11.1), которые удовлетворяют краевым условиям (11.3) в следующем виде:

$$u(x, t) = A(t)B(x).$$

Откуда для $A(t), B(x)$ получаем равенство

$$\dot{A}B = AB''.$$

Если его домножить на $1/AB$, то полученное равенство преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{B''}{B} = -\lambda, \quad (11.4)$$

где λ – действительный параметр, подлежащий определению. Как и ранее, в аналогичных случаях равенство (11.4) приводят к рассмотрению системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений. В данном случае она имеет вид

$$\dot{A}(t) = -\lambda A(t), \quad (11.5)$$

$$B''(x) + \lambda B(x) = 0. \quad (11.6)$$

Уравнение (11.6) следует дополнить краевыми условиями

$$B(0) = B(l) = 0. \quad (11.7)$$

Краевая задача (11.6), (11.7) позволяет найти те λ , при которых у нее есть нетривиальные решения. В гл. 4 краевая задача (11.6), (11.7) была уже рассмотрена. Напомним, что

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, B_n(x) = \beta_n \sin \frac{\pi n x}{l}, n \in N, \beta_n \in R.$$

После этого в уравнение (11.5) следует подставить найденные значения параметра λ_n . Откуда находим семейство решений

$$A_n(t) = \alpha_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}.$$

Решения всей задачи (11.1), (11.2), (11.3) следует искать в виде функционального ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (11.8)$$

где b_n – постоянные, которые следует искать из начального условия (11.2). Полагая $t = 0$ в формуле (11.8), получаем равенство для определения b_n :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (11.9)$$

Равенство (11.9) позволяет определить b_n как коэффициенты Фурье функции $f(x)$ в разложении по ортогональной системе функций $\{\sin \frac{\pi n x}{l}\}$. Напомним, что

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad (n \in N).$$

Приступим к обоснованию метода Фурье, что означает необходимость доказательства ряда свойств функции (11.8), а следовательно, ряда, стоящего в правой части формулы (11.8).

Покажем, что при $x \in [0; l]$ и $t \geq 0$ функция $u(x, t)$ непрерывна, а при тех же x и $t > 0$ функция (11.8) непрерывно дифференцируема по t и дважды непрерывно дифференцируема по переменной x . Для проверки первого свойства достаточно рассмотреть те t , которые принадлежат $[0; T]$, где T – произвольная положительная постоянная, а для второго свойства $t \in [t_0, T]$, где t_0 – некоторая, достаточно малая положительная постоянная. Прежде чем привести доказательства необходимых свойств, приведем необходимые для дальнейших построений утверждения.

Лемма 11.1. Пусть функция $f(x) \in C^1[0; l]$ (непрерывно дифференцируемая функция) и для нее выполнены условия согласования

$$f(0) = f(l) = 0.$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

сходится. Здесь b_n – коэффициенты Фурье функции $f(x)$ в ее разложении по системе ортогональных функций $\{\sin \frac{\pi n x}{l}\}$.

Упражнение 11.1. Доказать лемму.

Теорема 11.1. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы 11.1. В таком случае для функции $u(x, t)$, представленной рядом (11.8), имеют место следующие свойства:

- 1) $u(x, t) \in C(\bar{\mathcal{D}})$, где $\mathcal{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$;
- 2) $u(x, t) \in C^\infty(\mathcal{D}_{t_0})$, где $\mathcal{D}_{t_0} = \{0 \leq x \leq l, t_0 \leq t \leq T\}$.

Напомним, что обозначение $C(\bar{\mathcal{D}})$ означает совокупность непрерывных в прямоугольнике $\bar{\mathcal{D}}$, а $C^\infty(\mathcal{D}_{t_0})$ обозначает совокупность функций, которые имеют непрерывные частные производные любого порядка.

Для доказательства первого свойства достаточно заметить, что ряд в правой части (11.8) сходится в рассматриваемом прямоугольнике равномерно, а, следовательно, сумма функционального ряда будет непрерывной функцией. То, что члены этого ряда – непрерывные функции, не вызывает сомнения. В свою очередь, равномерная сходимость ряда вытекает из того, что этот ряд может быть промажорирован сходящимся абсолютно числовым рядом. Действительно,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|, \quad (11.10)$$

так как при $t \geq 0$ справедливо неравенство $e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 t} \leq 1$. Сходимость числового ряда (11.10) обсуждалась в лемме 11.1.

Для доказательства второй части теоремы продифференцируем ряд (11.8) почленно и докажем, что таким образом полученный ряд сходится равномерно, если $t \in [t_0, T]$, а $x \in [0; l]$. Итак,

$$\frac{\partial^{m+2k}}{\partial t^m \partial x^{2k}} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (-1)^{k+m} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^{m+2k} e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Данный ряд может быть промажорирован следующим сходящимся числовым рядом:

$$\left(\frac{\pi}{l} \right)^{m+2k} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| n^{m+2k} e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 t_0}. \quad (11.11)$$

Здесь учтено, что $e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \leq e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t_0}$, если $t \geq t_0$. Отметим также, что существует такая постоянная M , что $|b_n| \leq M$. Поэтому вопрос о сходимости ряда (11.11) сводится к исследованию сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m+2k} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t_0}.$$

Для исследования его сходимости можно применить признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1+2k} e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 (n+1)^2 t_0}}{n^{n+2k} e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2 t_0}} = 0 < 1.$$

Теорема доказана.

Задача 11.1. Решить краевую задачу (11.1), (11.2), (11.3), если

- а) $l = \pi, f(x) = \sin^3 x$;
- б) $l = 1, f(x) = 2 \sin \pi x + 4 \sin^3 \pi x$;
- в) $l = 1, f(x) = x(1-x)$;
- г) $l = 2, f(x) = 2x - x^2$.

Все начальные условия в задаче 11.1 удовлетворяют условиям теоремы 11.1, в частности условиям согласования. Отказ от них, как правило, не дает возможности утверждать, что функция, определенная равенством (11.8), обладает тем свойством, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x),$$

даже в смысле поточечной сходимости.

Действительно, рассмотрим краевую (смешанную) задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, x) = f(x) = 1,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

Следовательно,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 t) \sin nx,$$

где

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n} \right),$$

т. е. $a_n = 0$, если $n = 2m$ (четное) и $a_n = \frac{4}{\pi n}$, если $n = 2m - 1, m \in N$,
т. е. при нечетном. Итак,

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)} \exp(-(2m-1)^2 t) \sin(2m-1)x,$$

т. е. при любом $t > 0$ последний ряд сходится и $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ при всех таких t . Откуда получаем, что $\lim_{t \rightarrow \infty} u(\pi, t) = 0$. Аналогично при $x = 0$.

Задача 11.2. Пусть в краевой задаче (11.1), (11.2), (11.3) функция $f(x) \in \mathcal{L}_2(0, l)$. Тогда ряд (11.8) определяет функцию, которая обладает следующими свойствами:

- 1) при $t \in [t_0, T]$, $x \in [0, l]$, $(t_0, T > 0)$ эта функция имеет непрерывные частные производные любого порядка ($u(x, t) \in C^\infty(\mathcal{D}_{t_0})$) и удовлетворяет уравнению теплопроводности (11.1) и краевым условиям (11.3);
- 2) справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^l (u(x, t) - f(x))^2 dx = 0,$$

т. е. решение (11.8) удовлетворяет начальным условиям в смысле сходимости в пространстве функций $\mathcal{L}_2(0, l)$.

Задача 11.3. Проинтегрировать краевую задачу (11.1), (11.2), (11.3) при $l = 1, f(x) \equiv x$ (условия согласования не выполнены).

Задача 11.4. Проинтегрировать методом Фурье краевую задачу для видоизмененного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu, b \in R, \quad (11.12)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (11.13)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, x \in [0, l]. \quad (11.14)$$

Задача 11.5. Проинтегрировать краевую задачу из предшествующего задания при

- а) $l = \pi, b = 1, f(x) = x(\pi - x)$;
- б) $l = \pi, b = 2, f(x) = \sin^3 x$;
- в) $l = \pi, b = 0.5, f(x) = \sin 4x \sin 2x$.

Задача 11.6. Найти все $b \in R$, при которых все решения (11.12), (11.13), (11.14) $u(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ при любом выборе начальной функции $f(x)$.

Задача 11.7. При каких значениях $b \in R$ можно в зависимости от b так выбрать $f(x)$, что решение краевой задачи (11.12), (11.13), (11.14) не зависит от t , т. е. $u(x, t) = v(x)$.

Задача 11.8. Проинтегрировать краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial x} + bu, a, b \in R, \quad (11.15)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (11.16)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, x \in [0; l]. \quad (11.17)$$

Указание. Замена $u(x, t) = e^{-ax}v(x, t)$ сводит задачу (11.15), (11.16), (11.17) к ее частному варианту (11.12), (11.13), (11.14).

Задача 11.9. Проинтегрировать краевую задачу (11.15), (11.16), (11.17), если

а) $l = 1, a = 1, b = 1, f(x) = e^{-x} \sin \pi x$;

б) $l = 1, a = 1, b = -4, f(x) = e^{-x}x(1 - x)$.

Если рассмотреть уравнение (11.1) с условием (11.2), но краевое условие (11.3) заменить на следующее:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad (11.18)$$

то получим вторую краевую задачу с однородными краевыми условиями.

Задача 11.10. Показать, что ее решение может быть найдено по формуле

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \cos \frac{\pi n x}{l},$$

где коэффициенты a_0, a_1, a_2, \dots определяются как коэффициенты Фурье функции $f(x)$ в ее разложении по ортогональной системе функций $1; \cos \frac{\pi x}{l}; \cos \frac{2\pi x}{l}; \dots$

В чем состоит условие согласования для краевой задачи (11.1), (11.2), (11.18)?

Задача 11.11. Рассмотреть краевую задачу (11.1), (11.2), (11.18) при

- 1) $l = \pi, f(x) = \cos^4 x$;
- 2) $l = 1, f(x) = \sin^2 \pi x$;
- 3) $l = 2, f(x) = x^3 - 3x^2$.

Задача 11.12. Рассмотреть краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu, b \in R,$$

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0.$$

- 1) Проинтегрировать ее методом Фурье.
- 2) Найти все $b \in R$, при которых для решений данной краевой задачи справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0.$$

- 3) Найти все $b \in R$ и соответствующие им $f(x) = f_b(x)$, при которых последняя краевая задача имеет решение, не зависящее от t , т. е. $u(x, t) = v(x)$.

Задача 11.13. Проинтегрировать методом Фурье краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0.$$

В этом случае решение краевой задачи $u(x, t)$ можно найти по следующей формуле:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(-\omega_n^2 t) \sin \omega_n x,$$

где $\omega_n = \frac{\pi}{l}(n + \frac{1}{2})$, а a_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \omega_n x dx, n = 0, 1, 2, \dots$$

Добавим, что семейство функций $e_n(x) = \sin \omega_n x$, $n = 0, 1, \dots$ образует на отрезке $[0, l]$ полную ортогональную систему. В частности, ортогональность означает, что справедливы равенства

$$\int_0^l e_n(x) e_m(x) dx = 0, \text{ при } n \neq m.$$

Добавим, что $\int_0^l \sin^2 \omega_n x dx = \frac{l}{2}$.

Используя полученные результаты, найти решения, если

а) $l = \pi$, $f(x) = \sin^3 \frac{3x}{2}$;

б) $l = 1$, $f(x) = x^2 - 2x$;

в) $l = 1$, $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2} + \sin \frac{5\pi x}{2}$.

Задача 11.14. Проинтегрировать методом Фурье краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = u(l, t) = 0.$$

Используя полученные результаты, найти решения, если

а) $l = \pi$, $f(x) = \cos^3 \frac{5x}{2}$;

б) $l = 1$, $f(x) = x^3 - x^2$.

Глава 12. Неоднородное уравнение теплопроводности

Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности, которое дополним начальными условиями и однородными краевыми условиями первого типа. Итак,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \quad (12.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (12.2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (12.3)$$

Здесь считаем, что $f(x) \in C^1[0; l]$, а функция $F(x, t)$ задана в прямоугольнике $\bar{\mathcal{D}}_T = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$, дважды непрерывно дифференцируема по совокупности переменных. Считаем, что для $f(x)$ и $F(x, t)$ выполнены условия согласования

$$f(0) = f(l) = 0, \quad F(0, t) = F(l, t) = 0. \quad (12.4)$$

Задачу (12.1), (12.2), (12.3) можно рассматривать без условий согласования, но в таком случае приходится уточнить понятие решения для данной краевой задачи. Впрочем, это будет видно после интегрирования задачи (12.1), (12.2), (12.3) с учетом условия (12.4).

Для $u(x, t)$, $F(x, t)$ справедливы представления:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (12.5)$$

Здесь приведены разложения функций $u(x, t)$, $F(x, t)$ как функций переменного x в ряды по системе ортогональных функций $\{\sin \frac{\pi n x}{l}\}$. При этом временно рассматриваем переменную t как "параметр", т. е. коэффициенты таких рядов зависят от t и для них справедливы формулы:

$$u_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x, t) \sin \frac{\pi n x}{l} dx,$$

$$F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(x, t) \sin \frac{\pi n x}{l} dx,$$

где $n \in N$. Отметим, что ряд для $F(x, t)$ в (12.5) сходится равномерно. Суммируя эти соображения, можно сделать заключение о том, что задача о нахождении $u(x, t)$ может быть сведена к задаче об определении коэффициентов первого ряда (12.5), т. е. функций $u_n(t)$ ($n \in N$). Подстановка ряда (12.5) в уравнение (12.1) приводит к следующему равенству рядов Фурье:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l} = - \sum_{n=1}^{\infty} u_n \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \sin \frac{\pi n x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\dot{u}_n(t) + \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 u_n - F_n(t) \right] \sin \frac{\pi n x}{l} = 0.$$

Используя ортогональность системы функций $\{\sin \frac{\pi n x}{l}\}$ на отрезке $[0; l]$ получим последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_n(t) = - \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 u_n + F_n(t), \quad (12.6)$$

$$u_n(0) = a_n, \quad (12.7)$$

где $\{a_n\}$ – совокупность коэффициентов Фурье функции $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Каждая из задач Коши (12.6), (12.7) может быть решена в общем виде:

$$u_n(t) = e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} a_n + \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 (s-t)} F_n(s) ds. \quad (12.8)$$

В конкретных случаях краевые задачи вида (12.6), (12.7) могут быть решены иным способом.

Покажем, что $u(x, t)$, определенная рядом (12.5), где $u_n(t)$ находим с помощью формулы (12.8), является дважды непрерывно дифференцируемой по x и один раз непрерывно дифференцируемой по t функцией. Отметим, что сходимости и дифференцируемости ряда образованного первыми слагаемыми в равенстве (12.8) показана в гл. 11. Поэтому

можно считать в (12.8) все $a_n = 0$. Отметим, что согласно ограничений, наложенных на функцию $F(x, t)$ при $(x, t) \in \bar{\mathcal{D}}_T$, $\max_t |F_n(t)| \leq M/n^2$, где $M > 0$. Оценим вторую производную по x функции $u(x, t)$ при $(x, t) \in \bar{\mathcal{D}}_T$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \int_0^t e^{\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 (s-t)} F_n(s) ds \sin \frac{\pi n}{l} x \right| \leq \\ &\leq M \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \frac{1}{n^2} \int_0^t e^{\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 (s-t)} ds \leq \\ &\leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(e^{\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 (s-t)} \Big|_0^t \right) \leq \\ &\leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 T} \right) \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Последний ряд в формуле (12.9) сходится. Аналогично можно оценить первую производную по t .

Задача 12.1. Решить краевую задачу (12.1), (12.2), (12.3), если

- 1) $l = \pi, f(x) = \sin x, F(x, t) = e^{-9t} \sin 3x$;
- 2) $l = 1, f(x) = x^2 - x, F(x, t) = t \sin^3 x$;
- 3) $l = \pi, f(x) = 0, F(x, t) = e^{-t} \sin x + t \sin 3x$.

Задача 12.2. Пусть $F(x, t) = F(x)$. Найти все $f(x)$, при которых краевая задача (12.1), (12.2), (12.3) имеет решение $v(x)$, не зависящее от t (состояние равновесия).

Аналогично может быть проинтегрирована и краевая задача следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \quad (12.10)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (12.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \quad (12.12)$$

Выше $f(x), F(x, t)$ – непрерывно дифференцируемые функции при $x \in [0; l], t \in [0, T]$, а $T = \text{const} > 0$. Условия согласования приобретают

здесь следующую форму:

$$f'(0) = f'(l) = 0; \quad \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

Как и в случае краевых условий (12.3), решение данной краевой задачи будем искать в виде ряда Фурье относительно независимой переменной x , но это разложение необходимо делать относительно ортогональной системы базисных функций $1, \cos \frac{\pi n x}{l}$, ($n \in N$). Итак, положим

$$u(x, t) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cos \frac{\pi n x}{l}, \quad (12.13)$$

$$F(x, t) = \frac{F_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \cos \frac{\pi n x}{l}, \quad (12.14)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l}. \quad (12.15)$$

Здесь коэффициенты Фурье $u_n(t)$ ряда (12.13) подлежат определению, а коэффициенты рядов (12.14), (12.15), наоборот, известны и могут быть найдены посредством использования стандартных формул:

$$F_0(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(x, t) dx, \quad F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(x, t) \cos \frac{\pi n x}{l} dx,$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Упражнение 12.1. Показать, что функции $u_n(t)$ определяются из решения системы

$$\begin{aligned} \dot{u}_0 &= F_0(t), u_0(0) = a_0, \\ \dot{u}_n &= -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n + F_n(t), u_n(0) = a_n. \end{aligned}$$

Задача 12.3. Найти решение задачи (12.10), (12.11), (12.12), если

- 1) $l = \pi, f(x) = 0, F(x, t) = t + t^2 \cos 2x$;
- 2) $l = 1, f(x) = 2x^3 - 3x^2, F(x, t) = e^{-4\pi t} \cos^2 \pi x$;

- 3) $l = \pi, f(x) = \cos^2 x, F(x, t) = \sin^2 x$;
 4) $l = \pi, f(x) = \sin^2 x, F(x, t) = \cos^2 t$.

Упражнение 12.2. Методом Фурье проинтегрировать краевую задачу:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \\ u(0, t) &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0.\end{aligned}$$

Как выглядят в таком случае условия согласования?

Задача 12.4. Последнюю краевую задачу (см. упражнение 12.2) решить, если

- 1) $l = \pi, f(x) = \cos \frac{x}{2}, F(x, t) = t \cos \frac{3x}{2}$;
 2) $l = 1, f(x) = \cos^3 \frac{\pi x}{2}, F(x, t) = e^t \cos \frac{5\pi x}{2}$.

Упражнение 12.3. Методом Фурье проинтегрировать краевую задачу:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= u(l, t) = 0.\end{aligned}$$

Как выглядят в таком случае условия согласования?

Задача 12.5. Последнюю краевую задачу (см. упражнение 12.3) решить, если

- 1) $l = \pi, f(x) = \cos \frac{3x}{2}, F(x, t) = e^t \cos^3 \frac{x}{2}$;
 2) $l = 1, f(x) = \cos^3 \left(\frac{\pi x}{2} \right), F(x, t) = t \cos \left(\frac{3\pi x}{2} \right)$.

Возвратимся к рассмотрению первой краевой задачи, т. е. (12.1), (12.2), (12.3). Ее мы интегрировали при выполнении однородных краевых условий (12.3). Естественно, более общим случаем следует считать тот, когда условия (12.3) заменены на неоднородные, т. е.

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad u(l, t) = \varphi_2(t). \quad (12.16)$$

Задача (12.1), (12.2), (12.16) уже не может быть проинтегрирована непосредственно методом Фурье, вариант которого был рассмотрен в начале данного параграфа. Обычно краевую задачу (12.1), (12.2), (12.16) сводят к задаче с однородными краевыми условиями. Для этого положим

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

где новая неизвестная функция $v(x, t)$ подлежит определению из краевой задачи

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G(x, t), \\ v(x, 0) &= g(x), \\ v(0, t) &= v(l, t) = 0.\end{aligned}$$

Функцию $w(x, t)$ выбираем удовлетворяющей условиям:

- 1) $w(0, t) = \varphi_1(t)$, $w(l, t) = \varphi_2(t)$; (12.17)
- 2) $w(x, t)$ непрерывно дифференцируема по t и дважды по x .

После любого такого выбора $w(x, t)$ имеем

$$\begin{aligned}G(x, t) &= F(x, t) - \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ g(x) &= f(x) - w(x, 0).\end{aligned}$$

Способ выбора функции $w(x, t)$ относительно произволен. Обычно предлагают выбрать функцию w следующим образом:

$$w(x, t) = \varphi_1(t) + \frac{x}{l}(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)).$$

Но такой вариант выбора w не гарантирует выполнения необходимых свойств у функций $g(x)$, $G(x, t)$.

Если функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям согласования при $t = 0$, то $w(x, t)$ будем искать в виде

$$w(x, t) = a_1(t)x + a_2(t)(l - x) + a_{12}(t)x(l - x)^2 + a_{21}(t)x^2(l - x).$$

Условия (12.17) дают $a_1(t) = \varphi_2(t)/l$, $a_2(t) = \varphi_1(t)/l$. Выберем $a_{12}(t)$ и $a_{21}(t)$ таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$\left(-\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Big|_{x=0} = \left(-\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Big|_{x=l} = 0.$$

Это эквивалентно системе уравнений

$$-2a_{12}(t) + a_{21}(t) = \dot{a}_2(t)/2 = \dot{\varphi}_1(t)/(2l),$$

$$-2a_{21}(t) + a_{12}(t) = \dot{a}_1(t)/2 = \dot{\varphi}_2(t)/(2l),$$

из которой находим

$$a_{12}(t) = (-\dot{\varphi}_1(t) + 2\dot{\varphi}_2(t))/l, \quad a_{21}(t) = (\dot{\varphi}_1(t) + 2\dot{\varphi}_2(t))/l.$$

С учетом условий согласования, функции $g(x)$ и $G(x, t)$ удовлетворяют условиям (12.4).

Задача 12.6. Решить краевую задачу (12.1), (12.2), (12.16), если

$$1) \quad l = \pi, f(x) = 1 + \sin^3 x, \varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 1, F(x, t) = 0$$

$$(F(x, t) = e^{-t} \sin x);$$

$$2) \quad l = 1, f(x) = x^2 - x, \varphi_1(t) = te^t, \varphi_2(t) = t^2,$$

$$F(x, t) = 1 + 2tx + x^2 - x;$$

$$3) \quad l = \pi, f(x) \equiv 1, \varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 1,$$

$$F(x, t) = e^{-t} \sin x + e^{-4t} \sin 2x + e^{-9t} \sin 3x.$$

Аналогичными методами рассматривается вопрос об интегрировании следующей неоднородной краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \quad (12.18)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (12.19)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \psi_1(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \psi_1(t). \quad (12.20)$$

Положим $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$. Здесь $w(x, t)$ — достаточно гладкая функция, для которой справедливы равенства

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = \psi_1(t), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=l} = \psi_1(t). \quad (12.21)$$

Тогда для функции $v(x, t)$ получим неоднородную краевую задачу, но краевые условия уже будут однородными:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G(x, t),$$

$$v(x, 0) = g(x),$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

Здесь $G(x, t) = F(x, t) - \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $g(x) = f(x) - w(x, 0)$. Еще раз подчеркнем, что выбор $w(x, t)$ относительно произволен, но при этом должны выполняться условия

$$g'(0) = g'(l) = 0, \quad \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (12.22)$$

Будем строить функцию $w(x, t)$ в виде

$$w(x, t) = a_1(t)x^2 + a_2(t)(l-x)^2 + a_{23}(t)x^2(l-x)^3 + a_{32}(t)x^3(l-x)^2.$$

Из условий (12.21) находим $a_1(t) = \psi_2(t)/(2l)$, $a_2(t) = -\psi_1(t)/(2l)$. Выберем $a_{23}(t)$ и $a_{32}(t)$ таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right|_{x=l} = 0,$$

что эквивалентно следующей линейной алгебраической системе:

$$3a_{23}(t) - a_{32}(t) = \dot{a}_2(t)/(3l) = \dot{\psi}_1(t)/(6l^2),$$

$$3a_{32}(t) - a_{23}(t) = \dot{a}_1(t)/(3l) = \dot{\psi}_2(t)/(6l^2),$$

из которой находим

$$a_{23}(t) = (\dot{\psi}_2(t) - 3\dot{\psi}_1(t))/(48l^2), \quad a_{32}(t) = (3\dot{\psi}_2(t) - \dot{\psi}_1(t))/(48l^2).$$

При выполнении условий согласования для функций $f(x)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ в точках $(0, 0)$ и $(l, 0)$ будут выполнены условия (12.22).

Задача 12.7. Найти решения краевой задачи (12.18), (12.19), (12.20), если

$$1) \ l = \pi, f(x) = \sin^2 x, \psi_1(t) = t^2, \psi_2(t) = t^2, F(x, t) = e^{-t} \cos x;$$

$$2) \ l = 1, f(x) = 0, \psi_1(t) = 0, \psi_2(t) = t^2, F(x, t) = x^2(1-x^2)t.$$

Упражнение 12.4. Для краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t),$$

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \psi_2(t)$$

построить функцию $w(x, t)$, с помощью которой эта неоднородная краевая задача сводится к краевой задаче с однородными краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G(x, t), \\ v(x, 0) &= g(x), \\ v(0, t) &= \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \end{aligned}$$

Указание. Функция $w(x, t)$ должна быть таковой, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} w(0, t) &= \psi_1(t), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=l} = \psi_2(t), \\ g(0) = g'(l) = 0, \quad G(0, t) &= 0, \quad \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \end{aligned}$$

Ее можно искать в виде

$$w(x, t) = a_1(t)x + a_2(t)(l - x)^2 + a_{12}(t)x(l - x)^2 + a_{22}(t)x^2(l - x)^2.$$

Упражнение 12.5. Для краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \psi_1(t), \quad u(l, t) = \psi_2(t) \end{aligned}$$

построить функцию $w(x, t)$, с помощью которой эта неоднородная краевая задача сводится к краевой задаче с однородными краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G(x, t), \\ v(x, 0) &= g(x), \\ \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} &= v(l, t) = 0. \end{aligned}$$

Указание. Функция $w(x, t)$ должна быть таковой, чтобы выполнялись условия

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = \psi_1(t), w(l, t) = \psi_2(t),$$

$$g'(0) = g(l) = 0, \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, G(l, t) = 0.$$

Ее можно искать в виде

$$w(x, t) = a_1(t)x^2 + a_2(t)(l - x) + a_{21}(t)x^2(l - x) + a_{22}(t)x^2(l - x)^2.$$

Подобными методами интегрирования могут быть решены краевые задачи для иных уравнений, отличных от уравнений теплопроводности.

Задача 12.8. Пусть $q = \text{const}$. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + qu + e^{-t} \sin x,$$

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Найти все q , при которых выполнено равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0.$$

Задача 12.9. Пусть $q = \text{const}$. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + qu + \cos t \cos x,$$

$$u(x, 0) = \cos^2 x,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0.$$

Будет ли решение периодической функцией по переменной t ?

Интерес представляет тот факт, что к уравнению теплопроводности могут быть сведены и другие уравнения. В качестве примера рассмотрим уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w \frac{\partial w}{\partial x},$$

которое встречается в гидродинамике и описывает поверхностные волны.
Преобразование Хопфа-Коула

$$w = \frac{2u_x}{u}.$$

Подстановка так выбранной функции $w(x, t)$ в уравнение Бюргерса приводит это уравнение к виду

$$2 \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}}{u} - 2 \frac{\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x}}{u^2} = 2 \frac{\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}}{u} - 2 \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{u^2},$$

которое можно записать в иной форме

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] = 0.$$

Откуда видно, что каждое решение уравнения теплопроводности порождает решение уравнения Бюргерса. Обратное утверждение, конечно, не будет справедливым.

Глава 13. Понятие корректности задач математической физики

Как уже подчеркивалось, в курсе "Уравнения математической физики" ("Уравнения с частными производными"), обычно ограничиваются изучением тех задач, которые возникают при моделировании некоторых физических (химических, биологических и т. д.) процессов, явлений. Это означает, что для реальных объектов математическая модель должна быть "правильно" составлена, чтобы отражать адекватно суть моделируемого явления или процесса. Для упорядочивания этой ситуации Адамаром было введено понятие корректных задач математической физики.

Определение 1. Задача называется разрешимой, если

- она разрешима при любых начальных (граничных, краевых) данных, принадлежащих некоторому классу функций;
- имеет единственное решение (единственное в обобщенном и уточненном смысле);
- решения данной задачи непрерывно зависят от данных рассматриваемой задачи (от начальных, краевых условий) в естественной метрике.

Определение 2. Задача называется некорректной, если не выполнен хотя бы один из пунктов определения корректности:

- она не разрешима при любых начальных, краевых, граничных данных;
- решение её не является единственным;
- нет непрерывной зависимости от данных задачи (нельзя выбрать норму, в которой реализуется непрерывная зависимость от данных поставленной задачи).

Приведем два примера корректных задач математической физики.

Пример 1. Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0, x) &= f(x),\end{aligned}$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0.$$

Здесь $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$, $T > 0$, $u = u(t, x)$, $f(x) \in C^1[0, \pi]$, $f(0) = f(\pi) = 0$.

Существование и единственность решения такой краевой задачи вытекает из результатов, изложенных в гл. 10 и 11.

Непрерывная зависимость от начальных данных вытекает из принципа максимума для уравнения теплопроводности. Действительно, пусть $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$ — два решения рассматриваемой краевой задачи, но с разными начальными данными:

$$u_1(0, x) = f_1(x), \quad u_2(0, x) = f_2(x).$$

Согласно принципу максимума в данном случае

$$\max_{(x,t) \in \bar{D}_T} |u_1(t, x) - u_2(t, x)| \leq \max_{x \in [0, \pi]} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Пример 2. Рассмотрим задачу Дирихле в круге

$$\Delta u = 0,$$

$$u(r, \varphi)|_{r=R} = f(\varphi),$$

где $f(\varphi)$ — непрерывная 2π -периодическая функция.

Задача 13.1. Проверить корректность постановки последней задачи, т. е. задачи из примера 2.

Определение корректности постановки задач математической физики не является абсолютно формализованным и требует иногда корректировки, связанной с уточнением постановки задачи при проверке её корректности.

Рассмотрим задачу Неймана в круге

$$\Delta u = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=R} = g(\varphi),$$

где $g(\varphi)$ — заданная непрерывная 2π -периодическая функция. Естественно, в такой постановке её решение не существует, так как не учтено усло-

вие разрешимости $\int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi = 0$. Если же последнее равенство добавить

при постановке задачи, то решение в таком ее варианте уже, конечно, существует.

Аналогичная ситуация с единственностью. Напомним, что решение задачи

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} &= g(\varphi), \\ \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi &= 0,\end{aligned}$$

где определяется с точностью до произвольной константы C , т. е. если $u(r, \varphi)$ – решение, то $u(r, \varphi) + C$ также удовлетворяет данной краевой задаче. Поэтому трактовка "единственности" носит обобщенный характер, разность двух её любых решений с необходимостью произвольная постоянная величина.

В заключение этого раздела отметим, что можно привести примеры задач математической физики, для которых первоначальная постановка может оказаться некорректной, но естественная корректировка постановки задачи приводит такую задачу к корректной.

Существует иной вариант постановки задачи Неймана в круге, который приводит также к корректной постановке.

Приведем такой возможный и естественный вариант:

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} &= f(\varphi).\end{aligned}$$

При этом $\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi = 0$ и требуется найти такую гармоническую функцию, которая удовлетворяет условию на границе, а также условию

$$\int_0^l \left(\int_{-\pi}^{\pi} u(r, \varphi) r d\varphi \right) dr = 0.$$

Приведем два примера некорректных задач математической физики. Обычно их называют примерами Адамара.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (13.1)$$

вместе с начальными условиями

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= g(x), \end{aligned} \quad (13.2)$$

где $f(x), g(x)$ – достаточно гладкие функции и они ограничены на всей числовой прямой, т. е.

$$|f(x)| \leq M, \quad |g(x)| \leq M,$$

где M – некоторая положительная постоянная.

Пусть $f(x) = f_n(x) = e^{-\sqrt{n}} \cos(nx)$, а $g(x) \equiv 0$. Этим начальным данным соответствует следующая последовательность решений:

$$u_n(x, t) = e^{-\sqrt{n}} \operatorname{ch}(nt) \cos(nx).$$

Пусть $f(x) \in C^m(R)$, где норма введена следующим равенством:

$$\|f_n(x)\|_m = \max_{0 \leq n \leq m} \sup |f^{(n)}(x)|.$$

Ясно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x)\|_m = 0.$$

Рассмотрим теперь семейство решений $u_n(x, t)$ при некотором $t_0 > 0$

$$\|u_n(x, t_0)\| = e^{-\sqrt{n}} \operatorname{ch}(nt_0) \rightarrow \infty,$$

если $n \rightarrow \infty$.

Пример 2. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) &= f(x), \end{aligned}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0,$$

$x \in [0; \pi]$, $t \in [-t_0, 0]$, а $t_0 > 0$.

Пусть $\bar{\mathcal{D}}_{t_0} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq \pi, -t_0 \leq t \leq 0\}$. Обозначим через $(L_p)(\bar{\mathcal{D}}_{t_0})$ пространство измеримых функций, у которых конечен интеграл

$$\int_{-t_0}^0 \int_0^\pi |u(x, t)|^p dx dt.$$

Норму в этом пространстве определим равенством

$$\|u\|_{\mathcal{L}_p} = \sqrt[p]{\int_{-t_0}^0 \int_0^\pi |u|^p dx dt}.$$

Будем считать, что начальные функции $f(x) \in C^m[0; \pi]$ с нормой $\|f\|_m = \max_{0 \leq k \leq m} \max_{x \in [0; \pi]} |f^{(k)}(x)|$.

Рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = e^{-n} \sin(nx)$.

Упражнение 13.1. Показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_m = \infty.$$

Пусть теперь $u_n(x, t)$ – решения следующих задач:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2},$$

$$u_n(x, 0) = f_n(x),$$

$$u_n(0, t) = u_n(l, t) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Нетрудно проверить, что

$$u_n(x, t) = e^{-n} e^{-n^2 t} \sin nx.$$

Но

$$\|u_n(x, t)\|_{\mathcal{L}_1} = e^{-n} \frac{e^{n^2 t_0} - 1}{n^2} \int_0^\pi |\sin(nx)| dx \geq$$

$$\geq e^{-n} \frac{e^{n^2 t_0} - 1}{n^2} \int_0^{\pi/n} \sin(nx) dx = e^{-n} \left(\frac{e^{n^2 t_0} - 1}{n^2} \right) \frac{2}{n} \rightarrow \infty,$$

если $n \rightarrow \infty$. Здесь следует учесть то обстоятельство, что $t_0 > 0$. Итак, доказано, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(x, t)\|_{\mathcal{L}_1} = \infty. \quad (13.3)$$

Отметим, что справедливо включение [11] $L_{p_1}(D_{t_0}) \subset L_{p_2}(D_{t_0})$. Более того, справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_{p_1}} \leq M \|u\|_{L_{p_2}},$$

где M – некоторая положительная постоянная. Поэтому, при реализации условия (13.3) справедливо следующее:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(x, t)\|_{L_p} = \infty$$

при любом $p > 1$.

Наконец, можно показать (проверить самостоятельно), что при любом $t_0 > 0$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(x, -t_0)\|_m = \infty.$$

Глава 14. Интегральные уравнения

Кроме дифференциальных уравнений, в математической физике встречаются интегральные уравнения, т. е. уравнения, которые содержат неизвестную функцию под знаком интеграла. В рамках данного раздела ограничимся рассмотрением интегральных уравнений следующего вида:

$$y(x) = \mu \int_a^b K(x, s)y(s)ds + f(x), \quad (14.1)$$

$$y(x) = \mu \int_a^x K(x, s)y(s)ds + f(x), \quad (14.2)$$

$$y(x) = \mu \int_a^b K(x, s)y(s)ds, \quad (14.3)$$

$$y(x) = \mu \int_a^x K(x, s)y(s)ds. \quad (14.4)$$

Здесь $x \in [a, b], s \in [a, b], K(x, s)$ – заданная непрерывная функция переменных x, s , когда (x, s) принадлежит квадрату $(x \in [a, b], s \in [a, b])$, $\mu \in R, f(x) \in C[a, b]$. Во всех четырёх случаях требуется найти непрерывную функцию $y(x) \in C[a, b]$.

Уравнение (14.1) принято называть уравнением Фредгольма второго рода.

Уравнение (14.2) – это уравнение Вольтерра второго рода.

Уравнение (14.3), (14.2) – это уравнения первого рода – Фредгольма и Вольтерра соответственно.

Содержательный анализ в достаточно общей ситуации возможен лишь для интегральных уравнений второго рода. Для уравнений первого рода очень часто задача нахождения решения оказывается некорректной с точки зрения определения из предыдущей главы.

Действительно, уравнение

$$\int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x),$$

где $a, b \in R (b > a)$, $f(x)$ – произвольная непрерывная функция,
 $K(x, s) = P(x)Q(s)$, приводит к равенству

$$P(x)\lambda = f(x)$$

с $\lambda = \int_a^b Q(s)y(s)ds$. Последнее означает, что $f(x)$ пропорциональна $P(x)$

и, следовательно, выбор ядра и правой части не может быть "произвольным" даже относительно. Добавим, что уравнение

$$\int_{-a}^a P(x)Q(s)y(s)ds = 0, a > 0$$

при чётной(нечётной) $Q(s)$ имеет в качестве решений любую нечётную (чётную) функцию. Последнее замечание вытекает из известного свойства интеграла $\int_{-a}^a g(x)dx = 0$ при любой нечётной функции.

Аналогичная ситуация и с уравнением Вольтерра первого рода. Например, уравнение

$$\int_a^x Q(s)y(s)ds = f(x)$$

разрешимо, если $f(a) = 0$. Более того, если $Q(s)$ – непрерывная функция и искать следует непрерывное решение, то $f(x)$ – должна быть непрерывно дифференцируемой функцией (не может быть просто непрерывной функцией).

В оставшейся части данного раздела будем рассматривать уравнения (14.1) и (14.2).

Теорема 1. Уравнение Вольтерра второго рода имеет единственное непрерывное решение $y(x)$ на отрезке $[a, b]$. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Доказательство теоремы можно найти во многих учебниках, где изложена теория интегральных уравнений с большей полнотой (см., например, [14]).

Теорема 2. Существует такое $\mu_0 > 0$, что при $|\mu| < \mu_0$ уравнение Фредгольма (14.1) имеет единственное непрерывное решение. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Как и для уравнения (14.2), доказательство теоремы 2 можно найти в учебном пособии [14], а также других учебных пособиях и учебниках, посвященных изучению интегральных уравнений.

Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром

Определение. Уравнение Фредгольма (14.1) второго рода называется уравнением Фредгольма с вырожденным ядром, если

$$K(x, s) = \sum_{m=1}^n P_m(x)Q_m(s), \quad (14.5)$$

где $n \in N$, а $P_m(x), Q_m(s) \in C[a, b]$ – заданные непрерывные функции.

В таком случае решение интегрального уравнения (14.1) может быть сведено к решению системы алгебраических уравнений.

Действительно, учет структуры ядра позволяет переписать интегральное уравнение (14.1) в следующем виде (см. формулу (14.5)):

$$y(x) = \mu \sum_{m=1}^n P_m(x) \left(\int_a^b Q_m(s)y(s)ds \right) + f(x).$$

Обозначим теперь через

$$u_m = \int_a^b Q_m(s)y(s)ds,$$

где набор $\{u_m\}, m = 1, 2, \dots, n$ трактуется как набор неизвестных, требующих определения.

Сразу отметим, что если бы они (u_1, u_2, \dots, u_n) были известны, то исходная формула позволяла бы находить соответствующее этому набору решение:

$$y(x) = \sum_{m=1}^n u_m P_m(x) + f(x). \quad (14.6)$$

Домножим теперь равенство (14.6) на $Q_k(x), k = 1, \dots, n$ и каждое из таких равенств проинтегрируем по x от a до b . Это позволит сформировать n равенств

$$u_k = \mu \sum_{m=1}^n c_{km} u_m + d_k,$$

$$m, k = 1, 2, \dots, n, u_k = \int_a^b Q_k(x)y(x)dx, c_{km} = \int_a^b Q_k(x)P_m(x)dx.$$

В результате получим систему из n линейных алгебраических уравнений для определения n неизвестных $u_m (m = 1, 2, \dots, n)$.

Данная система может быть переписана в матричном виде:

$$A(\mu)u = d, \quad (14.7)$$

где $u = colon(u_1, u_2 \dots u_n)$, $d = colon(d_1, d_2 \dots d_n)$, $A(\mu) = E - \mu C$, E – единичная матрица, $C = \{c_{km}\}, k, m = 1, 2, \dots, n$. Для тех μ , при которых

$$\det(A(\mu)) \neq 0, \quad (14.8)$$

система (14.7) имеет единственное решение. Подчеркнем, при достаточно малых μ неравенство (14.8) заведомо выполнено, так как $\det(A(\mu))|_{\mu=0} = \det(E) = 1$. Понятно, что $\det(A(\mu))$ от μ в нашем случае зависит непрерывным образом. Последнее замечание отражает то обстоятельство, что данный метод не находился в противоречии с результатами Теоремы 14.2.

Можно привести достаточно большой набор уравнений, в которых ядро будет вырожденным. Вместе с тем существуют и примеры невырожденных ядер.

Например, $K(x, s) = \exp(xs)$, $K(x, s) = \cos(x^2s^3)$ и т. д. Вместе с тем можно привести примеры, когда проверка вырожденности ядра предполагает преобразования:

$$K(x, s) = \exp(x + s) = \exp(x) \exp(s),$$

$$K(x, s) = \cos(x + s) = \cos(x) \cos(s) - \sin(x) \sin(s).$$

Приведем примеры решений некоторых интегральных уравнений с вырожденным ядром.

Пример 14.1. Рассмотрим уравнение $y(x) = \mu \int_0^1 (x + s)y(s)ds - 12x$

т. е. $K(x, s) = x + s$, $f(x) = -12x$, $u_1 = \int_0^1 y(s)ds$, $u_2 = \int_0^1 sy(s)ds$ – вспомогательные неизвестные. В результате получим систему для нахождения

НЕИЗВЕСТНЫХ ВЕЛИЧИН u_1, u_2 :

$$u_1 = \mu(c_{11}u_1 + c_{12}u_2) + d_1,$$

$$u_2 = \mu(c_{21}u_1 + c_{22}u_2) + d_2.$$

В данном случае

$$c_{11} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, c_{12} = \int_0^1 dx = 1,$$

$$c_{21} = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, c_{22} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$d_1 = -12 \int_0^1 x dx = -6, d_2 = -12 \int_0^1 x^2 dx = -4.$$

Итак, получаем систему

$$\begin{cases} (1 - \frac{\mu}{2})u_1 - \mu u_2 = -6, \\ -\frac{\mu}{3}u_1 + (1 - \frac{\mu}{2})u_2 = -4, \end{cases}$$

$$\det(A(\mu)) = 1 - \mu - \frac{\mu^2}{12} \neq 0,$$

если $\mu \neq -6 \pm 4\sqrt{3}$. При всех таких μ система имеет единственное решение:

$$u_1 = \frac{12\mu + 72}{\mu^2 + 12\mu - 12}, u_2 = \frac{48}{\mu^2 + 12\mu - 12}.$$

Оказалось, что в нашем случае при $\mu \neq -6 \pm 4\sqrt{3}$ интегральное уравнение имеет решение

$$y(x) = \frac{12\mu + 72}{\mu^2 + 12\mu - 12}\mu x + \frac{48}{\mu^2 + 12\mu - 12}\mu - 12x.$$

Если $\mu = 0$, то, конечно, $y(x) = -12x$. При $\mu = -6$ получаем, что в таком случае $y(x) = -12x + 6$.

Задача 14.1. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = \mu \int_0^1 xsy(s)ds + 1.$$

Ответ: решение существует при $\mu \neq 3$, $y(x) = \mu \frac{3}{2(3-\mu)}x + 1$.

Задача 14.2. Найти решение уравнения

$$y(x) = \int_0^\pi \cos(x+s)y(s)ds + \cos x.$$

Ответ: $y(x) = \frac{2}{2-\pi} \cos x$.

Задача 14.3. Решить уравнение

$$y(x) = \mu \int_0^1 (xs + s^2x^2)y(s)ds + 1.$$

Ответ: $y(x) = \mu \frac{120 - 4\mu}{\mu^2 - 128\mu + 240}x + \mu \frac{10\mu + 240}{3(\mu^2 - 128\mu + 240)}x^2 + 1$. Решение существует, если $\mu \neq 64 \pm 4\sqrt{241}$.

Задача 14.4. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = \mu \int_0^1 e^{x+s}y(s)ds + e^x.$$

Ответ: $y(x) = \mu \frac{e^2 - 1}{2 - \mu(e^2 - 1)}e^x + e^x = \frac{2}{2 + \mu(1 - e^2)}e^x$.

Остальные задачи можно найти на стр. 37 – 38 из учебного пособия [15], где приведены также решения иных примеров уравнений Фредгольма второго рода с вырожденным ядром. В данном разделе приведено введение в теорию интегральных уравнений. Более полное и обстоятельное изложение данной теории можно найти в учебнике [16]. В учебном пособии [14] теория интегральных уравнений использовалась при изучении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Замечание. Рассмотрим однородное уравнение

$$y(x) = \mu \int_a^b K(x, s)y(s)ds.$$

Очевидно, что данное уравнение имеет нулевое решение, т. е. $y(x) = 0$. Тем не менее при некоторых μ могут быть и иные отличные от нуля решения. Такие числа μ , при которых есть ненулевое решение, называются характеристическими числами.

Рассмотрим, например, следующую задачу.

Задача 14.5. Найти характеристические числа у интегрального уравнения

$$y(x) = \mu \int_0^1 (x + s)y(s)ds.$$

Ответ: характеристические числа $\mu_{1,2} = -6 \pm 4\sqrt{3}$. Проверить это.

Примеры контрольных и экзаменационных задач

Приведем примеры контрольных работ для студентов математического факультета ЯрГУ им. П. Г. Демидова.

Вариант 1

1. Решить задачу Дирихле:

$$\Delta u = 0, u(r, \varphi)|_{r=1} = f(\varphi) = \begin{cases} \cos^2 \varphi, \varphi \in [0; \pi], \\ 1, \varphi \in (\pi; 2\pi). \end{cases}$$

2. При каких a задача Неймана имеет решение:

$$\Delta u = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=3} = a \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi.$$

3. Решить задачу Дирихле:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & u(2, \varphi) &= \sin^3 3\varphi, \\ 0 < r < 2, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{3}, & u(r, 0) &= u(r, \frac{\pi}{3}) = 0. \end{aligned}$$

4. Решить краевую задачу:

$$y'' = x, \quad y(0) = y'(1) = 0.$$

Вариант 2

1. Решить задачу Дирихле:

$$\Delta u = 0, u(r, \varphi)|_{r=1} = f(\varphi) = \begin{cases} \cos^2 2\varphi, \varphi \in [0; \pi], \\ 1, \varphi \in (\pi; 2\pi). \end{cases}$$

2. При каких a задача Неймана имеет решение:

$$\Delta u = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=2} = a + \cos^4 \varphi.$$

3. Решить задачу Дирихле:

$$\Delta u = 0, \quad u(1, \varphi) = \sin^3 8\varphi,$$

$$0 < r < 1, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}, \quad u(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{4}) = 0.$$

4. Решить краевую задачу:

$$y'' = 1, \quad y'(0) = y'(1) = 0.$$

Вариант 3

1. При каких $a \in R$ краевая задача

$$\Delta u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} + au|_{r=0} = \cos^2 \varphi, \quad (r \leq 1)$$

имеет решение?

2. $\Delta u = r^6, u(1, \varphi) = \sin 6\varphi, \quad r \leq 1.$

3. $\Delta = 0, \varphi \in [0; \pi], \quad u(1, \varphi) = \sin^2 3\varphi, \quad u(r, 0) = u(r, \pi) = 0.$

4. При каких $n \in Z$ краевая задача $u'' + n^2 u = 1, u(0) = u(\pi) = 0$ имеет решение?

Вариант 4

1. При каких $b \in R$ краевая задача

$$\Delta u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=2} - bu|_{r=2} = \sin^3 \varphi$$

имеет решение?

2. $\Delta u = r^4, u(2, \varphi) = \cos^4 \varphi.$

3. $\Delta = 0, \varphi \in [0; \frac{\pi}{4}], r \leq 1, u(1, \varphi) = \sin^2 2\varphi, u(r, 0) = u(r, \pi) = 0.$

4. Пусть $n \in Z$. Указать те из них, при которых краевая задача $u'' + n^2 u = x, u(0) = u(\pi) = 0$ имеет решение.

Вариант 5

1. При каком a справедливо: $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$, где $u(x, t)$ – решение краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$u(x, 0) = a + \cos^2 2x, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0?$$

2. Решить краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \exp(t) \sin x,$$
$$u(x, 0) = 1 + \sin^3 x, u(0, t) = u(\pi, t) = 1.$$

3. Решить краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$u(x, 0) = \sin^3 \frac{x}{2}, u(0, t) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0.$$

Вариант 6

1. При каком a справедливо: $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$, где $u(x, t)$ – решение краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$u(x, 0) = 1 + a \cos^2 4x, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0?$$

2. Решить краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x,$$
$$u(x, 0) = 2 + \sin^3 2x, u(0, t) = u(\pi, t) = 2.$$

3. Решить краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = \cos^3 \frac{x}{2}, u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0.$$

Вариант 7

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = e^{\sqrt{3}x}$, $x \in R$.
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin t \sin x$, $u(x, 0) = x + \sin^3 x$, $u_t(x, 0) = \sin 2x$,
 $u(0, t) = u(\pi, t) = \pi$, $x \in [0; \pi]$.
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x, 0) = x + 2x^3 - 3x^2$, $u_t(x, 0) = 0$, $u(0, t) = 0$, $u_x(1, t) = 1$.
4. При каких a все решения краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au,$$

$$u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x),$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$$

будут ограниченными функциями, т. е. $|u(t, x)| \leq K$?

Вариант 8

1. Решить краевую задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} + e^t \cos^2 \pi x,$$

$$u(x, 0) = x + \cos^2 \pi x, u_t(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = u_x(1, t) = 1, x \in [0; 1].$$

2. Решить краевую задачу:

$$u_{tt} + 6u_t + 9u = u_{xx} + e^{3t} \sin x,$$

$$u(x, 0) = \sin x, u_t(x, 0) = \sin 2x, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

3. Решить краевую задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} + u,$$

$$u(x, 0) = \sin^3 \frac{x}{2}, u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0.$$

4. Решить задачу Коши:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$z = y$ при $x = 0$.

Примеры задач на экзамене

Задача 1. При каком выборе функций $f(x), g(x)$ решение начальной задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(0, x) = f(x), u_t(0, x) = g(x).$$

будет бегущей волной?

Задача 2. Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(0, x) = f(x), u_t(0, x) = g(x),$$

где $f(x), g(x) - 2\pi$ периодические функции.

Будет ли решение этой задачи периодической функцией:

а) по переменной t ;

б) по переменной x ?

Задача 3. Решить краевую задачу:

$$\Delta u = 0, \alpha u(r, \varphi)|_{r=R} + \beta \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R} = g(\varphi),$$

если $r < R$.

Всегда ли эта задача имеет решения? Каково необходимое условие ее разрешимости?

Задача 4. Рассмотрим краевую задачу (смешанную задачу):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0,$$

$$u(0, x) = f(x), u_t(0, x) = g(x).$$

При каком выборе $f(x)$ и $g(x)$ решение данной краевой задачи – ограниченная функция переменных t, x ?

Задача 5. Пусть $u(r, \varphi, a)$ – решение задачи Дирихле:

$$\Delta u = 0, u|_{r=1} = \cos^2 \varphi + a.$$

При каком значении a выполнено равенство $u(0, \varphi, a) = -1$?

Задача 6. Найти все значения параметра a , при которых решение краевой (смешанной) задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au,$$

$$u(0, x) = \sin x + 2 \sin 2x, x \in [0, \pi],$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$$

такого, что $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 0$.

Задача 7. Найти все значения параметра a , при которых решение краевой (смешанной) задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(0, x) = a + \cos^2 2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=\pi} = 0$$

такого, что для него справедливо равенство $\int_0^\pi u(t, x) dx = 0$.

Задача 8. Найти все значения параметра a , при которых решение краевой (смешанной) задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x,$$

$$u(0, x) = \sin x + a \sin 3x, x \in [0, \pi],$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0,$$

такого, что ее решение не зависит от t , т. е. $u(t, x) = v(x)$.

Литература

1. *Тихонов, А. Н.* Уравнения математической физики / *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский.* — М. Наука, 1970. — 736 с.
2. *Годунов, С. К.* Уравнения математической физики / *С. К. Годунов.* — М. Наука, 1970. — 392 с.
3. *Петровский, И. Г.* Лекции по уравнениям с частными производными / *И. Г. Петровский.* — М. Наука, 1953. — 400 с.
4. *Кошляков, Н. С.* Основные дифференциальные уравнения математической физики / *Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов.* — М. Наука, 1962. — 768 с.
5. *Будак, Б. М.* Сборник задач по математической физике / *Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов.* — М. Наука, 1972. — 688 с.
6. *Бицадзе, А. В.* Сборник задач по уравнениям математической физики / *А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калининченко.* — М. Наука, 1985. — 312 с.
7. *Самойленко, А. М.* Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи / *А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк.* — М. Высшая школа, 1989. — 383 с.
8. *Михлин, Г. С.* Курс математической физики / *Г. С. Михлин.* — М. Наука, 1968. — 576 с.
9. *Михлин, Г. С.* Вариационные методы математической физики / *Г. С. Михлин.* — М. Наука, 1970. — 512 с.
10. *Олейник, О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными / *О. А. Олейник,* — М. Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова — Лаборатория знаний, 2005. — 260 с.
11. *Колмогоров, А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин.* — М. Наука, 1968. — 496 с.
12. *Вибрации в технике: Справочник: в 6 т.* — М. Машиностроение, 1981. — 456 с.
13. *Бабаков, И. М.* Теория колебаний / *И. М. Бабаков.* — М. Наука, 1968. — 560 с.
14. *Биркган, С. Е.* Интегральные уравнения и краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / *С. Е. Биркган.* — Ярославль : ЯрГУ, 2003. — 88 с.

15. *Куликов, Д. А.* Задачи и упражнения по курсу "Дифференциальные, интегральные уравнения и элементы вариационного исчисления" / *Д. А. Куликов.* – Ярославль: ЯрГУ, 2008. – 43 с.
16. *Смирнов, В. И.* Курс высшей математики / *В. И. Смирнов.* – М. Наука, 1974. Т. 4. Ч. 1. – 336 с.

Учебное издание

**Кубышкин Евгений Павлович
Куликов Анатолий Николаевич
Куликов Дмитрий Анатольевич**

**Основные методы решения уравнений
математической физики**

Учебное пособие

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова
Компьютерная верстка Д. А. Куликов

Подписано в печать 22.11.2018.

Формат 60×84/16. Усл. печ.л. 7.4
Уч.-изд. л. 6.2. Тираж 25 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.
Ярославский государственный университет.
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.