

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Дифференциальная геометрия**

Направление подготовки (специальности)  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 21.04.2025, протокол № 10

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Дифференциальная геометрия» являются основы дифференциального и интегрального исчисления для функций многих переменных.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы бакалавриата

Данная дисциплина относится к обязательной части образовательной программы и входит в модуль «Математика I», подмодуль «Геометрия и топология». Для освоения данной дисциплины студенты должны быть знакомы с классическим аппаратом математического анализа, элементами линейной алгебры и аналитической геометрии.

Полученные в курсе «Дифференциальная геометрия» знания необходимы для изучения последующих дисциплин модуля «Математика и компьютерные науки», а также для продолжения обучения в магистратуре по направлению «Прикладная математика».

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС, ВО, ОП ВО и приобретение следующих знаний, умений, навыков (или) опыта деятельности:

Формулируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
<b>ОПК-1</b> Готов использовать знания в области топологии, дифференциальной геометрии, алгебры, теории вероятностей, алгебры, математического анализа в будущей профессиональной деятельности	<b>И-ОПК-1.3</b> Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	<b>Знать:</b> - о предпосылках создания дифференциальной геометрии, иметь представление о кривых и поверхностях. <b>Уметь:</b> - находить длину, кривизну, кручение кривой, площадь поверхности. <b>Владеть навыками:</b> - применения аппарата дифференциальной геометрии для решения задач современной геометрии и её приложений.
<b>Универсальные компетенции</b>		
<b>УК-1</b> Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	<b>И-УК-1.1</b> Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации	<b>Знает:</b> принципы сбора, отбора и обобщения информации

## 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **3** зачет. единицы, **108** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Теории кривых	3	10	6		3		20	Задания для самостоятельной работы
2	Теория поверхностей	3	22	10		3		30	Задания для самостоятельной работы Контрольная работа
							0,3	3,7	зачет
	Всего		32	16		6	0,3	53,7	

### Содержание разделов дисциплины:

#### Тема 1. Теория кривых

- 1.1. Понятие пути. Простые пути, гладкие пути, носитель, особая точка и касательный вектор пути. Кратная точка пути.
- 1.2. Эквивалентные пути. Понятие кривой. Простые и гладкие кривые. Носитель, особая точка, кратная точка кривой. Касательная к кривой ориентированные пути и кривые.
- 1.3. Натуральный параметр пути и его свойства. Кривизна пути точка распрямления пути. Длина пути.
- 1.4. Пути на плоскости. Формулы для кривизны пути в декартовых и полярных координатах. Радиус кривизны пути.
- 1.5. Пути общего типа. Нормаль пути. Базис и формулы Френе пути. Круг кривизны, эволюта и эвольвента пути. Уравнения касательной и нормали к плоскому пути.
- 1.6. Пути и кривые в трехмерном евклидовом пространстве. Векторы главной нормали, касательной и бинормали пути, их уравнения.
- 1.7. Соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая плоскости пути, их уравнения.
- 1.8. Кручение пути. Базис и формулы Френе пути в пространстве, точки уплощения пути.

#### Тема 2. Теория поверхностей

- 2.1. Понятие ориентированной поверхности. Ориентация границы поверхности.
- 2.2. Первая квадратичная форма поверхности. Кривые на поверхности, их длины и углы между кривыми. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Площадь поверхности.
- 2.3. Вторая квадратичная форма поверхности. Средняя и гауссова кривизны, главные кривизны.
- 2.4. Классификация точек поверхности.
- 2.5. Дериационные формулы для пути на поверхности. Геодезическое кручение, нормальная и геодезическая кривизны пути на поверхности.
- 2.6. Геодезическая и асимптотическая линия.
- 2.7. Дериационные формулы Вейнгаартена. Символы Кристоффеля, коэффициенты связности, формулы для их вычисления.

## 2.8. Формулы Гаусса и Петерсона- Кодацци-Майнарди.

### **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционно-образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция** (или лекция общего курса) - последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

**Практическое занятие** – занятие, посвящённое освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний. В процессе проведения таких занятий устанавливается тесный контакт преподавателя со студентами.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

### **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

### **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»  
<https://www.studentlibrary.ru>

**8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

**а) основная литература**

1. Позняк Э. Г. Дифференциальная геометрия: первое знакомство. / Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Едиториал УРСС, 2003. - 404 с.
2. Мищенко, А. С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии / Мищенко А. С, Фоменко А. Т. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 304 с. - ISBN 5-9221-0442-0. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922104420.html>
3. Е. А. Павлов, О. И. Рудницкий. Дифференциальная геометрия в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов — Санкт-Петербург: Лань, 2022.  
<https://reader.lanbook.com/book/195518>

**б) дополнительная литература**

1. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия-М.: Наука, 1974.
2. Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии. (Под редакцией В.Т. Воднева). - Минск, Высшая школа, 1970.
3. Е. А. Павлов, О. И. Рудницкий. Дифференциальная геометрия в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов — Санкт-Петербург: Лань, 2022.  
<https://reader.lanbook.com/book/195518>
4. Аминов Ю. А. Дифференциальная геометрия и топология кривых. / Ю. А.Аминов - М.: Наука, 1987. - 159с.
5. Розендорн Э.Р. Задачи по дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1971.

**9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

**Автор(ы) :**

Профессор кафедры математического анализа, д.ф-м.н.

Балабаев В.Е.

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Дифференциальной геометрии»**

**Фонд оценочных средств  
Для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе  
текущего контроля успеваемости**

**Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущей  
аттестации**

**Задания для самостоятельной работы**

**Задания по теме № 1 «Теория кривых»**

Написать параметрическое уравнение кривой, заданной графиком функции  $y=f(x)$ , приняв за параметр  $x$ .

Написать параметрическое уравнение кривой, заданной в полярной системе уравнением  $\rho = \rho(\varphi)$  (использовать функцию  $e(\varphi)$ ).

Написать уравнение касательной к кривой, в полярных координатах. Найти тангенс угла между касательной и радиус-вектором.

Нужно различать *гладко параметризованную кривую* (когда в данной параметризации функция  $\mathbf{r}(t)$  имеет непрерывную производную) и *гладкую кривую* (когда кривая допускает *невырожденную* гладкую параметризацию, т.е. производная  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  всюду отлична от нуля). Гладкая кривая будет гладким одномерным подмногообразием плоскости, если нет точек самопересечения.

Для гладко параметризованной кривой *особой точкой* называется точка, в которой производная равна нулю.

Пусть функция  $\mathbf{r}(t)$  непрерывно дифференцируема конечное число раз и в особой точке  $\mathbf{r}(0)$  первая ненулевая производная есть  $\mathbf{r}^{(k)}(0)$ . Доказать, что она служит направляющим вектором касательной в этой точке

Найти касательную в особой точке кривой  $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{t^3}{3}\mathbf{j} + \frac{t^4}{12}\mathbf{k}$

**Задания по теме № 2 «Теория поверхностей»**

**Задача.** Какая получится поверхность, если на сфере зафиксировать  $n$  точек  $p_1, \dots, p_n$  и сделать  $\sigma$ -процессы с центрами в этих точках.

**Задача.** Пусть на поверхности  $M$  имеется замкнутая простая кривая  $\Gamma$ , обладающая следующим свойством. При малой деформации получаем кривую  $\Gamma'$ , которая пересекается с кривой  $\Gamma$  по единственной точке. Тогда существует стягивание кривой  $\Gamma$  в неособую точку. То есть существует дифференцируемое отображение поверхностей  $\pi : M \rightarrow M'$ , при котором кривая  $\Gamma$  отображается в точку  $p_0$ , а отображение дополнений  $\pi : M \setminus \Gamma \rightarrow M' \setminus \{p_0\}$  является диффеоморфизмом. Показать, что отображение  $\pi : M \rightarrow M'$  является антисигма процессом.

**Контрольная работа. «Теория кривых и поверхностей»**

**Определить радиусы кривизны кривых, заданных в полярных координатах (параметры положительны):**

1. Спираль Архимеда  $r = a\varphi$ .
2. Логарифмической спирали  $r = ae^{m\varphi}$ .
3. Кардиоиды  $r = a(1 + \cos \varphi)$ .
4. Лемнискаты  $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ .

На кривой  $y = \ln x$  найти точку, кривизна в которой наибольшая.

Максимальная кривизна кубической параболы  $y = \frac{kx^3}{6}$  ( $0 \leq x < +\infty$ ,  $k > 0$ ) равна  $\frac{1}{1000}$ . Найти точку  $x$ , в которой достигается эта максимальная кривизна.

Составить уравнения:

Эволюты параболы  $y^2 = 2px$ .

Эволюты эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Эволюты астроида  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ .

Эволюты трактрисы

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

## 2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

### Список вопросов к зачёту:

1. Определение пути, носитель пути, особая и кратная точка пути. Гладкий и простой пути.
2. Эквивалентные пути. Определение кривой. Касательная к кривой. Особая и кратная точки кривой.
3. Натуральный параметр пути и его свойства. Кривизна пути. Длина пути. Точка распределения пути.
4. Пути на плоскости, формулы для кривизны плоского пути. Радиус кривизны пути.
5. Пути общего типа. Нормаль, базис и формулы Френе пути. Круг кривизны, эволюта и эвольвента пути.
6. Определения векторов главной нормали, касательной и бинормали пути в трехмерном евклидовом пространстве, их уравнения.
7. Уравнения соприкасающиеся, нормальной и спрямляющей плоскостей.
8. Кручение, базис и формула Френе пути в пространстве, точки уплощения пути.
9. Определение ориентированной поверхности. Ориентация границы поверхности.
10. Первая квадратичная форма поверхности. Кривые на поверхности, их длины и углы между ними касательная плоскость и нормаль к поверхности. Площадь поверхности.
11. Вторая квадратичная форма поверхности.
12. Средняя и гауссова кривизна двумерной поверхности, главные кривизны.
13. Классификация точек двумерной поверхности.
14. Геодезическая и асимптотическая линии.
15. Деривационные формулы Френе для пути на двумерной поверхности. Геодезическое кручение, нормальная и геодезическая кривизна пути на двумерной поверхности.
16. Деривационные формулы Вейнгартена. Символы Кристоффеля, коэффициенты связности, формулы для их вычисления.
17. Формула Гаусса и Петерсона-Кодацци Майнард.

## 3. Правила выставления оценки

### Правила выставления оценки на экзамене (в устной форме)

В экзаменационный билет включается два теоретических вопроса и задача. На подготовку к ответу дается 1 астрономический час. По итогам экзамена выставляется одна из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется студенту, который демонстрирует глубокое и полное владение содержанием материала и понятийным аппаратом дисциплины, дает развернутые, полные и четкие ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, правильно решает задачу.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, ответ которого на экзамене в целом соответствует указанным выше критериям, но отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой. В ответе имеют место отдельные неточности (несущественные ошибки), которые исправляются самим студентом после дополнительных и (или) уточняющих вопросов экзаменатора. Необходимым условием является хотя бы частичное решение задачи.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, который дает недостаточно полные ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, но при этом все же демонстрирует некоторые базовые знания по предмету. При аргументации ответа студент не обосновывает свои суждения. На часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не демонстрирует знания базовых понятий и результатов, не в состоянии решить задачу, плохо отвечает на дополнительные вопросы, не владеет понятийным материалом дисциплины. Дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора не приводят к коррекции ответов студента. На основную часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы. Кроме того, оценка «Неудовлетворительно» может быть выставлена при незнании каких-то базовых понятий и результатов. Оценка «Неудовлетворительно» выставляется также студенту, который взял экзаменационный билет, но отвечать отказался.

### **Правила выставления оценки на экзамене (в письменной форме)**

Студенту предлагается индивидуальный вариант заданий, содержащий 4-6 задач. На выполнение и представление заданий дается не менее 3-х часов. При оценивании выполненных заданий может использоваться следующая система оценок за одно задание:

- + (4 балла) – задание выполнено полностью, без ошибок;
- + (3 балла) – задание выполнено с незначительной ошибкой или почти полностью;
- + (2 балла) – задание выполнено с существенной ошибкой или примерно наполовину;
- + (1 балл) – лишь какие-то элементы представленного ответа могут быть оценены положительно.

При таком подходе задания считаются примерно равноценными по трудоемкости.

При проверке работы в каждом задании отмечаются недостатки (в форме, доступной студенту), и тем самым объясняются поставленные баллы за задания. Пусть  $k$  – число задач в предложенном варианте (например,  $k=5$ ). Определяется общее число  $M$  баллов, набранных студентом. Оценка зависит от величины отношения  $r = M/N$ , где  $N=4k$  – максимальное возможное число баллов за работу. Возможная градация оценок следующая:

- $0.75 \leq r \leq 1$  - оценка «отлично»;
- $0.60 \leq r < 0.75$  - оценка «хорошо»;
- $0.26 \leq r \leq 0.59$  - оценка «удовлетворительно»;
- $0 \leq r \leq 0.25$  - оценка «неудовлетворительно».



Если задания имеют существенно различную трудоемкость (сложность), то их максимальная оценка может быть различной. В этом случае в указанную схему вносятся соответствующие изменения.

За преподавателем имеется право учитывать на экзамене в положительную сторону работу студента в семестре.

### **Требования для получения зачета**

Каждый студент получает индивидуальное задание. Зачет выставляется по результатам собеседования в ходе которого студент сдает задание и отвечает на вопросы.

## Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Дифференциальная геометрия»

### Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основу освоения курса «Дифференциальная геометрия» составляет сочетание лекций и практических занятий при определённом преобладании второго вида занятий. Если на лекциях излагаются основные теоремы и небольшое число примеров иллюстративного материала, то на практических занятиях решается значительное число задач.

Для успешного освоения дисциплины принципиально важно решение достаточно большого количества упражнений, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы математического анализа. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного материала. Конспекты лекции необходимо прорабатывать еще раз дома и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются объединением нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных навыков работы с аппаратом экстремальных задач, в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде контрольных работ и коллоквиума. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий, которые вызвали затруднения.

Освоить самостоятельно дисциплину «Дифференциальная геометрия» большинству студентов крайне сложно. В первую очередь это связано с тем, что используются многие понятия и методы смежных математических дисциплин: алгебра и аналитическая геометрия. Играет роль и большой объем материала. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий сдать экзамен по итогам изучения дисциплины практически невозможно.