

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра компьютерной безопасности и математических методов обработки информации

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Математическая логика

Направление подготовки (специальности)
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 24.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 05.05.2025

1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина "Математическая логика" обеспечивает приобретение фундаментальных знаний и умений в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом, содействует фундаментализации образования, развитию логического мышления и формированию математического и общенаучного мировоззрения. Целью изучения дисциплины является овладение базовыми понятиями и методами математической логики, ознакомление с их применениями в информатике, в частности, для верификации программ, изучение основ теории алгоритмов, установление существования алгоритмически неразрешимых проблем и значение этого фундаментального факта теории алгоритмов для алгоритмической практики и компьютерных наук, ознакомление с базовыми подходами к оценке сложности алгоритмов и задач и некоторыми приемами построения эффективных алгоритмов.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к обязательной части образовательной программы и входит в модуль «Математика III». Она играет исключительно важную роль для общематематической подготовки бакалавров. При ее изучении существенно используются знания, полученные при изучении математических дисциплин "Математический анализ", "Алгебра", "Аналитическая геометрия", "Теория чисел", "Информатика". Знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплины "Математическая логика и приложения в информатике и компьютерных науках", используются обучающимися при изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин математического и компьютерного циклов.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Универсальные компетенции		
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	И-УК-1.1 Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности	Знает: принципы сбора, отбора и обобщения информации
	И-УК-1.2 Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в	Умеет: соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности

	рамках избранных видов профессиональной деятельности	
	И-УК-1.3 Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов	Владеет: опытом работы с информационными источниками, опытом научного поиска, создания научных текстов
Общепрофессиональные компетенции		
ОПК-1 Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	И-ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	Знать: - основные понятия математической логики - описание синтаксиса языков логики и исчисления высказываний, логики и исчисления предикатов, - понятие интерпретации, значения терма в интерпретации и истинностного значения формулы в интерпретации, - понятие ввода и вывода из множества гипотез в исчислении высказываний и исчислении предикатов, - формулировки теорем дедукции, адекватности и непротиворечивости, - применения математической логики в информатике: исчисление Хоара для доказательства корректности компьютерных программ, логико-математические подходы к верификации компьютерных программ, операционная семантика, оценки для интерпретаций языков, значение терма и формулы на данной оценке, аксиоматическая семантика программ, триады Хоара, аксиомы и правила вывода исчисления Хоара, корректность исчисления Хоара относительно операционной семантики, задачи, которые привели к необходимости формирования математического понятия "алгоритм", арифметизация алгоритмов, представляющая функция алгоритма, два подхода к математическому уточнению интуитивного понятия "алгоритм", определение машины Тьюринга, вычислимости и правильной вычислимости, понятия примитивно рекурсивной, рекурсивной и частично рекурсивной функции, примеры алгоритмически неразрешимых задач.
	И-ОПК-1.2 Умеет использовать их в профессиональной деятельности	Уметь: - строить истинностные таблицы для формул ЛВ, - доказывать теоремы дедукции, адекватности и непротиворечивости для исчисления высказываний и исчисления предикатов,

		- устанавливать выводимость формул в исчислении высказываний и исчислении предикатов, - устанавливать примитивную рекурсивность и рекурсивность арифметических функций.
	И-ОПК-1.3 Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Владеть навыками: - установления выводимости формул в ИВ и ИП, - написания программ для машин Тьюринга, оценки временной и емкостной сложности Тьюринговых алгоритмов, сводимости алгоритмических проблем.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **4** зачетных единиц, **144** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Вводная лекция	5	2					3	Устный опрос
2	Логика высказываний и логика предикатов	5	4	4		1		3	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
3	Булевы функции.	5	2	4				3	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
4	Логические исчисления. Исчисление высказываний	5	4	4		1		3	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
5	Исчисление предикатов	5	4	4				3	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
6	Метод резолюций	5	2	2		1		3	Задания для самостоятельной (домашней) работы

7	Применения математической логики в информатике.	5	2	2		1		3	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
8	Алгоритмические модели. Элементы теории алгоритмов	5	4	4				3	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
9	Алгоритмическая разрешимость и неразрешимость	5	2	2		1		3	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
10	Сложность алгоритмов и вычислений	5	2	2		1		3	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
11	Сложностная классификация переборных задач	5	2	2		1		3	Задания для самостоятельной (домашней) работы Устный опрос
12	Теория алгоритмов и компьютерная практика	5	2	2		1		3	Устный опрос
						2	0,5	33,5	экзамен
	Всего		32	32		10	0,5	69,5	

Содержание разделов программы:

1. Вводная лекция

История развития математической логики и теории алгоритмов. Математическая логика и основания математики. Теория алгоритмов и принципиальные возможности вычислительных машин. Сложность алгоритмов и ее значение для практики.

2. Логика высказываний и логика предикатов

Язык логики высказываний: алфавит, пропозициональные переменные и пропозициональные связки, формулы. Интерпретации, истинностное значение формулы в интерпретации. Тавтологически истинные и выполнимые формулы. Булевы алгебры. Алгебра высказываний и алгебра подмножеств множества как примеры булевых алгебр. Предикаты на множестве и их связь с отношениями. Логические операции над предикатами. Язык логики предикатов: сигнатура, термы и формулы, свободные и связанные вхождения переменных. Интерпретации. Значение замкнутого терма в интерпретации. Истинностное значение замкнутой формулы в интерпретации. Оценки. Значение терма и формулы на оценке при данной интерпретации. Выполнимые, тавтологически истинные и тавтологически ложные формулы. Равносильность формул, основные соотношения равносильности и их использование для упрощения формул. Предваренные нормальные формы, дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы.

3. Булевы функции

Булевы функции и функции многозначной логики. Их представление термами над заданной системой функций. Представление булевых функций формулами логики высказываний и многочленами Жегалкина. Замкнутые классы функций. Критерии полноты для булевых функций и функций многозначной логики. Представление функций многозначной логики рядами Фурье. Методы вычисления коэффициентов Фурье. Псевдобулевы функции и их задание. Минимизация булевых функций.

4. Логические исчисления. Исчисление высказываний

Общее понятие о логическом исчислении. Язык, аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Вывод и выводимость формул в исчислении высказываний. Вывод из множества гипотез. Теорема дедукции. Теорема Э. Поста для исчисления высказываний. Непротиворечивость исчисления высказываний. Теоремы адекватности и непротиворечивости для исчисления высказываний.

5. Исчисление предикатов.

Язык, логические аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Вывод и выводимость формул в исчислении предикатов. Вывод и выводимость формул из множества гипотез. Теорема дедукции. Вспомогательные правила вывода. Эквивалентность формул. Приведение формул к нормальным формам. Непротиворечивость исчисления предикатов. Теоремы непротиворечивости и адекватности. Теорема К.Геделя о полноте для исчисления предикатов. Элементы теории моделей. Теорема А.И.Мальцева о компактности и ее приложения. Применение исчисления предикатов для записи математических утверждений и для автоматизации доказательства теорем.

6. Метод резолюций.

Применение исчисления предикатов для доказательства теорем. Секвенциальный и натуральный вывод в исчислении предикатов. Эрбановские интерпретации. Теорема Эрбрана. Сколемовская стандартная форма. Семантические деревья. Метод резолюции для логики предикатов. Унификация. Теорема о наиболее общем унификаторе. Теорема о полноте метода резолюции для логики предикатов. Применение логики предикатов в дедуктивных базах данных и экспертных системах. Основные понятия логического программирования: хорновские дизъюнкты, SLD - резолюция. Методика составления и реализация логических программ.

7. Применения математической логики в информатике.

Исчисление Хоара для доказательства корректности компьютерных программ. Логико-математические подходы к верификации компьютерных программ. Операционная семантика. Оценки для интерпретаций языков. Значение терма и формулы на данной оценке. Аксиоматическая семантика программ. Триады Хоара. Аксиомы и правила вывода исчисления Хоара. Корректность исчисления Хоара относительно операционной семантики.

8. Алгоритмические модели. Элементы теории алгоритмов.

Интуитивное понятие алгоритма и его характерные черты. Задачи, приводящие к необходимости уточнения понятия алгоритма. Алгоритмы и вычислимые функции. Представляющая функция алгоритма. Машины Тьюринга-Поста: внешний и внутренний алфавиты, программы. Конфигурации. Композиция и ветвление машин Тьюринга. Вычислимость и правильная вычислимость функций по Тьюрингу. Принцип Тьюринга-Поста-Черча. Частично рекурсивные, рекурсивные и примитивно рекурсивные функции. Тезис Черча. Правильная вычислимость любой частично рекурсивной функции. Частичная рекурсивность любой вычислимой по Тьюрингу функции. Нормальные алгоритмы А.А.Маркова. Примеры. Принцип нормализации А.А.Маркова. Композиция нормальных алгоритмов. Связь нормальных алгоритмов с машинами Тьюринга и частично рекурсивными функциями.

9. Алгоритмическая разрешимость и неразрешимость.

Нумерация слов в счетном алфавите и арифметизация алгоритмов. Соотношения между классами примитивно рекурсивных, общерекурсивных и частично рекурсивных функций. Массовые алгоритмические проблемы. Примеры алгоритмически неразрешимых массовых проблем: проблема остановки для машин Тьюринга (The halting problem for Turing machines), проблема самоприменимости для машин Тьюринга. Примеры алгоритмически разрешимых и неразрешимых задач из математической логики, теории алгоритмов, алгебры, теории чисел, теории формальных грамматик, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, топологии, математического

анализа и теории конечных автоматов. Теорема Черча о неразрешимости логики предикатов.

10. Сложность алгоритмов и вычислений.

Подходы к оценкам сложности описания и выполнения алгоритмов. Модели вычислений. Сложность вычисления на машине Тьюринга. Временная и емкостная меры сложности. Свойства функций сложности. Нижние оценки. Сложность проблемы распознавания выполнимости для булевых функций (The satisfiability problem for boolean functions, SAT-problem, SAT). Сложность проблемы распознавания функциональной полноты системы булевых функций, сложность проблем вхождения в классы самодвойственных, монотонных и линейных функций. Проблемы распознавания и проблемы вхождения в языки. Существование сколь угодно сложно вычислимых функций.

11. Сложностная классификация переборных задач.

Класс P задач, детерминировано решаемых с полиномиальной сложностью. Класс NP задач, решаемых с полиномиальной сложностью на недетерминированной машине Тьюринга. Полиномиальная сводимость. NP-полные и NP-трудные задачи.

12. Теория алгоритмов и компьютерная практика.

Вычислительные возможности современных компьютеров. Математическая модель компьютера – машина с произвольным доступом к памяти. (МПД). RAM-A machine with random access to memory. МПД - вычислимые функции и их связь с частично рекурсивными функциями.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»
http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Дурнев В. Г. Элементы теории множеств и математической логики: учеб. пособие для вузов - Ярославль, ЯрГУ, 2009.
<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20090231.pdf>
2. Дурнев В. Г. Элементы теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов - Ярославль, ЯрГУ, 2008. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20080230.pdf>
3. М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов - СПб., Лань, 2022.
<https://reader.lanbook.com/book/247400>
4. И. А. Лавров, Л. Л. Максимова Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов – М: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
<https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN5922100262-SCN0000/000.html>

б) дополнительная литература

1. А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: "Мир", 1983.
2. А. Н. Колмогоров, А.Г. Драгагин. Математическая логика. Дополнительные главы. М.: МГУ. 1984.
3. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011. <https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN9785922113014-SCN0000/000.html>
4. Э. Мендельсон. Введение в математическую логику. М.: "Наука". 1976.
5. Б. А. Трахтенброт. Алгоритмы и вычислительные автоматы. М.: "Советское радио". 1974.
6. Дж. Шенфилд. Математическая логика. М.: "Наука". 1975.

7. А. А. Марков, Н. М. Нагорный. Теория алгоритмов. М.: "Наука". 1984.
8. М. С. Мирзоев, В. Л. Матросов Теория алгоритмов: учебное пособие - Москва : Прометей, 2019. <https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN9785907100657-SCN0000/000.html>
9. Герасимов А.С. Курс математической логики и теории вычислимости. СПб., ЛЕМА, 2011.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор(ы):

Профессор, доктор физ.-матем. наук

Дурнев В.Г.

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины
«Математическая логика»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,
используемые в процессе текущей аттестации**

Домашние задания по теме 2 "Логика высказываний и логика предикатов"

Задания для самостоятельного решения № 1 - 47 из параграфа 1 части II сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов

Задания для самостоятельного решения № 1.1 - 1.29 из параграфа 1 главы I сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов

Задания для самостоятельного решения № 1- 45 из параграфа 5 части II сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов

Задания для самостоятельного решения № 5.1 - 5.42 из параграфа 5 главы I сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов

Домашние задания по теме 3 "Булевы функции"

Задания для самостоятельного решения № 1 - 36 из параграфа 2 части II сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов

Задания для самостоятельного решения № 8.1 - 8.45 из параграфа 8 главы 2 сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов

Домашние задания по теме 4 "Логические исчисления. Исчисление высказываний"

Задания для самостоятельного решения № 1 - 48 из параграфа 3 части II сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов

Задания для самостоятельного решения № 3.1 - 3.10 из параграфа 3 главы I сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов

Домашние задания по теме 5 "Исчисление предикатов"

Задания для самостоятельного решения № 1 - 54 из параграфа 6 части II сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов

Задания для самостоятельного решения № 6.1 - 6.15 из параграфа 6 главы I сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов

Домашние задания по теме 6 "Метод резолюций"

Задания для самостоятельного решения № 1 - 54 из параграфа 6 части II сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Домашние задания по теме 7 "Применения математической логики в информатике"

Задания для самостоятельного решения в конце параграфов 6.2 и 6.3 главы 6 учебного пособия Герасимов А.С. Курс математической логики и теории вычислимости. СПб., ЛЕМА, 2011. 284 с.

Домашние задания по теме 8 "Алгоритмические модели. Элементы теории алгоритмов"

Задания для самостоятельного решения № 1 - 44 из параграфа 1 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Задания для самостоятельного решения № 1 - 25 из параграфа 2 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Задания для самостоятельного решения № 15.1 - 15.19 из параграфа 15 главы 3 сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

Домашние задания по теме 9 "Алгоритмическая разрешимость и неразрешимость"

Задания для самостоятельного решения № 1 - 48 из параграфа 3 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Задания для самостоятельного решения № 1 - 43 из параграфа 4 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Домашние задания по теме 10 "Сложность алгоритмов и вычислений"

Задания для самостоятельного решения № 16.1 - 16.26 из параграфа 16 главы 3 сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

Домашние задания по теме 11 "Сложностная классификация переборных задач "

Задания для самостоятельного решения № 16.1 - 16.26 из параграфа 16 главы 3 сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

Контрольная работа

Задания для контрольной работы по теме № 5 "Исчисление предикатов"

- 1) Доказать теорему дедукции для исчисления предикатов.
- 2) Построить вывод формулы А из множества гипотез Г.
- 3) С использованием теоремы дедукции доказать выводимость формулы А из множества гипотез Г.
- 4) Доказать тождественную истинность любой выводимой в исчислении предикатов формулы.
- 5) Как связаны между собой теорема адекватности, теорема непротиворечивости, и теорема о полноте?

Примечание. Каждый вариант задания определяется выбором конкретной формулы А и множества гипотез Г.

Темы рефератов

- 1) Основные этапы формирования математической логики.
- 2) Секвенциальное исчисление предикатов.
- 3) Применения математической логики в информатике - верификация компьютерных программ.
- 4) Основные этапы формирования теории алгоритмов.
- 5) Алгоритмически неразрешимые проблемы в алгебре.
- 6) Алгоритмически неразрешимые проблемы в теории алгоритмов.
- 7) Алгоритмически неразрешимые проблемы в математической логике.
- 8) Алгоритмически неразрешимые проблемы в топологии.
- 9) Алгоритмически неразрешимые проблемы в теории дифференциальных уравнений.
- 10) Алгоритмически неразрешимые проблемы в математическом анализе.
- 11) Оценка сложности алгоритмов.
- 12) Сложностные классы. Невырожденность сложностной иерархии.
- 13) Машины Шенфильда и RAM.

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

- 1) Язык логики высказываний: алфавит, пропозициональные переменные и пропозициональные связки, формулы. Интерпретации, истинностное значение формулы в интерпретации. Тавтологично истинные и выполнимые формулы.
- 2) Язык логики предикатов: сигнатура, термы и формулы, свободные и связанные вхождения переменных. Интерпретации. Значение замкнутого терма в интерпретации. Истинностное значение замкнутой формулы в интерпретации.
- 3) Оценки. Значение терма и формулы на оценке при данной интерпретации. Выполнимые, тавтологично истинные и тавтологично ложные формулы. Равносильность формул, основные соотношения равносильности и их использование для упрощения формул. Предваренные нормальные формы, дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы.
- 4) Булевы функции и функции многозначной логики. Их представление термами над заданной системой функций. Представление булевых функций формулами логики высказываний и многочленами Жегалкина.
- 5) Замкнутые классы функций. Критерии полноты для булевых функций и функций многозначной логики.
- 6) Представление функций многозначной логики рядами Фурье. Методы вычисления коэффициентов Фурье. Псевдобулевы функции и их задание. Минимизация булевых функций.
- 7) Логические исчисления. Общее понятие о логическом исчислении.
- 8) Язык, аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Вывод и выводимость формул в исчислении высказываний. Вывод из множества гипотез.
- 9) Теорема дедукции. Теорема Э. Поста для исчисления высказываний. Непротиворечивость исчисления высказываний. Теоремы адекватности и непротиворечивости для исчисления высказываний.
- 10) Исчисление предикатов. Язык, логические аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Вывод и выводимость формул в исчислении предикатов. Вывод и выводимость формул из множества гипотез.
- 11) Теорема дедукции. Вспомогательные правила вывода. Эквивалентность формул. Приведение формул к нормальным формам.
- 12) Теоремы непротиворечивости и адекватности.
- 13) Теорема К.Геделя о полноте для исчисления предикатов. Непротиворечивость исчисления предикатов.

- 14) Элементы теории моделей. Теорема А.И.Мальцева о компактности и ее приложения. Применение исчисления предикатов для записи математических утверждений и для автоматизации доказательства теорем.
- 15) Метод резолюции. Применение исчисления предикатов для доказательства теорем. Секвенциальный и натуральный вывод в исчислении предикатов. Эрбановские интерпретации. Теорема Эрбрана.
- 16) Сколемовская стандартная форма. Семантические деревья. Метод резолюции для логики предикатов. Унификация. Теорема о наиболее общем унификаторе. Теорема о полноте метода резолюции для логики предикатов.
- 17) Применение логики предикатов в дедуктивных базах данных и экспертных системах.
- 18) Основные понятия логического программирования: хорновские дизъюнкты, SLD - резолюция. Методика составления и реализация логических программ.
- 19) Применения математической логики в информатике. Исчисление Хоара для доказательства корректности программ.
- 20) Логико-математические подходы к верификации компьютерных программ. Операционная семантика. Оценки для интерпретаций языков. Значение терма и формулы на данной оценке.
- 21) Аксиоматическая семантика программ. Триады Хоара. Аксиомы и правила вывода исчисления Хоара. Корректность исчисления Хоара относительно операционной семантики.
- 22) Элементы теории алгоритмов. Интуитивное понятие алгоритма и его характерные черты. Задачи, приводящие к необходимости уточнения понятия алгоритма. Алгоритмы и вычислимые функции. Представляющая функция алгоритма.
- 23) Машины Тьюринга-Поста: внешний и внутренний алфавиты, программы. Конфигурации. Композиция и ветвление машин Тьюринга. Вычислимость и правильная вычислимость функций по Тьюрингу. Принцип Тьюринга- Поста-Черча.
- 24) Частично рекурсивные, рекурсивные и примитивно рекурсивные функции. Тезис Черча.
- 25) Правильная вычислимость любой частично рекурсивной функции.
- 26) Частичная рекурсивность любой вычислимой по Тьюрингу функции.
- 27) Нормальные алгорифмы А.А.Маркова. Примеры. Принцип Маркова. Композиция нормальных алгоритмов.
- Связь с машинами Тьюринга и частично рекурсивными функциями.
- 28) Алгоритмическая разрешимость и неразрешимость. Нумерация слов в счетном алфавите и арифметизация алгоритмов.
- 29) Массовые алгоритмические проблемы. Примеры алгоритмически неразрешимых массовых проблем: проблема остановки для машин Тьюринга (The halting problem for Turing machines), проблема самоприменимости для машин Тьюринга. Примеры алгоритмически разрешимых и неразрешимых задач из математической логики, теории алгоритмов, алгебры, теории чисел, теории формальных грамматик, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, топологии, математического анализа и теории конечных автоматов.
- 30) Теорема Черча о неразрешимости логики предикатов.
- 31) Сложность описания и выполнения алгоритмов. Подходы к оценкам сложности алгоритмов и вычислений. Сложность вычисления на машине Тьюринга. Временная и емкостная меры сложности.
- 32) Свойства функций сложности. Нижние оценки. Сложность распознавания проблемы выполнимости для булевых функций (The satisfiability problem for boolean functions, SAT-problem, SAT). Сложность проблемы распознавания функциональной полноты системы булевых функций, сложность проблем вхождения в классы самодвойственных, монотонных и линейных функций.
- 33) Существование сколь угодно сложно вычислимых функций.

34) Теория алгоритмов и компьютерная практика. Вычислительные возможности современных компьютеров. Математическая модель компьютера – машина с произвольным доступом к памяти (МПД). RAM-A machine with random access to memory. МПД - вычислимые функции и их связь с частично рекурсивными функциями

3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

3.1 Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций

Пороговый уровень (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

Продвинутый уровень (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объеме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;

- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

Высокий уровень (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

3.2 Описание процедуры выставления оценки

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

**Приложение №2 к рабочей программе дисциплины
«Математическая логика»**

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине "Математическая логика" являются лекции, что связано, прежде всего, с очень высоким уровнем абстрактности изучаемых в математической логике понятий, ее глубокими и прочными связями с основаниями математики и с ее философскими вопросами. По большинству тем предусмотрены практические занятия, целью которых является закрепление лекционного материала путем решения специальным образом подобранных задач и упражнений.

Для успешного освоения дисциплины важно самостоятельное решение достаточно большого набора хорошо подобранных задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы математической логики. Для решения задач необходимо не только знать, но и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярная работа с конспектами лекций и рекомендованной литературой.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков работы с основными понятиями математической логики в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде устного опроса на практических занятиях и контрольной работы в 5-ом семестре. Также проводятся консультации (при необходимости) по лекционному материалу и разбору некоторых заданий для самостоятельной работы.

В конце изучения дисциплины студенты сдают экзамен. Экзамен принимается по экзаменационным билетам, каждый из которых включает в себя два теоретических вопроса. Билеты формируются на основании списка вопросов к экзамену, который охватывает полностью всю программу дисциплины. На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется 3 дня, во время подготовки к экзамену предусмотрена групповая консультация.