

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра компьютерной безопасности и математических методов обработки информации

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Дискретная математика

Направление подготовки (специальности)
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 24.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 05.05.2025

1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина "Дискретная математика" обеспечивает приобретение фундаментальных знаний, умений и навыков в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО, способствует развитию логического мышления и формированию математического и общенаучного мировоззрения. Целью изучения дисциплины является овладение базовыми понятиями и методами основных разделов дискретной математики, таких как теория графов и комбинаторика, приобретение навыков использования аппарата дискретной математики, а также формирование математической культуры обучающегося, фундаментальная подготовка по основным разделам дискретной математики.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина "Дискретная математика" относится к обязательной части образовательной программы и входит в модуль «Математика III». Для успешного усвоения данной дисциплины важно, чтобы студент овладел также знаниями, умениями и навыками, которые формируются в процессе изучения дисциплин: «Введение в теорию множеств и логическую символику», «Основания математики», «Алгебра и теория чисел».

Компетенции, сформированные при изучении дисциплины "Дискретная математика", используются учащимися при изучении последующих общепрофессиональных и специальных дисциплин, в частности дисциплин "Алгоритмы на графах", "Комбинаторная оптимизация", "Теория вероятностей", "Математическая статистика", а также в научно-исследовательской работе.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Универсальные компетенции		
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	И-УК-1.1 Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации	Знает: - основные понятия, принципиальные результаты и методы дискретной математики.
	И-УК-1.2 Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности	Умеет: - строить графические модели задач и явлений практического характера по специальности; - применять стандартные графические модели к решению прикладных задач
	И-УК-1.3 Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска,	Владеет навыками: - работы с учебной и научной литературой, самоорганизации и самообразования.

	создания научных текстов	
Общепрофессиональные компетенции		
ОПК-1 Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	И-ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	Знает: - основные понятия теории графов; основные операции на графах; свойства и типы графов; - основные результаты, классические оптимизационные задачи на графах; - основные модели комбинаторной математики, формулы чисел размещений, перестановок, сочетаний с повторениями и без повторений, модели комбинаторики разбиений; - принцип включения и исключения, основные классы производящих функций, понятие рекуррентного соотношения, алгоритм решения линейного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами. Умеет: - применять формулы числа размещений, перестановок, сочетаний, применять принцип включений и исключений для решения комбинаторных задач; - умеет строить производящую функцию для последовательности чисел, решать однородные и неоднородные линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Владеет навыками: - решения стандартных задач по комбинаторике и теории графов.
	И-ОПК-1.2 Умеет использовать их в профессиональной деятельности	Знает: - основные комбинаторные алгоритмы, основные алгоритмы решения задач теории графов: алгоритмы обхода в глубину и ширину, топологической сортировки, алгоритма поиска кратчайших путей в графах, алгоритм построения минимального каркаса, поиска гамильтонова цикла в графе, задачи о коммивояжере, задачи о максимальном потоке.
	И-ОПК-1.3 Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Умеет: - анализировать конкретные прикладные задачи на предмет возможности применения теории графов и комбинаторных методов для их решения. Владеет навыками - решения комбинаторных задач, включая использование аппарата производящих функций - решения задач по теории графов различными методами, включая алгоритмический подход к решению задач на графах,

		- использования библиотек прикладных программ для решения прикладных задач с использованием компьютера.
--	--	---

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **5** зачетных единиц, **180** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Вводная лекция. Краткий исторический очерк. Разделы дискретной математики. Комбинаторика. Введение. Правила суммы и произведения. Выборки.	4	2					4	
2	Числа размещений, перестановок, сочетаний с повторениями и без повторений.	4	2	4				4	Самостоятельная работа 1
3	Формула включений и исключений.	4	2	2				4	Задания для домашней работы Устный опрос
4	Биномиальная теорема. Свойства биномиальных коэффициентов.	4	2	2				4	Устный опрос
5	Полиномиальная теорема	4	2	2				4	
6	Комбинаторика разбиений. Некоторые комбинаторные алгоритмы.	4	2	2				4	Лабораторная работа 1 Расчетная работа 1
7	Производящие функции. Основные определения и свойства.	4	2	2				4	
8	Линейные однородные и неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.	4	2	4				4	Задания для домашней работы
						4		8	Контрольная работа по комбинаторике
9	Теория графов. Введение. Виды графов и операции над ними. Теорема Эйлера	4	2	2				4	Самостоятельная работа 2 Расчетная работа 2

	о сумме степеней вершин. Изоморфизм.								
10	Пути, циклы, связность. Вершинная и реберная связность. Двусвязные графы.	4	2	2				4	Задания для домашней работы Устный опрос
11	Деревья. Остов минимального веса.	4	2	2				4	Задания для домашней работы Устный опрос
12	Эйлеровы графы. Необходимые и достаточные условия. Построение эйлеровой цепи.	4	2	2				4	Задания для домашней работы Устный опрос
13	Гамильтоновы графы. Задача поиска гамильтонова цикла в графе, задача о коммивояжере.	4	2	2				4	Задания для домашней работы Устный опрос
14	Плоские и планарные графы. Формула Эйлера. Теорема Понтрягина-Куратовского.	4	2	2				4	Задания для домашней работы Устный опрос
15	Некоторые алгоритмы на графах. Обходы в глубину и ширину, топологическая сортировка, алгоритм поиска кратчайшего пути в графе, задача о максимальном потоке.	4	2	2				4	Лабораторная работа 2
16	Обзор тем, не вошедших в курс. Паросочетания. Раскраски.	4	2			4		4	
						2	0,5	33,5	Экзамен
	ИТОГО		32	32		10	0,5	105,5	

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Обобщающая лекция – проводится в завершение изучения раздела или темы для закрепления знаний. На лекции вновь выделяются основные вопросы, используются обобщающие таблицы, схемы, алгоритмы, позволяющие включить усвоенные знания в новые связи и зависимости, переводя их на более высокие уровни усвоения.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

Консультация – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- электронный университет Moodle ЯрГУ;
- Adobe Acrobat Reader.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»

http://www.lib.uniyl.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>

- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>

- Электронная библиотечная система «Консультант студента»

<https://www.studentlibrary.ru>

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Башкин М.А., Якимова О.П. Дискретная математика: сборник задач. - Ярославль, ЯрГУ, 2012. <http://www.lib.uniyl.ac.ru/edocs/iuni/20120208.pdf>

2. Башкин М.А., Якимова О.П. Дискретная математика: сборник задач. Часть 2. - Ярославль, ЯрГУ, 2013.

3. Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко Задачи и упражнения по дискретной математике - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. <https://www.studentlibrary.ru/ru/book/ISBN9785922104777.html>

4. Князьков, В. С. Введение в теорию множеств и комбинаторику / Князьков В. С. , Волченская Т. В. - Москва : Национальный Открытый Университет "ИНТУИТ", 2016.

- Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : https://www.studentlibrary.ru/book/intuit_093.html

б) дополнительная литература

1. Дурнев В. Г., Башкин М. А., Якимова О. П. Элементы дискретной математики. Ч.1 – Ярославль: ЯрГУ, 2007 <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20070295.pdf>
2. Дурнев В. Г., Башкин М. А., Якимова О. П. Элементы дискретной математики. Ч.2 – Ярославль: ЯрГУ, 2007. – <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20070280.pdf>
3. Курейчик, В. М. Учебное пособие по курсу "Дискретная математика". Раздел "Теория графов" : учебное пособие / В. М. Курейчик, В. В. Курейчик, Е. Р. Мунтян. - Ростов-на-Дону : ЮФУ, 2022. - 164 с. - ISBN 978-5-9275-4257-4. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785927542574.html>
4. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. / Н. Я. Виленкин - М.: Наука, 1969. - 328 с.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор(ы):

Доцент кафедры КБиММОИ, к.ф.-м.н.

Федотова Н. П.

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины
«Дискретная математика»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

Самостоятельная работа 1. Вариант 1.

1. Сколько существует четырехзначных чисел, в которых хотя бы одна семерка?
2. Сколько существует различных символьных последовательностей длины 7 в четырёхбуквенном алфавите {A, C, G, T}, которые содержат ровно три буквы A?
3. Сколькими способами Буратино, кот Базилио и лиса Алиса могут поделить между собой 5 одинаковых золотых монет?
4. На доске нарисованы 10 прямых общего положения. Сколько они образуют точек пересечения? На сколько частей они делят плоскость?
5. Сколькими способами 12 банок тушенки можно разложить по пяти по пяти рюкзакам туристов так, чтобы каждый нес хотя бы одну банку?
6. Сколько различных чисел может получиться перестановкой цифр числа 13557? Чему равна сумма всех этих чисел?

Самостоятельная работа 2. Вариант 1.

1. Определите, сколько рациональных членов содержится в разложении $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{20}$.
2. Найдите коэффициент при t^9 в разложении $(1 + 2t - 3t^2)^8$.
3. В разложении $(m+3)^n$ четвертый член равен 4455. Найдите n и m , если известно, что сумма биномиальных коэффициентов равна 2048.
4. Каков наибольший коэффициент разложения $(a+b)^n$, если сумма биномиальных коэффициентов равна 512?
5. Каков наибольший коэффициент разложения $(a+b+c+d)^n$, если сумма полиномиальных коэффициентов равна 4096?

Лабораторная работа 1. Вариант 1.

Дано натуральное число N . Рассмотрим его разбиение на натуральные слагаемые. Два разбиения, отличающихся только порядком слагаемых, будем считать за одно, поэтому можно считать, что слагаемые в разбиении упорядочены по невозрастанию. На вход подается единственное число $N \leq 40$.

Напишите программу, которая выводит все разбиения числа N на натуральные слагаемые в лексикографическом порядке.

Пример. Для $n = 5$ существуют такие способы разбиения на слагаемые:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1 = 3 + 2 = 4 + 1 = 5$$

Варианты расчетной работы 1

1. Сколько существует слов длины 7 в алфавите {a, b}, не содержащих под слова bb?
2. Дан словарь (набор слов), состоящий из 1 односложного слова, 2 двусложных слов и 3 трёхсложных слов. Сколько шестисложных строк можно составить, используя этот словарь? Повторы слов разрешены.

3. Сколько существует слов длины 8 в алфавите $\{a, b, c\}$, не содержащих подслова aa ?
4. Дан словарь, состоящий из слов «мрак», «ого», «парниша». Чего больше из них можно составить: трехсловных строк или шестисложных строк?
5. Сколько существует слов длины 8 в алфавите $\{a, b, c\}$, содержащих подслова bb ?
6. Дан словарь (набор слов), состоящий из 2 односложных слов, 4 двусложных слов и 8 трёхсложных слов. Сколько шестисложных строк можно составить, используя этот словарь? Повторы слов разрешены.
7. Сколько существует палиндромов длины 11 в алфавите $\{a, b\}$, не содержащих подслова aa ?
8. Сколько существует палиндромов длины 14 в алфавите $\{a, b\}$, не содержащих подслова bb ?
9. Сколько существует слов длины 5 в алфавите $\{C, V\}$, не содержащих подслова CCC ?
10. Дан словарь (набор слов), состоящий из 1 односложного слова и 3 двусложных слов. Сколько семисложных строк можно составить, используя этот словарь? Повторы слов разрешены.
11. Сколько существует слов длины 6 в алфавите $\{C, V\}$, содержащих подслова VVV ?
12. Сколько существует слов длины 9 в алфавите $\{a, b, c\}$, не содержащих подслова bbb ?
13. Дан словарь (набор слов), состоящий из 10 односложных слов, 10 двусложных слов и 10 трёхсложных слов. Сколько шестисложных строк можно составить, используя этот словарь? Повторы слов разрешены.
14. Сколько существует слов длины 4 в алфавите $\{a, b, c\}$, содержащих подслово bbb ?
15. Сколько существует слов длины 5 в алфавите $\{a, b, c\}$, не содержащих подслова bbb ?
16. Дан словарь (набор слов), состоящий из 1 односложного слова и 3 двусложных слов. Сколько пятисложных строк можно составить, используя этот словарь? Повторы слов разрешены.
17. Дан словарь, состоящий из слов «жуть», «мрак», «мрачный», «ого», «парниша», «хамите». Сколько из них можно составить трехсложных строк?
18. Сколько существует слов длины 5 в алфавите $\{a, b, c\}$, содержащих подслово bbb ?
19. Сколько существует слов длины 4 в алфавите $\{a, b, c, d\}$, содержащих подслово cba ?
20. Дан словарь (набор слов), состоящий из 1 односложного слова и 3 двусложных слов. Сколько 4-сложных строк можно составить, используя этот словарь? Повторы слов разрешены.
21. Сколько существует слов длины 4 в алфавите $\{a, b, c, d\}$, содержащих подслово bbb ?
22. Сколько существует слов длины 4 в 20-буквенном алфавите $\{a, b, c, \dots, t\}$ содержащих подслово cba ?
23. Дан словарь (набор слов), состоящий из 2 односложных слов и 6 двусложных слов. Сколько различных 5-сложных строк можно составить, используя этот словарь? Повторы слов разрешены.
24. Дан словарь, состоящий из слов «мрак», «ого», «хамите». Чего больше из них можно составить: трехсловных строк или шестисложных строк?
25. Сколько существует слов длины 4 в 20-буквенном алфавите $\{a, b, c, \dots, t\}$, содержащих подслово bbb ?
26. Сколько существует слов длины 5 в алфавите $\{C, V\}$, не содержащих подслова CC ?
27. Дан словарь (набор слов), состоящий из односложного слова, двусложного слова и трёхсложного слова. Сколько шестисложных строк можно составить, используя этот словарь? Повторы слов разрешены. [5]

Лабораторная работа 2. Вариант 1.

Дан ориентированный взвешенный граф. Найдите кратчайший путь от одной заданной вершины до другой.

В первой строке содержатся три числа: N , S и F ($1 \leq N \leq 100$, $1 \leq S, F \leq N$), где N – количество вершин графа, S – начальная вершина, а F – конечная. В следующих N строках вводится по N чисел, не превосходящих 100, – матрица смежности графа, где -1 означает отсутствие ребра между вершинами, а любое неотрицательное число – присутствие ребра данного веса. На главной диагонали матрицы записаны нули.

Требуется вывести последовательно все вершины одного (любого) из кратчайших путей, или одно число -1, если пути между указанными вершинами не существует.

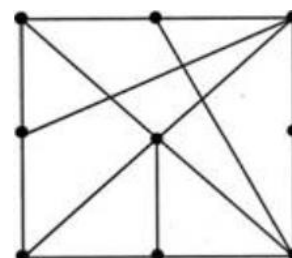
2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

1. Правило суммы, правило произведения.
2. Размещения без повторений и с повторениями.
3. Перестановки без повторений и с повторениями.
4. Сочетания без повторений.
5. Сочетания и с повторениями.
6. Полиномиальная теорема.
7. Биномиальная теорема.
8. Свойства биномиальных коэффициентов.
9. Формула включений и исключений.
10. Рекуррентные соотношения и производящие функции.
11. Числа Стирлинга и их свойства.
12. Решение линейные однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами.
13. Решение линейные неоднородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами.
14. Производящие функции. Основные определения и свойства.
15. Виды графов и операции над ними. Изоморфизм. Теорема Эйлера о сумме степеней вершин.
16. Двудольные графы. Теорема Кенига.
17. Вершинная и реберная связность.
18. Двусвязные графы.
19. Деревья
20. Минимальное остовное дерево. Алгоритмы Прима и Краскала
21. Плоские и планарные графы. Формула Эйлера, доказательство.
22. Непланарность K_5 и $K_{3,3}$, доказательство.
23. Формулировка теоремы Понтрягина- Куратовского (без доказательства).
24. Эйлеровы графы. Эйлеров цикл, путь. Критерии существования.
25. Гамильтоновы графы. Примеры. Θ - граф. Некоторые необходимые и некоторые достаточные условия существования гамильтонова цикла (без доказательства).
26. Обходы графа в глубину и его приложения.
27. Обходы графа в ширину и его приложения.
28. Алгоритм поиска кратчайшего пути в графе
29. Задача о максимальном потоке.
30. Задача о коммивояжере

Примерный билет к экзамену по дисциплине

1. Эйлеровы графы. Необходимые и достаточные условия.
2. Дана матрица смежности графа. Определите, является ли данный граф двудольным, эйлеровым, гамильтоновым, планарным, двусвязным.
3. Найдите коэффициент при t^{11} разложения $(2 - 3t - t^2)^k$, если сумма полиномиальных коэффициентов равна 2187.
4. Леша поднимается по лестнице из 10 ступенек. За один раз он прыгает вверх либо на одну ступеньку, либо на две ступеньки, либо на три. Сколькими способами Леша может подняться по лестнице?
5. Инженер Иванов (см. рисунок) усовершенствовал свою плату. Теперь она имеет 9 приборов и 17 проводников. Можно ли изготовить плату так, чтобы все проводники размещались на одной ее стороне?

0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0



Критерии выставления оценки

Билет состоит из 1 теоретического вопроса и 4 задач. Каждое задание оценивается в один балл. Базовая оценка равна сумме баллов. Оценка может быть понижена, если студент не выполнил все необходимые самостоятельные, контрольные и лабораторные работы. Оценка может быть повышена, если обучающийся выполнял кроме необходимых еще и дополнительные задания.

Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Дискретная математика»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине "Дискретная математика" являются лекции, что связано, прежде всего, с очень высоким уровнем абстрактности изучаемых в математической логике понятий, ее глубокими и прочными связями с основаниями математики и с ее философскими вопросами. По большому числу тем предусмотрены практические занятия, целью которых является закрепление лекционного материала путем решения специальным образом подобранных задач и упражнений.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для решения задач необходимо не только знать, но и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярная работа с конспектами лекций и рекомендованной литературой.