

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

**М. Н. Преображенский**

**М Е Х А Н И К А.  
МОЛЕКУЛЯРНАЯ  
Ф И З И К А**

*Учебное пособие*

*Рекомендовано  
Научно-методическим советом университета  
для студентов, обучающихся по специальности Биология,  
направлению Экология и природопользование*

Ярославль 2011

УДК 53  
ББК В2я73+В36я73  
П 72

*Рекомендовано  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2010/2011 учебного года*

Рецензенты:

В. Г. Мальшаков, кандидат физико-математических наук, доцент; кафедра общей физики Ярославского государственного педагогического университета им. К. Д. Ушинского

**Преображенский, М. Н. Механика. Молекулярная физика :**  
П 72 учебное пособие / М. Н. Преображенский; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2011. –132 с.  
ISBN 978-5-8397-0805-1

В учебное пособие «Механика. Молекулярная физика» вошли два первых раздела общего курса физики: «Механика» и «Молекулярная физика и термодинамика». Данные разделы рассмотрены в соответствии с программой курса общей физики для нефизических факультетов университетов.

В каждой части содержатся контрольные задания для самостоятельного решения. Приведены некоторые примеры решения типовых контрольных заданий.

Пособие предназначено для студентов биологического факультета, обучающихся по специальности 020201.65 Биология и направлению 020800.62 Экология и природопользование (дисциплина «Физика», блок ЕН), очной и заочной форм обучения.

Может быть использовано при подготовке к федеральному тестированию студентами математического и физического факультетов, обучающихся по специальностям «Математика и прикладная математика», «Радиофизика и электроника» и «Микроэлектроника», где задания имеют аналогичный уровень сложности.

УДК 53  
ББК В2я73+В36я73

ISBN 978-5-8397-0805-1

© Ярославский государственный  
университет им. П. Г. Демидова, 2011

# **Введение**

## ***Физика и ее место среди других наук.***

### ***Методы познания в науке***

Среди естественных наук, т. е. наук, изучающих природу, можно выделить три: физику, химию и биологию. Физика изучает явления неорганического мира. Химия рассматривает превращения в неорганическом мире, а также органические соединения. Биология занимается изучением живого мира.

Физика играет в этом ряду особую роль. Основные законы, установленные в физике: законы сохранения энергии, импульса, заряда и др. – имеют всеобщий характер и действуют как в живой, так и в неживой материи. Физику в этом отношении можно рассматривать как основу всех наук. Химия занимается более сложными формами движения материи, а биология изучает наиболее сложные ее проявления. Высшие формы движения материи включают в себя формы низшего порядка, но, помимо того, в них может появляться что-то принципиально новое.

Основные законы физики, смысл которых мы хорошо понимаем, как правило, отличаются изяществом и простотой. Все они были открыты в итоге кропотливой работы. Основным методом исследования в физике – это опыт, т. е. наблюдение исследуемого явления в строго контролируемых условиях, позволяющих воспроизвести его каждый раз при повторении. На первых стадиях открытия новых законов привлекаются гипотезы – это научные предположения, выдвигаемые для объяснения какого-либо экспериментального факта. Гипотеза, прошедшая всестороннюю проверку и подтверждение, превращается в закон, а ряд объединенных законов – в теорию. Теория представляет систему основных идей и закономерностей развития природы. Так, например, теория электромагнитных волн Максвелла включает в себя законы электромагнитной индукции Фарадея, теорему Гаусса для электрических и магнитных зарядов и закон Ампера.

Построение классической физики было завершено в начале XX столетия, и многим физикам казалось, что они могут объяснить практически все. Однако были два явления, которые

классическая физика объяснить не смогла. Во-первых, это тепловое излучение абсолютно черного тела и, во-вторых, противоречивое поведение эфира. Первую проблему решил М. Планк, введя представление об излучении света отдельными порциями – квантами. Решение второй проблемы привело к созданию А. Эйнштейном общей теории относительности, основным постулатом которой было постоянство скорости света.

Однако развитие теории относительности и квантовой механики не умаляют роли классической, или общей, физики. Их законы носят более общий характер, но они переходят в законы классической физики при соответствующих предельных переходах.



Пространственная область, изучением которой занимается физика, лежит от самых малых величин –  $10^{-16}$  см в ядерной физике до самых огромных  $10^{27}$  см размеров в видимой части Вселенной.

В программу предмета «Физика» входят следующие разделы: механика; молекулярная физика и термодинамика; колебания и волны; электричество и магнетизм; оптика; основы атомной, ядерной и квантовой физики.

# Часть I. Механика

## Глава 1. Кинематика

### 1.1. Общие понятия

**Кинематика** занимается описанием законов движения, не касаясь причин, вызывающих это движение.

Механическим движением является перемещение тела относительно других тел. Простейшие виды движения – это поступательное и вращательное движения. В первом случае прямая, соединяющая две любые точки тела, перемещается параллельно самой себе, а во втором – все точки движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой – оси вращения.

Движение всегда должно происходить относительно других тел, т. е. не имеет смысла говорить о движении в пространстве, где нет других тел. Кроме того, движение происходит во времени. Для описания движения необходимо ввести понятие **системы отсчета**. **Система отсчета** – совокупность неподвижных друг относительно друга тел, относительно которых рассматривается движение, и отсчитывающих время часов. Систем отсчета может существовать бесконечное множество, и движение в каждой из них может иметь различный характер.

Для более детального описания движения с каждой системой отсчета необходимо связать систему координат, например декартову: три взаимно перпендикулярных направления и соответствующий масштаб для измерения расстояний. Поскольку мы коснулись проблемы измерений, рассмотрим ее немного подробнее. Измерить какую-либо физическую величину – значит сравнить ее с выбранным заранее эталоном. В принципе эталон можно выбрать для каждой величины, но очевидно, что различные величины связаны между собой определенными соотношениями или законами. Минимальный набор эталонов, при помощи которого можно представить любую другую величину (всего их 7), называют системой единиц. В настоящее время в физике принята международная система единиц СИ, где в качестве единицы длины взят метр, массы – килограмм, времени – секунда.

Для упрощения описания ряда процессов используются некоторые физические абстракции, такие как *материальная точка* – это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь; *абсолютно твердое тело* – тело, расстояние между любыми точками которого не меняется, и т. д. Описать движение тела – это значит в каждый момент времени определить координаты каждой его точки и ее скорость.

## 1.2. Векторные величины. Действия над векторами

Очень многие величины в физике являются векторами. **Вектором** называется величина, характеризующаяся численным значением (модулем) и направлением; сложение векторов происходит по правилу параллелограмма. Обозначаются векторы в печатных изданиях жирными, как правило, латинскими буквами (**a**, **b**, **c**, **F**, **G** ...) или над буквой ставится стрелка  $\vec{a}$ ,  $\vec{F}$ . Численное значение вектора называется его модулем и характеризует длину отрезка:  $|\mathbf{a}| = a$ . Два вектора считаются равными друг другу, если равны их абсолютные значения, а направления совпадают. Легко показать, что  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \neq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ . Аналогично модулю суммы, модуль разности векторов не равен разности модулей векторов.

При работе с векторами их можно параллельно переносить из одной точки в другую, сохраняя при этом их длину.

**Умножение вектора на число.** Произведением вектора **a** на число  $\alpha$  является вектор **b**, модуль которого  $b = |\alpha| a$ , а направление совпадает с направлением вектора **a**, если  $\alpha$  больше нуля, и противоположно, если меньше нуля. Все сказанное пояснено на рис. 1.1, а. Нетрудно заметить, что умножение на  $-1$  изменяет направление вектора на противоположное.

Из правила умножения вектора на число следует, что любой вектор можно представить как:

$$\mathbf{a} = a \mathbf{e}_a, \quad (1.1)$$

где  $a$  – модуль вектора **a**, а  $\mathbf{e}_a$  – вектор с модулем равным 1 и по направлению совпадающий с вектором **a**. Называется он **единичным** вектором, или ортом вектора **a**. Для единичного вектора соответственно можно записать:

$$\mathbf{e}_a = \mathbf{a}/a. \quad (1.2)$$

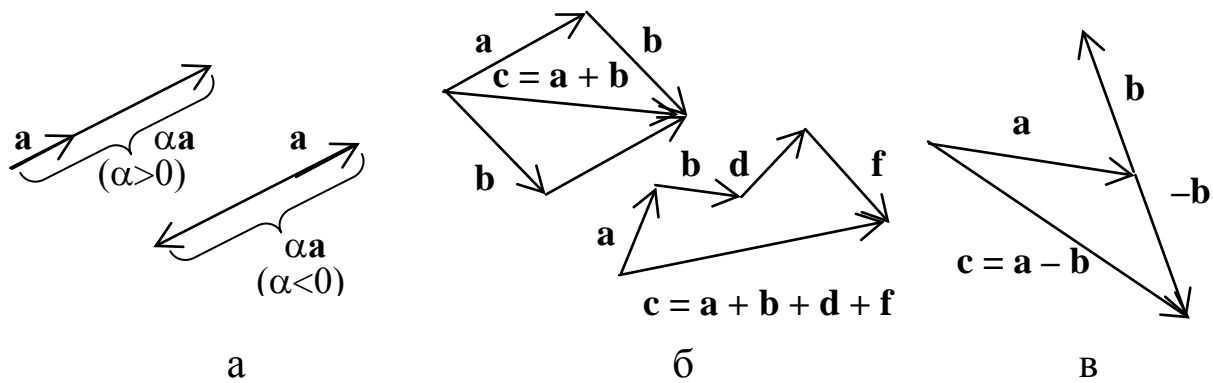


Рис. 1.1

Единичные векторы, или орты, можно сопоставлять не только векторам, но и любым направлениям, например осям координат –  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$ , нормали к поверхности –  $\mathbf{e}_n$  (обычно обозначается  $\mathbf{n}$ ), касательной к кривой –  $\mathbf{e}_\tau$  (обычно обозначается  $\boldsymbol{\tau}$ ).

**Сложение и вычитание векторов.** Как уже говорилось в определении, векторы складываются по правилу параллелограмма (рис. 1.1, б), однако из этого рисунка видно, что для сложения двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  можно отложить второй вектор из конца первого. Вектор суммы  $\mathbf{c}$  тогда будет направлен из начала первого вектора в конец второго. Особенно удобно пользоваться этим правилом при сложении более чем двух векторов.

Разность двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  легко получить, если к вектору  $\mathbf{a}$  прибавить вектор  $\mathbf{b}$ , умноженный на  $(-1)$  (рис. 1, в):

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}. \quad (1.3)$$

**Проекция вектора на направление.** Направление обозначается обычно буквами:  $l$ ,  $m$ ,  $n$  ... . Проекция вектора  $\mathbf{a}$  на направление  $l$  – это число:

$$a_l = a \cos \alpha. \quad (1.4)$$

Проекция вектора на направление может быть больше нуля, если угол находится в пределах от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , равна нулю, если угол равен  $90^\circ$ , и отрицательна, если угол находится в пределах от  $90^\circ$ , до  $180^\circ$  (рис. 1.2).

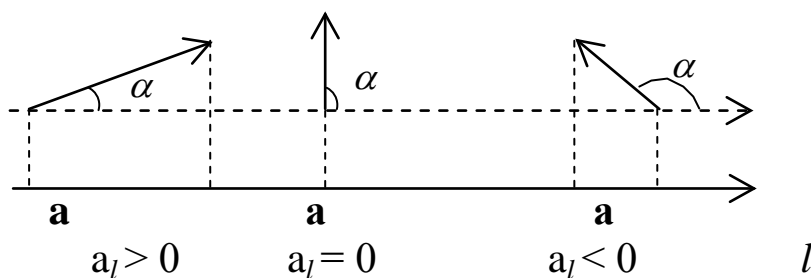


Рис. 1.2.

**Представление вектора через его проекции на оси координат.** Если рассмотреть проекции произвольного вектора  $\mathbf{a}$  на оси координат (рис. 1.3, а), то очевидно, что он может быть записан следующим образом:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z, \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  и  $\mathbf{e}_z$  – единичные векторы соответствующих координатных осей.

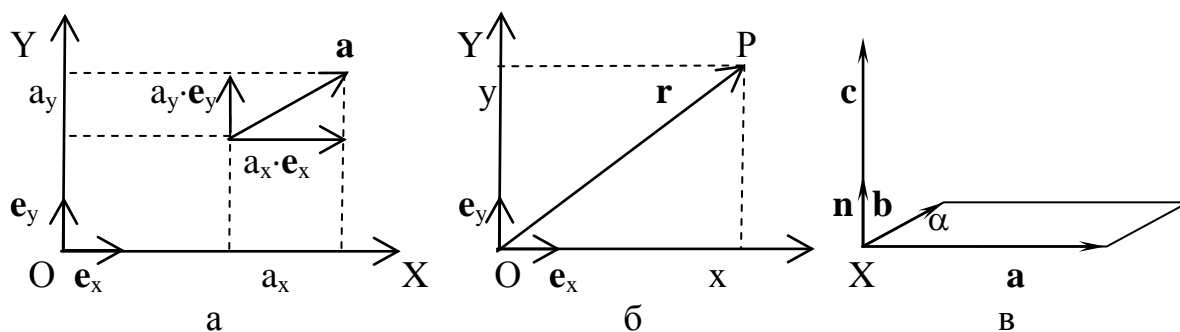


Рис. 1.3.

Особо следует выделить так называемый **радиус-вектор** – это вектор, проведенный в произвольную точку пространства  $P$  из начала координат (рис. 1.3, б). Он запишется следующим образом:

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z. \quad (1.6)$$

**Скалярное произведение двух векторов.** Скалярным произведением векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  является число

$$c = ab \cos \alpha = a_b b = a a_a, \quad (1.7)$$

где  $\alpha$  – угол между направлениями векторов. Здесь учтено, что  $a \cos \alpha = a_b$  и  $b \cos \alpha = a_a$ . Так же, как и проекция вектора на



направление, скалярное произведение может быть больше нуля, меньше нуля или равно нулю в зависимости от значения угла  $\alpha$ .

**Векторное произведение двух векторов.** Векторным произведением векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  является вектор  $\mathbf{c} = [\mathbf{a} \mathbf{b}]$ , модуль которого

$$c = ab \sin \alpha, \quad (1.8)$$

а направлен он перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , в сторону, определяемую правилом буравчика при вращении его от вектора  $\mathbf{a}$  к вектору  $\mathbf{b}$  (рис. 1.3, в). Векторное произведение можно записать следующим образом:

$$\mathbf{c} = [\mathbf{a} \mathbf{b}] = \mathbf{n} a b \sin \alpha, \quad (1.9)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, направленный по нормали к поверхности в направлении, определяемом, как было сказано выше.

### 1.3. Производная

**Производная функции.** Пусть задана некоторая произвольная функция  $Y = f(x)$  (рис. 1.4, а).

Производной функции  $df(x)/dx$ , или  $f'$ , является предел, к которому стремится отношение приращения функции  $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$  к приращению аргумента  $\Delta x$  при  $\Delta x$  стремящемся к нулю:

$$df(x)/dx = f' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x + \Delta x) - f(x))/\Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f / \Delta x. \quad (1.10)$$

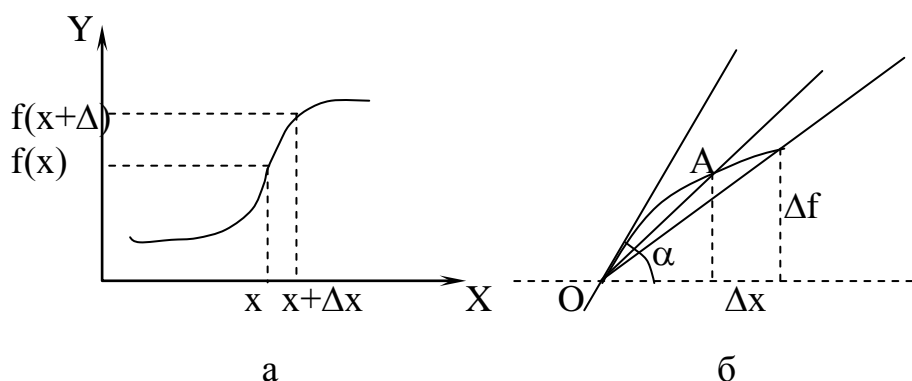


Рис. 1.4.

Из геометрических построений очевидно, что производная равна тангенсу угла наклона касательной в рассматриваемой точке, рис. 1.4, б:  $\Delta f / \Delta x$  – это тангенс угла  $\alpha$ . При стремлении  $\Delta x$

к нулю точка  $A$  будет стремиться к точке  $O$ , а угол  $\alpha$  будет стремиться к углу касательной.

В большинстве случаев в физике имеют дело с величинами, изменяющимися со временем. В этом случае производная по времени имеет специальное обозначение в виде точки над обозначением величины, например  $\dot{v}$  будет обозначать производную от скорости по времени.

Если берется производная от производной, то она называется второй производной от исходной величины, например,  $d(df/dt)/dt = d^2f/dt^2 = \ddot{f}$ .

**Производная вектора.** Очевидно, что если вектор записан через его проекции на оси координат (1.5), то его производная будет:

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{a}_x \mathbf{e}_x + \dot{a}_y \mathbf{e}_y + \dot{a}_z \mathbf{e}_z, \quad (1.11)$$

поскольку единичные векторы по осям координат не изменяются. В то же время, как отмечалось ранее, любой вектор можно записать через его единичный вектор (1.1):  $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_a$ . Поскольку от времени в общем случае могут зависеть как модуль  $a = a(t)$ , так и направление  $\mathbf{e}_a = \mathbf{e}_a(t)$ , то для производной вектора нужно написать:

$$\dot{\mathbf{a}}(t) = \dot{a}(t)\mathbf{e}_a(t) + a(t)\dot{\mathbf{e}}_a(t). \quad (1.12)$$

В этом выражении первое слагаемое представляет собой производную модуля вектора  $\mathbf{a}$ , умноженную на единичный вектор  $\mathbf{e}_a$ , и направлено так же, как  $\mathbf{a}$ . Второе же слагаемое равно модулю вектора  $\mathbf{a}$ , умноженному на производную единичного вектора в рассматриваемый момент времени.

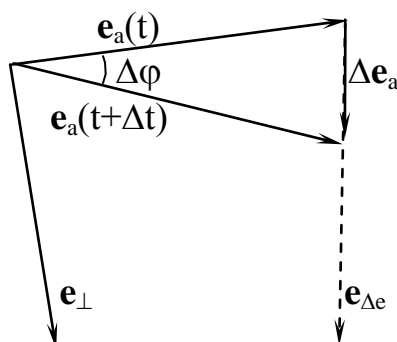


Рис. 1.5

Очевидно, что единичный вектор может изменяться только по направлению, то есть только поворачиваться. Если за промежуток времени  $\Delta t$  единичный вектор  $\mathbf{e}_a(t)$  повернется на угол  $\Delta\varphi$  (рис. 1.5), при малом угле модуль вектора  $\Delta\mathbf{e}_a$  будет примерно равен углу, причем чем меньше угол, тем точнее будет выполняться равенство  $\Delta\mathbf{e}_a \approx \Delta\varphi$ . Таким образом, вектор  $\Delta\mathbf{e}_a$  можно записать через его единичный вектор:

$$\Delta\mathbf{e}_a \approx \Delta\varphi \mathbf{e}_{\Delta e}. \quad (1.13)$$

При  $\Delta\varphi \rightarrow 0$  единичный вектор  $\mathbf{e}_{\Delta e}$  будет стремиться к направлению, перпендикулярному  $\mathbf{e}_a(t)$ , т. е.  $\mathbf{e}_\perp$ . Производная вектора  $\mathbf{e}_a(t)$ , согласно определению, равна:

$$d\mathbf{e}_a(t)/dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\mathbf{e}_a/\Delta t = (\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\varphi/\Delta t)\mathbf{e}_\perp = (d\varphi/dt)\mathbf{e}_\perp = \omega \mathbf{e}_\perp. \quad (1.14)$$

Величина  $\omega = d\varphi/dt$  является угловой скоростью вращения вектора  $\mathbf{a}$ , единичный вектор  $\mathbf{e}_\perp$  лежит в плоскости, в которой происходит вращение, и направлен в сторону вращения.

#### 1.4. Траектория, путь, перемещение, скорость

В декартовой системе координат положение тела в каждый момент времени определяется тремя координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  или радиус-вектором  $\mathbf{r}$ . Число независимых координат, полностью определяющих положение тела, называется числом степеней свободы. Для материальной точки оно равно трем. Таким образом, для материальной точки в общем случае задача кинематики сводится к определению  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$  или  $\mathbf{r}(t)$ .

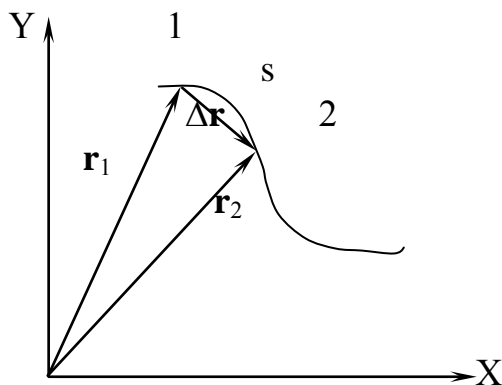


Рис. 1.6

При своем движении материальная точка движется вдоль некоторой линии, называемой **траекторией**, рис. 1.6. По виду траектории можно выделить два частных случая движения: прямолинейное движение и движение по окружности определенного радиуса. В общем случае криволинейного движения в каждый момент времени можно считать, что движение происходит по окружности, касательной к траектории в данной точке. Расстояние, пройденное точкой по траектории, называется **путем** ( $s$ ). Путь – это скалярная величина.

Перемещением называется вектор  $\Delta \mathbf{r}$ , проведенный из начальной точки пути, например точки 1 на рис. 1 в точку 2. Очевидно, что

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t). \quad (1.15)$$

Величина

$$v_{cp} = s/t \quad (1.16)$$

носит название **средней скорости** и равна пути, деленному на время, за которое этот путь пройден.

**Мгновенная скорость** в физике является вектором и определяется как

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{r} / \Delta t = d\mathbf{r} / dt, \quad (1.17)$$

то есть является производной по времени от радиус-вектора материальной точки. Можно показать, что для модуля скорости справедливо равенство:

$$v = ds/dt. \quad (1.18)$$

Для бесконечно малого перемещения, исходя из (1.17.), можно записать:  $d\mathbf{r} = d\mathbf{s} = \mathbf{v}dt$ .

Вектор скорости можно записать через его проекции на оси координат:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z = d\mathbf{r} / dt = (dx/dt) \mathbf{e}_x + (dy/dt) \mathbf{e}_y + (dz/dt) \mathbf{e}_z. \quad (1.19)$$

То есть проекции вектора скорости на оси координат равны производным по времени соответствующих координат. Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.20)$$

Таким образом, если известен закон изменения координат, в каждый момент времени мы можем определить значение скорости точки.

С другой стороны, зная значение скорости материальной точки в каждый момент времени, можно найти пройденный путь. Разобьем промежуток времени, за который надо определить пройденный путь, на  $N$  равных промежутков  $\Delta t = (t_2 - t_1)/N$  (рис. 1.7). Весь путь сложится из путей, пройденных на отдельных участках:

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 + \dots + \Delta s_N = \sum_{i=1}^N \Delta s_i. \quad (1.21)$$

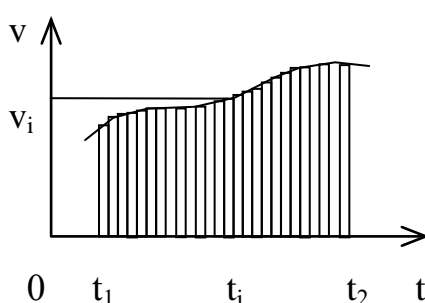


Рис. 1.7.

Для пути на каждом участке можно написать  $\Delta s_i \approx v_i \Delta t_i$ , и тогда (1.21) примет вид:

$$s \approx \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i, \quad (1.22)$$

устремив  $N$  к  $\infty$ , (или  $\Delta t$  к  $0$ ) получим точное равенство:

$$s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (1.23)$$

Полученное выражение является **определенным интегралом** от функции  $v(t)$ , *взятым* на интервале от  $t_1$  до  $t_2$ . Из рис. 1.7 видно, что пройденный путь (интеграл от скорости) численно равен площади под кривой. Пользуясь (1.23), можно определить среднее значение скорости за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ :

$$\langle v \rangle = s / (t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt / (t_2 - t_1). \quad (1.24)$$

Аналогичным образом находятся средние значения любых функций.

## 1.5. Ускорение

Скорость материальной точки, так же как и ее положение, может изменяться во времени как по величине, так и по направлению. Скорость изменения любой физической величины характеризуется производной. Скорость изменения скорости называется ускорением, которое будем обозначать буквой **a**. Таким образом, ускорение будет равно производной скорости по времени:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{v} / \Delta t = d\mathbf{v} / dt = d^2 \mathbf{r} / dt^2. \quad (1.25)$$

В последнем равенстве учтено, что скорость является производной радиус-вектора, т. е. ускорение является второй производной радиус-вектора **r** по времени. Как видно, ускорение играет по отношению к скорости ту же роль, что и скорость по отношению к радиус-вектору.

Для проекций ускорения на оси координат можно записать:

$$a_x = dv_x / dt = d^2 x / dt^2, \quad a_y = dv_y / dt = d^2 y / dt^2, \quad a_z = dv_z / dt = d^2 z / dt^2, \quad (1.26)$$

а само ускорение и его модуль будут:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.27)$$

Ускорение можно представить и другим способом. Как отмечалось ранее, любой вектор может быть представлен через его единичный вектор, умноженный на модуль. Поскольку направление скорости совпадает с направлением касательной к траектории  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_v = v \boldsymbol{\tau}$ , для ускорения получим:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v} / dt = d(v \boldsymbol{\tau}) / dt = (dv / dt) \boldsymbol{\tau} + v (d\boldsymbol{\tau} / dt) = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n, \quad (1.28)$$

где  $\mathbf{a}_\tau = (dv / dt) \boldsymbol{\tau}$  – тангенциальное ускорение, которое направлено по касательной к траектории и по величине равно скорости изменения модуля скорости, а  $\mathbf{a}_n = v (d\boldsymbol{\tau} / dt)$  – нормальное ускорение. Как было показано ранее, производная единичного вектора – это вектор, направленный перпендикулярно (нормально) к исходному и по модулю равный скорости его вращения  $d\boldsymbol{\tau} / dt$

$$d\boldsymbol{\tau} / dt = (d\varphi / dt) \mathbf{e}_\perp = (d\varphi / dt) \mathbf{e}_n. \quad (1.29)$$

Найдем теперь модуль  $\mathbf{a}_n$ . Согласно (1.29) и учитывая, что  $d\varphi$  можно выразить через радиус окружности, касательной в данной точке к траектории, и скорость:  $d\varphi = ds/R = vdt/R$  (рис. 1.8)

$$\mathbf{a}_n = v \, d\varphi/dt = v \, (vdt/R)/dt = v^2/R. \quad (1.30)$$

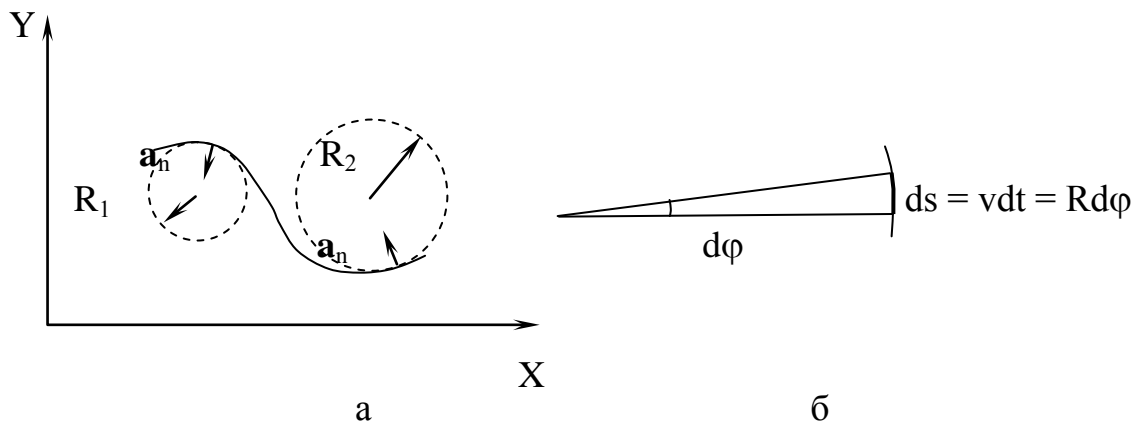


Рис. 1.8.

Модуль полного ускорения в этом случае запишется:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(dv/dt)^2 + (v/R)^2}. \quad (1.31)$$

Необходимо отметить, что нормальное ускорение, согласно (1.30), при одинаковом модуле скорости будет тем больше, чем меньше радиус окружности, касательной к траектории в данной точке. При равномерном движении по окружности нормальное ускорение будет направлено к центру окружности. Ускоренное движение по прямой будет иметь только тангенциальную составляющую.

По аналогии с перемещением и скоростью можно записать:

$$\mathbf{v}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a}(t) dt. \quad (1.32)$$

## 1.6. Кинематика вращательного движения

Для придания общности физическим законам, связанным с вращательным движением, поворот на некоторый угол  $\varphi$  изображают в виде отрезка, направленного по правилу буравчика вдоль оси вращения и имеющего длину равную  $\varphi$ . Подобные величины носят название псевдовекторных величин (в отличие от векторов они не складываются по правилу параллелограмма).

Величина

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\varphi/\Delta t = d\varphi/dt \quad (1.33)$$

называется угловой скоростью материальной точки, направлена вдоль оси вращения, а ее направление определяется направлением вращения по правилу буравчика, и она также является псевдовектором (рис. 1.9). Модуль угловой скорости, как следует из (1.33.), равен  $d\varphi/dt$ . Вращение с постоянной скоростью называется равномерным, в этом случае  $\omega = d\varphi/dt = \text{const}$ ,  $\varphi = \omega t$ .

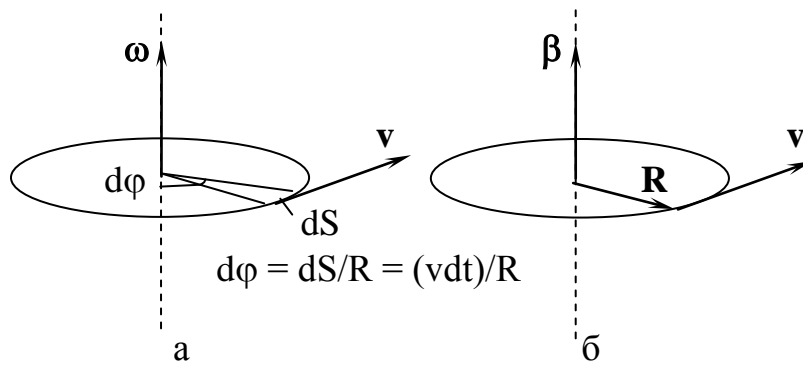


Рис. 1.9.

Угловая скорость показывает, на какой угол совершается поворот в единицу времени. Такое движение можно характеризовать временем, за которое совершается один полный оборот –  $T$ , называемый периодом вращения и частотой –  $\nu$ , показывающей, сколько оборотов совершается в единицу времени:

$$\nu = 1/T, \quad \omega = 2\pi/T = 2\pi\nu. \quad (1.34)$$

Угловая скорость может меняться как за счет изменения скорости вращения, так и за счет изменения поворота оси вращения. Изменение угловой скорости характеризуется величиной, которую называют угловым ускорением:

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\omega/\Delta t = d\omega/dt. \quad (1.35)$$

Угловое ускорение тоже является псевдовектором (рис 1.9, б).

Для вращающегося тела все точки имеют одни и те же угловую скорость и угловое ускорение. Линейные же скорости и



ускорения для различных точек зависят от расстояния  $R$  данной точки до оси вращения:

$$v = \omega R, a_{\tau} = \beta R. \quad (1.36)$$

### Контрольные задания

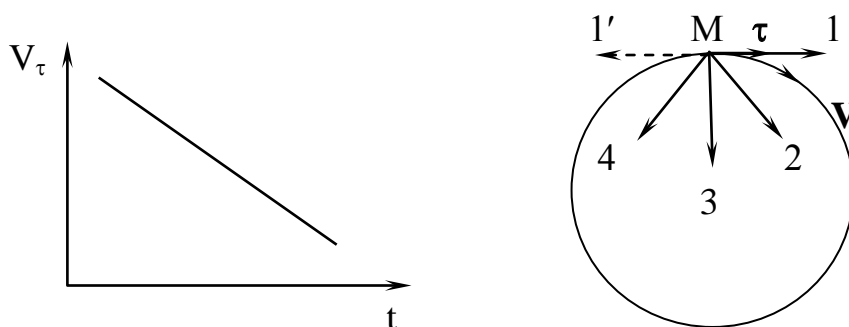
- Определить ускорение материальной точки, если закон ее движения (в безразмерном виде) имеет вид:  $x = 3t + 4t^2$ .

*Пример решения.* Исходя из определений скорости и ускорения:  $v = dx/dt$ ,  $a = dv/dt$ , взяв производные, получим:  $v = 3 + 8t$ ,  $a = 8 \text{ (м/с}^2\text{)}$ .

1. Закон движения материальной точки по окружности  $\varphi = 3t + 4t^3$ . Определить угловое ускорение  $\beta$  через 3 секунды.

2. Закон движения материальной точки вдоль оси  $x$  имеет вид:  $x = 3t + 4t^3$ . Определить ускорение точки через 3 секунды.

- Материальная точка  $M$  движется по окружности со скоростью  $v$ . На первом рисунке показан график зависимости проекции скорости  $v_{\tau}(t)$  ( $\tau$  – единичный вектор положительного направления,  $v_{\tau}$  – проекция  $v$  на это направление). Какое направление при этом имеет вектор полного ускорения?



*Пример решения.* Ускорение при криволинейном движении можно записать  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\tau} + \mathbf{a}_n = (dv/dt)\boldsymbol{\tau} + (v^2/R)\mathbf{n}$ . Первое слагаемое – тангенциальное ускорение – направлено по касательной к траектории. Поскольку  $(dv/dt)$  отрицательно, то оно направлено в сторону  $l'$ . Второе слагаемое – нормальное (центростремительное) уско-

рение – при движении по окружности всегда направлено к центру окружности, по которой происходит движение (направление 3).

Резльтирующее ускорение **1' + 3** будет направлено в сторону **4**.

3. Нарисовать графики зависимости  $v_\tau(t)$  для направлений полного ускорения 2 и 3.

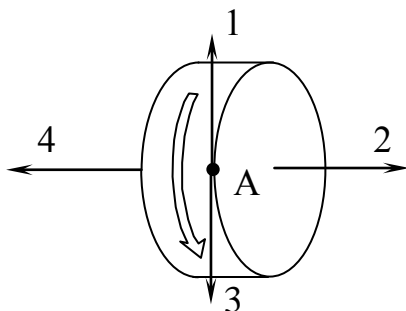
4. Точка М движется по окружности с постоянным тангенциальным ускорением. Как будет изменяться величина нормального ускорения, если проекция тангенциального ускорения на направление скорости отрицательна?

5. Точка М движется по спирали с постоянной по величине скоростью. Как изменяется при этом величина нормального ускорения при движении от центра спирали?

6. Запишите соотношения для  $\mathbf{a}_\tau$  и  $\mathbf{a}_n$  (тангенциальной и нормальной составляющих ускорения) для равномерного движения по окружности.

7. Диск вращается равноускоренно вокруг горизонтальной оси. Укажите направление:

- 1) вектора угловой скорости точки А на ободе диска;
- 2) вектора тангенциального ускорения точки А на ободе диска;
- 3) вектора углового ускорения точки А на ободе диска.



## **Глава 2. Динамика материальной точки**

### **2.1. Общие понятия**

Кинематика давала описание движения тел, не затрагивая вопроса о причине, вызывающей это движение.

В отличие от этого, динамика изучает движение тел в связи с теми причинами (взаимодействиями между телами), которые обуславливают тот или иной характер движения.

В основе классической механики лежат три закона динамики, сформулированные Ньютоном в 1687 г.

Законы Ньютона (как и все остальные фундаментальные физические законы) возникли в результате обобщения большого количества опытных фактов. Правильность их подтверждается согласием с опытом тех следствий, которые из них вытекают. Многие физики XIX столетия были убеждены, что объяснить любое физическое явление означает свести его к механическому процессу, подчиняющемуся законам Ньютона. Однако с развитием науки обнаружили новые факты, которые не укладывались в рамки классической механики. Эти факты получили свое объяснение в новых теориях: специальной теории относительности и квантовой механике.

В специальной теории относительности (Эйнштейн, 1905 г.) подверглись радикальному пересмотру ньютоновские представления о пространстве и времени. Этот пересмотр привел к созданию «механики больших скоростей», или, как ее называют, релятивистской механики. Уравнения релятивистской механики в пределе (для скоростей, малых по сравнению со скоростью света) переходят в уравнения классической механики. Классическая механика вошла в релятивистскую как ее частный случай движений, происходящих со скоростями, значительно меньшими скорости света. Таким образом, классическая механика, основывающаяся на законах Ньютона, является механикой тел больших (по сравнению с размерами атомов) и масс, движущихся с малыми (по сравнению со скоростью света) скоростями.

## 2.2. Виды взаимодействия и сил в природе

Как было отмечено, динамика изучает движение тел в связи с причинами (взаимодействиями), их вызывающими. Таким образом, в первую очередь необходимо познакомиться со взаимодействиями, которые могут вызвать движение.

В настоящее время считается, что в природе существует четыре вида фундаментальных взаимодействий: гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое. **Фундаментальными называют взаимодействия, которые не могут быть сведены к другим, более простым, видам взаимодействия.**

Все процессы и явления в природе происходят в результате этих взаимодействий.

**Гравитационное взаимодействие** универсально: в нем участвуют все тела и элементарные частицы.

**В электромагнитном взаимодействии** участвуют все заряженные частицы; нейтральные частицы могут участвовать благодаря квантовым эффектам.

**Слабое взаимодействие** присуще всем частицам, кроме фотона, оно отвечает за  $\beta$ -распад ядер.

**Сильное взаимодействие** определяет связи только между адронами, оно отвечает за устойчивость ядра.

В таблице взаимодействия расположены в порядке увеличения их относительной интенсивности; указаны их радиусы действия и частицы, в них участвующие.

Таблица

**Виды взаимодействия**

Вид взаимодействия	Взаимодействующие частицы	Радиус действия, м	Относительная интенсивность
Гравитационное	Все	$\infty$	1
Слабое	Все, кроме фотона	$10^{-16}$	$10^{32}$
Электромагнитное	Заряженные частицы	$\infty$	$10^{36}$
Сильное	Адроны	$10^{-15}$	$10^{38}$

**Сильное и слабое взаимодействия являются короткодействующими.** Их интенсивность быстро убывает при увеличении расстояния между частицами.

*Электромагнитное и гравитационное взаимодействия являются дальнедействующими. Такие взаимодействия медленно убывают при увеличении расстояния между частицами и не имеют конечного радиуса действия.*

Мерой воздействия на тело является **сила**.

В рамках классической механики имеют дело с гравитационными и электромагнитными взаимодействиями и силами. Другие силы – упругие силы и силы трения – определяются характером взаимодействия между молекулами вещества. Силы взаимодействия между молекулами имеют электромагнитное происхождение, следовательно, упругие силы и силы трения являются по своей природе электромагнитными.

### **2.3. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета**

Первый закон Ньютона формулируется следующим образом: ***всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние. Системы, в которых этот закон выполняется, носят название инерциальных.*** Сам закон называют иногда **законом инерции**.

Таким образом, первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета. Рассмотрим две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с некоторым ускорением. Если относительно одной из них тело покоится, то относительно другой оно, очевидно, будет двигаться с ускорением. Система отсчета, в которой первый закон Ньютона не выполняется, называется **неинерциальной** системой отсчета. Инерциальных систем существует бесконечное множество. Любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы прямолинейно и равномерно (т. е. с постоянной скоростью), будет также инерциальной.

С большой степенью точности инерциальной системой можно считать гелиоцентрическую систему отсчета, центр которой совмещен с Солнцем, а три оси координат направлены на соответствующим образом выбранные звезды.

Земля движется относительно Солнца и звезд по криволинейной траектории, имеющей форму эллипса. Криволинейное

движение всегда происходит с некоторым ускорением. Кроме того, Земля совершает вращение вокруг своей оси. По этим причинам система отсчета, связанная с земной поверхностью, движется с ускорением относительно гелиоцентрической системы отсчета и не является инерциальной. Однако ускорение такой системы настолько мало, что в большом числе случаев ее можно считать практически инерциальной. Но иногда неинерциальность системы отсчета, связанной с Землей, оказывает существенное влияние на характер рассматриваемых относительно нее механических явлений. К таким случаям относится возникновение сил Кориолиса, циклонов и антициклонов и т. д.

## 2.4. Масса и импульс тела

Проведем мысленно следующий эксперимент. Одинаковым воздействием подействуем на два разных тела. Окажется, что после прекращения воздействия тела будут иметь разные скорости, рис. 2.1. Свойство тел «противиться» попыткам изменить его состояние движения называется **инертностью** и количественно характеризуется величиной, называемой **массой**.

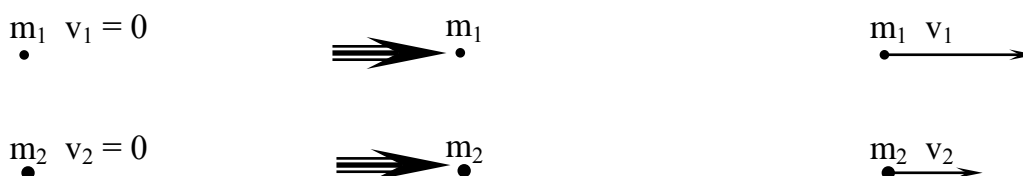


Рис. 2.1

Чтобы определить массу некоторого тела, нужно сравнить ее с массой тела, принятого за эталон массы. Можно также сравнить массу данного тела с массой некоторого тела с уже известной массой (определенной путем сравнения с эталоном). Операцию сравнения масс  $m_1$  и  $m_2$  двух материальных точек (частиц) можно осуществить на основании описанного опыта.

Пусть первое тело с массой  $m_1$  в результате воздействия приобрело скорость  $v_1$ , а второе тело с массой  $m_2$  – скорость  $v_2$  (до воздействия скорости были равны нулю). Опыт дает, что:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2. \quad (2.1)$$

В различные физические законы и уравнения часто входит именно произведение массы и скорости, поэтому данная вели-

чина получила специальное название – **импульс** и обозначение – **p**. Импульс, как и скорость, является векторной величиной:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (2.2)$$

Данное определение справедливо для материальных точек (частиц) и протяженных тел, движущихся поступательно.

В некоторых изданиях пользуются устаревшим названием импульса – количество движения тела.

## 2.5. Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона гласит, что **скорость изменения импульса тела равна действующей на тело силе F**:

$$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}. \quad (2.3)$$

Заменив в уравнении (2.3) **p** на **mv**, получим:

$$d(m\mathbf{v})/dt = m(d\mathbf{v}/dt) = m(d^2\mathbf{r})/dt^2 = \mathbf{F}. \quad (2.4)$$

Таким образом, зная силу, действующую на тело, можно определить характер его движения **r(t)**. Поэтому второй закон Ньютона в виде (2.4) называют уравнением движения.

Если в (2.4) заменить **dv/dt** на ускорение тела **a**, получится еще один вид закона:

$$d(m\mathbf{v})/dt = m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (2.5)$$

или словами: **произведение массы тела на его ускорение равно действующей на тело силе**.

В частном случае, когда **F = 0** (т. е. при отсутствии воздействия на тело со стороны других тел), ускорение, как следует из (2.5), также равно нулю. Этот вывод совпадает с утверждением первого закона Ньютона. Поэтому первый закон входит во второй как его частный случай. Несмотря на это, первый закон формулируется независимо от второго, так как в нем, кроме того, заключается постулат о существовании инерциальных систем отсчета.

## 2.6. Третий закон Ньютона

Всякое действие тел друг на друга в природе носит характер взаимодействия: если тело 1 действует на тело 2 с силой **F<sub>12</sub>**, то и тело 2 в свою очередь действует на тело 1 с силой **F<sub>21</sub>**. Третий закон Ньютона при этом утверждает, **что силы, с которыми**

*действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению.* Используя приведенные выше обозначения сил, содержание третьего закона можно представить в виде равенства:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \quad (2.6)$$

Из третьего закона Ньютона вытекает, что силы возникают попарно: всякой силе, приложенной к какому-то телу, можно сопоставить равную ей по величине и противоположно направленную силу, приложенную к другому телу, взаимодействующему с данным.

На рис. 2.2 в качестве примера приведены гравитационные силы, действующие между двумя телами массами  $m_1$  и  $m_2$ , находящимися на расстоянии  $r$  друг от друга:

$$F_{12} = F_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \quad (2.7)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная.

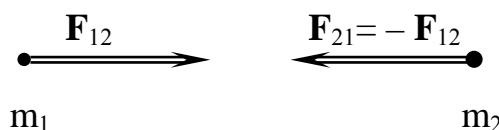


Рис. 2.2

## 2.7. Преобразования Галилея. Принцип относительности Галилея

Преобразования Галилея связывают значения координат и скоростей материальной точки в двух системах отсчета, движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью  $v_0$ . Одну из этих систем, обозначенную на рис. 2.3 буквой  $K$ , будем считать неподвижной. Тогда вторая система  $K'$  будет двигаться прямолинейно и равномерно относительно  $K$ . Выберем координатные оси  $x, y, z$  системы  $K$  и оси  $x', y' и z'$  системы  $K'$  так, чтобы оси  $x$  и  $x'$  совпадали по направлению с направлением движения системы  $K'$ , а оси  $y, y'$  и  $z, z'$  были параллельны друг другу. Найдем связь между координатами  $x, y, z$  некоторой точки  $P$  в системе  $K$  и координатами  $x', y' и z'$  той же точки в системе  $K'$ . Если начать отсчет времени с того момента, когда начала координат обеих



систем совпадали, то, как видно из рис. 2.3,  $x = x' + v_0 t$ ,  $y = y'$ ,  $z = z'$ . Добавив к этим соотношениям принятое в классической механике предположение, что время в обеих системах течет одинаковым образом, то есть  $t = t'$ , получим совокупность четырех уравнений:

$$x = x' + v_0 t, y = y', z = z', t = t', \quad (2.8)$$

называемых преобразованиями Галилея для координат и времени.

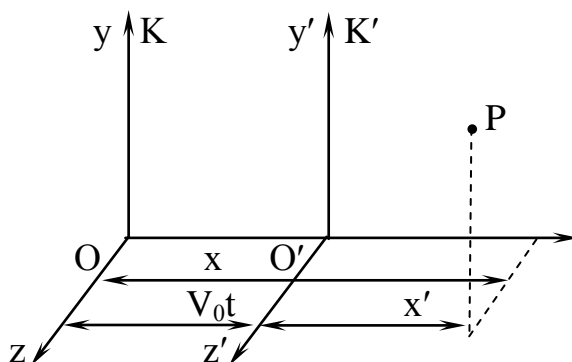


Рис. 2.3

Первое и последнее из соотношений (2.8) оказываются справедливыми лишь при значениях  $v_0$ , малых по сравнению со скоростью света в вакууме, которую мы будем обозначать буквой  $C$  ( $v_0 \ll C$ ). При  $v_0$ , сравнимых с  $C$ , преобразования Галилея должны быть заменены более общими преобразованиями Лоренца. Продифференцировав соотношения (2.8) по времени, найдем связь между скоростями точки  $P$  по отношению к системам отсчета  $K$  и  $K'$ :

$$\begin{aligned} dx/dt &= dx'/dt + v_0 \text{ или } v_x = v'_x + v_0, \\ dy/dt &= dy'/dt \quad \text{или } v_y = v'_y, \\ dz/dt &= dz'/dt \quad \text{или } v_z = v'_z. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Три скалярных соотношения (2.9) эквивалентны следующему соотношению между вектором скорости  $\mathbf{v}$  по отношению к системе  $K$  и вектором скорости  $\mathbf{v}'$  по отношению к системе  $K'$ .

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 \quad (2.10)$$

Формулы (2.9) и (2.10) дают правило сложения скоростей в классической механике. Следует иметь в виду, что соотношение (2.10), как и любое другое векторное соотношение, остается справедливым при произвольном выборе взаимных направлений координатных осей систем  $K$  и  $K'$ . Соотношения же (2.9) выполняются только при выборе осей, показанном на рис. 2.3.

Как уже отмечалось, любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы с постоянной скоростью, будет также инерциальной. Теперь мы имеем возможность доказать это утверждение. Для этого продифференцируем по времени соотношение (2.10). Учтя, что  $\mathbf{v}_0$  постоянна, получим:

$$d\mathbf{v}/dt = d\mathbf{v}'/dt \text{ или } \mathbf{a} = \mathbf{a}'. \quad (2.11)$$

Отсюда следует, что ускорение какого-либо тела во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно, оказывается одним и тем же. Поэтому если одна из этих систем инерциальна (это значит, что при отсутствии сил  $\mathbf{a} = 0$ ), то и остальные будут инерциальными ( $\mathbf{a}'$  также равно нулю).

Сила  $\mathbf{F}$ , действующая на частицу в системе  $K$ , совпадает с силой  $\mathbf{F}'$ , действующей на частицу в системе  $K'$ :  $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ .

Из всего сказанного следует вывод, что **уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой**. С механической точки зрения все инерциальные системы отсчета совершенно эквивалентны: ни одной из них нельзя отдать предпочтение перед другими. Практически это проявляется в том, что никакими механическими опытами, проведенными в пределах данной системы отсчета, нельзя установить, находится ли она в состоянии покоя или в состоянии равномерного и прямолинейного движения. Находясь, например, в вагоне поезда, движущегося без толчков прямолинейно и равномерно, мы, не выглянув в окно, не сможем определить, движется вагон или покоится. Свободное падение тел, движение брошенных нами тел и все другие механические процессы будут в этом случае происходить так же, как и в случае, если бы вагон был неподвижен. Указанные обстоятельства были выяснены еще Галилеем. Утверждение о том, что все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаковым образом,

вследствие чего никакими механическими опытами невозможно установить, покоится данная система отсчета или движется прямолинейно и равномерно, носит название **принципа относительности Галилея**.

## 2.8. Упругие силы

Как уже отмечалось, силы упругости сводятся к электромагнитным фундаментальным взаимодействиям. Под действием приложенных к телу сил оно деформируется, то есть изменяет свои размеры и форму. При этом изменяется расстояния между атомами. В результате возникают дополнительные силы притяжения или отталкивания между ними. Если после прекращения действия сил тело принимает первоначальные размеры и форму, деформация называется **упругой**. Упругие деформации наблюдаются в том случае, если сила, обусловившая деформацию, не превосходит некоторый, определенный для каждого конкретного материала предел.

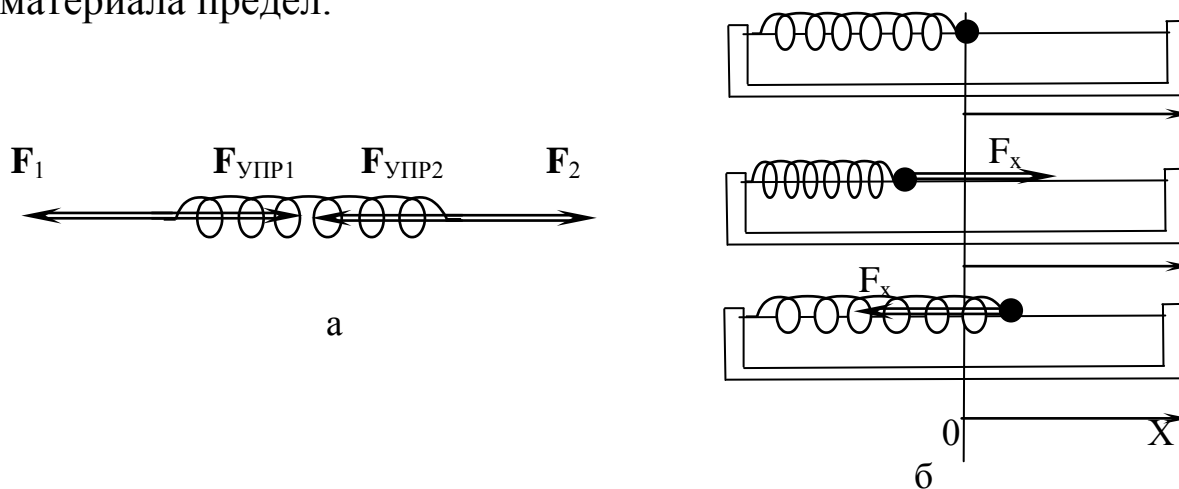


Рис. 2.4

### 2.8.1. Деформация растяжения – сжатия

Возьмем пружину, имеющую в недеформированном состоянии длину  $l$ , и приложим к ее концам равные по величине, противоположно направленные силы  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 2.4, а). Под действием этих сил пружина растянется на некоторую величину  $\Delta l$ , после чего наступит равновесие. В состоянии равновесия внешние силы  $F_1$  и  $F_2$  будут уравновешены упругими силами, возникшими в пружине в результате деформации. Опыт дает, что при небольших

деформациях удлинение пружины  $\Delta l$  оказывается пропорциональным растягивающей силе, а соответственно упругая сила оказывается пропорциональной удлинению пружины:

$$F = k\Delta l. \quad (2.12)$$

Коэффициент пропорциональности  $k$  называется *коэффициентом жесткости* пружины.

Утверждение о пропорциональности между упругой силой и деформацией носит название **закона Гука**.

Упругие натяжения возникают во всей пружине. Любая часть пружины действует на другую часть с силой, определяемой формулой (2.12). Поэтому, если разрезать пружину пополам, та же по величине упругая сила будет возникать в каждой из половин, при этом удлинение будет в два раза меньше. Отсюда заключаем, что при заданных материале пружины и размерах витка величина упругой силы определяется не абсолютным удлинением пружины  $\Delta l$ , а относительным удлинением  $\Delta l/l$ . При сжатии пружины также возникают упругие силы, но другого знака. Обобщим формулу (2.12) следующим образом. Закрепим один конец пружины неподвижно (рис. 2.4, б), а удлинение пружины будем рассматривать как координату  $x$  другого конца, отсчитываемую от его положения, отвечающего недеформированной пружине. При растяжении  $x$  будет положительным, а при сжатии – отрицательным. Кроме того, обозначим проекцию упругой силы  $\mathbf{F}_{\text{упр}}$  на ось  $x$  через  $F_x$ . Тогда можно написать, что

$$F_x = -kx. \quad (2.13)$$

При этом проекция упругой силы на ось  $x$  и координата  $x$  всегда имеют разные знаки.

Однородные стержни ведут себя при одностороннем растяжении или сжатии подобно пружине. Если один конец стержня закрепить, а к другому приложить силу  $\mathbf{F}$ , действие ее равномерно распределено по всему сечению и длина стержня  $l_0$  получит положительное (при растяжении) либо отрицательное (при сжатии) приращение  $\Delta l$ , рис. 2.5. Изменение длины стержня сопровождается соответствующим изменением поперечных размеров стержня.

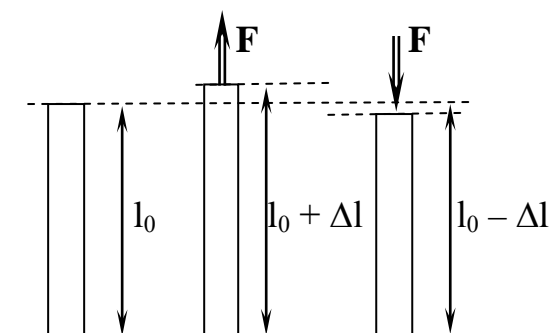


Рис. 2.5

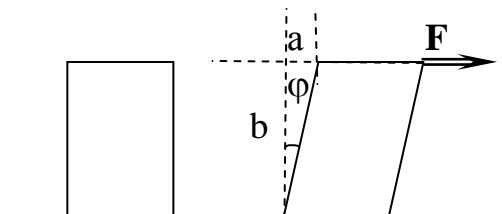


Рис. 2.6

В качестве величины, характеризующей деформацию стержня, естественно взять относительное изменение его длины:

$$\varepsilon = \Delta l / l_0. \quad (2.14)$$

Опыт дает, что для стержней из данного материала относительное удлинение при упругой деформации пропорционально силе, приходящейся на единицу площади  $S$  поперечного сечения стержня:

$$\varepsilon = \alpha F / S, \quad (2.15)$$

где  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности.

Величина, равная отношению силы  $F$  к величине площади  $S$  поверхности, на которую действует сила, называется **напряжением**. Благодаря взаимодействию частей тела друг с другом, напряжение передается во все точки тела и весь объем стержня оказывается в напряженном состоянии. Если сила направлена по нормали к поверхности, напряжение называется **нормальным**. Если сила направлена по касательной к поверхности, на которую она действует, напряжение называется **тангенциальным**, или сдвиговым. Нормальное напряжение принято обозначать буквой  $\sigma$ , тангенциальное – буквой  $\tau$ .

Соотношение (2.15) при этом примет вид:

$$\varepsilon = \alpha F / S = \alpha \sigma = \sigma / E. \quad (2.16)$$

В соотношении (2.16) использована характеристика упругих свойств материала  $1/\alpha = E$ , которая называется **модулем Юнга**. Измеряется эта величина в паскалях ( $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ ). Модуль Юнга равен такому нормальному напряжению, при котором относительное удлинение было бы равно единице, то есть длина изменяется в два раза. Практически материалы разрушаются при значительно меньших деформациях.

### 2.8.2. Деформация сдвига

Пример деформации сдвига изображен на рис. 2.6. Рассмотрим однородное тело, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда. Если одну его грань закрепить, а к противоположной приложить силу  $F$ , данная сила создаст в любом сечении тела тангенциальное напряжение  $\tau = F/S$  ( $S$  – площадь грани, к которой приложена сила). Такая же по величине сила будет передаваться на закрепленное основание. Под действием этого напряжения тело деформируется так, что грани сместятся друг относительно друга на расстояние  $a$  и каждый слой окажется сдвинутым относительно соседних слоев. Если высота недеформированного тела была  $b$ , то деформацию сдвига можно характеризовать величиной

$$\gamma = a/b = \operatorname{tg} \varphi, \quad (2.17)$$

называемой относительным сдвигом. При упругих деформациях угол  $\varphi$  очень мал, поэтому можно считать  $\gamma = \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$ . Закон Гука имеет вид:

$$\gamma = \tau/G, \quad (2.18)$$

где  $G$  – называется *модулем сдвига* и характеризует механические свойства материала. Численно он равен такому тангенциальному напряжению, при котором угол сдвига оказался бы равен  $45^\circ$ .

### 2.9. Силы трения

Силы трения появляются при перемещении или попытке перемещения соприкасающихся тел или их частей друг относительно друга. В случае попытки перемещения она называется силой трения покоя. Трение, возникающее при относительном перемещении двух соприкасающихся тел, называется *внешним*. Трение между частями одного и того же тела (например, жидкости или газа) носит название *внутреннего трения*.

Силу трения, возникающую при движении твердого тела относительно жидкой или газообразной среды, следует отнести к силам внутреннего трения, поскольку в этом случае слои среды, непосредственно соприкасающиеся с телом, вовлекаются им в движение с той же скоростью, какую имеет тело.

Трение между поверхностями двух твердых тел при отсутствии какой-либо прослойки, например смазки между ними, называется **сухим**. Трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями такой среды называется **вязким** (или жидким).

Применительно к сухому трению различают трения **скольжения** и трение **качения**.

Силы трения направлены по касательной к трущимся поверхностям (или слоям), причем так, что они противодействуют относительному смещению этих поверхностей (слоев). Если, например, два слоя жидкости скользят друг относительно друга, двигаясь с различной скоростью, то сила, приложенная к более быстро движущемуся слою, направлена в сторону, противоположную движению, а сила, действующая на слой, движущийся медленнее, направлена в сторону движения слоя.

Рассмотрим движение тела относительно неподвижного основания (рис. 2.7). Тело прижимается к основанию с силой  $F_n$ , направленной по нормали к поверхности соприкосновения тел. Она называется силой **нормального давления** и может быть обусловлена весом тела или другими причинами. Если приложить к телу внешнюю силу  $F$ , то окажется, существует некоторое минимальное значение  $F_0$  этой силы, при котором тело удастся сдвинуть с места.

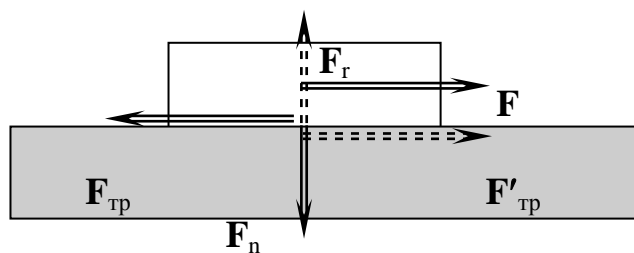


Рис. 2.7

Значение  $F_0$  зависит от вида соприкасающихся материалов, состояния их поверхностей и величины нормального давления. При значениях внешней силы меньше  $F_0$  тело остается в покое. По второму закону Ньютона это возможно в том случае, если сила  $F$  уравнивается равной ей по величине и противоположно направленной силой, которая и есть сила трения покоя  $F_{тр.п.}$ , она всегда принимает значение, равное величине внешней силы  $F$ .

Отметим, что в соответствии с третьим законом Ньютона на основание также действует сила трения  $\mathbf{F}'_{\text{тр}}$ . (рис. 2.7), равная по величине силе  $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ , но имеющая противоположное ей направление.

Если внешняя сила  $\mathbf{F}$  превзойдет по модулю  $\mathbf{F}_0$ , тело начинает скользить, причем его ускорение определяется результирующей двух сил: внешней  $\mathbf{F}$  и силы трения скольжения  $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ , величина которой в той или иной мере зависит от скорости скольжения. Характер этой зависимости определяется природой и состоянием трущихся поверхностей, примерный вид ее показан на рис. 2.8. График охватывает как случай покоя, так и случай скольжения.

Законы сухого трения сводятся к следующему: максимальная сила трения покоя, а также сила трения скольжения не зависят от площади соприкосновения трущихся тел и оказываются приблизительно пропорциональными величине силы нормального давления, прижимающей трущиеся поверхности друг к другу:

$$F_{\text{тр}} = \mu F_n, \quad (2.19)$$

где  $\mu$  – безразмерный коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом трения. Он зависит от природы и состояния трущихся поверхностей, в частности от их шероховатости.

Силы трения играют очень важную роль в природе. В нашей повседневной жизни трение нередко оказывается полезным. Так, при уменьшении сил трения во время гололедицы, пешеходы и транспорт испытывают значительные затруднения в передвижении.

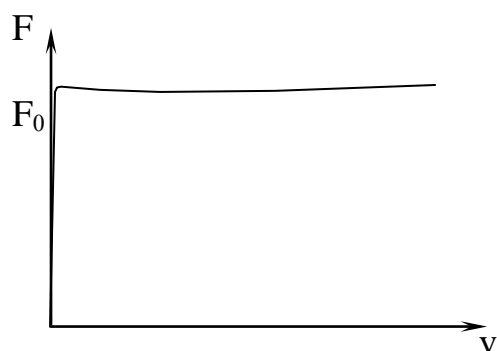


Рис. 2.8

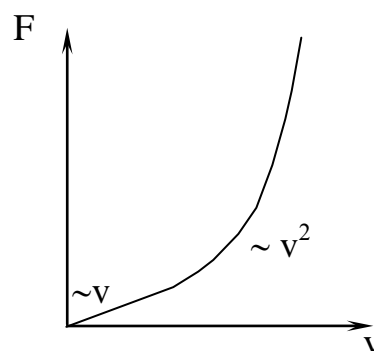


Рис. 2.9

Во многих других случаях роль трения крайне отрицательна, и приходится принимать меры к тому, чтобы по возмож-



ности его ослабить. Так обстоит, например, дело с трением в подшипниках и т. д.

Наиболее радикальным способом уменьшения сил трения является замена трения скольжения трением качения, которое возникает, например, между цилиндрическим или шарообразным телом и поверхностью, по которой оно катится. Трение качения подчиняется формально тем же законам, что и трение скольжения, но коэффициент трения в этом случае оказывается значительно меньшим.

В отличие от сухого, вязкое трение характеризуется тем, что сила вязкого трения обращается в нуль одновременно со скоростью. Поэтому, как бы ни была мала внешняя сила, она может сообщить относительную скорость слоям вязкой среды. Законы, которым подчиняются силы трения между слоями среды, будут рассмотрены в главе, посвященной механике жидкостей. Примерный график зависимости этой силы от скорости показан на рис. 2.9. При небольших скоростях сила растет линейно со скоростью, при больших скоростях линейный закон переходит в квадратичный, то есть сила начинает расти пропорционально квадрату скорости.

### *2.10. Сила тяжести. Вес тела*

Согласно закону всемирного тяготения, все тела притягиваются между собой. Если рассматривать тело у поверхности Земли, то Землю нельзя считать материальной точкой и закон будет выполняться для тела и каждого достаточно малого элемента Земли. Можно показать, что после суммирования для силы притяжения тела массы  $m$  к земле массы  $M$  и радиуса  $R_3$  получится:

$$F_g = (GmM)/R_3^2 = mg, \quad (2.20)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения тел ( $g = (G M)/R_3^2$ ). Сила  $F_g$  называется силой тяжести. Под действием этой силы все тела, предоставленные сами себе (свободные), будут двигаться с постоянным ускорением  $a = g$ . Когда тело покоится относительно поверхности Земли, сила  $F_g$  должна уравновешиваться силой реакции опоры или подвеса, удерживающих это тело от падения, рис. 2.10, ( $F_r = F_g$ ). По третьему закону Ньютона тело в этом случае действует на подвес или опору с силой  $G$ , равной  $-F_r$  ( $F_r$  – сила реакции опоры), то есть с силой

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}_g = m\mathbf{g}. \quad (2.21)$$

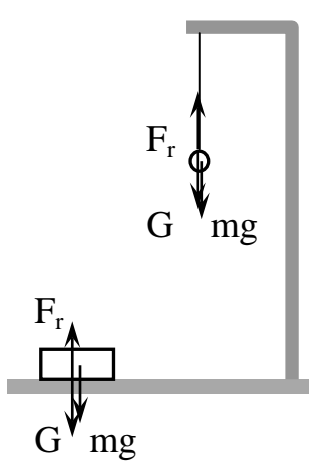


Рис. 2.10

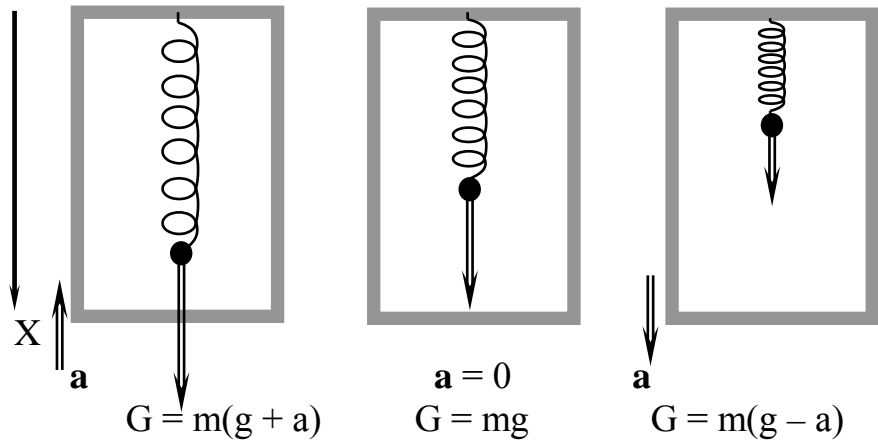


Рис. 2.11

Сила  $\mathbf{G}$ , с которой тело действует на подвес или опору, называется **весом** тела. Заметим, что силой противодействия силе тяжести по третьему закону Ньютона будет сила  $\mathbf{F} = -m\mathbf{g}$  с которой тело притягивает Землю.

Вес тела равен  $mg$  лишь в том случае, если тело и опора (или подвес) неподвижны (двигаются с постоянной скоростью) относительно Земли. В случае их движения с некоторым ускорением  $\mathbf{a}$  вес  $\mathbf{G}$  не будет равен  $mg$ . Это можно пояснить на следующем примере. Пусть подвес в виде укрепленной на рамке пружины движется вместе с телом с ускорением  $\mathbf{a}$  (рис. 2.11). Уравнение движения тела в этом случае будет иметь вид:

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_r = m\mathbf{a}, \quad (2.22.)$$

где  $\mathbf{F}_r$  – реакция подвеса, то есть сила, с которой пружина действует на тело. По третьему закону Ньютона тело действует на пружину с силой, равной  $-\mathbf{F}_r$ , которая по определению представляет собой вес тела  $\mathbf{G}$  в этих условиях. Заменив в (2.22) реакцию  $\mathbf{F}_r$  силой  $-\mathbf{G}$ , а силу тяжести  $\mathbf{F}_g$  – произведением  $m\mathbf{g}$ , получим:

$$\mathbf{G} = m(\mathbf{g} - \mathbf{a}). \quad (2.23)$$

Формула (2.23) определяет вес тела в общем случае.

Предположим, что тело и подвес движутся в вертикальном направлении (рис. 2.11, а). Запишем проекцию (2.23) на направление  $X$ :

$$G = m(g - a) \text{ или } G = m(g + a). \quad (2.24)$$

В этом выражении знак «+» соответствует ускорению, направленному вверх, знак «−» соответствует направлению ускорения вниз.

Из (2.24) вытекает, что по модулю вес  $G$  может быть как больше, так и меньше, чем сила тяжести  $F_g = mg$ . Так, при свободном падении,  $a = g$  и сила  $G$ , с которой тело действует на подвес, равна нулю (состояние невесомости). Космический корабль, летящий вокруг Земли, движется как при свободном падении, с ускорением  $g$ , вследствие чего тела внутри корабля находятся в состоянии невесомости – они не оказывают давления на соприкасающиеся с ними тела.

Следует помнить, что эти силы – тяжести  $F_g$  и веса  $G$  – приложены к разным телам:  $F_g$  приложена к самому телу,  $G$  приложена к подвесу или опоре, ограничивающим свободное движение тела в поле сил земного тяготения. Кроме того, сила  $F_g$  всегда равна  $mg$  (по третьему закону Ньютона равна и противоположна ей сила –  $mg$ , с которой тело притягивает к себе Землю), независимо от того, движется тело или покоится, величина же веса  $G$  зависит от ускорения, с которым движутся опора и тело.

Соотношение (2.23) между массой и весом тела дает способ сравнения масс тел путем взвешивания. Отношение весов тел, определенных в одинаковых условиях (обычно при  $a = 0$ ) в одной и той же точке земной поверхности, равно отношению масс этих тел:

$$G_1 : G_2 : G_3 \dots = m_1 : m_2 : m_3 \dots \quad (2.25)$$

Ускорение свободного падения  $g$  и сила тяжести  $F_g$  зависят от широты местности. Кроме того, они зависят от высоты над уровнем моря ( $h$ ), поскольку в (2.20) к радиусу Земли будет добавляться высота  $h$ .

### *2.11. Тело на наклонной плоскости*

Для того чтобы составить уравнение движения тела, нужно прежде всего установить, какие силы действуют на рассматриваемое тело. При этом необходимо выяснить, действие каких других тел на данное тело следует принять во внимание. Так, например, для тела на наклонной плоскости (рис. 2.12) существенно воздейст-

вие со стороны Земли (оно характеризуется силой тяжести  $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$ ) и воздействие со стороны плоскости (характеризуется силой реакции  $\mathbf{F}_r$ ). Все силы нужно характеризовать по «источнику», вызвавшему появление силы. Это означает, что за каждой силой нужно видеть тело, воздействием которого обусловлена сила. Как видно из рис. 2.12, а, силу реакции  $\mathbf{F}_r$  удобно разложить на две составляющие – силу нормального давления  $\mathbf{F}_n$  и силу трения  $\mathbf{F}_{тр}$ . Это, в частности, полезно в связи с тем, что сила трения пропорциональна модулю силы  $\mathbf{F}_n$  (2.19). Определив силы, действующие на тело, составляют уравнение движения. В данном случае оно имеет вид:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_r = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_{тр}. \quad (2.26)$$

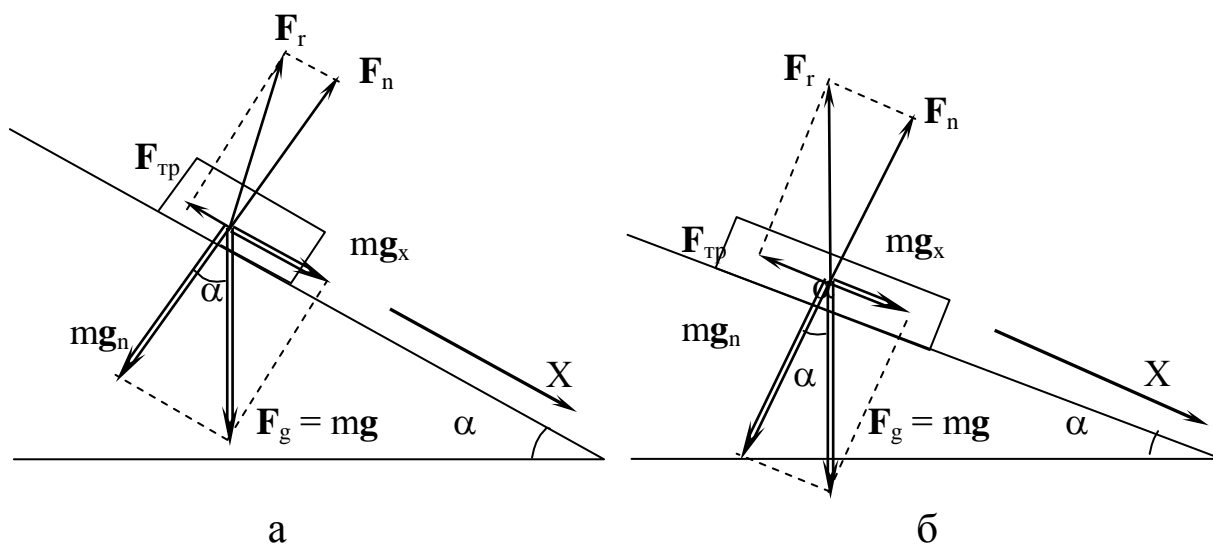


Рис. 2.12

Чтобы производить дальнейшие вычисления, нужно перейти от векторов к их проекциям на соответствующим образом выбранные направления. В данном случае это поверхность наклонной плоскости и нормаль к ней.

Запишем проекции векторов, входящие в уравнение (2.26), на направление  $x$ , указанное на рис. 2.12. Проекция вектора  $\mathbf{a}_x = a$ , проекция вектора  $(\mathbf{F}_g)_x = mg \sin \alpha$ , проекция  $(\mathbf{F}_r)_x = F_{тр} = \mu F_n = \mu mg \cos \alpha$ . Следовательно, окончательно приходим к уравнению:

$$ma = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \quad (2.27)$$

из которого легко найти ускорение  $a$ . Приравняв ускорение к нулю, можно определить момент начала движения (угол, при котором движение начинается):

$$ma = 0 = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \text{ откуда } \operatorname{tg} \alpha = \mu. \quad (2.28)$$

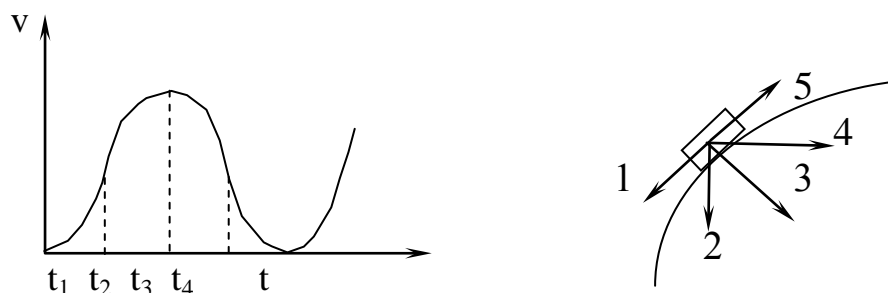
При меньших углах сила трения и проекция  $(\mathbf{F}_g)_x$  равны, а  $\mathbf{F}_r$  совпадает с  $\mathbf{F}_n$  (рис. 2.12, б).

В более сложных случаях приходится записывать проекции векторов на несколько направлений и решать получившуюся систему алгебраических или дифференциальных уравнений.

### Контрольные задания

- Величина скорости автомобиля изменялась во времени, как показано на графике  $v(t)$ . В момент времени  $t_2$  автомобиль поднимался по участку дуги.

Определить направление результирующей всех сил, действующих на автомобиль в этот момент времени  $t_2$ .



Согласно второму закону Ньютона  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , где  $\mathbf{F}$  – результирующая сила, действующая на тело,  $\mathbf{a}$  – его ускорение, то есть направление результирующей силы  $\mathbf{F}$  совпадает по направлению с ускорением  $\mathbf{a}$ .

В момент времени  $t_2$  скорость автомобиля не менялась, при этом тангенциальное ускорение  $a_t = 0$ . При движении по дуге на тело действует центростремительное (нормальное) ускорение, направленное к центру окружности, касательной к дуге в этой точке (направление 3).

1. Определить направление результирующей всех сил, действующих на автомобиль в момент времени  $t_1$ .

2. Определить направление результирующей всех сил, действующих на автомобиль в момент времени  $t_3$ .

3. Определить направление результирующей всех сил, действующих на автомобиль в момент времени  $t_4$ .

## Глава 3. Законы сохранения

### 3.1. Сохраняющиеся величины

Пользуясь законами Ньютона, можно полностью описать движение материальной точки, если известны силы, действующие на нее, и ее начальное положение. Однако часто бывает, что точное решение уравнений движения оказывается крайне сложным. В этих случаях удобнее пользоваться более общими законами – **законами сохранения**. С помощью законов сохранения можно и без решения уравнений движения получить ряд важных данных о протекании механических явлений. Законы сохранения не зависят от характера действующих сил, поэтому с их помощью можно получить ряд важных сведений о поведении механических систем даже в тех случаях, когда силы оказываются неизвестными.

Рассматриваемые тела (или тело) будем называть **механической системой**. Тела, образующие механическую систему, могут взаимодействовать как между собой (**внутренние силы**), так и с телами, не принадлежащими данной системе (**внешние силы**). В случае если внешние силы отсутствуют, система называется **замкнутой**.

Для замкнутых систем существуют такие функции координат и скоростей, описывающие систему частиц, которые сохраняют при движении постоянные значения, то есть сохраняются.

Наиболее важными из них являются **энергия, импульс и момент импульса**.

Законы сохранения этих величин для замкнутых систем тесно связаны с основными свойствами пространства и времени.

В основе сохранения энергии лежит **однородность времени**, то есть равнозначность всех моментов времени. Равнозначность следует понимать в том смысле, что замена момента времени  $t_1$  моментом  $t_2$  без изменения значений координат и скоростей частиц не изменяет механические свойства системы.

В основе сохранения импульса лежит **однородность пространства**, то есть одинаковость свойств пространства во всех точках. Одинаковость следует понимать в том смысле, что параллельный перенос замкнутой системы из одного места пространства в другое без изменения взаимного расположения и скоростей частиц не изменяет механические свойства.

Наконец, в основе сохранения момента импульса лежит **изотропия пространства**, то есть одинаковость свойств пространства по всем направлениям. Одинаковость следует понимать в том смысле, что поворот замкнутой системы как целого не отражается на ее механических свойствах.

Законы сохранения можно получить исходя из уравнений Ньютона. Однако следует иметь в виду, что законы сохранения обладают гораздо большей общностью, чем законы Ньютона. Подчеркнем, что законы сохранения энергии, импульса и момента импульса являются точными законами, строго выполняющимися также и в релятивистской области.

### 3.2. Кинетическая энергия

Рассмотрим простейшую систему, состоящую из одной частицы. Запишем второй закон Ньютона для нее в виде:

$$m dv/dt = \mathbf{F}, \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{F}$  – результирующая сил, действующих на частицу. Умножив левую часть уравнения (3.1) на  $v dt$ , а правую – на  $ds$  (перемещение частицы  $ds = v dt$ ), получим:

$$mv(dv/dt)dt = mv dv = m d(v^2/2) = d(mv^2/2) = \mathbf{F} ds. \quad (3.2)$$

Если система замкнута, то есть  $\mathbf{F} = 0$ , то  $d(mv^2/2) = 0$ , а величина  $(mv^2/2)$  остается постоянной. Эта величина называется **кинетической энергией** частицы и обозначается  $E_k$  (или  $T$ )

$$E_k = mv^2/2. \quad (3.3)$$

В случае изолированной системы кинетическая энергия частицы сохраняется. Кинетическую энергию частицы можно записать через ее импульс ( $p = mv$ ):

$$E_k = mv^2/2 = m mv^2/2m = m^2 v^2/2m = p^2/2m. \quad (3.4)$$

Если на частицу действует сила  $\mathbf{F}$ , кинетическая энергия не остается постоянной. В этом случае, согласно (3.2), приращение кинетической энергии частицы за время  $dt$  равно скалярному произведению  $\mathbf{F} ds$  ( $ds$  – перемещение частицы за время  $dt$ ). Величина  $\mathbf{F} ds$  называется **работой**, совершаемой силой  $\mathbf{F}$  на пути  $ds$ . В общем случае обозначается буквой  $A$ , в данном случае (на пути  $ds$ ) –  $dA$ :

$$dA = \mathbf{F}ds. \quad (3.5)$$

Таким образом, работа характеризует изменение энергии, обусловленное действием силы на движущуюся частицу.

Найдем приращение кинетической энергии (3.2) на некотором участке пути при перемещении от точки 1 до точки 2:

$$\int_1^2 d(mv^2/2) = (mv_2^2)/2 - (mv_1^2)/2 = E_{k2} - E_{k1} = \int_1^2 \mathbf{F}ds. \quad (3.6)$$

Левая часть уравнения представляет собой разность значений кинетической энергии в точках 2 и 1 (приращение кинетической энергии на пути  $1 \rightarrow 2$ ). Правая часть уравнения (3.6):

$$A = \int_1^2 \mathbf{F}ds \quad (3.7)$$

есть работа силы  $\mathbf{F}$  на пути  $1 \rightarrow 2$ . Для определенности иногда будем обозначать эту работу как  $A_{12}$  (перемещение из точки 1 в точку 2).

Итак, *работа результирующей всех сил, действующих на частицу, идет на приращение кинетической энергии частицы:*

$$A_{12} = E_{k2} - E_{k1}. \quad (3.8)$$

Из (3.8) следует, что энергия имеет такую же размерность, как и работа.

### 3.3. Работа

Рассмотрим величину, называемую работой, более подробно. Выражение (3.5) является скалярным произведением и может быть записано в виде:

$$dA = \mathbf{F}ds = Fds \cos \alpha = F_s ds = Fds_F, \quad (3.9)$$

где  $\alpha$  – угол между направлением силы и перемещения частицы,  $F_s$  – проекция силы на направление перемещения,  $ds_F$  – проекция перемещения на направление силы. Если сила и направление перемещения образуют острый угол ( $\cos \alpha > 0$ ), работа положительна. Если угол  $\alpha$  – тупой ( $\cos \alpha < 0$ ), работа отрицательна. При  $\alpha = \pi/2$  работа равна нулю. Последнее обстоятельство особенно отчетливо показывает, что понятие работы в механике существенно отличается от обыденного представления о работе. В обыден-



ном понимании всякое усилие, в частности мускульное напряжение, всегда сопровождается совершением работы. Например, для того чтобы держать тяжелый груз, стоя неподвижно, а тем более для того, чтобы перенести этот груз даже по горизонтальному пути, несущий затрачивает определенное усилие, то есть в обычном понимании «совершает работу». Однако работа как механическая (физическая) величина в этом случае равна нулю.

Рассмотрим график проекции силы  $\mathbf{F}$  на направление перемещения  $s$  как функцию положения частицы на траектории, рис. 3.1. Из рисунка видно, что элементарная работа  $dA = F_s ds$  численно равна площади выделенной полоски, а, следовательно, работа  $A$  на пути  $1 \rightarrow 2$  будет численно равна площади под кривой  $F_s(s)$  между точками 1 и 2.

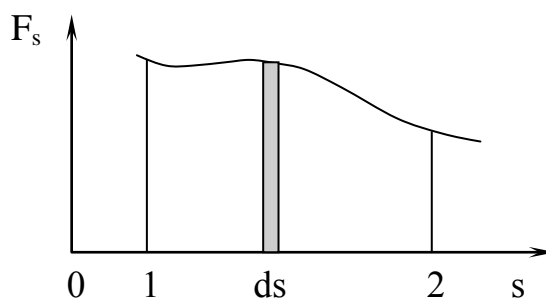


Рис. 3.1

Эту закономерность можно применить для нахождения работы, совершаемой при деформации пружины, подчиняющейся закону Гука.

Начнем с растяжения пружины. При медленном растяжении внешняя сила  $\mathbf{F}_{\text{вн}}$ , растягивающая пружину, равна и противоположна упругой силе пружины  $\mathbf{F}_{\text{упр}}$  и, если ось  $x$  направить по оси пружины (рис. 3.2), будет выполняться:

$$F_{x \text{ вн}} = -F_{x \text{ упр}} = kx, \quad (3.10)$$

где  $x$  — удлинение пружины,  $k$  — ее жесткость. Из рисунка видно, что работа, которую нужно совершить, чтобы вызвать удлинение  $x$ , равна площади затененного треугольника:

$$A = (kx^2)/2. \quad (3.11)$$

При сжатии пружины на величину  $x$  совершается такая же по величине и знаку работа, как и при растяжении на величину  $x$ .

Проекция силы  $F_{x \text{ вн}}$  в этом случае отрицательна, значения  $dx$  тоже отрицательно, вследствие чего их произведение положительно.

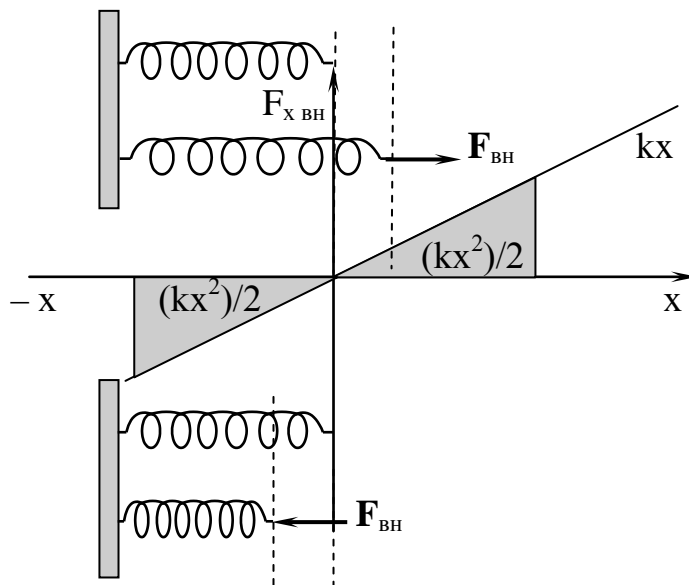


Рис. 3.2

Работа, совершаемая в единицу времени, называется **мощностью**. Если за время  $dt$  совершается работа  $dA$ , то мощность будет:

$$P = dA/dt = (\mathbf{F}d\mathbf{s})/dt = (\mathbf{F}\mathbf{v}dt)/dt = \mathbf{F}\mathbf{v}. \quad (3.12)$$

В системе СИ единицей работы является **джоуль** (Дж), который равен работе, совершаемой силой в 1 Н на пути в 1 м. Единицей мощности является **ватт** (Вт), равный джоулю в секунду (Дж/с).

### 3.4. Консервативные силы. Потенциальная энергия

Если тело в каждой точке пространства подвержено воздействию других тел, то говорят, что это тело находится в **поле сил**. Так, например, тело вблизи поверхности Земли находится в **поле сил тяжести Земли**: в каждой точке пространства на нее действует сила  $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$ .

Если во всех точках поля силы, действующие на частицу, одинаковы по величине и направлению ( $\mathbf{F} = \text{const}$ ), поле называется **однородным**.

Поле, остающееся постоянным во времени, называют **стационарным**. Так, например, поле сил тяжести Земли будет являться однородным и стационарным.

Для стационарного поля может оказаться, что работа, совершаемая над телом силами поля, зависит лишь от начального и конечного его положений и не зависит от пути, по которому тело перемещалось. Силы, обладающие таким свойством, называются **консервативными**. Из независимости работы консервативных сил от пути вытекает, что работа таких сил на замкнутом пути равна нулю. Чтобы доказать это, разобьем произвольный замкнутый путь на две части: путь I, по которому частица переходит из произвольной точки 1 в произвольную точку 2, и путь II, по которому тело переходит из точки 2 в точку 1 (рис. 3.3). Работа на всем замкнутом пути равна сумме работ, совершаемых на каждом из участков:

$$A = (A_{12})_I + (A_{21})_{II}. \quad (3.13)$$

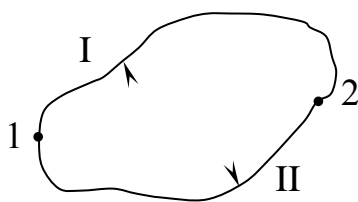


Рис. 3.3

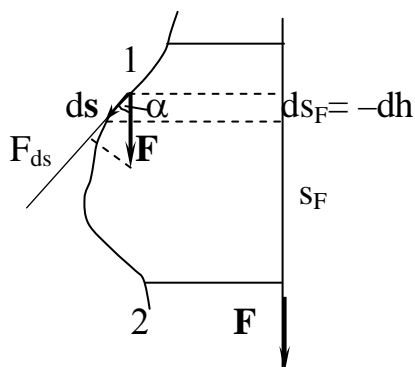


Рис. 3.4

Очевидно, что работы  $(A_{12})_{II}$  и  $(A_{21})_{II}$  отличаются только знаком, поскольку изменение направления движения на обратное приводит к замене  $ds$  на  $-ds$ , вследствие чего значение интеграла  $\int \mathbf{F} ds$  изменяет знак на противоположный. Таким образом, равенство (3.13) можно записать в виде:

$$A = (A_{12})_I - (A_{12})_{II}. \quad (3.14)$$

Поскольку работа не зависит от пути,  $(A_{12})_I = (A_{12})_{II}$ , мы приходим к выводу, что  $A = 0$ . Из равенства нулю работы на замкнутом пути легко получить, что работа не зависит от пути. Это можно сделать, обратив ход проведенных выше рассуждений. Таким образом, консервативные силы можно определить двумя

способами: во-первых, как силы, работа которых не зависит от пути, по которому частица переходит из одного положения в другое, или, во-вторых, как силы, работа которых на любом замкнутом пути равна нулю. В качестве примера докажем, что сила тяжести является консервативной. Эта сила в любой точке имеет одинаковую величину и одинаковое направление – вниз по вертикали (рис. 3.4). Поэтому, независимо от того, по какому пути движется частица, работу  $A_{12}$  можно вычислить согласно (3.7):

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{s} = \int_1^2 \mathbf{F} ds = \int_1^2 F ds_F = - \int_{h_1}^{h_2} F dh = -mg(h_2 - h_1) = mg(h_1 - h_2). \quad (3.15)$$

Здесь было учтено, что  $ds_F = ds \cos \alpha = -dh$ . Выражение  $mg(h_1 - h_2)$  не зависит от пути, отсюда следует, что сила тяжести консервативна. Очевидно, что такой же результат будет для всякого стационарного однородного поля.

В то же время ясно, что силы трения, направленные противоположно скорости, не являются консервативными:

$$dA = \mathbf{F} d\mathbf{s} = \mathbf{F} v dt = Fv \cos \alpha dt = -Fv dt = -F ds < 0, \quad (3.16)$$

то есть элементарная работа будет отрицательной и, следовательно, работа на любом замкнутом пути также будет отрицательна.

### *3.5. Потенциальная энергия во внешнем поле сил тяжести Земли*

В случае когда работа сил поля не зависит от пути, а зависит лишь от начального и конечного положений частицы, каждой точке поля можно сопоставить значение некоторой функции  $E_{\Pi}(x, y, z)$  такой, что разность значений этой функции в точках 1 и 2 будет определять работу сил при переходе частицы из первой точки во вторую:

$$A_{12} = E_{\Pi 1} - E_{\Pi 2}. \quad (3.17)$$

Это сопоставление можно осуществить следующим образом. Некоторой исходной точке 0 припишем произвольное значение функции, равное  $E_{\Pi 0}$ . Для любой другой произвольной точки 1 примем:

$$E_{\Pi 1} = E_0 + A_{10}, \quad (3.18)$$

где  $A_{10}$  – работа, совершаемая над частицей консервативными силами при перемещении частицы из точки 1 в точку 0. Поскольку работа не зависит от пути, определенное таким способом значение функции  $E_{\Pi}$  будет однозначным. Введенная таким образом функция  $E_{\Pi}$  имеет размерность работы (или энергии) и носит название *потенциальной энергии*.

Запишем аналогично потенциальную энергию для какой-либо точки 2:

$$E_{\Pi 2} = E_{\Pi 0} + A_{20}. \quad (3.19)$$

Если взять разность (3.19) и (3.18) и учитывать, что  $A_{20} = -A_{02}$ , получим:

$$E_{\Pi 1} - E_{\Pi 2} = A_{10} - A_{20} = A_{10} + A_{02} = A_{12}, \quad (3.20)$$

поскольку  $A_{10} + A_{02}$  представляет работу по перемещению частицы из точки 1 в точку 2 через точку 0, но эта работа для консервативной силы не зависит от пути, поэтому можно записать просто  $A_{12}$ .

Таким образом, с помощью функции  $E_{\Pi}$  можно определять работу, совершаемую над частицей консервативными силами на любом пути, начинающемся в произвольной точке 1 и заканчивающемся в точке 2.

Итак, мы показали, что, если на частицу действуют только консервативные силы, работа, совершаемая над частицей на пути 1 – 2, может быть представлена в виде  $A_{12} = E_{\Pi 1} - E_{\Pi 2}$ . С другой стороны, как было показано ранее (3.8), эта работа идет на приращение кинетической энергии частицы  $A_{12} = E_{K2} - E_{K1}$ . Сопоставляя эти два выражения, для  $A_{12}$  приходим к равенству

$$E_{\Pi 1} - E_{\Pi 2} = E_{K2} - E_{K1} \text{ или } E_{K1} + E_{\Pi 1} = E_{K2} + E_{\Pi 2}. \quad (3.21)$$

Полученный результат означает, что величина  $E$

$$E = E_{K1} + E_{\Pi 1} \quad (3.22)$$

для частицы, находящейся в поле консервативных сил, остается постоянной, то есть является сохраняющейся величиной. Величина  $E$ , равная сумме кинетической и потенциальной энергий, называется *полной механической энергией* частицы.

Поскольку в соответствии с (3.20) работа, совершаемая над частицей консервативными силами, равна убыли потенциальной

энергии частицы, можно сказать, что работа совершается за счет запаса потенциальной энергии.

Из (3.18) следует, что потенциальная энергия оказывается определенной с точностью до некоторой аддитивной постоянной  $E_{\Pi 0}$ . Однако это обстоятельство не имеет принципиального значения, так как во все физические соотношения входит либо разность значений  $E_{\Pi}$  в двух точках, либо производная функции  $E_{\Pi}$  по координатам. Практически принимают за нуль потенциальную энергию тела в каком-то определенном положении, а энергию в других положениях рассматривают по отношению к этой энергии.

Зная вид функции  $E_{\Pi}(x, y, z)$ , можно найти силу, действующую на частицу в каждой точке поля. Рассмотрим перемещение частицы параллельно оси  $x$  на  $dx$ . Такое перемещение сопровождается совершением над частицей работы, равной  $dA = \mathbf{F}ds = F_x dx$  (компоненты перемещения  $dy$  и  $dz$  равны нулю). Согласно (3.20), эта работа может быть представлена как убыль потенциальной энергии:  $dA = -dE_{\Pi}$ . Приравняв оба выражения для работы, получим, что

$$F_x dx = -dE_{\Pi} \text{ или } F_x = -dE_{\Pi}/dx, (y, z = \text{const}). \quad (3.23)$$

Выражение, стоящее справа, представляет собой производную функции  $E_{\Pi}(x, y, z)$ , вычисленную в предположении, что переменные  $y$  и  $z$  остаются неизменными, а изменяется лишь переменная  $x$ . Подобные производные называются частными и обозначаются, в отличие от обычных производных функций одной переменной, символом  $\partial E_{\Pi}/\partial x$ . Следовательно, проекция силы на ось  $x$  равна взятой с обратным знаком частной производной потенциальной энергии по переменной  $x$ . Аналогично рассуждая, можно получить значения проекций сил на оси  $y$  и  $z$ :

$$F_x = -\partial E_{\Pi}/\partial x, F_y = -\partial E_{\Pi}/\partial y, F_z = -\partial E_{\Pi}/\partial z. \quad (3.23')$$

Общее выражение для силы будет иметь вид:

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z = -(\partial E_{\Pi}/\partial x \mathbf{e}_x + \partial E_{\Pi}/\partial y \mathbf{e}_y + \partial E_{\Pi}/\partial z \mathbf{e}_z). \quad (3.24)$$

Вектор, имеющий компоненты  $\partial \varphi/\partial x$ ,  $\partial \varphi/\partial y$ ,  $\partial \varphi/\partial z$ , называется **градиентом** и показывает направление наибольшего изменения скалярной функции  $\varphi$ , обозначается  $\text{grad} \varphi$ :

$$\text{grad} \varphi = (\partial \varphi/\partial x) \mathbf{e}_x + (\partial \varphi/\partial y) \mathbf{e}_y + (\partial \varphi/\partial z) \mathbf{e}_z. \quad (3.25)$$

Таким образом, для силы можно записать:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } E_{\Pi}. \quad (3.26)$$

В общем случае конкретный вид функции  $E_{\Pi}(x, y, z)$  зависит от характера силового поля. Ранее было показано (3.15), что для поля сил тяжести Земли работа не зависит от пути и выражается уравнением  $A = mg(h_1 - h_2)$ . Сопоставляя это выражение с (3.20):  $A_{12} = E_{\Pi 1} - E_{\Pi 2}$ , можно сделать заключение, что потенциальная энергия поля силы тяжести Земли будет

$$E_{\Pi} = mgh, \quad (3.27)$$

где  $h$  отсчитывается от произвольного уровня.

Начало отсчета потенциальной энергии можно выбирать произвольно. Поэтому  $E_{\Pi}$  может иметь отрицательные значения. Если, например, принять за нуль потенциальную энергию частицы, находящейся на поверхности Земли, то потенциальная энергия частицы, лежащей на дне ямы глубины  $H$ , будет равна  $E_{\Pi} = -mgH$ . Отметим, что кинетическая энергия не может быть отрицательной.

Закон сохранения полной механической энергии частицы (3.22) можно распространить на систему частиц: *полная механическая энергия системы невзаимодействующих частиц, на которые действуют только консервативные силы, остается постоянной.*

Можно также показать, что *полная механическая энергия замкнутой системы тел, между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной.*

### 3.6. Потенциальная энергия упругой деформации

Потенциальной энергией может обладать не только система взаимодействующих тел, но и отдельно взятое упруго деформированное тело. В этом случае потенциальная энергия будет зависеть от степени деформации. Согласно (3.11), для деформации пружины с коэффициентом жесткости  $k$  на величину  $x$  необходимо совершить работу  $A = (kx^2)/2$ . Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии пружины, которая в соответствии с (3.18) (при условии, что потенциальная энергия недеформированной пружины  $E_{\Pi 0} = 0$ ) может быть представлена как

$$E_{\Pi} = (kx^2)/2. \quad (3.28)$$

### 3.7. Условия равновесия механической системы

Рассмотрим материальную точку, имеющую одну степень свободы. Положение этой точки будет определяться одной координатой, например  $x$ . Примером такой системы может быть шарик, который свободно без трения перемещается по изогнутой в вертикальной плоскости проволоке (рис. 3.5, а), или закрепленный на пружине шарик, без трения скользящий по горизонтальной направляющей (рис. 3.6, а). Графики потенциальной энергии для этих случаев приведены соответственно на рис. 3.5, б и 3.6, б.

Поскольку трение в обоих случаях отсутствует, результирующая сил, действующих на шарик, будет направлена перпендикулярно перемещению и работы совершать не будет. Закон сохранения энергии будет иметь вид:

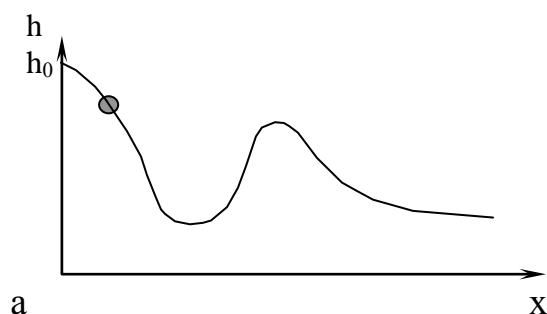
$$E = E_{\Pi} + E_K = \text{const.} \quad (3.29)$$

Из уравнения следует, что кинетическая энергия может возрасти только за счет уменьшения потенциальной энергии. Значит, если шарик находится в состоянии с минимальной потенциальной энергией и его скорость при этом равна нулю, без внешнего воздействия в движение он прийти не может, то есть будет находиться в состоянии равновесия. На рис. 3.5 и 3.6 это соответственно точки  $x = x_1$  и  $x = 0$ . Условие минимума потенциальной энергии имеет вид  $dE_{\Pi}/dx = 0$ . В соответствии с (3.23) это значит, что  $F_x = 0$ . Таким образом, в положении равновесия действующая на шарик сила равна нулю. На рис. 3.5 этому условию удовлетворяет также положение  $x = x_2$ , однако слева и справа от него на шарик будут действовать силы, стремящиеся удалить шарик от этой точки ( $F_x = -dE_{\Pi}/dx$ ). При смещении шарика из точки с  $x = x_1$  силы, действующие на него, будут стремиться вернуть его в исходное положение.

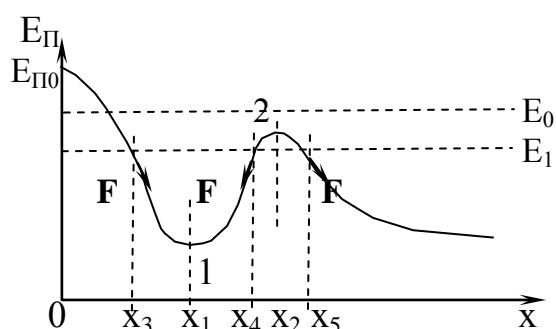
Зная вид потенциальной энергии и значение полной энергии тела, можно сделать некоторые заключения о возможном характере его движения. Так, если полная энергия тела имеет значение  $E_1$ , указанное на рис. 3.5, его движение может происходить на отрезке от  $x_3$  до  $x_4$  или от  $x_5$  до бесконечности. В области от  $x < x_3$  и от  $x_4$  до  $x_5$  частица попасть не может, так как там ее потенциальная энергия должна быть больше ее полной энергии.



Область от  $x_4 < x < x_5$  носит название **потенциального барьера**, а от  $x_3$  до  $x_4$  – **потенциальной ямы**. При значении полной энергии больше  $E_{\Pi 0}$  движение по оси  $x$  не ограничено.

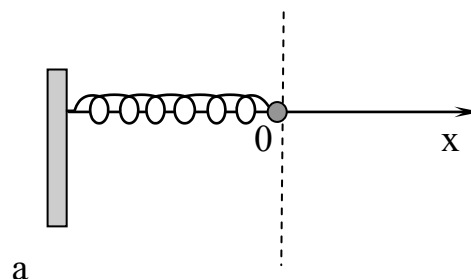


а

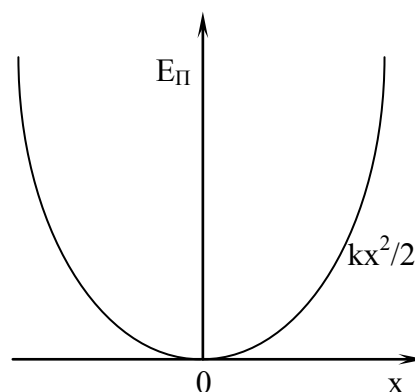


б

Рис. 3.5



а



б

Рис. 3.6

### 3.8. Закон сохранения импульса

Рассмотрим теперь систему, состоящую из  $N$  взаимодействующих частиц, на каждую из которых, кроме того, может действовать внешняя сила. Внутреннюю силу, действующую на  $i$ -ю частицу со стороны  $k$ -й частицы обозначим  $F_{ik}$ , а суммарную внешнюю силу –  $F_i$ . Тогда система уравнений, записанная для всех частиц, согласно второму закону Ньютона, будет иметь вид:

$$d\mathbf{P}_1/dt = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \dots + \mathbf{F}_{1k} + \dots + \mathbf{F}_{1N} + \mathbf{F}_1 = \sum_{k=2}^N \mathbf{F}_{1k} + \mathbf{F}_1$$

$$d\mathbf{P}_2/dt = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \dots + \mathbf{F}_{2k} + \dots + \mathbf{F}_{2N} + \mathbf{F}_2 = \sum_{k=1, k \neq 2}^N \mathbf{F}_{2k} + \mathbf{F}_2$$

.....

$$d\mathbf{P}_i/dt = \mathbf{F}_{i1} + \mathbf{F}_{i2} + \dots + \mathbf{F}_{ik} + \dots + \mathbf{F}_{iN} + \mathbf{F}_i = \sum_{k=1, k \neq i}^N \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_i$$

.....

$$d\mathbf{P}_N/dt = \mathbf{F}_{N1} + \mathbf{F}_{N3} + \dots + \mathbf{F}_{Nk} + \dots + \mathbf{F}_{NN-1} + \mathbf{F}_{2N} = \sum_{k=1, k \neq N}^N \mathbf{F}_{Nk} + \mathbf{F}_N. \quad (3.30)$$

Сложим вместе эти N уравнений. Вследствие того, что для любой пары внутренних сил в соответствии с третьим законом Ньютона будет выполняться условие  $F_{ik} + F_{ki} = 0$ , справа останутся только внешние силы. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$d(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k \dots + \mathbf{P}_N)/dt = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_k + \dots + \mathbf{F}_N = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i. \quad (3.31)$$

Сумма импульсов частиц, образующих механическую систему, называется **импульсом системы**. Обозначив этот импульс  $\mathbf{P}$ , получим, что

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i. \quad (3.32)$$

Из (3.31) и (3.32) следует, что при условии  $\sum \mathbf{F}_i = 0$  импульс системы не меняется. Таким образом, для замкнутой системы можно сформулировать **закон сохранения импульса** в следующем виде: **импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным**.

Отметим, что импульс остается постоянным и для незамкнутой системы при условии, что внешние силы в сумме дают нуль. В случае когда сумма внешних сил не равна нулю, но проекция этой суммы на некоторое направление равна нулю, сохраняется составляющая импульса в этом направлении.

Точка С, положение которой задается радиусом-вектором  $\mathbf{R}_C$ , определяемым следующим образом:

$$\mathbf{R}_C = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_N \mathbf{r}_N) / (m_1 + m_2 + \dots + m_N), \quad (3.33)$$

называется **центром масс** (или **центром инерции**) системы.

Отметим, что в однородном поле сил тяжести центр масс совпадает с центром тяжести системы.

Если импульс системы частиц представить в виде произведения суммарной массы частиц на скорость центра масс системы:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}_C, \quad (3.34)$$

то скорость центра масс получается путем дифференцирования (3.33) по времени:

$$\mathbf{v}_C = d\mathbf{R}_C/dt. \quad (3.35)$$

Для замкнутой системы  $\mathbf{P} = m\mathbf{v}_C = \text{const}$ . Следовательно, центр масс замкнутой системы либо движется прямолинейно и равномерно, либо остается неподвижным.

Система отсчета, в которой центр масс покоится, называется *системой центра масс*. Эта система, очевидно, инерциальная. Система отсчета, связанная с измерительными приборами, называется лабораторной системой.

### 3.9. Соударение двух тел

При соударении тел друг с другом они претерпевают деформации. При этом кинетическая энергия, которой обладали тела перед ударом, частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации и в так называемую внутреннюю энергию тел. Увеличение внутренней энергии тел сопровождается повышением их температуры.

Существуют два предельных вида удара: абсолютно упругий и абсолютно неупругий. *Абсолютно упругим* называется такой удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие, немеханические, виды энергии. При таком ударе кинетическая энергия переходит полностью или частично в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга. В итоге потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую энергию, и тела разлетаются со скоростями, величина и направление которых определяются двумя условиями – сохранением полной энергии и сохранением полного импульса системы тел.

**Абсолютно неупругий удар** характеризуется тем, что потенциальной энергии деформации не возникает; кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию; после удара столкнувшиеся тела движутся с одинаковой скоростью. При абсолютно неупругом ударе выполняется лишь закон сохранения импульса, закон же сохранения механической энергии не соблюдается: имеет место закон сохранения суммарной энергии различных видов – механической и внутренней.

### Контрольные задания

- Тело массой 2 кг поднято над землей. Его потенциальная энергия при этом составила 400 Дж.

Определить скорость тела после прохождения  $1/4$  расстояния до земли, если на поверхности земли потенциальная энергия тела равна нулю и силами сопротивления воздуха можно пренебречь.

*Пример решения.* Закон сохранения энергии  $E_K + E_{\Pi} = (mv^2)/2 + mgh = \text{const} = 400$  Дж.

Для максимальной высоты подъема  $H$  запишем:  $mgH = 400$  Дж.

Для высоты  $(3/4)H$  (после прохождения  $1/4$  расстояния до земли):

$$(3mgH)/4 + (mv^2)/2 = 400 \text{ Дж.}$$

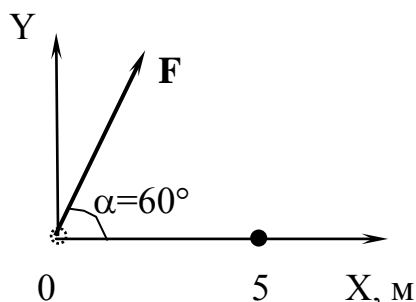
Если учесть, что  $(3mgH)/4 = (400 \times 3)/4$  Дж = 300 Дж, то есть в предыдущем уравнении  $(mv^2)/2 = 100$  Дж. При весе тела 2 кг,  $v^2 = 200/2$  (м/с)<sup>2</sup>, т. е.  $v = 10$  м/с.

1. Определить скорость тела на половине пути до земли.

2. Определить скорость тела у поверхности земли.

- На рисунке показан вектор силы, действующей на частицу.

Определить работу, совершенную этой силой при перемещении частицы из начала координат в точку с координатами (5, 0), если  $F = 4$  Н.



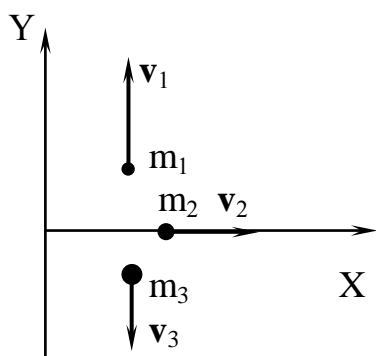
Работа – это скалярное произведение силы на перемещение:

$$A = \mathbf{F}\mathbf{s} = F s \cos\alpha = 4 \text{ (Н)} 5 \text{ (м)} \cos 60^\circ = 10 \text{ Дж.}$$

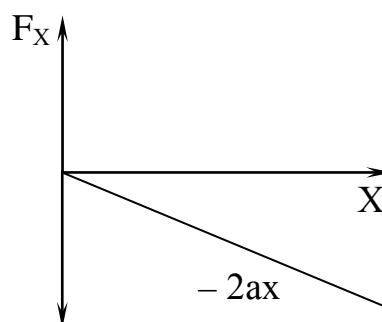
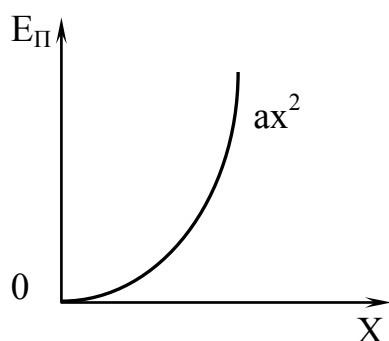
3. Определить работу, совершенную этой силой при перемещении частицы из начала координат в точку с координатами (0, 5).

4. Система состоит из трех тел с массами  $m_1 = 1 \text{ кг}$ ,  $m_2 = 2 \text{ кг}$ ,  $m_3 = 3 \text{ кг}$ , которые двигаются, как показано на рисунке.

Определить величину скорости центра масс этой системы, если скорости шаров  $v_1 = 3 \text{ м/с}$ ,  $v_2 = 2 \text{ м/с}$ ,  $v_3 = 1 \text{ м/с}$ .



• В потенциальном поле сила  $\mathbf{F}$  пропорциональна градиенту потенциальной энергии  $E_{\text{П}}$ . Установить зависимость проекции силы  $F_X$  на ось  $X$ , если график зависимости потенциальной энергии  $E_{\text{П}}$  от координаты  $X$  имеет вид:

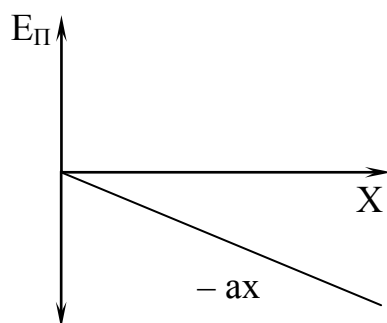


Связь проекции силы  $F_X$  с потенциальной энергией запишется:

$$F_X = - (dE_{\text{П}}/dx).$$

Если  $E_{\Pi} = ax^2$ , то  $dE_{\Pi}/dx = 2ax$ , учитывая знак «-»:  
 $F_X = -(dE_{\Pi}/dx) = -2ax$ .

5. Установить зависимость проекции силы  $F_X$  на ось  $X$ , если график зависимости потенциальной энергии  $E_{\Pi}$  от координаты  $X$  имеет вид:



## Глава 4. Механика твердого тела

### 4.1. Кинематика твердого тела

**Твердым телом** (**абсолютно твердым телом**) называют тело, деформациями которого можно пренебречь. Другими словами, расстояние между любыми двумя точками твердого тела не меняется.

Движение твердого тела может быть **поступательным** и **вращательным**.

При поступательном движении твердого тела прямая, соединяющая любые две точки тела, остается параллельна себе (рис. 4.1, а). Очевидно, что в этом случае все точки тела за одинаковые промежутки времени получают одинаковые по величине и направлению перемещения. Таким образом, скорости и ускорения всех точек будут одинаковы. В этом случае, чтобы полностью охарактеризовать движение твердого тела достаточно определить закон движения одной точки, например центра масс.

При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой **осью вращения** (рис. 4.1, б). В общем случае ось вращения может проходить через тело или находиться вне его. Для описания вращательного движения необходимо задать положение в пространстве оси вращения и угловую скорость (для всех точек тела они одинаковы) в каждый момент времени.

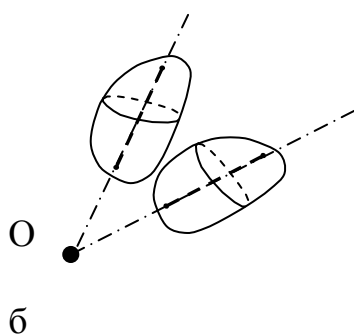
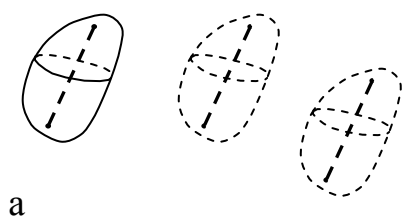


Рис. 4.1

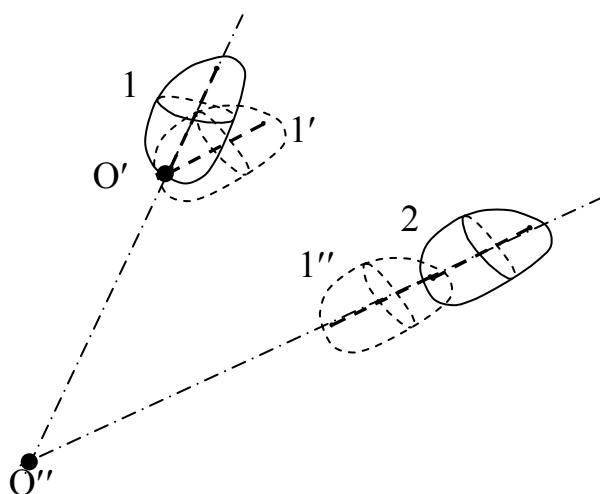


Рис. 4.2

Любое произвольное плоское движение твердого тела можно представить как суперпозицию двух вышеперечисленных. Например, перемещение тела из положения 1 в положение 2 (рис. 4.2) можно представить как поворот вокруг оси  $O'$  в положение 1' на угол  $\varphi$  и перемещение в положение 2 или поворот вокруг оси  $O''$  в положение 1'' с последующим перемещением в положение 2. Таких способов может быть бесконечное множество, однако угол поворота во всех случаях будет одинаков.

Таким образом, элементарное перемещение можно записать:

$$ds = ds_{\pi} + ds_{вр}. \quad (4.1)$$

Для скорости получим:

$$\mathbf{v} = ds/dt = ds_{\pi}/dt + ds_{вр}/dt = \mathbf{v}_{\pi} + \mathbf{v}_{вр} = \mathbf{v}_{\pi} + [\omega \mathbf{r}], \quad (4.2)$$

где  $\mathbf{v}_{\pi}$  – одинакова для всех точек, а  $\mathbf{v}_{вр} = [\omega \mathbf{r}]$  – зависит от расстояния до оси вращения.

Представление сложного движения тела можно осуществить множеством способов. Например, качение цилиндра по плоскости можно рассматривать как поступательное движение центра  $O$  со скоростью  $\mathbf{v}_0$  и вращение вокруг оси, проходящей через этот центр с угловой скоростью  $\omega$ , или как одно только вращательное движение с той же угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через точку касания.

## 4.2. Кинетическая энергия

### *при вращательном движении. Момент инерции тела*

Рассмотрим некоторое тело массы  $m$ , вращающееся вокруг неподвижной оси  $O-O'$ . Мысленно разделим его на точечные массы (частицы)  $m_i$ , каждая из которых находится на некотором расстоянии  $r_i$  от оси вращения, рис. 4.3.

Если угловая скорость всех точек одинакова и равна  $\omega$ , то линейные скорости их будут зависеть от расстояния до оси вращения  $v_i = \omega r_i$  и для кинетической энергии каждой частицы можно записать:

$$E_{ki} = (m_i v_i^2)/2 = (m_i (\omega r_i)^2)/2 = ((\omega)^2/2) m_i r_i^2. \quad (4.3)$$

Для определения полной кинетической энергии тела надо выражение (4.3) просуммировать по всем точкам:



$$E_k = \sum E_{ki} = \sum (m_i v_i^2)/2 = \sum ((\omega)^2/2) m_i r_i^2 = (\omega^2/2) \sum m_i r_i^2. \quad (4.4)$$

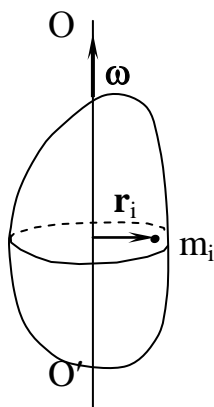


Рис. 4.3

Сумма  $m_i r_i^2$  играет в динамике вращательного движения твердых тел ту же роль, что масса в динамике материальной точки, поэтому она имеет свое название – **момент инерции тела** относительно данной оси вращения и свое обозначение:




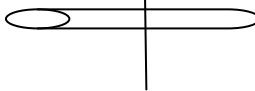
$$I = \sum m_i r_i^2. \quad (4.5)$$

Или, более точно, при переходе к пределу при разделении тела на  $\infty$  число точек:

$$I = \rho \int_V r^2 dV, \quad (4.6)$$

где  $\rho$  – плотность тела,  $dV$  – элемент объема, а интегрирование ведется по всему объему тела.

Моменты инерции некоторых тел относительно оси, проходящей через ось симметрии, приведены в таблице ( $R$  – радиусы кольца, диска и шара,  $l$  – длина стержня).

 Кольцо	 Диск	Шар 	
$mR^2$	$(mR^2)/2$	$(2mR^2)/5$	$(ml^2)/12$

Для любой другой оси, параллельной данной, будет выполняться теорема Штейнера:

$$I_a = I_0 + ma^2, \quad (4.7)$$

где  $a$  – расстояние до этой оси от оси, проходящей через центр.

### 4.3. Основной закон динамики вращательного движения. Момент силы

Запишем второй закон Ньютона для элемента массы  $\Delta m_i$ , вращающегося с угловым ускорением  $\beta$  тела (рис. 4.4):

$$\Delta m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i, \quad (4.8)$$

где  $\mathbf{a}_i$  – ускорение данного элемента тела, зависящее от расстояния до оси вращения ( $a_i = \beta r_i$ ), а  $\mathbf{F}_i$  – суммарная сила, действующая на данный элемент тела. Умножим векторно «слева» данное уравнение на радиус-вектор  $\mathbf{r}_i$  рассматриваемого элемента:

$$\Delta m_i [\mathbf{r}_i \mathbf{a}_i] = [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i] = \mathbf{N}_i. \quad (4.9)$$

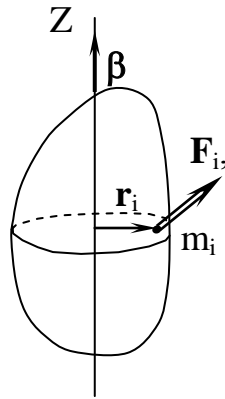


Рис. 4.4

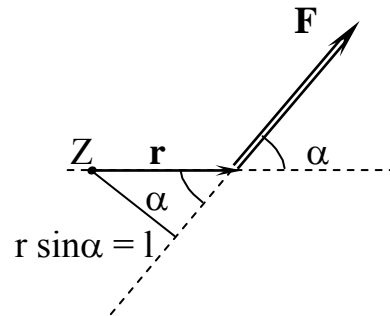


Рис. 4.5

Величина  $\mathbf{N}$ , стоящая справа, называется моментом силы относительно оси вращения, которую условно назовем осью  $Z$ . Векторное произведение  $[\mathbf{r}\mathbf{F}]$  можно записать:

$$[\mathbf{r}\mathbf{F}] = \mathbf{n} r F \sin \alpha = \mathbf{n} F l, \quad (4.10)$$

где  $\alpha$  – угол между направлением силы  $\mathbf{F}$  и радиус-вектором  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{n}$  – направление нормали к плоскости, в которой лежат векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{F}$ . Величина  $l = r \sin \alpha$  называется плечом силы относительно оси  $Z$  и является кратчайшим расстоянием (перпендикуляром) от оси до направления действия силы, рис. 4.5 (ось  $Z$  на рисунке направлена перпендикулярно плоскости листа вверх).

Далее, запишем проекции левой и правой частей уравнения (4.9) на ось  $Z$  и просуммируем по всем частицам тела, учитывая, что  $a_i = \beta r_i$ :

$$\sum \Delta m_i r_i^2 \beta = \beta \sum \Delta m_i r_i^2 = I \beta = \sum N_i = N, \quad (4.11)$$

где  $N$  – суммарный момент всех действующих на тело сил, а  $I$  – момент инерции тела (4.5, 4.6).

Уравнение

$$I\beta = N \quad (4.12)$$

называется *основным уравнением динамики твердого тела*. Из него, в частности, следует, что если на тело не действуют внешние силы или суммарный момент их равен нулю, то  $I\beta = 0$ , и, поскольку  $\beta = d\omega/dt$ ,

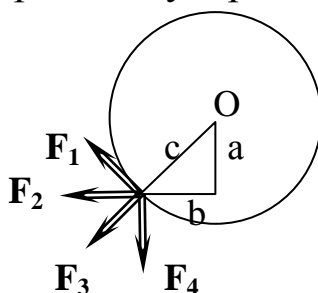
$$I\omega = \text{const}, \quad (4.13)$$

что является частным случаем закона сохранения момента импульса тела.

Отметим, что момент инерции человека, стоящего с прижатыми к телу руками, примерно  $1,2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , в стойке «арабеск» (ласточка) –  $8 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , а в горизонтальном положении –  $17 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . Этим на основании (4.13) объясняется изменение скорости вращения фигуристов и гимнастов при изменении позы.

### Контрольные задания

• К точке, лежащей на внешней поверхности диска, приложена сила  $F_1$ . Указать плечо силы, если ось вращения проходит через центр  $O$  диска перпендикулярно плоскости рисунка.



*Пример решения.* Плечо силы относительно оси вращения, проходящей через центр диска, – это расстояние от оси вращения до прямой, проходящей через вектор силы.

Для силы  $F_1$  это будет отрезок  $c$ .

1. Для условия задачи указать плечо силы  $F_2$ .
2. Для условия задачи указать плечо силы  $F_3$ .
3. Для условия задачи указать плечо силы  $F_4$ .

- Сплошной и полый цилиндры имеют одинаковые радиусы и массы. Какой из них выше закатится без проскальзывания по наклонной плоскости, если начальные скорости их одинаковы?

*Пример решения.* Закон сохранения энергии с учетом кинетической энергии вращения имеет вид:

$$E_{\text{П}} + E_{\text{Кпост}} + E_{\text{Квр}} = \text{const} \text{ или}$$

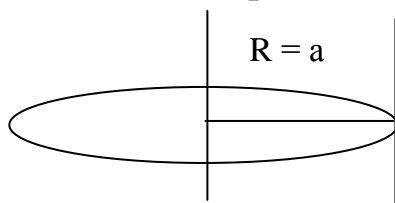
$$mgH = (mv^2)/2 + (I\omega^2)/2,$$

где  $I$  – момент инерции тела,  $\omega$  – угловая скорость. При одинаковых радиусах угловые скорости будут равны. Момент инерции полого цилиндра  $I = mR^2$ , а сплошного цилиндра (диска)  $I = (mR^2)/2$ . После остановки вся кинетическая энергия переходит в потенциальную, значит, выше поднимется тело, имеющее большую начальную кинетическую энергию. При одинаковой начальной скорости кинетическая энергия полого цилиндра больше, так как он имеет больший момент инерции и кинетическая энергия вращения  $(I\omega^2)/2$  его больше.

Выше поднимется полый цилиндр.

4. Шар и полая сфера, имеющие одинаковые массы и радиусы, скатываются без проскальзывания с горки высотой  $h$ . У какого тела у основания горки скорость будет больше?

- При расчете моментов инерции тела относительно осей, проходящих через центр масс, используют теорему Штейнера. Как изменится момент инерции кольца относительно новой оси, если ее перенести из центра масс на край (см. рис.)?



*Пример решения.* Теорема Штейнера связывает момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс  $I_{\text{ц}}$ , и относительно параллельной ей оси на расстоянии  $a$   $I_a$ :

$$I_a = I_{\text{ц}} + ma^2.$$

Для кольца  $I_{\text{ц}} = mR^2 = ma^2$ ,  $I_a = I_{\text{ц}} + ma^2 = ma^2 + ma^2 = 2ma^2$ .

Момент инерции увеличится в 2 раза.

- Тонкостенная трубка и диск имеют одинаковые массы и радиусы.

Как соотносятся их моменты инерции?

*Пример решения.* Момент инерции тела относительно оси вращения равен

$$I = \sum m_i r_i^2,$$

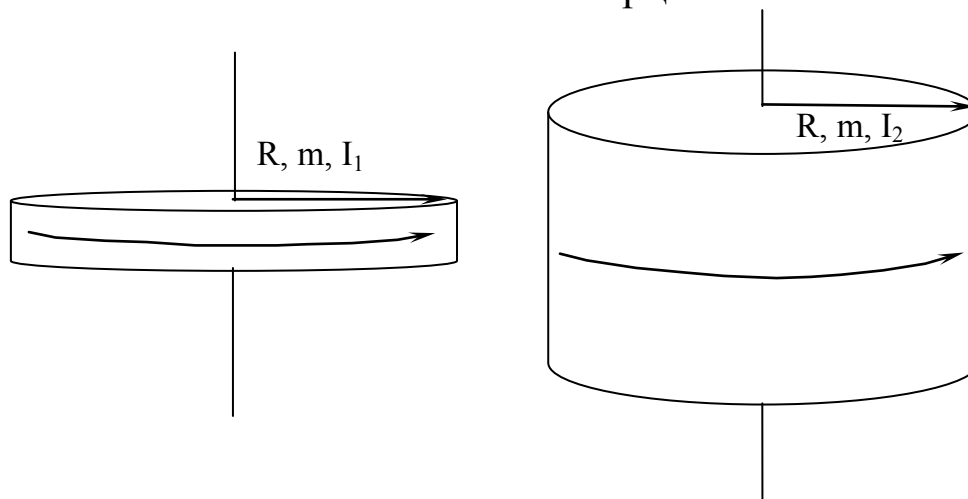
где  $m_i$  – масса элемента тела,  $r_i$  – расстояние этого элемента до оси вращения.

Очевидно, что любое полое тело будет иметь больший момент инерции, поскольку его масса удалена от оси. Момент инерции трубки будет больше, чем диска.

5. Тонкостенная трубка и кольцо имеют одинаковые массы и радиусы. Как соотносятся их моменты инерции?

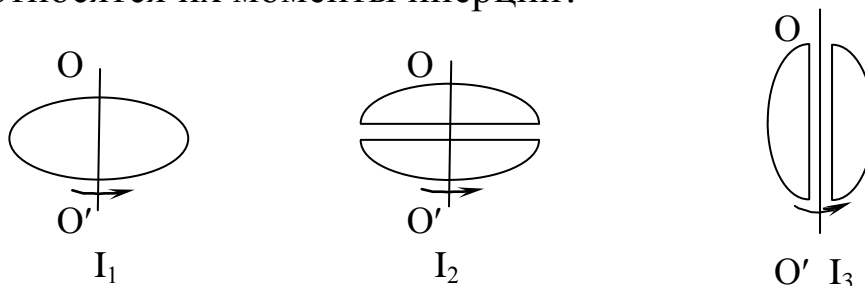
6. Диск и цилиндр имеют одинаковые массы и радиусы.

Как соотносятся их моменты инерции?



7. Из жести вырезаны три одинаковые детали в виде эллипса. Две детали разрезали пополам вдоль разных осей симметрии. Затем все части отодвинули друг от друга на равное расстояние и расставили симметрично оси  $OO'$ .

Как соотносятся их моменты инерции?



- Человек сидит в центре вращающейся по инерции вокруг вертикальной оси карусели и держит в руках длинный шест за его середину.

Как изменится частота вращения в конечном состоянии, если он повернет шест из горизонтального положения в вертикальное?

*Пример решения. 1-й вариант.* Из основного уравнения вращательного движения твердого тела  $I\beta = N$  ( $I$  – момент инерции тела,  $\beta$  – его угловое ускорение,  $N$  – момент внешних сил) следует, что если на тело не действуют внешние силы, то  $I\beta = 0$ , и, поскольку  $\beta = d\omega/dt$  ( $\omega$  – угловая скорость),  $I\omega = \text{const}$ .

Момент инерции человека и карусели при изменении положения шеста не меняются, а момент инерции шеста уменьшится. Суммарный момент инерции станет меньше, значит, угловая скорость (частота вращения) должна увеличиться.

*Пример решения. 2-й вариант.* Кинетическая энергия системы не изменилась. Для вращательного движения  $E_k = I\omega^2/2$ . Момент инерции шеста уменьшился, значит, угловая скорость должна увеличиться.

8. Два тела двигались к стенке с одинаковыми скоростями и при ударе остановились. Первое тело катилось, второе скользило. Если при ударе выделилось одинаковое количество тепла, то масса какого тела была больше?

## **Глава 5. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции**

### **5.1. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции**

Законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета. Относительно всех инерциальных систем данное тело движется с одинаковым ускорением  $\mathbf{a}$ . Любая неинерциальная система отсчета движется относительно инерциальных систем с некоторым ускорением, поэтому ускорение тела в неинерциальной системе отсчета  $\mathbf{a}'$  будет отлично от  $\mathbf{a}$ . Обозначим разность ускорений тела в инерциальной и неинерциальной системах  $\mathbf{a}_{\text{ин}}$ :

$$\mathbf{a} - \mathbf{a}' = \mathbf{a}_{\text{ин}}. \quad (5.1)$$

Для поступательно движущейся неинерциальной системы  $\mathbf{a}_{\text{ин}}$  одинаково для всех точек пространства и представляет собой ускорение неинерциальной системы отсчета относительно инерциальных систем. Для вращающейся неинерциальной системы  $\mathbf{a}_{\text{ин}}$  в разных точках пространства будет различным и будет зависеть от расстояния до оси вращения относительно неинерциальной системы отсчета. Пусть результирующая всех сил, обусловленных действием на данное тело со стороны других тел, равна  $\mathbf{F}$ . Тогда, согласно второму закону Ньютона, ускорение тела относительно любой инерциальной системы отсчета равно

$$\mathbf{a}m = \mathbf{F} \text{ или } \mathbf{a} = \mathbf{F}/m. \quad (5.2)$$

Ускорение же тела относительно некоторой неинерциальной системы можно в соответствии с (5.1) представить в виде

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\text{ин}} = \mathbf{F}/m - \mathbf{a}_{\text{ин}}. \quad (5.3)$$

Отсюда следует, что даже при  $\mathbf{F} = 0$  тело будет двигаться по отношению к неинерциальной системе отсчета с ускорением  $-\mathbf{a}_{\text{ин}}$ , то есть так, как если бы на него действовала сила, равная  $\mathbf{F}_{\text{ин}} = -m\mathbf{a}_{\text{ин}}$ . Это означает, что при описании движения в неинерциальных системах отсчета можно пользоваться уравнениями Ньютона, если наряду с силами, обусловленными воздействием тел друг на друга, добавить силы, равные произведению массы тела на взятую с обратным знаком разность его ускорений по отношению

к инерциальной и неинерциальной системам отсчета  $\mathbf{a}_{in}$ , которые называются *силами инерции*:

$$\mathbf{F}_{in} = -m(\mathbf{a} - \mathbf{a}') = -m\mathbf{a}_{in}. \quad (5.4)$$

Уравнение второго закона Ньютона в неинерциальной системе отсчета тогда будет иметь вид:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{in}. \quad (5.5)$$

## 5.2. Силы инерции при прямолинейном движении системы отсчета

Рассмотрим тележку с укрепленным на ней кронштейном, к которому подвешен на нити шарик (рис. 5.1). Пока тележка покоится или движется без ускорения, нить расположена вертикально и сила тяжести  $m\mathbf{g}$  уравнивается реакцией нити  $\mathbf{F}_r$ . Если теперь привести тележку в прямолинейное движение с ускорением  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{in}$ , нить отклонится от вертикали на такой угол, чтобы результирующая сил  $m\mathbf{g}$  и  $\mathbf{F}_r$  сообщала шарiku ускорение, равное  $\mathbf{a}_{in}$  (рис. 5.2):

$$m\mathbf{a}_{in} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_r. \quad (5.6)$$

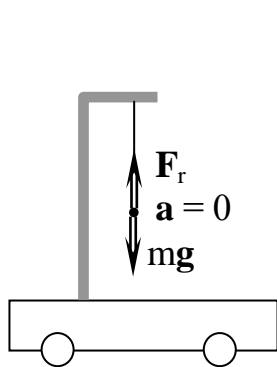


Рис. 5.1

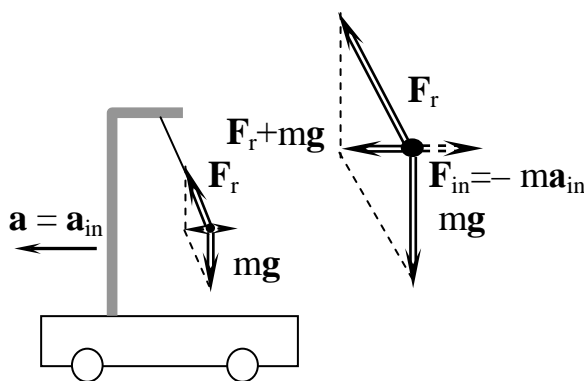


Рис. 5.2

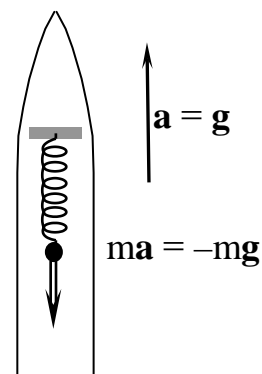


Рис. 5.3

Относительно системы отсчета, связанной с тележкой, шарик покоится, несмотря на то что результирующая сил  $m\mathbf{g}$  и  $\mathbf{F}_r$  отлична от нуля. Отсутствие ускорения шарика по отношению к этой системе отсчета можно формально объяснить тем, что, кроме сил  $m\mathbf{g}$  и  $\mathbf{F}_r$ , равных в сумме  $m\mathbf{a}_{in}$ , на шарик действует сила инерции  $\mathbf{F}_{in} = -m\mathbf{a}_{in}$ . В результате получим:



$$ma = mg + \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_{in} = mg + \mathbf{F}_r - ma_{in} = 0, \quad (5.7)$$

что аналогично уравнению (5.6).

Введение сил инерции дает возможность описывать движение тел в любых (как инерциальных, так и неинерциальных) системах отсчета с помощью одних и тех же уравнений движения.

Однако следует понимать, что силы инерции нельзя ставить в один ряд с силами, вызванными фундаментальными взаимодействиями, например гравитационными и электромагнитными, или силами упругими и трения. Все эти силы обусловлены воздействием на тело со стороны других тел. Силы инерции обусловлены свойствами той системы отсчета, в которой рассматриваются механические явления.

Введение в рассмотрение сил инерции не является принципиально необходимым. В принципе любое движение можно всегда рассмотреть по отношению к инерциальной системе отсчета. Однако практически часто представляет интерес как раз движение тел по отношению к неинерциальным системам отсчета, например по отношению к земной поверхности. Использование сил инерции дает возможность решить соответствующую задачу непосредственно по отношению к такой системе отсчета, что иногда оказывается значительно проще, чем рассмотрение движения в инерциальной системе.

Характерным свойством сил инерции является их пропорциональность массе тела. Благодаря этому свойству силы инерции оказываются аналогичными силам тяготения. Представим себе, что мы находимся в удаленной от всех внешних тел закрытой кабине, которая движется с ускорением  $a = g$  в направлении, которое мы назовем «верхом» (рис. 5.3). Тогда все тела, находящиеся внутри кабины, будут вести себя так, как если бы на них действовала сила инерции  $\mathbf{F}_{in} = -m\mathbf{g}$ . В частности, пружина, к концу которой подвешено тело массы  $m$ , растянется так, чтобы упругая сила уравновесила силу инерции  $-m\mathbf{g}$ . Однако такие же явления наблюдались бы и в том случае, если бы кабина была неподвижной и находилась вблизи поверхности Земли. Не имея возможности «выглянуть» за пределы кабины, никакими опытами, проводимыми внутри кабины, мы не смогли бы установить, чем обусловлена сила  $m\mathbf{g}$ : ускоренным движением кабины или действием гравитационного

поля Земли. На этом основании говорят об эквивалентности сил инерции и тяготения (в однородном гравитационном поле). Эта эквивалентность лежит в основе общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна.

### 5.3. Центробежная сила инерции

Рассмотрим диск, вращающийся вокруг перпендикулярной к нему вертикальной оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 5.4, а). Вместе с диском вращается надетый на спицу шарик, соединенный с центром диска пружиной.

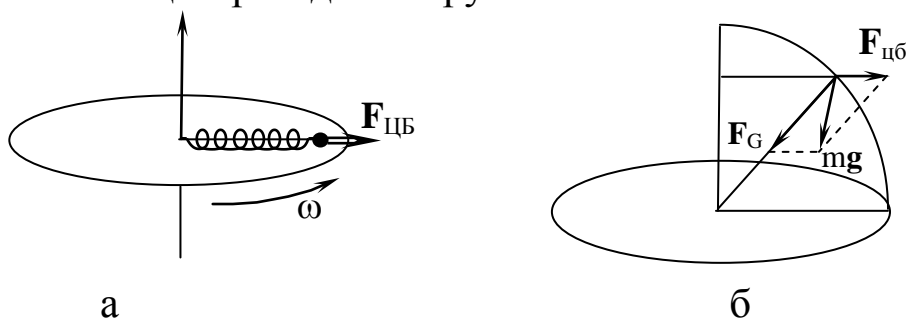


Рис. 5.4

Шарик занимает на спице такое положение, при котором сила натяжения пружины  $F$  оказывается равной произведению массы шарика  $m$  на его ускорение  $a_n = \omega^2 R$  ( $R$  – расстояние от шарика до центра диска, см. (1.30)):

$$F = m\omega^2 R. \quad (5.8)$$

Относительно системы отсчета, связанной с диском, шарик покоится. Это можно формально объяснить тем, что, кроме силы (5.8), на шарик действует сила инерции, равная (5.4), но противоположно направленная ускорению  $a_n$  вдоль радиуса от центра диска  $F_{in} = m\omega^2 R$ .

Силу инерции, возникающую во вращающейся (по отношению к инерциальным системам) системе отсчета, называют **центробежной силой инерции**. Эта сила действует на тело во вращающейся системе отсчета, независимо от того, покоится тело в этой системе (как мы предполагали до сих пор) или движется относительно нее.

При точном решении задач о движении тел относительно земной поверхности нужно учитывать центробежную силу инер-

ции. Наблюдаемое относительно Земли ускорение свободного падения тел  $g$  обусловлено действием силы тяжести, с которой тело притягивается Землей, и силы центробежной, рис. 5.4, б. Результирующая сил и будет силой тяжести  $mg$ .

Отличие силы тяжести от силы притяжения к Земле невелико, так как центробежная сила инерции значительно меньше, чем сила притяжения к Земле. Так, для массы в 1 кг наибольшее значение центробежной силы, наблюдаемое на экваторе, равно 0,035 Н, в то время как сила притяжения равна приблизительно 9,8 Н, т. е. почти в 300 раз больше.

### 5.4. Сила Кориолиса

При движении тела относительно вращающейся системы отсчета, кроме центробежной силы инерции, появляется еще одна сила, **называемая силой Кориолиса**, или **кориолисовой силой инерции**.

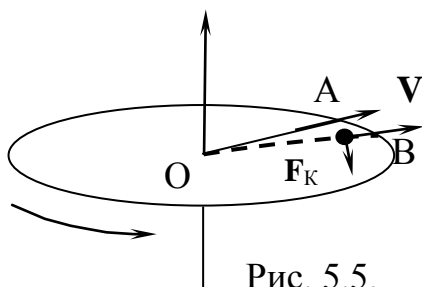


Рис. 5.5.

Появление кориолисовой силы можно обнаружить на следующем примере. Возьмем горизонтально расположенный диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси. Прочертим на диске радиальную прямую ОА (рис. 5.5). Запустим в направлении от центра диска шарик со скоростью  $v$ . Если диск не вращается, шарик будет катиться вдоль прочерченной прямой. Если же диск привести во вращение в направлении, указанном стрелкой, то шарик будет катиться по изображенной пунктиром кривой ОВ, причем его скорость относительно диска  $v'$  будет изменять свое направление. Следовательно, по отношению к вращающейся системе отсчета шарик ведет себя так, как если бы на него действовала сила  $F_k$ , перпендикулярная к скорости  $v$ . Чтобы заставить шарик катиться по вращающемуся диску вдоль радиальной прямой, нужно сделать направляющую, например, в виде ребра. При качении шарика направляющее ребро действует

на него с некоторой силой  $\mathbf{F}_r$ . Относительно вращающейся системы (диска) шарик движется с постоянной по направлению скоростью. Это можно формально объяснить тем, что сила  $\mathbf{F}_r$  уравнивается приложенной к шарiku силой инерции  $\mathbf{F}_k$ , перпендикулярной к скорости  $\mathbf{v}$ . Сила  $\mathbf{F}_k$  и есть Кориолисова сила инерции. Можно показать, что модуль ее равен  $2m\mathbf{v}\omega$ , а для силы в общем случае справедливо выражение:

$$\mathbf{F} = 2m[\mathbf{v}\omega]. \quad (5.9)$$

При  $\mathbf{v} = 0$  эта сила, в отличие от силы центробежной, отсутствует.

## Глава 6. Общие вопросы теории относительности

### 6.1. Специальная теория относительности (релятивистская механика)

В классической механике считалось, что существуют абсолютное пространство и абсолютное время. В этом случае справедливы очевидные преобразования Галилея и вытекающий из них принцип относительности Галилея для инерциальных систем отсчета (2.8), (2.10), (2.11):

$$x = x' + v_0 t, \quad y = y', \quad z = z'; \quad t = t'; \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0; \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}'.$$

Последнее равенство формулируется как принцип относительности Галилея: **все законы механики справедливы для любой инерциальной системы отсчета, и никакими опытами нельзя определить, покоится данная система или движется с постоянной скоростью.** Очевидным кажется и утверждение, что время во всех системах, которые движутся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, течет одинаково, а тела сохраняют свои размеры постоянными.

В то же время с момента основания волновой теории света утвердилось представление, что свет распространяется в некоторой среде, называемой эфиром, который заполняет все пространство. Если эфир представляет некую среду, можно было надеяться обнаружить движение источников или приемников света по отношению к этой среде. Обнаружение движения тел относитель-

но эфира привело бы к появлению абсолютной системы отсчета, по отношению к которой можно было бы рассматривать движение других систем. А раз так, то обнаружение эфира сделало бы возможным выделение этой абсолютной системы. Развита к концу XIX века Максвеллом теория электромагнитных волн предсказывала, что они распространяются с вполне определенной скоростью – скоростью света –  $c$ . Сразу же возникало два вопроса: в какой системе отсчета это справедливо и будет ли скорость света зависеть от скорости источника и приемника.

Ответы на эти вопросы были получены в результате ряда наблюдений и экспериментов.

Наблюдение за поведением двойных звезд, вращающихся с большой скоростью вокруг своего центра масс, показали, что скорость света не зависит от направления движения источника (рис. 6.1).

В то же время на основании опытов Майкельсона – Морли было установлено, что носитель световых волн (эфир) в природе отсутствует.

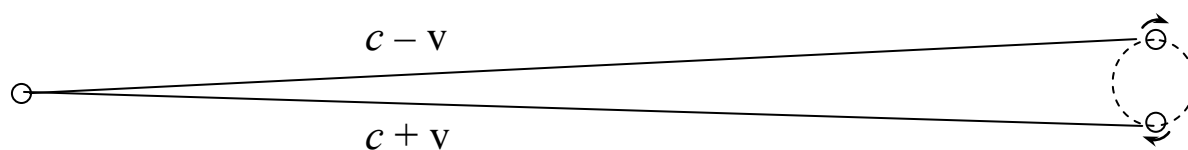


Рис. 6.1.

Идея опыта Майкельсона заключалась в том, что если бы эфир существовал, то скорость зависела бы от направления распространения света по отношению к эфиру, однако опыты этого не подтвердили.

Анализируя все эти факты, Эйнштейн в 1905 году разработал **специальную теорию относительности** (СТО), в основе которой лежат два принципа.

Первый – это распространение принципа относительности Галилея на все законы природы, включая теорию Максвелла, а также химические и биологические процессы: ***все физические явления во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково, в силу чего нельзя выделить какую-либо абсолютную.***

Второй принцип – постоянства скорости света в вакууме: ***скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных***

**системах отсчета во всех направлениях и не зависит от скорости источника и приемника света.**

В классической механике Ньютона описание взаимодействия тел предполагает мгновенное распространение взаимодействия. В действительности существует максимальная конечная скорость  $c$  распространения взаимодействия, причем в природе невозможно взаимодействие со скоростью большей  $c$ . Скорость  $c$  – универсальная постоянная, одинакова во всех инерциальных системах, она равна скорости света в вакууме (примерно 300 000 км/с).

Представим теперь себе один мысленный эксперимент. В первой инерциальной системе отсчета, движущейся относительно второй со скоростью  $v$ , свет от источника до приемника распространяется за время  $t = y/c$ . Если теперь рассматривать это явление со стороны наблюдателя во второй системе, то это время составит  $t' = t/\sqrt{1 - \beta}$ , где  $\beta = v^2/c^2$  (рис 6.2). То, что время, измеренное в одной системе отчета, отличается от времени в другой, противоречит всему нашему повседневному опыту.

Рассмотрим еще один пример. В системе, движущейся относительно наблюдателя Н со скоростью  $v$ , источник И излучает короткий импульс света (рис. 6.3). Два приемника П1 и П2, находящиеся на равных расстояниях от И в той же системе отсчета, зафиксируют приход света одновременно.

Наблюдатель же Н увидит, что свет к источнику П2 придет раньше, чем к приемнику П1.

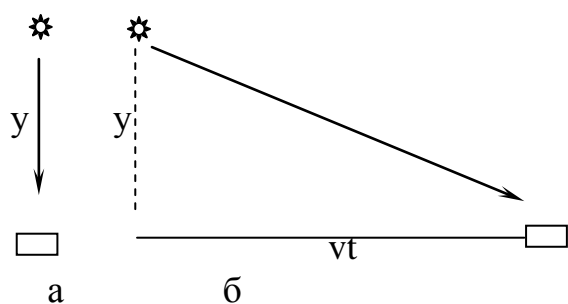


Рис. 6.2

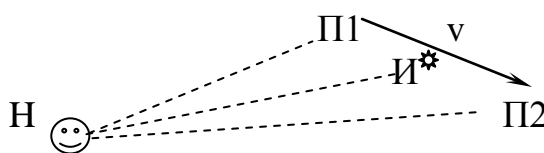


Рис. 6.3

Подчеркнем еще раз, что из принципов СТО следует, что время протекает различно в разных системах отсчета и утверждение о промежутке времени между двумя событиями имеет смысл только при указании системы отсчета. Два события, одновременные в одной системе, могут быть зафиксированы в разное время в другой.

В то же время при этом не нарушается последовательность между событиями, имеющими причинно-следственную связь.

Постоянство скорости света приводит к тому, что пространство и время образуют единое пространство-время. Любое событие в нем характеризуется местом, где оно произошло, и временем, когда оно произошло. Это можно представить как точку в четырехмерном пространстве с координатами  $x, y, z$  и  $ct$ . Всякой частице, даже неподвижной, в этом пространстве соответствует линия, называемая *мировой линией*. Квадрат расстояния между точками носит название *интервала*, для которого справедливо соотношение  $\Delta s^2 = c\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ .

Из принципов СТО следуют также преобразования **координат и времени**, которые называются преобразованиями Лоренца.

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, y = y', z = z', t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6.1)$$

Из преобразований Лоренца следует *релятивистское сокращение отрезков*. Если, например, вначале у двух наблюдателей имелись идентичные стержни длиной  $l$  и если затем наблюдатель В начинает двигаться со скоростью  $v$  по отношению к наблюдателю А, то для А длина стержня В станет равной:

$$l = l'_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (6.2)$$

аналогично для наблюдателя В.

Промежутки времени между событиями также будут различны в различных системах (*релятивистское сокращение времени*):

$$t = \frac{t' - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6.3)$$

На этой основе широкую известность получил *парадокс близнецов*. Парадокс заключается в том, что если на космического путешественника смотреть с Земли, то для него время течет медлен-

нее, и он вернется домой моложе своего брата, находящегося на Земле. Хотя ему все будет казаться наоборот.

Парадокс устраняется, если учесть, что задача несимметрична по своей природе. Близнец, оставшийся на Земле, все время остается в одной и той же инерциальной системе отсчета, тогда как его брат переходит из одной системы отсчета к другой два раза.

Из преобразований Лоренца следует ряд законов.

*Релятивистский закон сложения скоростей:*

$$u' = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}. \quad (6.4)$$

**Масса** движущегося тела  $m$  зависит от его скорости  $v$  и минимальна в системе отсчета, в которой тело покоится (масса покоя):

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6.5)$$

Из этой зависимости можно сделать вывод, что чем быстрее движется тело, тем тяжелее его разгонять дальше.

Частицы вещества, имеющие массу покоя, могут двигаться с любыми скоростями, всегда меньшими скорости света в пустоте, частицы же, не имеющие массы покоя, могут двигаться только со скоростью света.

СТО устанавливает также соотношение между *энергией, массой и импульсом*

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2. \quad (6.6)$$

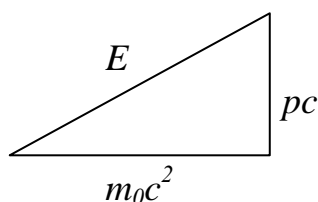


Рис. 6.4.



Это уравнение по форме напоминает теорему Пифагора, и, таким образом, оказывается, что импульс тела и его масса покоя связаны как две компоненты некоторого вектора – *энергии* (рис. 6.4).

Все эти соотношения работают в физике высоких энергий и элементарных частиц.

## 6.2. Общая теория относительности

Все рассмотренные явления справедливы в инерциальных системах отсчета. Когда мы рассматривали неинерциальные системы отсчета, для описания явлений в них мы вводили силы инерции. При прямолинейном движении с ускорением  $a$  это была сила  $F = -ma$ . Причем отмечалось, что, находясь в космическом корабле, летящем с ускорением  $g$  при закрытых иллюминаторах, космонавты в силу эквивалентности гравитационной и инертной масс не смогут понять, летят они с ускорением или покоятся на Земле.

Эйнштейн предположил, что силы инерции можно рассматривать как проявление локальных полей тяготения, которые векторно складываются с любым обычным гравитационным полем. Кроме того, он предположил, что они по своему действию полностью эквивалентны. Исходя из этого положения, он разработал теорию, в которой ***гравитационные массы искривляют пространство так, что тяготение становится просто следствием геометрии***. Три предсказания, сделанные на основе этой теории, в дальнейшем нашли подтверждение: прецессия орбиты Меркурия, не прямолинейность распространения света вблизи массивных тел, замедление времени в гравитационных полях.

### Контрольные задания

- Космический корабль пролетает мимо наблюдателя со скоростью  $0,8c$  ( $c$  – скорость света в вакууме). По измерениям наблюдателя его длина равна 90 м. Какова длина корабля в состоянии покоя?

*Пример решения.* При движении со скоростями, близкими к скорости света, происходит Лоренцовское сокращение отрезков в

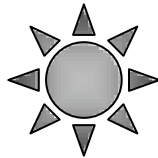
соответствии с законом  $\ell = \ell_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , т. е. для длины покоящегося корабля  $\ell_0$  получим:  $90/\sqrt{1 - (v^2/c^2)} = 90/0,6 = 150\text{м}$ .

1. Космический корабль с двумя космонавтами летит со скоростью 0,8 с. Один из космонавтов поворачивает метровый стержень из положения параллельного направлению движения в положение, перпендикулярное этому направлению. Как изменится длина этого стержня, с точки зрения другого космонавта?

2. Для условия предыдущего задания, как изменится длина этого стержня для наблюдателя, находящегося на Земле?

3. Наблюдатель следит в трубу за пролетающим мимо слева направо со скоростью, близкой к скорости света, космическим кораблем. На борту корабля нарисована эмблема.

Какой видит эту эмблему наблюдатель?



## Часть 2. Молекулярная физика и термодинамика

### Глава 1. Общие понятия. Жидкое состояние

Молекулярно-кинетическая теория объясняет наблюдаемые на опыте законы как суммарный результат действия отдельных молекул на основании статистических методов. В данном разделе считается, что молекулы газа находятся в беспорядочном хаотическом движении, периодически сталкиваясь между собой и со стенками сосуда, в котором они находятся. Все направления движения равновероятны, а интенсивность движения зависит от температуры.

В отличие от этого, термодинамика описывает макроскопические явления, не интересуясь их микроскопической картиной. В основе ее лежат несколько фундаментальных законов, называемых *началами термодинамики*, установленных на основании наблюдаемых фактов.

В данных разделах используются некоторые свои понятия и определения. *Системой* называется совокупность рассматриваемых объектов. *Состояние* системы характеризуется *параметрами* системы. Параметрами идеального газа, например, являются давление ( $p$ ), температура ( $T$ ), объем ( $V$ ) и др. Если данному состоянию системы соответствуют одинаковые значения параметров, не меняющиеся со временем, то состояние называют *равновесным*. В противном случае говорят о *неравновесных* состояниях. Равновесное состояние можно изобразить в виде точки на координатной плоскости, если в качестве осей выбрать какие-либо два параметра системы. При резком изменении какого-либо параметра, например объема газа в цилиндрическом сосуде под поршнем, изменится и давление. Сначала изменение произойдет около поршня, а потом постепенно, за *время релаксации*, во всем объеме, и новому состоянию будет соответствовать на плоскости другая точка. Переход из одного состояния в другое называется *процессом*. Если изменения производить достаточно медленно, так, чтобы параметры успевали принимать новые равновесные

значения за время изменений, то процесс называется *квазистационарным*, или *равновесным*, и на *диаграмме* он может быть отображен в виде линии. Равновесные процессы *обратимы*, то есть могут протекать в обратном направлении. Если после ряда изменений система возвращается в исходное состояние не по тому же пути, то процесс называется *круговым*, или *циклом*. На диаграмме цикл изобразится замкнутой кривой.

### 1.1. Агрегатные состояния вещества

Все вещества могут находиться в трех агрегатных состояниях: твердом, жидком, газообразном (плазма в данном разделе не выделяется). С точки зрения механики их можно характеризовать соотношением между кинетической и потенциальной энергией взаимодействия молекул (атомов, ионов)  $\varepsilon = E_{\text{п}}/E_{\text{к}}$ . Это отношение зависит от двух параметров, определяющих состояние вещества: температуры –  $T$  и давления –  $p$ . Переходы между состояниями, как правило, осуществляются скачкообразно. Так, например, вода при нормальном давлении при  $T = 0^{\circ}\text{C}$  переходит из жидкого состояния в твердое, а при  $T = 100^{\circ}\text{C}$  из жидкого в газообразное. Возможны и плавные переходы. Например, переход между жидким и газообразным состоянием в обход критической точки.

В твердом состоянии молекулы находятся в стабильных положениях благодаря значительным силам межмолекулярного взаимодействия, обуславливающим потенциальную энергию. Молекулы испытывают небольшие колебания около положений равновесия, которые и обуславливают их кинетическую энергию,  $\varepsilon \gg 1$ . Кинетическая энергия атомов пропорциональна абсолютной температуре тела. Вещество в твердом состоянии сохраняет свой объем и форму.

По характеру взаимного расположения молекул твердые вещества можно разделить на три группы: кристаллические, аморфные и композиты.

Для кристаллических тел характерно периодически повторяющееся расположение атомов в пространстве, называемое кристаллической решеткой. Атомы находятся в узлах кристаллической решетки, где удерживаются силами потенциального взаимо-

действия. Правильный порядок взаимного расположения атомов (**дальний порядок**) соблюдается на значительных расстояниях по сравнению с межатомным. Область, где наблюдается дальний порядок, называется **монокристаллом** (в металлах – **зерном**) и имеет форму многогранника. Ряд твердых тел (например, металлы) состоят из большого числа беспорядочно ориентированных зерен, размеры которых могут изменяться в значительных пределах от единиц мкм до десятков мм. В этих случаях говорят, что они имеют **поликристаллическую** структуру.

Минимальный объем, транслируя который можно получить кристаллическую структуру, называют элементарной решеткой. Существует семь элементарных ячеек, обладающих разной степенью симметрии, из которых состоят все кристаллы (рис. 1.1).

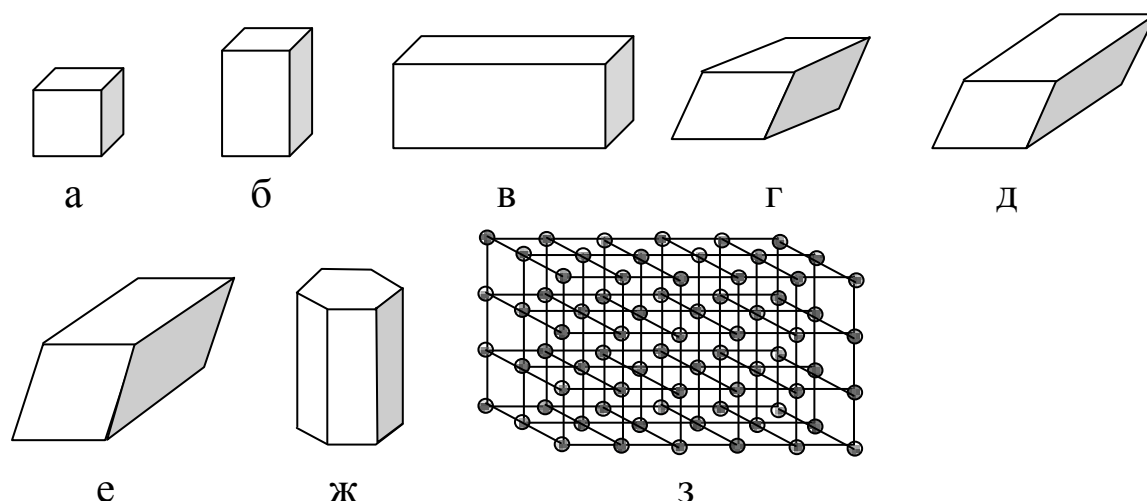


Рис. 1.1

Кубическая (а) – имеет все прямые углы и равные стороны, тетрагональная (б) – прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием, орторомбическая (в) – прямоугольный параллелепипед, моноклинная (г) – все не прямые углы, стороны одинаковые, триклинная (д) – не прямые углы, стороны двух противоположных оснований равны, тригональная (е) – не прямые углы, разные ребра, гексагональная (ж) – призма с правильным шестиугольником при основании.

В настоящее время получен еще один тип решетки – фуллерен, гранями которого являются правильные шестигранники и пятигранники (рис. 1.2, а).

В некоторых случаях физические характеристики (например, скорость звука, тепло- и электропроводность) могут быть различными в различных направлениях, что объясняется отсутствием симметрии решетки. В этом случае говорят об **анизотропии** свойств кристаллов.

Атомы располагаются в **узлах** решетки, которыми могут являться вершины фигур (рис. 1.1, з), а также вершины фигур и центры граней или центры фигур.

Многие элементы могут иметь несколько типов кристаллических решеток (**полиморфизм**). Так, углерод может иметь структуру графита (рис. 1.2, б), алмаза (рис. 1.2, в) или фуллерена (рис. 1.2, а).

Каждая решетка имеет определенную плотность заполнения. Так, простая кубическая решетка (NaCl) имеет степень заполнения 68%. Наиболее плотную упаковку ~75% имеют гексагональная решетка (Zn, Mg, Be ...) и гранецентрированная кубическая решетка (Ag, Au, Ni, Cu, Al ...).

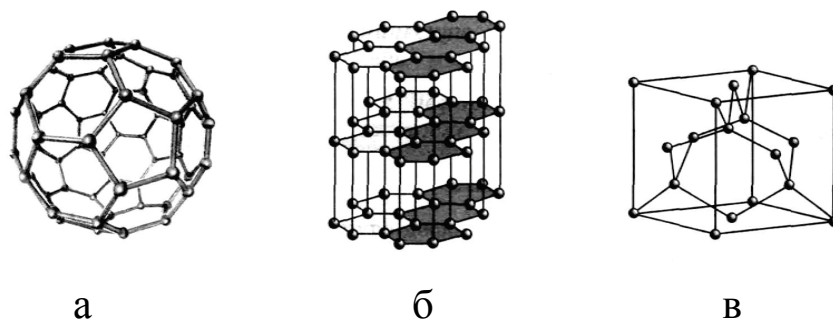


Рис. 1.2

На рис. 1.3, а, б, в, г приведены примеры кубической, кубической объемно-центрированной, кубической гранецентрированной и гексагональной решеток соответственно.

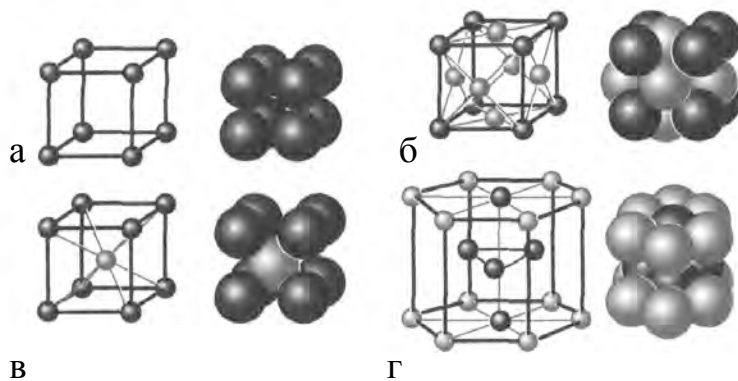


Рис. 1.3

Кристаллические решетки могут иметь различного рода нарушения (**дефекты**), например отсутствие атома в узле (вакансия), лишний атом в межузлии (атом внедрения), атом другого элемента вместо основного (примесь) и ряд других, более сложных (рис. 1.4). Дефекты кристаллов могут значительно изменить их свойства, например проводимость полупроводников.

Для **аморфных** твердых тел характерно отсутствие дальнего порядка, в то время как положение атомов фиксировано и может сохраняться **ближний порядок**, рис. 1.5. Для аморфных тел характерно отсутствие определенной температуры плавления. К аморфным телам относятся стекло, смолы, пластмассы. В последние годы активно изучаются аморфные металлические сплавы, которые находят широкое применение в технике.

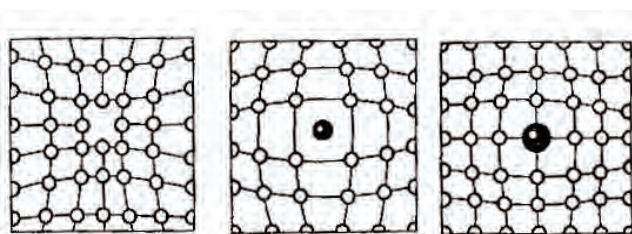


Рис. 1.4

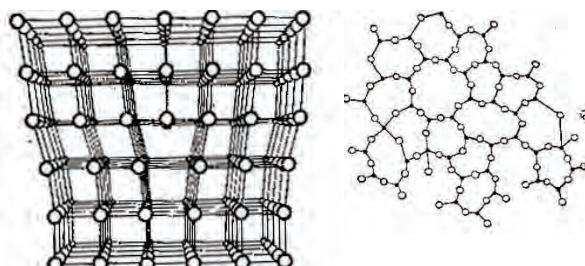


Рис. 1.5

К **композитам** относятся кость, кровеносные сосуды, дерево, бетон и др. Структура их достаточно сложна, и состоят они из различных связанных друг с другом материалов.

По мере повышения температуры кинетическая энергия атомов (молекул) возрастает, и при  $\varepsilon \sim 1$  отдельные атомы (молекулы) могут скачкообразно покидать свои места в узлах кристаллической решетки, хотя некоторое время (время оседлой жизни) они находятся в них. Для сохранения жидкого состояния потенциальная энергия все же должна превышать кинетическую энергию. Время оседлой жизни ( $\tau$ ) уменьшается с ростом температуры. Если обозначить частоту колебания частиц около положения равновесия за  $\tau_0^{-1}$  ( $\tau_0 \sim 10^{-12}$  с), то

$$\tau = \tau_0 \exp(-w/kT), \quad (1.1)$$

где  $w$  – энергия активации процесса, а  $k$  – постоянная Больцмана.

Правильное взаимное расположение атомов может сохраняться только в незначительных, по сравнению с межатомным,



расстояниях и носит название *ближнего порядка*. Дальний порядок у жидкостей отсутствует. Структура жидкостей близка к структуре аморфных материалов. Анизотропия свойств у жидкостей отсутствует. Вещество в жидком состоянии сохраняет свой объем, но принимает форму сосуда, в котором находится.

При дальнейшем повышении температуры (кинетической энергии) при  $\epsilon \ll 1$  вещество характеризуется газообразным состоянием. В газах молекулы находятся на значительном расстоянии друг от друга (что является причиной малой потенциальной энергии), хаотически движутся с большими скоростями, которые определяются его температурой. При этом происходят случайные столкновения молекул между собой и со стенками сосуда, в котором находится газ. Он занимает весь предоставленный ему объем и соответственно имеет форму сосуда, в котором находится.

## 1.2. Жидкое состояние. Поверхностное натяжение

Силы притяжения между молекулами в веществах эффективно действуют лишь на некотором расстоянии –  $r$ , называемым радиусом межмолекулярного взаимодействия и составляющем примерно несколько диаметров молекулы. Если молекула находится «внутри» тела, то ее окружают молекулы равномерно со всех сторон, рис. 6, а. В этом случае результирующая сил, действующих на молекулу со стороны соседних молекул, находящихся на расстояниях в пределах радиуса межмолекулярного взаимодействия будет равна нулю. Иначе обстоит дело, если молекула находится на расстоянии от поверхности, меньшем радиуса межмолекулярного взаимодействия (рис. 1.6, б). Рис. 1.6, б соответствует случаю границы раздела жидкость-газ, хотя подобные рассуждения справедливы и для любой другой границы раздела двух сред.

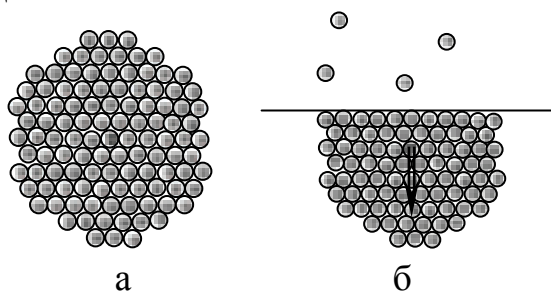


Рис. 1.6



Из рис. 1.6, б очевидно, что, поскольку в газе плотность молекул много меньше, результирующая сила межмолекулярного взаимодействия будет направлена внутрь жидкости и будет препятствовать движению молекулы к поверхности. Аналогичные силы будут действовать на все молекулы, находящиеся вблизи поверхности на расстоянии меньшем, чем радиус межмолекулярного взаимодействия. Эта сила растет при приближении к поверхности. Таким образом, можно считать, что вблизи поверхности наблюдается картина подобная той, что имеет место в поле сил тяжести Земли. При подъеме тела совершается работа против сил тяжести, уменьшается кинетическая энергия и увеличивается потенциальная. Аналогично при движении молекулы к поверхности увеличивается ее потенциальная энергия.

Из механики известно, что система всегда стремится занять положение с минимальной потенциальной энергией, поэтому жидкость, предоставленная сама себе, будет стремиться принять форму с минимальной потенциальной энергией. В невесомости это будет форма шара, в поле сил тяжести – форма капли.

Силы, стремящиеся уменьшить площадь поверхности, называют **силами поверхностного натяжения**. Эти силы направлены перпендикулярно мысленно выделенному контуру поверхности (рис. 1.7) по касательной к ней и равны по величине

$$dF = \alpha dl, \quad (1.2)$$

где  $\alpha$  называют **коэффициентом поверхностного натяжения**, а  $dl$  – длина элемента контура, на который действует рассматриваемая сила. Аналогичная сила действует на любой элемент контура поверхности жидкости. Коэффициент поверхностного натяжения имеет размерность Н/м.

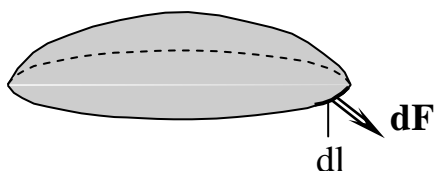


Рис. 1.7

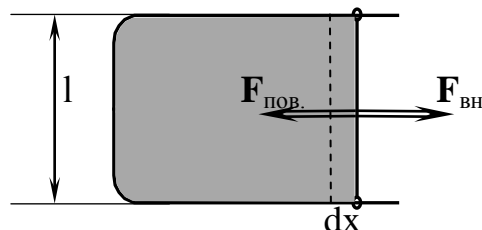


Рис. 1.8

На рис. 1.8 представлена тонкая подвижная перемычка на рамке с пленкой (например, мыльной). На перемычку действует

сила поверхностного натяжения, равная согласно (1.2)  $2\alpha l$  (множитель 2 появляется, поскольку пленка имеет две поверхности). В равновесии перемычка удерживается внешней силой равной по величине и противоположной по направлению. Если перемычку медленно переместить на расстояние  $dx$ , то при этом будет совершаться работа

$$dA = 2\alpha l dx = \alpha S = dE, \quad (1.3)$$

которая будет идти на увеличение энергии этой пленки. Таким образом, исходя из (1.3) коэффициент поверхностного натяжения можно представить как энергию, приходящуюся на единицу площади поверхности ( $\text{Дж}/\text{м}^2$ ). Коэффициент поверхностного натяжения уменьшается с ростом температуры и обращается в ноль при критической температуре. В значительной степени на коэффициент поверхностного натяжения могут влиять примеси. Так, мыло понижает коэффициент поверхностного натяжения примерно в полтора раза, в то время как поваренная соль его увеличивает.

Коэффициенты поверхностного натяжения некоторых жидкостей ( $\alpha$ ,  $\text{мН}/\text{м}$ ): вода – 73; глицерин – 66; спирт – 22; ртуть – 490.

### *1.3. Давление под изогнутой поверхностью*

Рассмотрим поверхности различной формы, опирающиеся на контур в форме кольца (рис. 1.9).

В случае плоской формы поверхности (рис. 1.9, а) результирующая всех сил, приложенных к элементам контура, будет равна нулю. Обозначим давление жидкости в этом случае  $p = p_0$ . Для выпуклой поверхности (рис. 1.9, б) результирующая сила направлена вниз и создает дополнительное давление  $p = p_0 + \Delta p$ . В случае вогнутой поверхности (рис. 1.9 в) результирующая сила будет уменьшать давление:  $p = p_0 - \Delta p$ .

Нетрудно посчитать избыточное давление, создаваемое сферической поверхностью (рис. 1.10). Суммарная сила, действующая на выделенный контур, в соответствии с (1.2) будет равна

$$F = \alpha l = \alpha 2\pi R, \quad (1.4)$$

а давление, создаваемое этой силой, –

$$\Delta p = F/S = \alpha 2\pi R / \pi R^2 = 2\alpha/R. \quad (1.5)$$

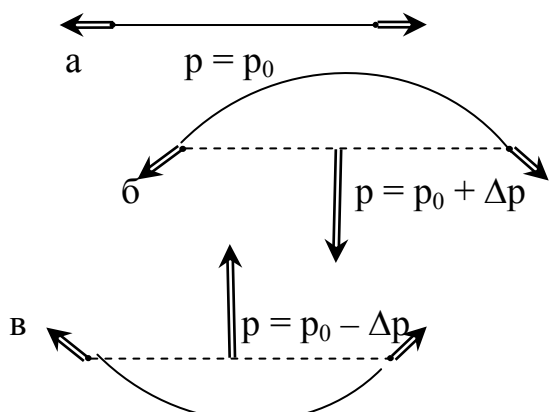


Рис. 1.9

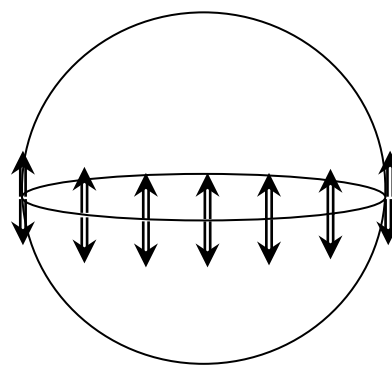


Рис. 1.10

Формула (5) справедлива для сферической поверхности, имеющей одинаковую во всех точках кривизну. Для произвольной формы поверхности справедлива *формула Лапласа*:

$$\Delta p = 2\alpha(1/R_1 + 1/R_2), \quad (1.6)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы кривизны поверхности в двух произвольных взаимно перпендикулярных сечениях, проведенных через нормаль к данной точке.

Добавочное давление обуславливает изменение уровня жидкости в капиллярах, поэтому его иногда называют *капиллярным давлением*.

#### 1.4. Равновесие на границе раздела твердое тело – газ – жидкость

Как уже отмечалось, понятие поверхностного натяжения можно отнести к любой границе раздела, и в этом случае имеет смысл говорить о суммарной поверхностной энергии граничащих друг с другом веществ.

Рассмотрим систему, состоящую из трех граничащих друг с другом веществ: твердого, жидкого и газообразного (рис. 1.11, а) и определим условие их равновесия, соответствующее минимуму потенциальной энергии. Обозначим коэффициенты поверхностного натяжения соответствующих границ как  $\alpha_{гж}$ ,  $\alpha_{жт}$  и  $\alpha_{гт}$  соответственно. Угол  $\theta$  между направлениями сил  $\mathbf{F}_{гж}$  и  $\mathbf{F}_{жт}$  называется краевым углом. При равновесии системы сумма проекций сил на плоскость должна быть равна нулю:  $F_{жт} + F_{гж} \cos\theta - F_{гт} = 0$  или

$$\alpha_{\text{жт}} \Delta l + \alpha_{\text{гж}} \Delta l \cos \theta - \alpha_{\text{гт}} \Delta l = 0. \quad (1.7)$$

Откуда для краевого угла получим:

$$\cos \theta = (\alpha_{\text{гт}} - \alpha_{\text{жт}}) / \alpha_{\text{гж}}. \quad (1.8)$$

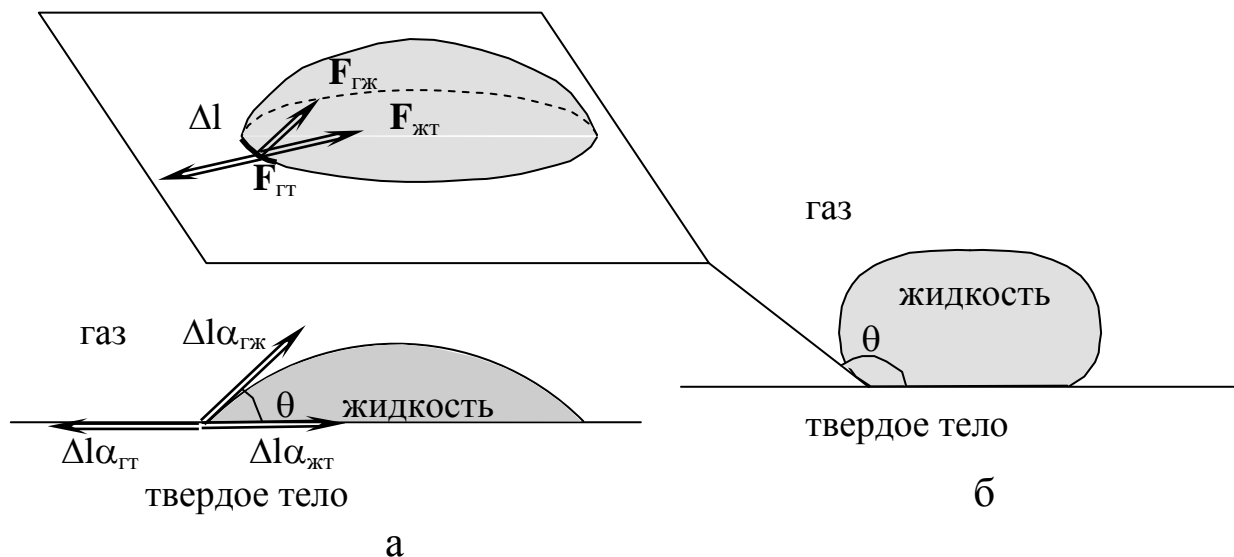


Рис. 1.11

Анализ формул (1.7, 1.8) показывает, что в случае, когда  $\alpha_{\text{гт}} > \alpha_{\text{жт}} + \alpha_{\text{гж}}$ , ни при каком краевом угле условие равновесия выполняться не будет,  $\cos \theta$  не может быть больше 1 и жидкость будет растекаться по поверхности. В этом случае говорят о явлении **полного смачивания**. Существование границы твердое тело – газ энергетически менее выгодно, чем двух поверхностей: жидкость – газ и твердое тело – жидкость. Аналогичное явление может рассматриваться и в случае системы из двух жидкостей и газа. Так, капля олеиновой кислоты растекается на поверхности воды в мономолекулярный слой, что позволяет, зная массу капли, оценить размер молекулы кислоты по диаметру образовавшегося пятна.

Другой предельный случай наблюдается при условии  $\alpha_{\text{жт}} > \alpha_{\text{гт}} + \alpha_{\text{гж}}$ . В этом случае  $\cos \theta$  не может быть меньше  $-1$ , жидкость будет собираться в каплю (в отсутствии сил тяжести – шар), краевой угол будет стремиться к  $180^\circ$ . Явление называется **полным несмачиванием**. В качестве примера можно привести капельки ртути на стекле.

В остальных случаях говорят о частичном смачивании (рис. 1.11, а) или частичном несмачивании (рис. 1.11, б).

Явление несмачивания может приводить к ряду неожиданных следствий. Например, смазанная жиром или парафином иголка при медленном опускании ее на поверхность воды может плавать (рис. 1.12, а), поскольку поверхность соприкосновения сталь – вода обладает большей энергией, чем сталь – воздух или воздух – вода. Однако при полном погружении иголки в воду она утонет. Все сказанное пояснено на рис. 1.12, б, где изображены потенциальные энергии иголки в поле сил тяжести Земли ( $E_g$ ), поверхностной энергии границ раздела  $E_{\text{пов}}$  и суммарная энергия системы  $E$ . На кривой  $E(h)$  наблюдается потенциальная яма, соответствующая состоянию устойчивого равновесия системы. Но если иголку протолкнуть через потенциальный барьер, она утонет.

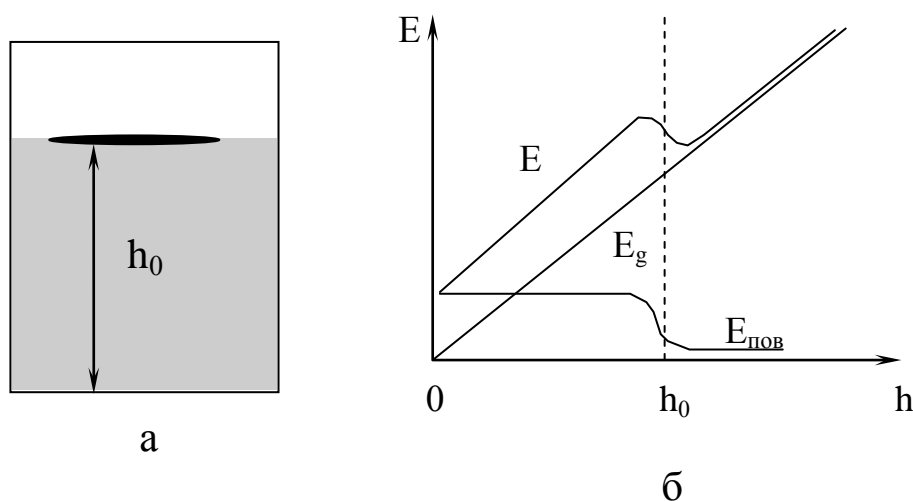


Рис. 1.12

Аналогичным образом в смазанном жиром решете может удерживаться некоторое количество воды. Известно также, что гусь всегда выходит сухим из воды, а некоторые насекомые свободно перемещаются по поверхности воды.

### 1.5. Капиллярные явления

Явление смачивания (несмачивания) приводит к искривлению поверхности жидкости в капиллярах и узких зазорах между двумя плоскостями. Подобного рода искривленные поверхности называются **менисками**. Искривление поверхности, как было показано, ведет к изменению давления и, следовательно, изменению уровня жидкости в капилляре (рис. 1.13, а).

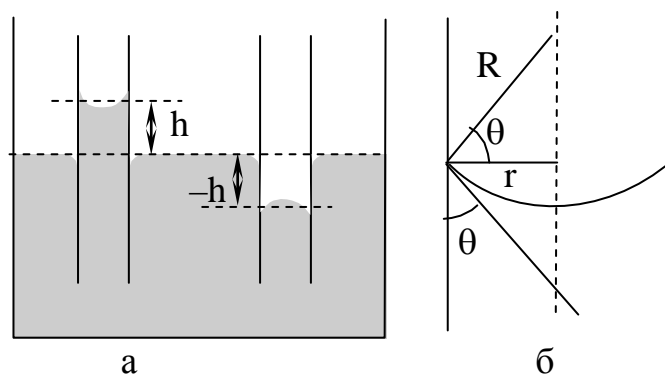


Рис. 1.13

Если жидкость смачивает стенки капилляра, то мениск будет вогнутым, избыточное давление отрицательным и жидкость будет подниматься. Если же жидкость не смачивает стенки, то мениск будет выпуклым и избыточное давление понизит уровень жидкости в капилляре (рис. 1.13, а).

Нетрудно определить уровень поднятия (понижения) уровня в предположении сферичности искривленной поверхности. Обозначим радиус капилляра –  $r$ , радиус поверхности –  $R$ , а краевой угол –  $\theta$  (рис. 1.13, б). В этом случае избыточное давление  $\Delta p = 2\alpha/R$  должно уравниваться давлением столба жидкости высотой  $h$ . Это давление равно весу жидкости  $\rho Vg = \rho Shg$  деленному на площади капилляра, то есть  $\rho gh$ :

$$2\alpha/R = \rho gh. \quad (1.9)$$

Учитывая, что  $R = r/\cos\theta$  (рис. 8, б), для  $h$  находим:

$$h = 2\alpha \cos\theta / r\rho g. \quad (1.10)$$

В соответствии с формулой (1.10) жидкости, смачивающие стенки ( $0 < \theta < \pi/2$ ,  $\cos\theta > 0$ ), будут подниматься по капилляру ( $h > 0$ ), а не смачивающие ( $\pi/2 < \theta < \pi$ ,  $\cos\theta < 0$ ,  $h < 0$ ) – опускаться.

## Глава 2. Основы термодинамики

### 2.1. Внутренняя энергия системы

**Внутренней энергией** тела ( $U$ ) называется суммарная кинетическая энергия молекул и потенциальная энергия их взаимодействия. В понятие внутренней энергии не включается кинетическая и потенциальная энергия тела как целого. Так, внутренняя энергия некоторой массы воды в сосуде не будет зависеть от скорости движения сосуда или высоты его расположения.

Можно считать, что внутренняя энергия системы тел равна сумме внутренних энергий отдельных тел, поскольку потенциальная энергия взаимодействия тел мала.

Внутренняя энергия системы является функцией ее состояния. Это значит, что как только параметры системы примут какое-либо определенное значение, внутренняя энергия примет соответствующее этому состоянию значение и разница внутренних энергий системы в двух состояниях  $U_2 - U_1$  не будет зависеть от того, как система попала в эти состояния.

### 2.2. Первое начало термодинамики

Внутренняя энергия может изменяться в результате двух процессов: совершение над системой работы  $A'$  или подвода к телу тепла  $Q$ . Совершение работы связано с какими-либо перемещениями, например поршня в цилиндрическом сосуде. При этом работа внешних сил  $A' = -A$ , где  $A$  – работа газа над внешними силами в соответствии с третьим законом Ньютона.

Увеличение внутренней энергии при сообщении системе тепла связано с процессом **теплопередачи**, при котором молекулы более нагретого тела совершают работу над молекулами тела менее нагретого, характеризуется процесс передачей некоторого **количества тепла** –  $Q$ , передаваемого от одного тела к другому. Таким образом, приращение внутренней энергии системы должно равняться сумме совершенной над системой работы  $A'$  и сообщенного ей тепла  $Q$ :

$$U_2 - U_1 = Q + A'. \quad (2.1)$$

Обычно вместо работы  $A'$ , совершаемой внешними силами над системой, рассматривают работу  $A$  (равную  $-A'$ ), совершаемую системой над внешними силами, тогда (2.1) можно переписать в виде:

$$Q = U_2 - U_1 + A. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) является *первым началом* (законом) термодинамики и формулируется следующим образом: *количество тепла, сообщенное системе, идет на приращение ее внутренней энергии и на совершение системой работы над внешними силами*. Приращение внутренней энергии  $U_2 - U_1$  в (2.2) в общем случае может быть отрицательным. Количество тепла можно измерять в джоулях (Дж) или в калориях, которые связаны между собой механическим эквивалентом: 1 калория равна 4,18 Дж.

Обычно процесс разбивается на элементарные процессы, соответствующие малым изменениям параметров, тогда (2.2) примет вид:

$$dQ = dU + dA. \quad (2.3)$$

Интегрирование (2.3) по всему процессу приведет к выражению (2.2).

Рассмотрим систему в виде газа, заключенного в цилиндрический сосуд с поршнем (рис. 2.1). При расширении газ совершит работу  $Fdh$ . Учитывая, что  $F = PS$ , для работы, совершаемой газом, можно записать:

$$dA = Fdh = pSdh = pdV. \quad (2.4)$$

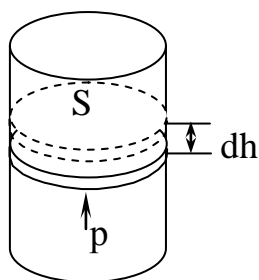


Рис. 2.1

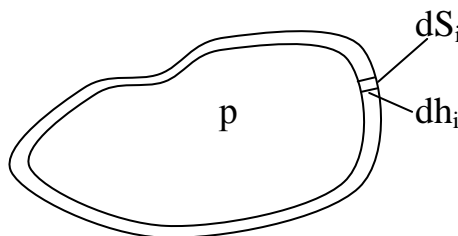


Рис. 2.2

Заметим, что при уменьшении объема величина (2.4) может быть отрицательной.

Работа при протекании какого-либо процесса в общем случае будет:



$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (2.5)$$

Можно показать, что выражения (2.4) и (2.5) будут справедливы для тел произвольной формы, если рассматривать работу как сумму работ для элементарных объемов, рис. 2.2. Уравнению первого начала термодинамики, с учетом (2.4), можно придать вид:

$$dQ = dU + dA = dU + p dV. \quad (2.3')$$

Изобразим произвольный процесс на диаграмме  $p - V$  (рис. 2.3).

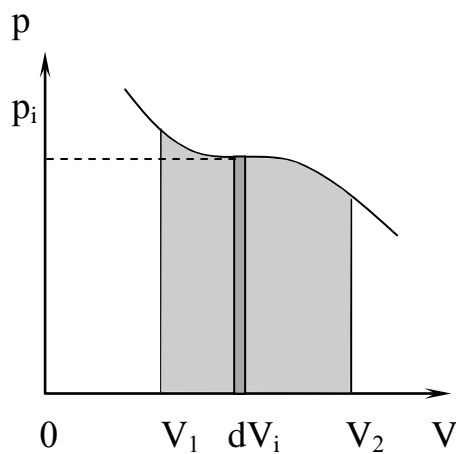


Рис. 2.3

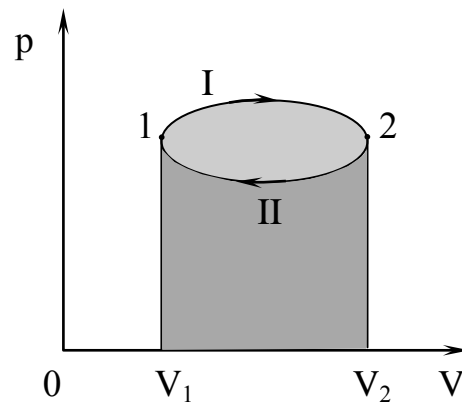


Рис. 2.4

Элементарной работе  $p_i dV_i$  соответствует узкая темная полоска. Очевидно, что вся работа  $A_{12}$  (2.5) будет равна площади под кривой  $p(V)$  в пределах изменения объема от  $V_1$  до  $V_2$ . Работа при циклическом процессе будет равна площади светло-серой фигуры (рис. 2.4). При переходе из точки 1 в точку 2 по пути I (по стрелке) совершается работа, равная площади фигуры  $V_1 - 1 - 2(I) - V_2 - V_1$ . Работа при переходе из точки 2 в точку 1 по пути II (по стрелке) будет отрицательна и равна площади темно-серой фигуры. Их сумма и составит работу за цикл. Таким образом, при движении в направлении стрелки работа за цикл будет положительной. Очевидно, что при изменении направления движения работа сменит знак и станет отрицательной. Таким образом, из приведенного примера следует, что полученные формулы (2.2, 2.3') справедливы только для обратимых процессов.

## 2.3. Идеальный газ

### 2.3.1. Уравнение состояния идеального газа

**Идеальным газом** называется газ, взаимодействием между молекулами которого можно пренебречь. Это условие будет выполняться при небольших плотностях газа, то есть для разреженных газов. Наиболее близки к идеальному газу при обычных условиях гелий и водород; мало отличаются от идеального газа также воздух, азот и кислород.

Состояние определенной массы идеального газа задается значениями трех параметров – давления ( $p$ ), объема ( $V$ ) и температуры ( $T$ ) – и хорошо описывается уравнением:

$$pV/T = \text{const}, \quad (2.6)$$

которое и является уравнением его состояния.

Если в уравнении (2.6) для одного моля газа при нормальных условиях обозначить постоянную за  $R$ , то получим:

$$pV_m = RT. \quad (2.7)$$

Постоянная  $R$  носит название **газовой постоянной** и на основании (2.7), учитывая, что при нормальных условиях  $p = 1 \text{ атм} = 1,01 \times 10^5 \text{ Па}$  и  $T = 0^\circ \text{ С}$ , получается  $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \times \text{К})$ .

От моля газа легко перейти к произвольной массе газа  $m$ , учитывая, что эта масса имеет в  $\nu$  раз отличающийся от моля объем –  $V$  ( $\nu = V/V_m = m/M$ , где  $M$  – молярная масса газа):

$$pV = \nu RT = (m/M) RT. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) носит название уравнения Клайперона – Менделеева.

Если ввести новую постоянную

$$k = R/N_A, \quad (2.9)$$

( $N_A$  – число Авогадро), называемую постоянной Больцмана, уравнению (2.8) можно придать вид:

$$pV = \nu RT = \nu(N_A/N_A)RT = (\nu N_A)kT = NkT. \quad (2.10)$$

В уравнении (2.10) учтено, что  $\nu N_A = N$  – число молекул, составляющих массу газа  $m$ . Если теперь в уравнении (2.10)  $pV = NkT$

обе части поделить на объем  $V$  и учесть, что  $(N/V) = n$  – концентрация молекул (число молекул в единице объема), получим еще одно выражение уравнения состояния идеального газа:

$$p = (N/V)kT = nkT. \quad (2.11)$$

Таким образом, мы получили три формы записи (2.8), (2.10) и (2.11) уравнения состояния идеального газа.

Из уравнения (2.8) можно выразить плотность газа:

$$\rho = m/V = (Mp)/RT, \quad (2.12)$$

откуда следует, что плотность газа пропорциональна давлению и обратно пропорциональна температуре.

Уравнение состояния идеального газа, дающее простую связь температуры с остальными параметрами, позволяет использовать его для установления *идеальной газовой шкалы температур*. В качестве газа в этом случае принято брать водород.

### 2.3.2. Внутренняя энергия и теплоемкость идеального газа

Внутренняя энергия идеального газа определяется кинетической энергией молекул и зависит только от температуры:

$$U = VT, \quad (2.13)$$

где  $V$  – коэффициент пропорциональности.

**Теплоемкость тела** ( $C_{\text{тела}}$ ) – это величина, равная количеству тепла, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один градус; измеряется в Дж/К. Для теплоемкости тела можно написать:

$$C_{\text{тела}} = dQ/dT. \quad (2.14)$$

Теплоемкость моля вещества называют молярной теплоемкостью ( $C$ ), измеряется в Дж/(моль×К). Она связана с удельной теплоемкостью ( $c$ ) для единицы массы вещества соотношением

$$C = c M. \quad (2.15)$$

Далее будем рассматривать молярную теплоемкость и при необходимости определения, например, внутренней энергии для массы  $m$  надо просто умножать рассматриваемую величину на  $\nu$ .

Величина теплоемкости газа зависит от условий, при которых проводится нагрев. Наиболее часто встречаются теплоем-

кости при постоянном объеме и постоянном давлении, которые обозначаются соответственно  $C_V$  и  $C_p$ .

В случае нагрева при постоянном объеме тело не совершает работы и, следовательно, согласно первому началу термодинамики (2.3), (2.3') все тепло идет на приращение внутренней энергии тела:

$$dQ_V = dU, \quad (2.16)$$

откуда следует, что теплоемкость моля при постоянном объеме будет равна

$$C_V = (dU_M/dT)_V. \quad (2.17)$$

Если рассмотреть (2.13) для моля газа, то получится

$$U_M = C_V T. \quad (2.18)$$

В случае нагрева при постоянном давлении газ будет расширяться и совершать работу, следовательно, для его нагрева понадобится большая энергия. Из уравнения первого начала термодинамики (2.3'), записанного для моля газа при постоянном давлении, получим

$$dQ_p = dU_M + p dV_M. \quad (2.19)$$

После деления (2.19) на  $dT$  получим для молярной теплоемкости при постоянном давлении:

$$C_p = dU_M/dT + p(dV_M/dT)_p = C_V + p(dV_M/dT)_p, \quad (2.20)$$

поскольку, согласно (2.12),  $(dU_M/dT)_V = C_V$ . Значение  $(dV_M/dT)_p$  можно найти, выразив объем из уравнения состояния моля идеального газа:  $V = (RT)/p$  и взяв производную по температуре:

$$(dV_M/dT)_p = R/p. \quad (2.21)$$

Подставляя (2.21) в (2.20), окончательно получим

$$C_p = C_V + R. \quad (2.22)$$

Откуда следует, что работа, которую совершает моль идеального газа при повышении его температуры на один градус, равна газовой постоянной  $R$ .

Отношение теплоемкостей

$$C_p/C_V = \gamma = (C_V + R)/C_V = 1 + R/C_V \quad (2.23)$$

представляет характерную для каждого газа величину.

## 2.4. Изопроцессы

Многие процессы изменения состояния определенной массы идеального газа происходят так, что один из трех макроскопических параметров, входящих в уравнение состояния (2.8)  $pV = \nu RT = (m/M) RT$ , остается постоянным, два других соответственно изменяются. Такие процессы называются **изопроцессами**.

### 2.4.1. Изотермический процесс. Закон Бойля – Мариотта

Для **изотермического** процесса ( $T = \text{const}$ ) в соответствии с (2.8) получим

$$pV = \nu RT = (m/M) RT = \text{const}. \quad (2.24)$$

Уравнение (2.24) известно как закон **Бойля – Мариотта**.

При изотермическом процессе внутренняя энергия тела в соответствии с (2.18) не изменяется, поэтому все переданное телу тепло идет на совершение работы:  $Q=A$ . При расширении газа, находящегося в цилиндрическом сосуде под поршнем, при столкновении с поршнем скорость (и соответственно энергия) молекул будет уменьшаться, поэтому для сохранения температуры газа к нему надо подводить тепло  $Q>0$  и соответственно  $A>0$ . При изотермическом сжатии соответственно  $Q<0$  и  $A<0$ . Диаграммы состояний идеального газа для различных параметров, отложенных по осям координат, приведены на рис. 2.5, а, б и в.

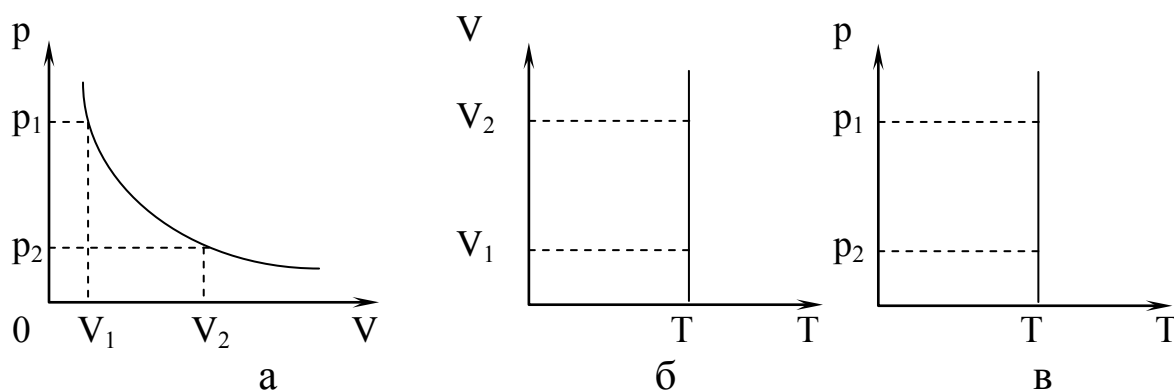


Рис. 2.5

Графиком функции на рис. 2.5, а является гипербола  $p = (\text{const})/V$  и работа при изменении объема от  $V_1$  до  $V_2$ , согласно (2.5) будет равна:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = (m/M) RT \ln (V_2/V_1). \quad (2.25)$$

### 2.4.2. Изобарный процесс. Закон Гей – Люсака

Изобарный процесс происходит при постоянном давлении. Из уравнения Клайперона – Менделеева при этом условии следует закон Гей – Люсака:

$$V = [(mR)/Mp] \times T = \text{const} \times T, \quad (2.26)$$

или объем газа при постоянном давлении пропорционален термодинамической температуре, что, как уже отмечалось, используется для построения термодинамической температурной шкалы. Диаграммы изобарного процесса приведены на рис. 2.6.

Работа при изобарном процессе при изменении объема от  $V_1$  до  $V_2$  будет равна в соответствии с (2.5)  $p(V_2 - V_1)$ . При расширении газ совершает положительную работу, отдавая энергию окружающим телам. При сжатии – работа отрицательна и внутренняя энергия газа увеличивается.

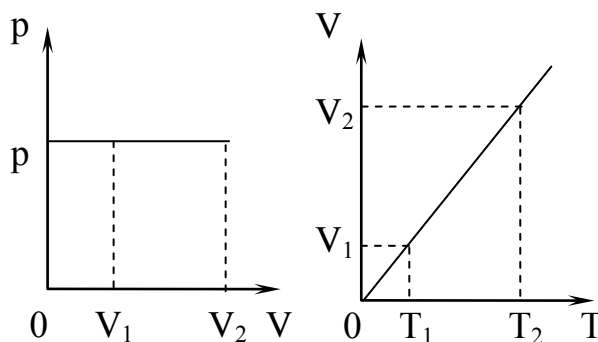


Рис. 2.6

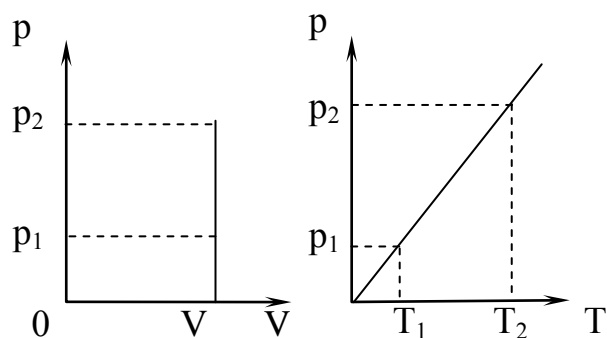


Рис. 2.7

### 2.4.3. Изохорный процесс. Закон Шарля

Изохорный процесс идет при постоянном объеме. Из уравнения Клайперона – Менделеева при этом условии следует закон Шарля:

$$p = [(mR)/MV] \times T = \text{const} \times T. \quad (2.27)$$

Давление газа при постоянном объеме пропорционально термодинамической температуре. Соответствующие диаграммы приведены на рис. 2.7. Поскольку изменения объема газа не происходит, работа в этом случае не совершается.

#### 2.4.4. Адиабатический процесс

В некоторых случаях для более полного преобразования тепла в полезную работу систему необходимо теплоизолировать. Термодинамический процесс, протекающий в теплоизолированной системе без обмена теплом с окружающими телами ( $\Delta Q = 0$ ), называется **адиабатическим (или адиабатным)**.

Первое начало термодинамики для адиабатического процесса будет иметь вид:

$$dU + A = 0 \text{ или } A = -dU. \quad (2.28)$$

При адиабатическом расширении газа  $A > 0$ , следовательно, внутренняя энергия газа уменьшается и в соответствии с (2.18) ( $U_m = C_v T$ ) температура газа должна уменьшаться по сравнению с первоначальной. Понижение температуры при адиабатическом расширении происходит более резко, чем при изотермическом процессе, рис. 2.8. На рис. 2.8 изображена адиабата 1–2, пересекающая две изотермы при температурах  $T_1$  и  $T_2$ . Работа, совершаемая газом при адиабатическом расширении от объема  $V_1$  до объема  $V_2$ , равна площади под кривой 1–2.

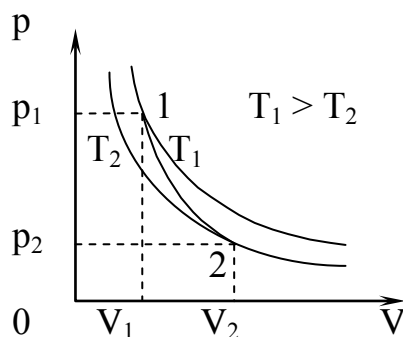


Рис. 2.8

При адиабатическом сжатии газа его внутренняя энергия будет увеличиваться и соответственно будет возрастать температура. Так, резкое сжатие воздуха в цилиндре дизельного двигателя приводит к воспламенению топлива, впрыскиваемого в момент наибольшего сжатия. Это в свою очередь ведет к резкому возрастанию давления и расширению газа, в результате чего совершается полезная работа.

Адиабатический процесс описывается уравнением

$$pV^\gamma = \text{const.} \quad (2.29)$$

## 2.5. Газ Ван-дер-Ваальса

Как отмечалось выше, поведение реальных газов хорошо описывается уравнением состояния идеального газа  $pV_M = RT$  (записано для моля газа) только при малых плотностях, т. е. при не слишком больших давлениях и достаточно высоких температурах. С повышением давления и уменьшением температуры наблюдаются значительные отступления от уравнения. Во втором столбце таблицы приведены значения произведения  $pV$  для массы азота, занимающей при нормальных условиях объем, равный одному литру. Указанные значения даны для различных давлений и одной и той же температуры  $0^\circ\text{C}$ .

Таблица

$p$ , атм.	$pV$ , атм. $\times$ л	$(p + a/V_M^2)(V_M - b)$ , атм. $\times$ л
1	1,000	1,000
100	0,94	1,000
200	1,048	1,009
500	1,39	1,014
1000	2,062	0,893

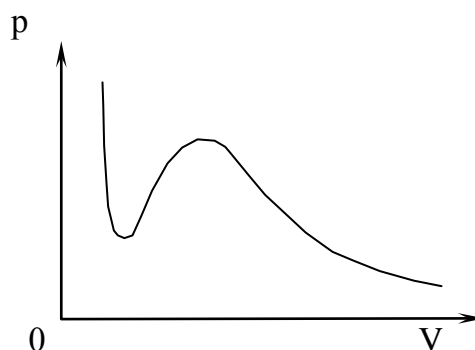


Рис. 2.9

В соответствии с уравнением состояния идеального газа произведение  $pV$  при неизменной температуре должно оставаться постоянным. В действительности, как видно из таблицы, при давлениях порядка 200 атм. наблюдаются заметные отклонения, которые, непрерывно возрастая с увеличением давления, достигают при 1000 атм. более 100%.

Эти отклонения не представляются удивительными, поскольку при увеличении плотности начинают играть все большую роль объем молекул и взаимодействие между ними.

Для описания поведения газов в широком интервале плотностей было предложено много различных уравнений. Самым простым из них и вместе с тем дающим достаточно хорошие результаты оказалось уравнение Ван-дер-Ваальса. Это уравнение получено путем внесения поправок в уравнение состояния и имеет для моля газа следующий вид:



$$(p + a/V_M^2)(V_M - b) = RT, \quad (2.30)$$

где  $p$  – давление, оказываемое на газ извне (равное давлению газа на стенки сосуда),  $a$  и  $b$  – константы Ван-дер-Ваальса, имеющие для разных газов различные значения, определяемые опытным путем.

Из-за взаимного притяжения между молекулами газ как бы сжимается большим давлением, чем давление  $p$ , оказываемое на газ стенками сосуда, в котором он заключен. Поправка  $a/V_M^2$  характеризует ту добавку к внешнему давлению, которая обусловлена взаимным притяжением молекул друг к другу. Заметное воздействие молекул друг на друга осуществляется в пределах небольших расстояний, называемых радиусом молекулярного действия. Сила взаимного притяжения двух элементарных объемов, имеющих размеры порядка этого радиуса, пропорциональна как числу молекул, заключенных в одном из объемов, так и числу молекул, заключенных в другом объеме. Каждое из этих чисел в свою очередь пропорционально числу молекул в единице объема, т. е. обратно пропорционально объему газа. Этими соображениями можно пояснить то обстоятельство, что поправка к давлению имеет вид  $a/V_M^2$ .

Вследствие того что молекулы обладают конечным объемом, пространство, доступное для движения молекул, оказывается меньшим, чем объем сосуда  $V_M$ . Поправка  $b$  в (2.30) характеризует ту часть объема, которая недоступна для движения молекул. Она равна нескольким суммарным объемам молекул, содержащихся в моле газа.

Уравнение (2.30) написано для одного моля газа. Чтобы перейти к уравнению для произвольной массы  $m$ , нужно учесть, что  $\nu$  молей газа при тех же условиях занимают в  $\nu$  раз отличающийся объем:  $V = \nu V_M$ :

$$(p + a'/V_M^2)(V_M - b') = \nu RT, \quad (2.30)'$$

где  $a' = \nu a$  и  $b' = \nu^2 b$  – константы Ван-дер-Ваальса для  $\nu$  молей газа.

В соответствии с тем фактом, что все реальные газы с уменьшением плотности приближаются по своим свойствам к идеальному газу, уравнение Ван-дер-Ваальса в пределе, при стремлении объема к бесконечности, переходит в уравнение состояния идеального газа.

Реальные газы следуют уравнению Ван-дер-Ваальса лишь приближенно. Воображаемый газ, точно подчиняющийся уравнению (2.30), называется ван-дер-ваальсовским.

Уравнение (2.30) является кубическим уравнением  $p(V)$ , поэтому изотерма на диаграмме  $p - V$  будет иметь вид, приведенный на рис. 2.9.

## 2.6. Осмос

При растворении в жидкости твердого вещества его молекулы равномерно распределяются во всем объеме жидкости, образуя раствор. Масса  $m$  растворенного вещества, приходящаяся на единицу объема  $V$  раствора, называется **концентрацией раствора**:  $C = m/V$ . Растворы малой концентрации называют слабыми или разбавленными. Для слабого раствора размеры молекул растворенного вещества малы по сравнению с расстояниями между ними, поэтому взаимодействия между молекулами практически не будет. Таким образом, в слабом растворе растворенное вещество напоминает собой идеальный газ с той лишь разницей, что в растворе свобода движения молекул растворенного вещества ограничена присутствием молекул растворителя. Отмеченная аналогия между идеальным газом и растворенным веществом в слабом растворе наводит на мысль о возможности применения к растворенному веществу законов идеального газа. В частности, можно предположить, что растворенное вещество обладает парциальным давлением  $p$ , которое выражается формулами (2.8) и (2.11):  $pV = (m/M) RT$  и  $p = n_0 kT$  соответственно. В данном случае  $n_0$  – концентрация молекул растворенного вещества,  $m$  и  $M$  – масса растворенного вещества и его молярная масса,  $V$  и  $T$  – объем и температура раствора.

Для того чтобы обнаружить это давление, необходимо отделить раствор от чистого растворителя полупроницаемой перегородкой, пропускающей молекулы растворителя, но не пропускающей молекулы растворенного вещества. Для водного раствора сахара такой полупроницаемой перегородкой являются, например, бычий пузырь и некоторые искусственные пластмассовые пленки. Поры в этих перегородках столь малы, что через них

могут пройти молекулы воды, но не пройдут более крупные молекулы сахара.

Если в воронку, раструб которой затянут бычьим пузырем, налить слабый водный раствор сахара и установить ее в сосуд с чистой водой (рис. 2.10) так, чтобы уровни жидкостей в воронке и в сосуде совпали, через некоторое время уровень раствора в воронке начнет медленно повышаться и, наконец, установится над уровнем воды в сосуде на высоте  $h$ . Происходит это потому, что концентрация молекул воды в сосуде больше концентрации молекул воды в воронке на величину концентрации молекул сахара. Поэтому через полупроницаемую перегородку диффундирует больше молекул воды из сосуда в воронку, чем в обратном направлении, что вызывает

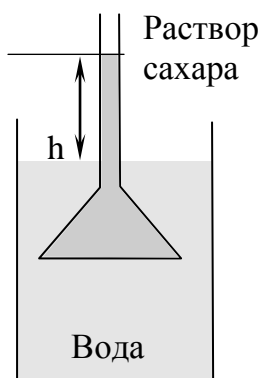


Рис. 2.10

подъем уровня жидкости в воронке. Молекулы же сахара не могут перейти через полупроницаемую перегородку из воронки в сосуд. В результате концентрации молекул воды в воронке и в сосуде уравниваются, а концентрации молекул сахара останутся различными:  $n_0$  – в воронке и нуль – в сосуде.

Избыточная концентрация  $n_0$  молекул сахара создаст, согласно формуле (2.11), парциальное давление растворенного вещества, уравниваемое гидростатическим давлением столбика раствора высотой  $h$ . Рассмотренное явление диффузии растворителя через полупроницаемую перегородку, отделяющую раствор от чистого растворителя, называется **осмосом**, а возникающее при этом в растворе избыточное давление (равное парциальному давлению растворенного вещества) называется **осмотическим давлением**.

Поскольку давление столбика  $h$  раствора равно  $\rho gh$  ( $\rho$  – плотность раствора), то из рассмотренного опыта легко определить осмотическое давление по формуле  $p = \rho gh$ . С другой стороны, можно рассчитать осмотическое давление по формуле (2.8). Оба расчета дают хорошо совпадающие значения осмотического давления, что подтверждает допустимость аналогии, проведенной между идеальным газом и растворенным веществом в слабом

растворе. Осмотическое давление, подсчитанное по формуле (2.8) для водного раствора тростникового сахара  $C_{12}H_{22}O_{11}$  при температуре  $27^{\circ}C$  для столовой ложки сахара, растворенного в 1 л воды, составит примерно 250 кПа.

Осмотическое давление наглядно обнаруживается в следующем общеизвестном явлении. Если сушеную ягоду с неповрежденной оболочкой погрузить в воду, то вскоре ягода набухнет, приняв сферическую форму, что свидетельствует об избыточном давлении внутри ягоды. Это избыточное давление есть осмотическое давление. Оболочка ягоды проницаема для молекул воды, но непроницаема для молекул сахара, содержащегося внутри ягоды. Вода, диффундируя внутрь ягоды, образует там сахарный раствор. В этом растворе, как и в описанном ранее опыте с сахарным раствором, создается осмотическое давление, распирающее оболочку ягоды.

Если ввести в (2.8) концентрацию, то получим:

$$P = (CRT)/M, \quad (2.32)$$

откуда следует, что осмотическое давление пропорционально концентрации растворенных молекул и температуре раствора и обратно пропорционально молярной массе растворенного вещества.

## 2.7. Микро- и макросостояния. Энтропия

Любое макроскопическое тело состоит из огромного числа молекул (один моль вещества содержит  $6 \times 10^{23}$  частиц). Состояние такой системы может быть описано с помощью макроскопических параметров, таких как объем, давление, температура, внутренняя энергия, и других величин, характеризующих тело в целом. Охарактеризованное таким способом состояние называется **макросостоянием**.

Состояние тела, охарактеризованное так, что заданы состояния каждой его молекулы, называется **микросостоянием**. Каждое микросостояние – это способ реализации макросостояния.

Всякому макросостоянию системы соответствуют различные микросостояния, причем количество их очень велико. Число микросостояний, которыми может быть реализовано данное мак-

росостояние, называется **термодинамической вероятностью макросостояния**, или **статистическим весом**, обозначается  $\Omega$ .

В качестве простого примера рассмотрим, каким образом можно распределить четыре молекулы газа по двум половинкам сосуда. В качестве макросостояния определим количество молекул в левой половине сосуда (очевидно, что в правой половине будут остальные). Микросостояние будет описывать, где именно находится каждая молекула в каждом случае. Для такого описания молекулам надо присвоить номера: 1, 2, 3, 4. Каждая молекула с одинаковой вероятностью может находиться в любой половине сосуда, то есть вероятность нахождения любой из них слева равна  $1/2$ . Появление какой-либо молекулы в левой половине сосуда не зависит от того, где находятся остальные молекулы. Поэтому появление слева молекул 1 и 2 будет иметь вероятность  $1/2 \times 1/2 = 1/4$ , а вероятность того, что слева соберутся все молекулы, будет  $(1/2)^4 = 1/16$ .

Макросостояние		Микросостояние		$\Omega$	Р
Число молекул слева	Число молекул справа	№ молекул слева	№ молекул справа		
0	4	-	1, 2, 3, 4	1	1/16
1	3	1 2 3 4	2, 3, 4 1, 3, 4 1, 2, 4 1, 2, 3	4	1/4
2	2	1, 2 1, 3 1, 4 2, 3 2, 4 3, 4	3, 4 2, 4 2, 3 1, 4 1, 3 1, 2	6	3/8
3	1	1, 2, 3 1, 2, 4 1, 3, 4 2, 3, 4	4 3 2 1	4	1/4
4	0	1, 2, 3, 4	-	1	1/16
Всего способов				$2^4 = 16$	

В таблице приведены все возможные микросостояния для данного примера. В последнем столбце таблицы записана мате-

матическая вероятность ( $p$ ) данного макросостояния равная термодинамической вероятности ( $\Omega$ ), деленной на общее число способов реализации всех состояний. В основе данного заключения лежит предположение о том, что любое из 16 микросостояний равновероятно или в каждом микросостоянии система находится одинаковое время. Это утверждение носит название *эргодинамической гипотезы* и лежит в основе статистической физики.

Из таблицы видно, что макросостоянию, когда слева и справа находится по 2 молекулы, соответствует 6 микросостояний и вероятность его реализации будет  $6/16 = 3/8$  максимальна. В то же время существует довольно большая вероятность –  $1/8$ , что все молекулы соберутся в одной из половин сосуда.

В общем случае для  $N$  молекул число микросостояний будет составлять  $2^N$  и для 24 молекул уже составит  $2^{24} = 16\,777\,216$  способов и вероятность того, что все молекулы соберутся в одной половине сосуда, будет равна примерно  $10^{-7}$ , то есть чрезвычайно мала. Для  $4\text{ см}^3$  газа такая вероятность составит примерно  $10^{-100000000000000000000}$  или практически равна нулю.

Для идеального газа в отсутствие внешних сил наиболее вероятным является состояние с равномерным распределением молекул в пространстве.

На основании сказанного можно объяснить природу **необратимых** процессов. Предположим, что в некоторый момент времени газ находился в одной половине сосуда и был отделен от второй половины перегородкой, рис. 2.11, а. Если убрать перегородку, газ займет весь объем сосуда, рис. 2.11, б. Нет специального закона, запрещающего всем молекулам снова собраться в одной половине, но рассмотренный процесс будет необратим, поскольку вероятность этого практически равна нулю. Таким образом, **необратимыми** будут процессы, обратные к которым маловероятны.

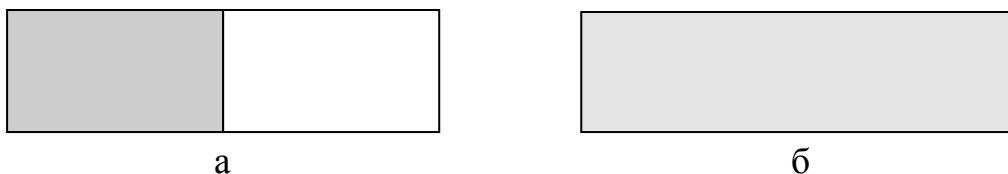


Рис. 2.11

В рассмотренном примере в качестве микросостояния рассматривалось пространственное расположение молекулы в левой или правой половине. В действительности же надо задать координаты молекул и их скорости.

Статистический вес –  $\Omega$  – характеризует макросостояние, однако если рассмотреть систему, состоящую из двух со статистическими весами  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , то статистический вес всей системы  $\Omega$  будет равен произведению:

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \quad (2.33)$$

то есть не является аддитивной величиной. В то же время величина

$$\ln \Omega = \ln \Omega_1 + \ln \Omega_2 \quad (2.34)$$

является аддитивной и удобнее для описания термодинамических систем.

Величину, определенную как

$$S = k \ln \Omega, \quad (2.35)$$

называют *энтропией* системы.

Из сказанного ранее следуют некоторые свойства энтропии.

Энтропия изолированной системы при протекании необратимых процессов возрастает

$$dS > 0. \quad (2.36)$$

Энтропия системы, находящейся в равновесном состоянии, максимальна и остается неизменной.

Можно показать, что энтропия моля идеального газа будет:

$$S_m = R \ln V + C_v \ln T + S_0, \quad (2.37)$$

где  $S_0$  – некоторая постоянная. Из (2.37) можно получить соотношение:

$$TdS = pdV + dU = dA + dU, \quad (2.38)$$

справедливое для любой массы идеального газа. Правая часть (2.38), согласно первому началу термодинамики, равна  $dQ$ , поэтому для обратимого процесса можно записать

$$dS = dQ/T. \quad (2.39)$$

Для необратимых процессов

$$dS > dQ/T. \quad (2.40)$$

При абсолютном нуле всякое тело находится в состоянии, статистический вес которого  $\Omega = 1$ , поэтому согласно определению энтропии (2.35) ее значение должно быть равно нулю, *следовательно, при стремлении температуры к нулю энтропия всякой системы стремится к нулю*:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0. \quad (2.41)$$

Это утверждение называется *теоремой Нернста*, или *третьим началом термодинамики*.

## 2.8. Термодинамические потенциалы

В разделе 2.1 мы уже встречались с понятием внутренней энергии, которая являлась функцией состояния системы и не зависела от того, каким путем система в это состояние попала. Такие функции называются термодинамическими потенциалами и часто используются в расчетах. Каждому набору независимых переменных –  $p$ ,  $V$ ,  $T$ ,  $S$  – соответствуют свои термодинамические потенциалы. Еще одно свойство термодинамических потенциалов – то, что они являются полными дифференциалами своих переменных. Полный дифференциал функции  $f(x, y)$  определяется выражением:

$$df = (\partial f / \partial x)_y dx + (\partial f / \partial y)_x dy. \quad (2.42)$$

### 2.8.1. Внутренняя энергия

Выразив  $dQ$  из уравнения (2.39), второму началу термодинамики можно придать вид:

$$dU = TdS - pdV. \quad (2.43)$$

Сравнивая с (2.32) можно заметить, что если в качестве независимых переменных для внутренней энергии принять  $S$  и  $V$ , то:

$$(\partial U / \partial S)_V = T, (\partial U / \partial V)_p = -p. \quad (2.44)$$

Из первого начала термодинамики следует, что при отсутствии теплообмена (адиабатический процесс) вся работа идет на изменение внутренней энергии системы.



### 2.8.2. Свободная энергия

При изотермическом процессе работу можно записать в виде:

$$dA = -dU + TdS = -d(U - TS). \quad (2.45)$$

Функция состояния

$$F = U - TS \quad (2.46)$$

называется свободной энергией системы.

Свободная энергия при изотермических процессах аналогична внутренней энергии при адиабатическом.

Взяв дифференциал от (2.46) и сравнив с (2.32), можно показать, что:

$$(dF/dT)_V = -S, (dF/dV)_T = -p. \quad (2.47)$$

При постоянных  $T$  и  $V$  равновесным является состояние, при котором свободная энергия минимальна.

### 2.8.3. Энтальпия

Для процессов, протекающих при постоянном, давлении, справедливо:

$$dQ = dU + pdV = d(U + pV). \quad (2.48)$$

Функция состояния

$$H = U + pV \quad (2.49)$$

называется *энтальпией*. При постоянном давлении количество получаемого системой тепла равно приращению энтальпии. Для энтальпии выполняется:

$$(dH/dS)_p = T, (dH/dp)_S = V. \quad (2.50)$$

Можно показать, что теплоемкость при постоянном давлении будет:

$$C_p = (dH/dT)_p. \quad (2.51)$$

При постоянном давлении энтальпия обладает свойствами, аналогичными внутренней энергии при постоянном объеме.

### 2.8.4. Термодинамический потенциал Гиббса

Потенциал Гиббса определяется как

$$G = H - TS = U + pV - TS. \quad (2.52)$$

Ее полный дифференциал равен

$$dG = Vdp - SdT. \quad (2.52)$$

Переменными для него являются  $p$  и  $T$ , а частные производные равны:

$$(dG/dp)_T = V, (dG/dT)_p = -S. \quad (2.54)$$

При постоянных  $T$  и  $p$  равновесным будет являться состояние, при котором термодинамический потенциал Гиббса минимален.

## 2.9. Тепловые двигатели

Средний здоровый человек в день может совершать работу около  $10^6$  Дж, в то время как за счет сжигания различных видов топлива в среднем на человека приходится около  $500 \times 10^6$  Дж. Большая часть этой энергии превращается в полезную работу при помощи **тепловых двигателей** – устройств, преобразующих внутреннюю энергию топлива в механическую работу. Механическая работа в двигателях совершается при расширении рабочего вещества (газа или пара), перемещающего поршень в цилиндре ( $A_{\text{расш}}$ ). После расширения газа его необходимо снова сжать при помощи внешних сил, совершив при этом работу  $A_{\text{сж}}$ . Очевидно, что  $A_{\text{сж}}$  должна быть меньше  $A_{\text{расш}}$ , для чего сжатие надо проводить при более низкой температуре.

Общая схема теплового двигателя приведена на рис. 2.12. Рабочее тело (газ или пар) получает от нагревателя некоторое количество тепла  $Q_1$ . Часть этого тепла превращается рабочим телом в полезную работу  $A$ , отдавая при этом холодильнику тепло  $Q_2$ . Исходя из того, что рабочее тело вернулось в исходное состояние, можно заключить, что

$$A = Q_1 - Q_2. \quad (2.55)$$

При этом характеристикой любого теплового двигателя является его коэффициент полезного действия

$$\eta = A/Q_1 = (Q_1 - Q_2)/Q_1. \quad (2.56)$$

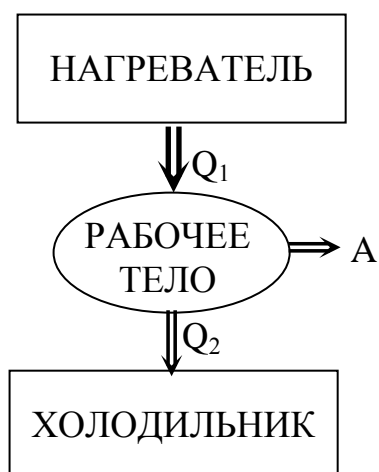


Рис. 2.12

Пример работы теплового двигателя приведен на рис. 2.13.

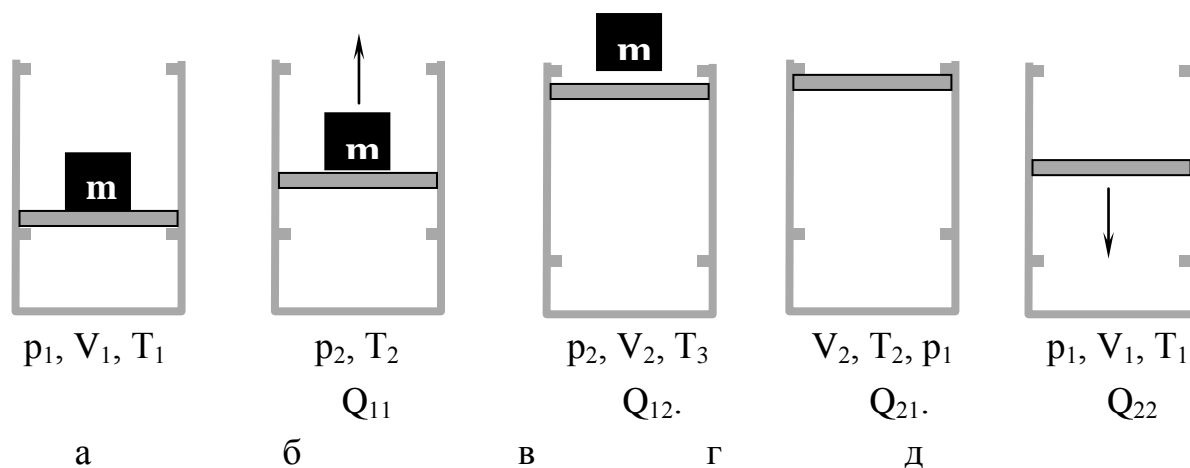


Рис. 2.13

Груз массы  $m$  находится на поршне цилиндра с газом. Исходному состоянию (рис. 2.13), а на диаграмме  $p - V$  соответствует точка 1 (рис. 2.14). Начнем нагрев газа в цилиндре. При постоянном объеме  $V_1$  этому изохорному процессу будет соответствовать переход 1–2 (рис. 2.14). Давление будет повышаться от  $p_1$  до тех пор, пока не станет равно  $p_2 = p_{\text{ат}} + mg/S$  внешнему давлению плюс давление груза. Температура при этом увеличится от  $T_1$  до  $T_2$  и к газу будет подведено тепло  $Q_{11}$ . При дальнейшем нагреве поршень начнет поднимать груз при постоянном давлении (рис. 2.13, б), совершая полезную работу. Этому процессу на диаграмме состояний соответствует изобара 2–3. Объем газа при этом увеличился до  $V_2$ , температура – до  $T_3$ , и к газу будет подведено тепло  $Q_{12}$ . В верхнем положении груз снимается, и для продолжения работы теплового двигателя необходимо завершить

цикл, то есть вернуть поршень в исходное состояние. Чтобы работа по возвращению системы в исходное состояние не была больше совершенной полезной при подъеме груза, газ сначала необходимо охладить при постоянном объеме  $V_2$  до температуры  $T_2$ , соответствующей давлению  $p_1$ , и изобарно сжать до исходного состояния, продолжая отбирать тепло. Общее количество тепла, отданное при этом холодильнику, будет  $Q_{21} + Q_{22}$ .

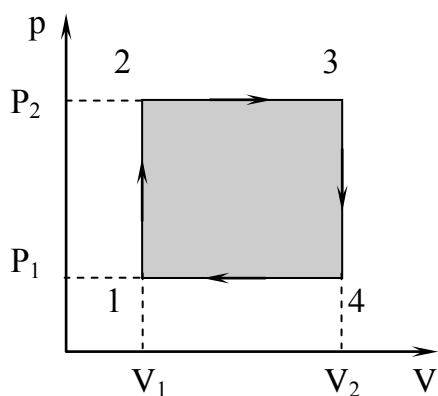


Рис. 2.14

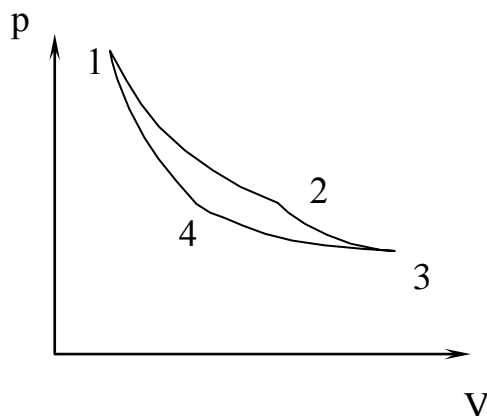


Рис. 2.15

Французский инженер Сади Карно показал, что максимальный коэффициент полезного действия не может быть больше, чем

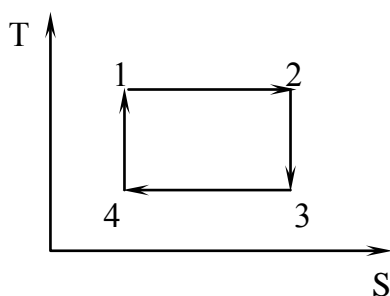
$$\eta = A/Q_1 = (Q_1 - Q_2)/Q_1 = (T_1 - T_2)/T_1, \quad (2.57)$$

независимо от конструкции и выбора рабочего тела. Такой КПД имеет, например, двигатель, работающий по циклу, изображенному на рис. 2.15, состоящему из двух изотерм (1–2 и 3–4) и двух адиабат (2–3 и 4–1). Этот цикл носит название цикла Карно.

### Контрольные задания

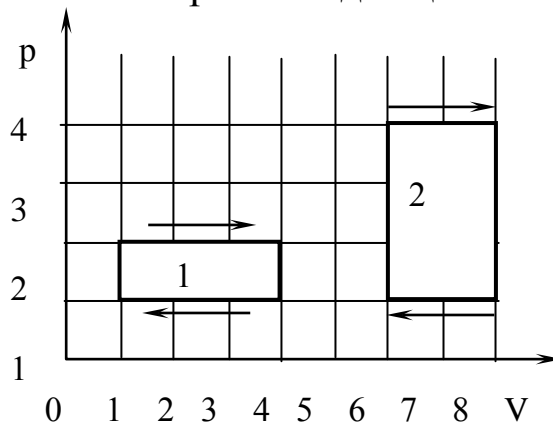
1. На рисунке изображен цикл Карно в координатах  $(T, S)$ , где  $S$  – энтропия.

На каком участке к системе подводится теплота?



2. На каком участке приведенной диаграммы происходит адиабатное расширение?

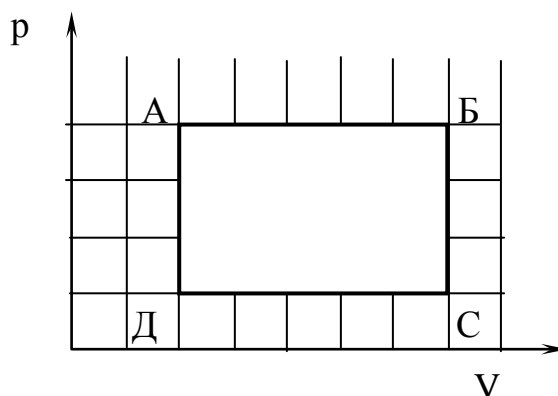
3. На  $(p, V)$  диаграмме изображены два циклических процесса.



Чему равно отношение работ, совершенных в каждом цикле?

4. На  $(p, V)$  диаграмме изображен циклический процесс.

На каких участках температура растет, уменьшается, остается постоянной?



## *Глава 3. Элементарная молекулярно-кинетическая теория газов*

### *3.1. Характер теплового движения молекул. Распределение Максвелла по скоростям молекул*

При равновесии газа его молекулы движутся беспорядочно, хаотически меняя направления движения и скорости после каждого соударения. Все **направления движения равновероятны**, а скорости могут быть самыми различными по величине. После каждого удара скорость молекулы может как увеличиться, так и уменьшиться. Может случиться, что после каждого удара скорость молекулы будет увеличиваться и ее значение значительно превысит среднее значение. Но даже если все молекулы передадут ей свою кинетическую энергию, она останется конечной. Таким образом, скорости молекул могут быть распределены от 0 до некоторой максимальной скорости  $v_{\max}$ . Учитывая, что процессы, приводящие к постоянному возрастанию скорости, маловероятны, следует ожидать, что молекул со скоростями, значительно превышающими среднюю, будет немного. Аналогично предположить, что немного будет и молекул, обладающих нулевой скоростью, так как для этого она должна претерпеть лобовой удар с покоящейся молекулой. Из сказанного следует, что скорости молекул должны группироваться около некоторого наиболее вероятного значения  $v_{\text{вер}}$ , рис. 2.16, а. Поскольку строго заданную скорость  $v$  может не иметь ни одна из молекул, по оси  $Y$  откладывается число молекул  $\Delta n$  в единице объема, имеющих скорости от  $v$  до  $v + \Delta v$ . Можно доказать, что:

$$\Delta n = [m/(2\pi kT)]^{3/2} 4\pi v^2 \exp[-(mv^2)/(2kT)]. \quad (2.56)$$

Максимум распределения приходится на скорость  $v_{\text{вер}}$ , около которой имеют скорости наибольшее число молекул. Из (2.56) следует, что

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{(2\pi kT)/m}. \quad (2.57)$$

Среднее значение  $v_{\text{ср}}$  составляет

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{(8kT)/(\pi m)}. \quad (2.58)$$

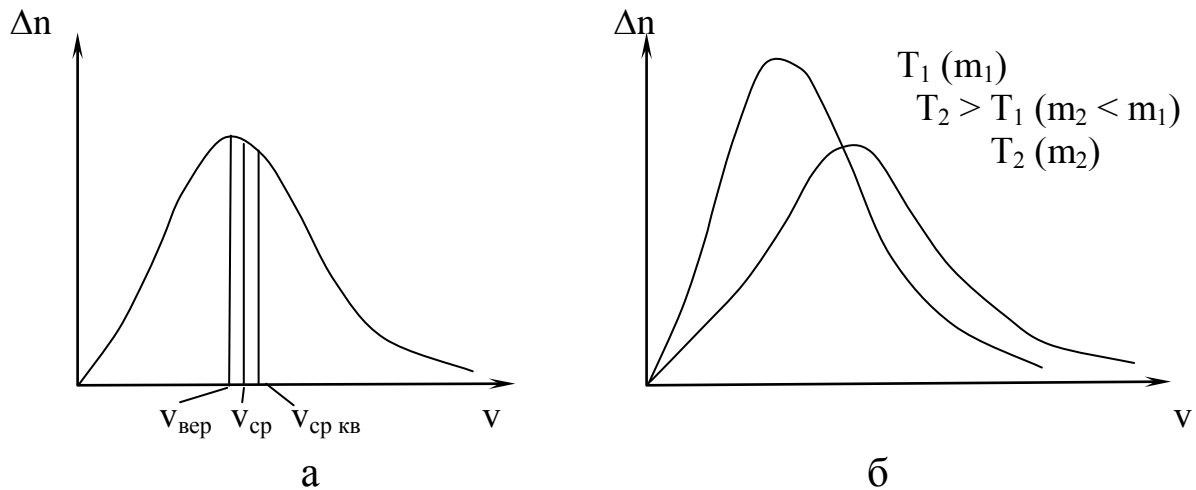


Рис. 2.16

В различные уравнения часто входит так называемая средняя квадратичная скорость  $v_{\text{ср кв}} = \sqrt{(v^2)_{\text{ср}}}$ , которая равна

$$v_{\text{ср кв}} = \sqrt{(8kT)/m}. \quad (2.59)$$

Между скоростями выполняется следующее соотношение:

$$v_{\text{вер}} : v_{\text{ср}} : v_{\text{ср кв}} = \sqrt{2} : \sqrt{8/\pi} = \sqrt{3} = 1 : 1,13 : 1,22. \quad (2.60)$$

То, что  $v_{\text{ср}} > v_{\text{вер}}$ , можно объяснить тем, что, даже если справа от максимума молекул столько же, сколько слева, скорости их больше. Общее число молекул  $N$  определяется площадью под кривой.

При увеличении температуры в соответствии с (2.56) максимум распределения будет смещаться вправо, в область более высоких скоростей, при этом величина  $\Delta n$  будет меньше, так как суммарная площадь под кривой должна остаться равной общему числу молекул. Поскольку масса молекулы стоит в знаменателе (2.57), зависимость от нее будет обратной: с увеличением массы максимум распределения будет смещаться в область низких скоростей и число молекул  $\Delta n$  при этом будет увеличиваться.

Средняя скорость молекул кислорода, определенная согласно (2.58) при комнатной температуре, составляет приблизительно 500 м/с. Молекулы водорода, имеющие массу в 16 раз меньше, будут иметь скорость в 4 раза больше, то есть порядка 2000 м/с.

Относительное число молекул, имеющих различные скорости, представлено на рис. 2.17.

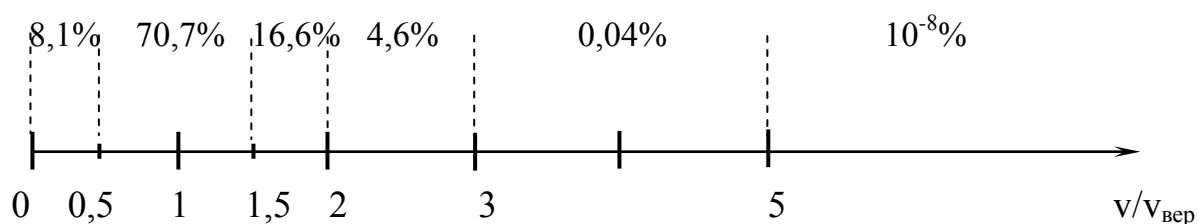


Рис. 2.17

### 3.2. Давление газа на стенку. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов

Стенки сосуда, в котором заключен газ, испытывают непрерывные соударения со стороны молекул газа. В результате этих ударов на стенку действует сила, обуславливающая давление газа. Это давление можно легко оценить, сделав предположение, что все молекулы имеют среднюю скорость движения. Для расчета необходимо определить силу, с которой действует на стенку одна молекула при ударе, и затем умножить на число молекул, ударяющихся о единичную площадку в единицу времени.

Поскольку удар молекул о стенку абсолютно упругий, он происходит по закону зеркального отражения, рис. 2.18. Скорость молекулы при ударе по абсолютной величине не изменяется, а проекция  $v_x$  меняется на противоположную. Согласно второму закону Ньютона, сила, с которой одна молекула будет действовать на стенку сосуда, будет равна изменению импульса частицы:

$$f_{1x} = m(dv_x/dt) = 2mv_x/dt. \quad (2.60)$$

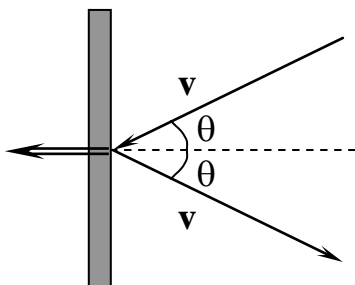


Рис. 2.18

За время  $dt$  о площадку площадью  $S$  ударятся молекулы из объема  $dV = Sdl = Sv_x dt$ . Если концентрация молекул газа равна  $n$ , то число таких молекул будет



$$dN = (1/2)n dV = (1/2)nSv_x dt. \quad (2.61)$$

Множитель (1/2) поставлен постольку, поскольку в сторону стенки (в силу равновероятности всех направлений) летит половина всех молекул.

Для определения давления газа на стеку осталось посчитать суммарную силу, действующую на площадку  $S$ , то есть умножить силу  $f_{1x}$  (2.60) на число ударов  $dN$  (2.61) и поделить эту силу на площадь  $S$ . При этом надо предположить, что все молекулы имеют некоторую среднюю скорость  $v_{x \text{ ср}}$ :

$$p = [(2mv_{x \text{ ср}}/dt) (1/2)nSv_{x \text{ ср}}dt]/S = nmv_{x \text{ ср}}^2. \quad (2.62)$$

Поскольку все направления движения равновероятны, можно считать, что:

$$v_{x \text{ ср}}^2 = v_{y \text{ ср}}^2 = v_{z \text{ ср}}^2. \quad (2.63)$$

Учитывая (2.63) и то, что

$$v_{\text{ср}}^2 = v_{x \text{ ср}}^2 + v_{y \text{ ср}}^2 + v_{z \text{ ср}}^2 = 3 v_{x \text{ ср}}^2, \quad (2.64)$$

выражение для давления (2.62) можно переписать:

$$p = nmv_{x \text{ ср}}^2 = (nmv_{\text{ср}}^2)/3. \quad (2.65)$$

Или, учитывая, что  $(mv_{\text{ср}}^2)/2 = E_{\text{к ср}}$  – средняя кинетическая энергия молекулы,

$$p = (nmv_{\text{ср}}^2)/3 = (2/3)nE_{\text{к ср}}. \quad (2.66)$$

Уравнения (2.65), (2.66) связывают макроскопический параметр – давление – с микроскопическими: массой молекулы, концентрацией молекул и их средним квадратом скорости (концентрацией молекул и их средней кинетической энергией). Уравнение (2.66) носит название **основного уравнения молекулярно-кинетической теории газа**.

Сопоставляя (2.66) и уравнение состояния идеального газа в виде  $p = nkT$ , можно заключить, что

$$E_{\text{к ср}} = (3/2)kT. \quad (2.67)$$

Считая, что молекула имеет три степени свободы поступательного движения ( $x$ ,  $y$  и  $z$ ), исходя из (2.67), говорят, что на каждую степень свободы поступательного движения молекулы

приходится средняя кинетическая энергия, пропорциональная термодинамической температуре

$$E_{\text{к ср}} = (1/2) kT, \quad (2.68)$$

где коэффициентом пропорциональности является постоянная Больцмана –  $k$ .

Соотношение (2.67) всегда справедливо для одноатомных молекул. Если молекула состоит из двух или более атомов, свой вклад в среднюю энергию могут давать **вращательные** (по  $kT/2$ ) и **колебательные** (по  $kT$ ) степени свободы и в общем случае справедливо уравнение:

$$E_{\text{к ср}} = (i/2) kT, \quad (2.69)$$

где  $i$  – общее число степеней свободы молекулы. Однако свой вклад вращательные и колебательные степени свободы дают только при высоких температурах.

### 3.3. Барометрическая формула.

#### *Распределение Больцмана по энергиям молекул*

Барометрическая формула дает связь давления воздуха для изотермической атмосферы с высотой над поверхностью Земли.

Выделим мысленно атмосферный столб некоторого сечения  $S$ . Атмосферное давление обусловлено весом вышележащих слоев газа. Рассмотрим изменения давления  $dp$  при изменении высоты от  $h$  до  $h+dh$  (рис. 2.19). Давление на высоте  $h+dh$  будет меньше, следовательно,  $dp$  будет отрицательно. Численно изменение давления будет равно давлению столба высотой  $dh$  или весу этого столба, деленному на площадь сечения:

$$dp = -mg/S = -(\rho dV)g/S = -(\rho Sdh)g/S = -\rho gdh. \quad (2.70)$$

Если из уравнения Клайперона – Менделеева выразить плотность газа:  $\rho = m/V = (Mp)/RT$ , и подставить ее в (2.70), для изменения давления получим:

$$dp = - [(Mp)g/RT] dh, \quad (2.71)$$

или после разделения переменных:

$$dp/p = -[(Mg)/RT] dh. \quad (2.72)$$

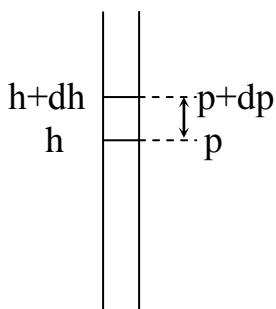


Рис. 2.19

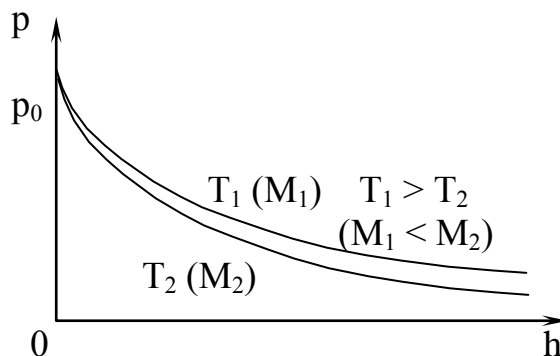


Рис. 2.20

Интегрирование (2.72) дает:

$$\ln p = -(Mgh)/RT + \ln(\text{const}). \quad (2.73)$$

Для удобства дальнейших преобразований постоянная интегрирования здесь записана как  $\ln(\text{const})$ . После переноса  $\ln(\text{const})$  в левую часть и экспонирования уравнения окончательно получим:

$$p = p_0 \exp[-(Mgh)/RT]. \quad (2.74)$$

Очевидно, что  $p = p_0$  на поверхности Земли при  $h = 0$ . Эта формула носит название **барометрической**. Уравнение (2.74) получено в предположении изотермической атмосферы  $T = \text{const}$ . Графики изменения давления для разных температур (молекулярных масс газов) приведены на рис. 2.20. Из графиков видно, что давление для газов с большей молекулярной массой (давление воздуха при низкой температуре) падает с высотой быстрее.

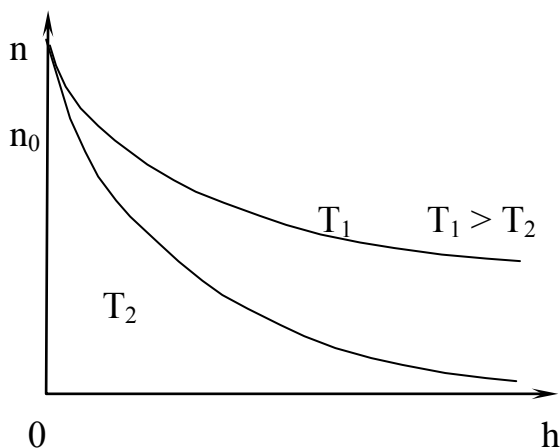


Рис. 2.21

Произведем в (2.74) следующие замены:  $(M/R) = (m/k)$ ,  $p_0 = n_0 k T$  ( $m$  – масса молекулы,  $k$  – постоянная Больцмана,  $n_0$  –

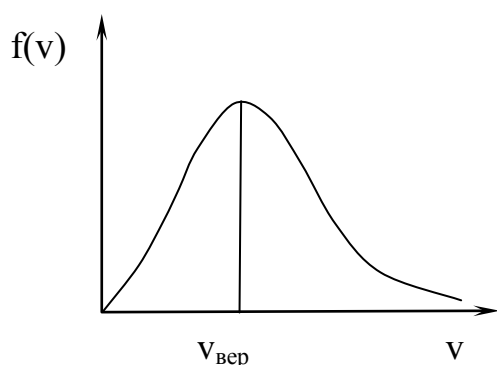
концентрация молекул у поверхности Земли) и после сокращения на  $kT$  барометрическая формула примет вид:

$$n = n_0 \exp[-(mgh)/kT] = n_0 \exp[-E_p/kT]. \quad (2.75)$$

Уравнение (2.75) носит название **распределения Больцмана** и дает распределение молекул по потенциальным энергиям. Из него следует, что молекулы располагаются с большей плотностью там, где меньше их потенциальная энергия, рис. 2.21.

### Контрольные задания

1. На рисунке представлено распределение молекул по скоростям (распределение Максвелла), где  $f(v) = (dN/N)dv$  – доля молекул, скорости которых заключены в интервале от  $v$  до  $(v + dv)$ .



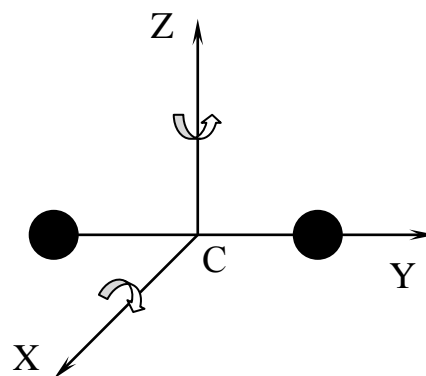
Что происходит с максимумом кривой с ростом температуры?

2. В двух одинаковых сосудах при равных условиях находится одинаковое количество водорода и азота.

Какая из кривых соответствует азоту?

• Средняя кинетическая энергия молекул газа при температуре  $T$  зависит от их структуры, что связано с возможностью различных видов движения атомов в молекуле. Чему равна средняя кинетическая энергия молекул гелия (He)?

*Пример решения.* Средняя кинетическая энергия молекул газа при температуре  $T$  равна  $E_k = (i/2) kT$ , где  $i$  – число степеней свободы молекулы.



Числом степеней свободы тела  $i$  называют число независимых координат, полностью определяющих положение тела в пространстве:

а) молекулы, состоящие из одного атома, можно представить материальной точкой, положение которой полностью определяется заданием трех ее координат. Одноатомные молекулы (He, Ar) имеют  $i = 3$ ;

б) положение двухатомной молекулы полностью определяется заданием трех координат центра инерции ( $x, y, z$ ) и двух углов  $\theta$  и  $\psi$  вращения вокруг осей  $OX$  и  $OZ$ . Вращением вокруг оси  $OY$  можно пренебречь, т. к. момент инерции её относительно оси  $OY$  пренебрежительно мал. Двухатомная молекула имеет  $i = 5$ : три степени свободы поступательные и две – вращательные;

в) молекулы из трех и более жестко связанных атомов, не лежащих на одной прямой, полностью определяются тремя координатами центра инерции ( $x, y, z$ ) и тремя углами вращения ( $\theta, \gamma, \psi$ ) вокруг осей ( $OX, OY, OZ$ ).

$N$  – атомная молекула ( $N \geq 3$ ) имеет  $i = 6$ : три степени поступательные и три – вращательные;

г) если многоатомная молекула  $N \geq 2$  имеет упругую связь, то в системе может возникнуть колебательное движение. Нужно учесть и его колебательные (от 1 и более) степени свободы. Колебательная степень свободы должна иметь энергию, вдвое большую по сравнению с поступательной или вращательной. Это объясняется тем, что колебательное движение связано с наличием кинетической и потенциальной энергий. На колебательные степени свободы приходится энергия в два раза больше:  $E_{\text{колеб}} = kT$ . Колебательные степени свободы возбуждаются при высоких температурах, что должно специально оговариваться.

3. Средняя кинетическая энергия молекул газа при температуре  $T$  равна  $E_k = (i/2) kT$ , где  $i$  – число степеней свободы молекулы: поступательного, вращательного и колебательного движений молекулы. Чему равно число степеней свободы для водорода ( $H_2$ ), при условии, что имеют место только поступательное и вращательное движение?

4. Чему равно число степеней свободы для водяного пара ( $\text{H}_2\text{O}$ ), при условии, что имеют место только поступательное и вращательное движение?

5. Состояние идеального газа определяется значением параметров  $T_0$ ,  $p_0$  и  $V_0$ . Определенное количество газа перевели из состояния  $(3p_0, V_0)$  в состояние  $(p_0, 2V_0)$ .

Как изменилась при этом его внутренняя энергия?

6. Как изменяется энтропия постоянной массы идеального газа в процессе обратимого адиабатического нагревания?

## Глава 4. Фазовые равновесия и превращения

### 4.1. Фазовые состояния и диаграммы

**Фазой** называется совокупность однородных, одинаковых по своим свойствам частей системы. Простым примером фазовых состояний является закрытый сосуд, в котором одновременно находится вода, лед и смесь водяного пара и воздуха. Различные кристаллические структуры одного и того же вещества (например, графит и углерод) также являются фазами.

Любая фаза характеризуется основными **параметрами**: давление ( $p$ ), температура ( $T$ ), объем ( $V$ ) и др. Если эти параметры не меняются, то говорят о **равновесном** состоянии. Изображение состояния системы в координатах  $p - T$ ,  $p - V$  или  $V - T$  носит название **диаграммы состояний**. Равновесие двух фаз возможно только при вполне определенных температурах, причем каждой температуре отвечает определенное давление. На диаграмме состояний  $p - T$  это будет линия  $p = f(T)$ .

Три фазы одного вещества могут находиться в равновесии при единственных значениях  $p$  и  $T$  – на диаграмме этому состоянию будет соответствовать точка  $T_3$ , называемая **тройной**. Равновесие более трех фаз одного вещества невозможно. На рис. 2.22 приведен пример фазовой диаграммы состояний. Стрелками там обозначены следующие переходы: 1–1' – плавление и кристаллизация; 2–2' – испарение и конденсация; 3–3' – возгонка и сублимация.

Переходы между фазами, происходящие с выделением или поглощением тепла (**скрытого тепла фазового перехода**), называются фазовыми переходами **первого рода**. Переходы без выделения и поглощения тепла – фазовые переходы **второго рода**. Фазовые переходы первого рода при постоянном подводе тепла в координатах температура – время изобразятся кривой (рис. 2.23). Горизонтальный участок кривой соответствует фазовому переходу, при котором в зависимости от направления перехода поглощается или выделяется скрытая теплота фазового перехода.

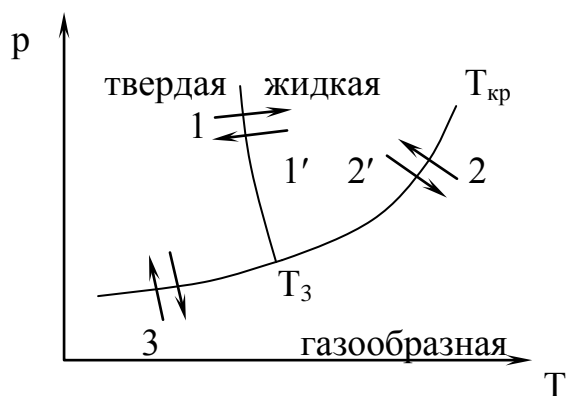


Рис. 2.22

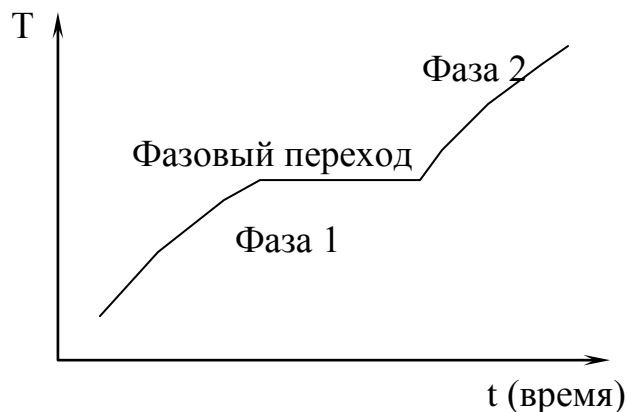


Рис. 2.23

Возьмем вещество в виде жидкости и находящегося с ней в равновесии газа на кривой  $T_3$ – $T_{кр}$  и, не изменяя объема, станем отнимать от него тепло. Этот процесс будет сопровождаться понижением температуры вещества и соответствующим уменьшением давления. Поэтому точка, изображающая состояние вещества на диаграмме  $(p, T)$ , перемещается вниз по кривой (рис. 2.22). Это продолжается до тех пор, пока не будет достигнута температура кристаллизации вещества, отвечающая равносному значению давления. Эта температура обозначена  $T_3$ . Все время, пока идет процесс кристаллизации, температура и давление остаются неизменными. Отводимое при этом тепло представляет собой тепло, выделяющееся при кристаллизации.

Температура  $T_3$  и соответствующее ей равновесное давление  $p_3$  – единственные значения температуры и давления, при которых могут находиться в равновесии три фазы вещества: твердая, жидкая и газообразная. Соответствующая точка на диаграмме  $(p, T)$  называется тройной точкой. Таким образом, тройная точка определяет условия, при которых могут находиться в равновесии одновременно три фазы вещества.

По окончании процесса кристаллизации в равновесии будут находиться твердая и газообразная фазы. Если продолжать отнимать от вещества тепло, то температура снова начнет понижаться. Соответственно уменьшается давление паров, находящихся в равновесии с кристаллической фазой. Точка, изображающая состояние вещества, перемещается вниз по кривой сублимации.

Температура тройной точки есть температура, при которой плавится вещество, находясь под давлением, равным  $p_{нп}$  (см. сле-



дующий раздел) при данной температуре. При других давлениях температура плавления будет иной. Связь между давлением и температурой плавления изобразится кривой плавления, начинающейся в тройной точке. Таким образом, тройная точка оказывается лежащей на пересечении трех кривых, определяющих условия равновесия двух фаз: твердой и жидкой, жидкой и газообразной и, наконец, твердой и газообразной.

Кривые плавления, испарения и сублимации разбивают координатную плоскость на три области. Слева от кривых сублимации и плавления лежит область твердой фазы, между кривыми плавления и испарения заключена область жидких состояний, справа от кривых испарения и сублимации простирается область газообразных состояний вещества. Любая точка в одной из этих областей изображает соответствующее однофазное состояние вещества (все время имеются в виду только равновесные состояния, т. е. такие состояния, в которых вещество при неизменных внешних условиях пребывает сколь угодно долго). Всякая точка, лежащая на одной из разграничивающих области кривых, изображает состояние равновесия двух соответствующих фаз вещества. Тройная точка изображает состояние равновесия всех трех фаз. Таким образом, каждая точка на диаграмме изображает определенное равновесное состояние вещества. Поэтому ее называют диаграммой состояния.

Для вещества с несколькими кристаллическими модификациями диаграмма состояния имеет более сложный характер. Кривая равновесия жидкого и твердого состояний на рис. 2.22 в определенной точке разобьется на две: одна будет разделять две твердых фазы, а вторая – новую твердую фазу и жидкость. Появится вторая тройная точка.

Диаграмма состояния для каждого конкретного вещества строится на основе экспериментальных данных. Зная диаграмму состояния, можно предсказать, в каком состоянии будет находиться вещество при различных условиях (при различных значениях  $p$  и  $T$ ), а также какие превращения будет претерпевать вещество при различных процессах.

## 4.2. Фазовые переходы испарения и конденсации. Равновесие жидкости и насыщенного пара

В жидкости при любой не нулевой температуре имеется некоторое количество молекул, энергии у которых достаточно, чтобы преодолеть силы притяжения со стороны соседних молекул и покинуть жидкость. Жидкость покидают наиболее быстрые молекулы, которые уносят часть энергии, вследствие чего жидкость охлаждается. Чтобы процесс продолжался, к жидкости необходимо подводить тепло. Тепло, необходимое для перехода единицы массы жидкости в пар, называют **удельной теплотой парообразования**. Ее величина зависит от температуры, и для воды, например, она составляет 597 Кал/г при  $0^{\circ}\text{C}$  и 539 Кал/г при  $100^{\circ}\text{C}$ . При конденсации жидкости затраченное на испарение тепло возвращается назад.

Рассмотрим герметичный сосуд с жидкостью при некоторой температуре, закрытый поршнем, который можно перемещать, рис. 2.24.

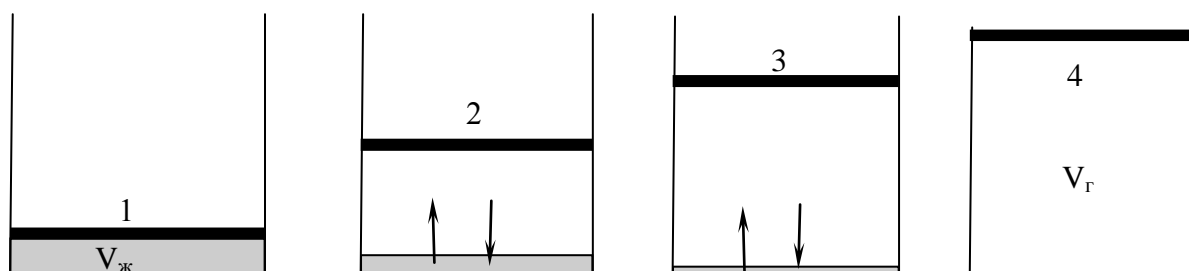


Рис. 2.24

В первом положении поршня жидкость занимает весь предоставленный ей объем сосуда, обозначим его  $V_{\text{ж}}$ . В положении 2 объем под поршнем увеличивается. Часть молекул, как указывалось выше, может покинуть поверхность жидкости, образуется вторая фаза – газ (пар, если речь идет о воде). Молекулы газа, двигаясь с большими скоростями, испытывают столкновения между собой и с молекулами на поверхности жидкости. Часть молекул после столкновения с поверхностью жидкости передают ей свою энергию и остаются в жидкости. Через некоторое время наступает момент, когда число покидающих жидкость молекул и число молекул, возвращающихся назад, станет равным. Такое со-

стояние называют **динамическим равновесием** системы. Пар, находящийся над поверхностью жидкости, называется **насыщенным**. Данному состоянию соответствует вполне определенное при данной температуре давление – **давление насыщенного пара** ( $P_{\text{нп}}$ ). Если далее увеличивать объем под поршнем, то большее количество молекул будет находиться в газообразном состоянии, давление же газа будет сохраняться и по-прежнему будет равно давлению насыщенного пара, соответствующего данной температуре. При дальнейшем движении поршня при некотором его положении все молекулы испарятся и весь объем будет занимать газ, обозначим его  $V_{\text{г}}$ .

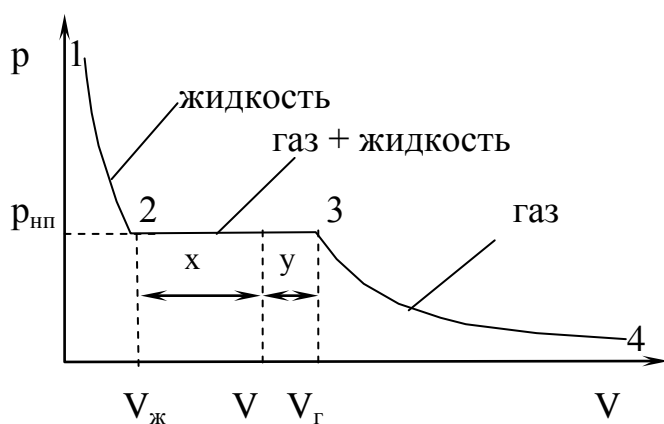


Рис. 2.25

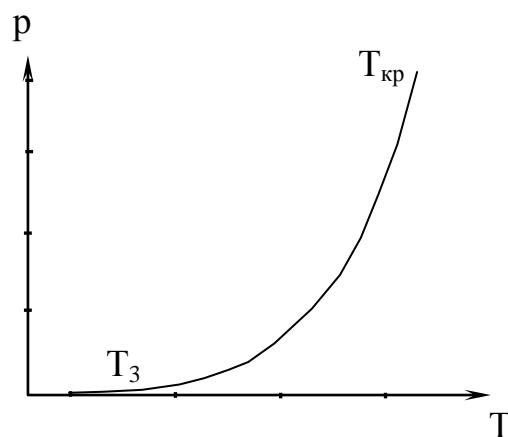


Рис. 2.26

Давление его по-прежнему будет  $P_{\text{нп}}$ . Данному процессу на диаграмме  $P - V$  будет соответствовать участок 2–3 (рис. 2.25). Если продолжать увеличивать объем сосуда, давление будет падать по закону, описываемому уравнением состояния идеального газа при данной температуре (участок 3–4, рис. 2.25).

Если в какой-то момент времени начать уменьшать объем, все процессы до точки 2 будут происходить в обратной последовательности. Вначале по мере уменьшения объема давление газа будет расти. По достижении объема  $V_{\text{г}}$  давление перестает изменяться, а вещество перестает быть однородным – часть газа конденсируется в жидкость. Происходит расслоение вещества на две фазы: жидкую и газообразную. По мере дальнейшего уменьшения объема все большая часть вещества переходит в жидкую фазу, причем переход осуществляется при постоянном давлении  $p_{\text{нп}}$  (давлении насыщенного пара). После того как процесс конденсации вещества заканчивается (это происходит при дости-

жении объема  $V_{\text{ж}}$ ), дальнейшее уменьшение объема начинает сопровождаться быстрым ростом давления.

При любом промежуточном значении объема  $V$  от  $V_{\text{г}}$  до  $V_{\text{ж}}$  часть вещества с массой  $m_{\text{ж}}$  будет находиться в жидком, а часть с массой  $m_{\text{г}}$  – в парообразном состоянии. Отношение масс жидкости и газа описывается уравнением:

$$m_{\text{ж}}/m_{\text{г}} = (V_{\text{г}} - V)/(V - V_{\text{ж}}) = y/x. \quad (2.76)$$

Таким образом, отношение масс жидкости и насыщенного пара в двухфазном состоянии равно отношению отрезков, на которые делит горизонтальный участок изотермы точка, изображающая данное состояние.

На участке 2–3, когда в динамическом равновесии находятся газ и жидкость, количество молекул, покидающих жидкость, резко растет с повышением температуры. Количество возвращающихся молекул также растет, но медленнее. В результате этого давление насыщенного пара при увеличении температуры также будет увеличиваться. Диаграмма равновесных состояний насыщенного пара и воды приведена на рис. 2.26, линия  $T_3 - T_{\text{кр}}$ . Смысл критической температуры ( $T_{\text{кр}}$ ) будет пояснен ниже.

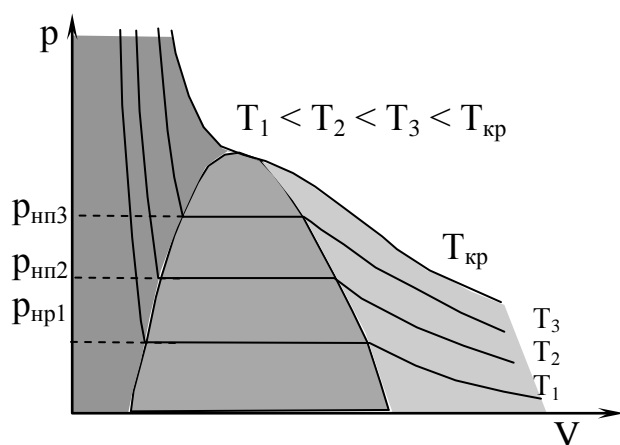


Рис. 2.27



Рис. 2.28

Если построить диаграммы  $P - V$ , аналогичные изображенным на рис. 2.25, для других температур, то окажется, что с ростом температуры кривые будут идти выше.

Давление насыщенного пара будет соответствовать диаграмме на рис. 2.26, при этом длина горизонтального отрезка диаграм-

мы с ростом температуры будет уменьшаться (рис. 2.27), и при некоторой температуре  $T = T_{кр}$  отрезок вырождается в точку.

Физический смысл существования критической точки можно пояснить следующим образом. Вспомним, что для газообразного состояния средняя кинетическая энергия молекул много больше потенциальной энергии их взаимодействия:  $E_K \gg E_{\Pi}$ . Учитывая, что для газа  $E_K = (3/2)kT$ , можно записать:

$$(3/2)kT \gg E_{\Pi}. \quad (2.77)$$

В то же время для сохранения жидкого состояния потенциальная энергия должна превышать кинетическую энергию:  $E_{\Pi} > E_K = (3/2)kT$ . Таким образом, оказывается, что переход в жидкое состояние возможен только при температурах меньше некоторой критической:

$$T < T_{кр} = (2E_{\Pi})/3k. \quad (2.78)$$

Газ при температуре выше  $T_{кр}$  перевести в жидкое состояние невозможно, вещество при любом давлении оказывается однородным. Критическая температура зависит от потенциальной энергии взаимодействия молекул и будет различна для разных газов.

Колоколообразная область средней яркости на рис. 2.27, соединяющая края горизонтальных линий, соответствует двухфазным состояниям, где в равновесии находятся жидкость и пар. Любое состояние в этой области отличается от остальных газообразных состояний в том отношении, что при изотермическом сжатии вещество, первоначально находившееся в таком состоянии, претерпевает процесс ожижения. Область справа светло-серого цвета соответствует газообразному состоянию, а слева (темная) – жидкому. Состояние выше изотермы, соответствующей критической температуре, называется критическим. В этом состоянии не существует различия между жидкостью и паром. На рис. 2.28 приведены температурные зависимости плотности жидкости и пара, из которых видно, что при критической температуре они совпадают. Аналогичным образом ведут себя и другие характеристики, например вязкость, поверхностное натяжение и др.

### 4.3. Пересыщенный пар и перегретая жидкость

В разделе 2.5. было приведено уравнение (2.29), предложенное Ван-дер-Ваальсом для описания состояния газов при больших плотностях. На рис. 2.29 изображены изотермы Ван-дер-Ваальса, т. е. кривые, описываемые уравнением (2.30), для нескольких температур.

Характерным для этих изотерм является то, что при температурах ниже  $T_{кр}$  у кривых имеется S-образный участок, в области которого заданному значению давления соответствуют три различных значения объема. У изотерм, рассмотренных в предыдущем разделе, (рис. 2.27) такого завитка нет, вместо него у них имеется прямолинейный горизонтальный участок. На рис. 2.30 наложены одна на другую реальная изотерма и изотерма Ван-дер-Ваальса.

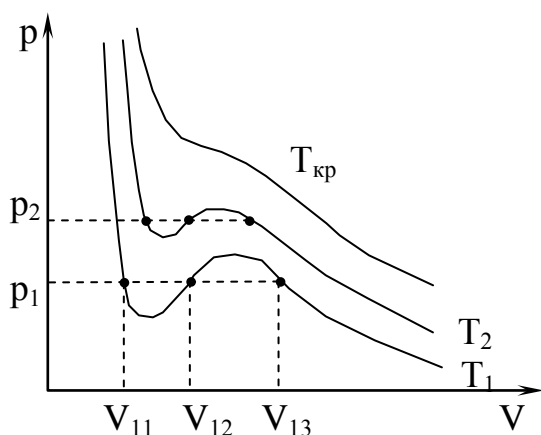


Рис. 2.29

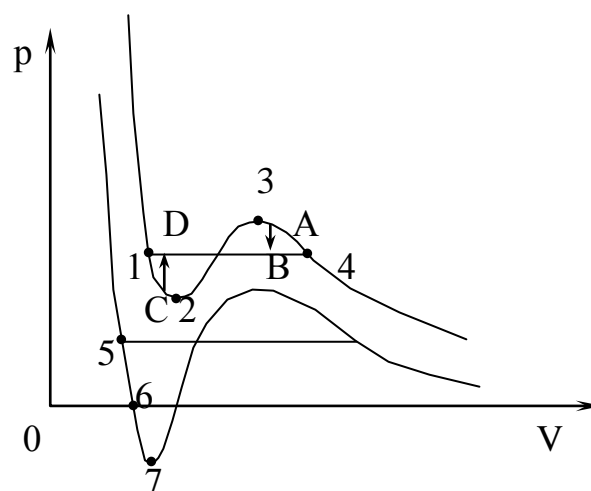


Рис. 2.30

Оказывается, что уравнение Ван-дер-Ваальса довольно хорошо описывает ход изотермы при объемах, больших  $V_{г}$ ; при объемах меньших  $V_{ж}$  ход реальной изотермы также примерно следует уравнению Ван-дер-Ваальса. Таким образом, это уравнение охватывает не только газообразное, но и жидкое состояние вещества.

Расслоение на две фазы объясняется неустойчивостью однородных состояний, отвечающих участку 1–2–3–4 (рис. 2.30). Неустойчивость состояний на участке 2–3 становится очевидной, если учесть, что на этом участке вещество обладало бы противостественными свойствами: увеличение объема газа сопровождалось бы не уменьшением, а ростом давления. Состояния на участ-

ках 1–2 и 3–4 могли бы теоретически реализоваться. Действительно, при известных условиях состояния, соответствующие этим участкам, могут осуществляться и на практике. Правда, они не вполне устойчивы: достаточно, например, в состоянии А на участке 3–4 (С на участке 1–2) попадания в пар (жидкость) пылинки, чтобы все вещество распалось на две фазы и перешло в состояние В (Д). Подобные неустойчивые состояния называются **метастабильными**. Вещество в состояниях 1–2 называется перегретой жидкостью, вещество в состояниях 3–4 – пересыщенным паром.

При достаточно низких температурах нижняя часть изотермы Ван-дер-Ваальса может пересекать ось  $V$  и переходить в область отрицательных давлений (участок 6–7 на нижней изотерме, рис. 2.30). Вещество под отрицательным давлением, очевидно, находится в состоянии не сжатия, а растяжения. Такие состояния также могут быть при известных условиях реализованы. Таким образом, участок 5–6 на нижней изотерме соответствует перегретой, а участок 6–7 – растянутой жидкости.

Рассмотрим условия, при которых могут быть осуществлены метастабильные состояния. Начнем с пересыщенного пара. Если пар совершенно не содержит посторонних включений, конденсация его в жидкость начаться не может. Для образования капельки необходимо, чтобы большое количество молекул одновременно сблизилось на расстояния того же порядка, что и расстояния между молекулами в жидкости, а это совершенно невероятно. Для возникновения конденсации необходимо наличие так называемых центров конденсации, которые улавливают подлетающие к ним молекулы и переводят их в конденсированную фазу. Центрами конденсации могут служить пылинки, капельки жидкости и в особенности заряженные частицы (ионы).

Таким образом, если пар тщательно очистить от посторонних включений и ионов, то он может находиться при давлении, превышающем давление насыщенных паров  $p_{\text{нп}}$  при данной температуре. Такое состояние будет метастабильным: достаточно возникнуть хотя бы одному центру конденсации, как состояние пересыщенного пара будет нарушено и вещество перейдет в двухфазное состояние.

Метастабильные состояния могут сохраняться очень долго.

Метастабильные состояния широко используются в технике, например, при регистрации заряженных частиц в камере Вильсона и пузырьковой камере.

Из диаграммы состояния (рис. 2.31) следует, что жидкая фаза может существовать в равновесном состоянии только при давлениях не меньших, чем давление тройной точки (то же самое относится и к твердой фазе). При давлениях, меньших  $p_3$ , наблюдаются только переохлажденные жидкости. У большинства обычных веществ тройная точка лежит значительно ниже атмосферного давления,

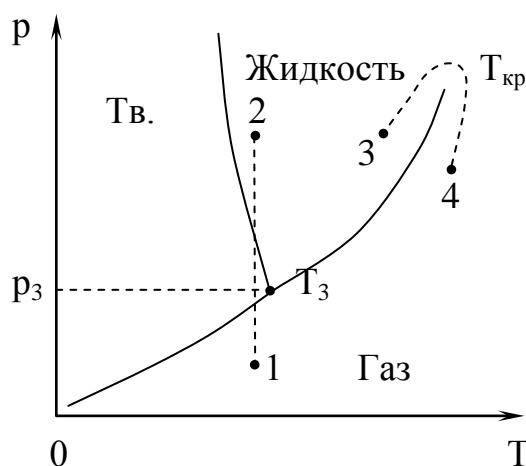


Рис. 2.31

вследствие чего переход этих веществ из твердого состояния в газообразное осуществляется через промежуточную жидкую фазу. Так, например, тройной точке воды соответствует давление 4,58 мм рт. ст. и температура 0,0075°C. Для углекислоты давление тройной точки равно 5,11 атм (температура тройной точки – 56,6°C). Поэтому при атмосферном давлении углекислота может существовать только в твердом и газообразном состояниях.

Твердая углекислота (сухой лед) превращается непосредственно в газ.

Если удельный объем кристаллов превосходит удельный объем жидкой фазы, то поведение вещества при некоторых процессах может оказаться весьма своеобразным. Возьмем, например, подобное вещество в состоянии, изображенном точкой 1 на рис. 2.31, и подвергнем его изотермическому сжатию. При таком сжатии давление растет, и процесс изобразится на диаграмме вертикальной прямой (см. пунктирную прямую 1–2). В ходе процесса вещество проходит такую последовательность состояний: газ – кристаллы – жидкое состояние. Подобная последовательность, очевидно, наблюдается только при температурах меньших, чем температура тройной точки.



В заключение отметим еще одну особенность диаграммы состояния. Кривая испарения заканчивается в критической точке  $T_{кр}$ . Поэтому возможен переход из области жидких состояний в область газообразных состояний, совершаемый в обход критической точки, без пересечения кривой испарения (см. изображенный пунктиром переход 3–4 на рис. 2.31). Непрерывный переход из кристаллического состояния в жидкое или газообразное невозможен, ибо характерной чертой кристаллического состояния, как мы знаем, является анизотропия. Переход же от состояния, обладающего анизотропией, к состоянию, ею не обладающему, может совершаться только скачком – анизотропия не может иметься только частично, она либо есть, либо ее нет, третья возможность исключена. По этой причине кривая сублимации и кривая плавления не могут обрываться подобно тому, как обрывается кривая испарения в критической точке. Кривая сублимации идет в точку  $p=0$  и  $T=0$ , кривая плавления уходит в бесконечность.

Точно так же невозможен непрерывный переход из одной кристаллической модификации в другую. Различные кристаллические модификации вещества отличаются присущими им элементами симметрии. Поскольку какой-либо элемент симметрии может только либо быть в наличии, либо отсутствовать, переход из одной твердой фазы в другую возможен только скачком. По этой причине кривая равновесия двух твердых фаз, подобно кривой плавления, уходит в бесконечность.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение .....</b>	<b>3</b>
<b>Часть I. Механика .....</b>	<b>5</b>
Глава 1. Кинематика .....	5
1.1. Общие понятия .....	5
1.2. Векторные величины. Действия над векторами .....	6
1.3. Производная .....	9
1.4. Траектория, путь, перемещение, скорость .....	11
1.5. Ускорение .....	14
1.6. Кинематика вращательного движения .....	15
Контрольные задания .....	17
Глава 2. Динамика материальной точки .....	19
2.1. Общие понятия .....	19
2.2. Виды взаимодействия и сил в природе .....	20
2.3. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета .....	21
2.4. Масса и импульс тела .....	22
2.5. Второй закон Ньютона .....	23
2.6. Третий закон Ньютона .....	23
2.7. Преобразования Галилея. Принцип относительности Галилея .....	24
2.8. Упругие силы .....	27
2.9. Силы трения .....	30
2.10. Сила тяжести. Вес тела .....	33
2.11. Тело на наклонной плоскости .....	35
Контрольные задания .....	37
Глава 3. Законы сохранения .....	38
3.1. Сохраняющиеся величины .....	38
3.2. Кинетическая энергия .....	39
3.3. Работа .....	40
3.4. Консервативные силы. Потенциальная энергия .....	42
3.5. Потенциальная энергия во внешнем поле сил тяжести Земли .....	44
3.6. Потенциальная энергия упругой деформации .....	47
3.7. Условия равновесия механической системы .....	48
3.8. Закон сохранения импульса .....	49
3.9. Соударение двух тел .....	51
Контрольные задания .....	52
Глава 4. Механика твердого тела .....	55
4.1. Кинематика твердого тела .....	55
4.2. Кинетическая энергия при вращательном движении. Момент инерции тела .....	56

4.3. Основной закон динамики вращательного движения.	
Момент силы .....	58
Контрольные задания.....	59
Глава 5. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции.....	63
5.1. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции .....	63
5.2. Силы инерции при прямолинейном движении системы отсчета..	64
5.3. Центробежная сила инерции.....	66
5.4. Сила Кориолиса.....	67
Глава 6. Общие вопросы теории относительности .....	68
6.1. Специальная теория относительности (релятивистская механика).....	68
6.2. Общая теория относительности.....	73
Контрольные задания.....	73
<b>Часть 2. Молекулярная физика и термодинамика .....</b>	<b>75</b>
Глава 1. Общие понятия. Жидкое состояние .....	75
1.1. Агрегатные состояния вещества.....	76
1.2. Жидкое состояние. Поверхностное натяжение.....	80
1.3. Давление под изогнутой поверхностью.....	82
1.4. Равновесие на границе раздела твердое тело – газ – жидкость.....	83
1.5. Капиллярные явления .....	85
Глава 2. Основы термодинамики .....	87
2.1. Внутренняя энергия системы.....	87
2.2. Первое начало термодинамики.....	87
2.3. Идеальный газ.....	90
2.4. Изопроцессы .....	93
2.5. Газ Ван-дер-Ваальса .....	96
2.6. Осмос .....	98
2.7. Микро- и макросостояния. Энтропия .....	100
2.8. Термодинамические потенциалы .....	104
2.9. Тепловые двигатели .....	106
Контрольные задания.....	108
Глава 3. Элементарная молекулярно-кинетическая теория газов .....	110
3.1. Характер теплового движения молекул. Распределение Максвелла по скоростям молекул.....	110
3.2. Давление газа на стенку. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов.....	112
3.3. Барометрическая формула. Распределение Больцмана по энергиям молекул.....	114
Контрольные задания.....	116

Глава 4. Фазовые равновесия и превращения.....	119
4.1. Фазовые состояния и диаграммы .....	119
4.2. Фазовые переходы испарения и конденсации. Равновесие жидкости и насыщенного пара.....	122
4.3. Пересыщенный пар и перегретая жидкость .....	126

---

Учебное издание

**Преображенский Михаил Николаевич**

**МЕХАНИКА.  
МОЛЕКУЛЯРНАЯ  
ФИЗИКА**

*Учебное пособие*

Редактор, корректор М. В. Никулина  
Верстка И. Н. Иванова

Подписано в печать 26.05.11. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бум. офсетная. Гарнитура "Times New Roman".  
Усл. печ. л. 7,67. Уч.-изд. л. 6,75.  
Тираж 70 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе  
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.

Отпечатано на ризографе.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.  
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.