

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра общей математики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Дополнительные главы геометрии**

Направление подготовки (специальности)  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 24.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Целью курса является знакомство с различными разделами геометрии. Рассматриваются: евклидова, аффинная, проективная геометрии, а также – неевклидовы: сферическая геометрия и геометрия Лобачевского. При изложении материала для лучшего его усвоения используются два подхода: синтетический и аналитический.

Другой целью курса является выработка понимания у студентов взаимосвязи различных разделов геометрии, поэтому особое место уделяется в том числе методологии геометрии, в частности, роли аксиоматического метода при формировании различных геометрических разделов и «Эрлангенской» программе Ф. Клейна.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к обязательной части образовательной программы и входит в модуль «Математика I», подмодуль «Геометрия и топология». Для её успешного изучения необходимы знания и умения, полученные в средней школе, а также при изучении университетских курсов, относящихся к обязательной части образовательной программы: «Алгебра», «Аналитическая геометрия», «Математический анализ».

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Универсальные компетенции</b>		
<b>УК-1</b> Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	<b>И-УК-1.1</b> Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации	<b>Знать:</b> принципы работы с математическими литературными источниками
	<b>И-УК-1.2</b> Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности.	<b>Уметь:</b> соотносить различные подходы к геометрическому описанию действительности, использовать геометрический язык различных разделов геометрии.
	<b>И-УК-1.3</b> Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов	<b>Владеть:</b> навыками исследовательской работы: анализом, синтезом, обобщением.
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
<b>ОПК-1</b> Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в	<b>И-ОПК-1.1</b> Обладает базовыми знаниями, полученными в	<b>Знать:</b> определения основных геометрических понятий различных разделов

области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности.	области математических и (или) естественных наук.	геометрии, формулировки теорем.
	<b>И-ОПК-1.2</b> Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	<b>Уметь:</b> решать задачи, предусмотренные данной дисциплиной.
	<b>И-ОПК-1.3</b> Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	<b>Владеть:</b> геометрическими методами решения математических задач.

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **3** зачетные единицы, **108** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1.	Расширенная евклидова плоскость, 3- пространство.	3	2	2		1		7	Задания для самостоятельной работы.
2.	Теорема Дезарга. Простое и сложное отношение точек на прямой. Синтетический подход.	3	2	2		1		6	Задания для самостоятельной работы, контрольная работа №1
3.	Проективная прямая, проективная плоскость	3	2	2				6	Задания для самостоятельной работы
4.	Проективные координаты	3	2	2				7	Задания для самостоятельной работы
5.	Содержание проективной геометрии. Принцип двойственности.	3	1	1				6	Задания для самостоятельной работы

6.	Проективные преобразования	3	2	2		1		7	Задания для самостоятельной работы
7.	Двойное отношение. Аналитический подход.	3	2	2				7	Задания для самостоятельной работы, контрольная работа №2
8.	Общий взгляд на геометрию.	3	1	1				6	Задания для самостоятельной работы
9.	Неевклидовы геометрии	3	2	2		1		9	Задания для самостоятельной работы
							0,3	10,7	Зачёт
	<b>Итого</b>		<b>16</b>	<b>16</b>		<b>4</b>	<b>0,3</b>	<b>71,7</b>	

### Содержание разделов дисциплины:

#### **Тема 1. Расширенная евклидова плоскость, 3-пространство.**

Дополнение евклидовой плоскости и пространства несобственными элементами. Свойства собственных и несобственных точек, прямых и плоскостей.

#### **Тема 2. Теорема Дезарга. Простое и сложное отношение точек на прямой. Синтетический подход.**

Теорема Дезарга на плоскости и в пространстве. Различные случаи теоремы Дезарга. Простое отношение трёх точек на прямой. Сложное отношение четырёх точек на прямой, свойства. Гармоническая четвёрка. Полный четырёхвершинник.

#### **Тема 3. Проективная прямая, проективная плоскость.**

Предпосылки возникновения понятий «проективная прямая, плоскость» (аналитический подход). Основные определения.

#### **Тема 4. Проективные координаты.**

Проективные координаты на прямой и на плоскости. Формулы перехода от одной проективной системы координат к другой.

#### **Тема 5. Содержание проективной геометрии. Принцип двойственности.**

Определение проективной геометрии. Примеры проективных и непроективных теорем. Построение утверждений, двойственных данным.

#### **Тема 6. Проективные преобразования.**

Группа проективных преобразований прямой на себя. Группа проективных преобразований прямой на себя. Аналитический подход. Связь одномерных и двумерных проективных преобразований.

#### **Тема 7. Двойное отношение. Аналитический подход.**

Нахождение проективных координат точек гармонической четвёрки. Аналитический подход к определению двойного отношения четырёх точек прямой. Свойства двойного отношения.

#### **Тема 8. Общий взгляд на геометрию.**

Содержание программы Клейна. Примеры. Аксиоматический метод. Пятый постулат Евклида. Абсолютная геометрия.

#### **Тема 9. Неевклидовы геометрии.**

История возникновения геометрии Лобачевского. Основные факты геометрии Лобачевского. Модель Клейна. Геометрия Римана.

## **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»  
<https://www.studentlibrary.ru>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.**

### **а) основная литература**

1. Берже М. Геометрия: в 2 т. Т. 1, ч. 1 - 3. / М. Берже; пер. с фр - М.: Мир, 1984. - 559 с.

**б) дополнительная литература**

1. Г. Буземан, П. Келли Проективная геометрия и проективные метрики - Москва: URSS: ЛИБРОКОМ, 2009.
2. Ж. Дьедоне, Дж. Керолл, Д. Мамфорд Геометрическая теория инвариантов - М., Мир, 1974.

**9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине:**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

**Автор(ы) :**

Кандидат педагогических наук, доцент  
Кафедры общей математики

Никулина Е.В.

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Дополнительные главы геометрии»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**Контрольная работа №1 « Теорема Дезарга. Простое и сложное отношение точек на  
прямой. Синтетический подход»**

1. Выполнить рисунок к одному из случаев теоремы Дезарга:
  - когда только одна сторона одного треугольника параллельна соответственной стороне другого треугольника.
  - когда две стороны одного треугольника параллельны двум соответственным сторонам другого треугольника.Ответить на вопрос: Выполняется ли в данных случаях теорема Дезарга? Чем эти случаи отличаются от случая общего расположения треугольников?
2. Выписать все возможные двойные отношения для данных четырёх точек, сгруппировать их, отнести в одну группу равные. Для конкретного случая найти, чему оно равно, если известно, что отношение  $(A,B,C,D)=k$ .

Правила выставления оценки по результатам контрольной работы:

Отлично – обе задачи решены верно с полным обоснованием.

Хорошо – обе задачи решены верно, но есть небольшие погрешности в обосновании. Обе задачи решены верно с обоснованием, есть вычислительная ошибка.

Удовлетворительно – Одна задача решена верно, с обоснованием, вторая – частично.

Неудовлетворительно – решено не более одной задачи.

**Контрольная работа №2 « Двойное отношение. Аналитический подход»**

1. Для заданных трёх точек на прямой построить четвёртую гармоническую. Описать процесс построения. Выписать соответствующий полный четырёхвершинник, диагональные точки, диагонали. Построить другие две гармонические четвёрки.
2. Заданы проективными координатами четыре конкретные базисные точки, найти координаты всех точек и прямых, «определяемых» полным четырёхвершинником.

Правила выставления оценки по результатам контрольной работы:

Отлично – обе задачи решены верно с полным обоснованием.

Хорошо – обе задачи решены верно, но есть небольшие погрешности в обосновании. Обе задачи решены верно с обоснованием, есть вычислительная ошибка.

Удовлетворительно – Одна задача решена верно, с обоснованием, вторая – частично.

Неудовлетворительно – решено не более одной задачи.

**Задания для самостоятельной работы**

**Раздел 1. Расширенная евклидова плоскость, 3-пространство.**

1. Доказать, что в расширенном евклидовом пространстве имеют место следующие факты:

- 1) Любые две различные прямые, как собственные, так и несобственные, лежащие в одной плоскости, всегда пересекаются в одной точке.
- 2) Любые три различные точки, как собственные, так и несобственные, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость.

2. Показать, что совокупность параллельных между собой плоскостей образует именно *пучок* плоскостей с несобственной осью.

**Раздел 2.** Теорема Дезарга. Простое и сложное отношение точек на прямой. Синтетический подход.

1. Выполнить рисунки для плоской и пространственной теорем Дезарга, для прямой и обратной.
2. Выполнить рисунки к различным видам гомологии на расширенной плоскости.

**Раздел 3.** Проективная прямая, проективная плоскость.

1. Принадлежат ли тройки одному классу?
2. Будут ли два класса, содержащие одну тройку, тождественны?
3. Привести пример уравнения прямой в проективной плоскости; уравнения, не являющегося уравнением прямой.
4. Найти уравнение прямой, проходящей через две точки проективной плоскости.
5. Найти точку пересечения двух прямых в проективной плоскости.

**Раздел 4.** Проективные координаты

1. Выяснить, являются ли точки коллинеарными.
2. Выяснить, являются ли прямые сходящимися.
3. Будут ли данные точки базисными точками системы координат на прямой (плоскости)?
4. Сформулировать определение проективных координат прямой пучка  $x$ .

**Раздел 5.** Содержание проективной геометрии. Принцип двойственности.

1. Будут ли данные теоремы проективными?
2. Определить, будут ли точка и прямая инцидентными?
3. Сформулировать утверждения двойственные данным.

**Раздел 6.** Проективные преобразования

1. Всегда ли произведение отображений определено?
2. Привести пример, иллюстрирующий тот факт, что произведение отображений не коммутативно.
3. Показать, что проективные преобразования прямой на себя образуют группу.
4. Доказать, что существует только одно проективное отображение, переводящее три попарно различные точки одной прямой, взятые в определённом порядке, в три попарно различные точки, заданные на другой прямой.

**Раздел 7.** Двойное отношение. Аналитический подход.

1. Сформулировать двойственные утверждения к рассмотренным на лекции определениям и фактам.
2. Доказать свойство двойного отношения для случая, когда меняется порядок в обеих парах.
3. Чему равно двойное отношение, если три из точек на прямой являются базисными, а четвёртая задана определёнными координатами?
4. Чему равно двойное отношение гармонической четвёрки точек, если менять их порядок?

**Раздел 8.** Общий взгляд на геометрию.

Содержание программы Клейна. Примеры. Аксиоматический метод. Пятый постулат Евклида. Абсолютная геометрия.

1. Привести пять примеров эквивалентов пятого постулата Евклида.
2. Привести примеры теорем, входящих в абсолютную геометрию.
2. Описать предмет изучения евклидовой, аффинной, проективной геометрий с точки зрения программы Клейна.

**Раздел 9.** Неевклидовы геометрии

1. Примеры аксиоматических теорий.



2. Сформулировать утверждение о сумме углов треугольника в геометрии Евклида, Лобачевского, Римана.
3. Описать модель Пуанкаре геометрии Лобачевского.
4. Перечислить требования к аксиоматической теории. Пояснить.
5. Подготовить ответ на вопрос: применение неевклидовых геометрий.

**Таблица соответствия контрольных мероприятий, компетенций и индикаторов их достижения**

<b>Контрольное мероприятие</b>	<b>Индикатор освоения компетенции</b>
<i>Работа на практических занятиях</i>	<i>И-УК-1.1, И-УК-1.2, И-УК-1.3, И-ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3</i>
<i>Задания для КР№1</i>	<i>ОПК-1.1, ОПК-1.2</i>
<i>Задания для КР№1</i>	<i>ОПК-1.1, ОПК-1.2</i>
<i>Задания для СРС 1,2</i>	<i>И-УК-1.3, ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3</i>
<i>Задания для СРС 3,4,6,7</i>	<i>ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3</i>
<i>Задания для СРС 5</i>	<i>И-УК-1.1, И-УК-1.2, И-УК-1.3, И-ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3</i>
<i>Задания для СРС 8,9</i>	<i>И-УК-1.1, И-УК-1.2, И-УК-1.3, И-ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3</i>

## 2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

### Список вопросов к зачету:

1. Расширенная евклидова плоскость, 3-пространство.
2. Теорема Дезарга. Простое и сложное отношение точек на прямой. Синтетический подход.
3. Проективная прямая, проективная плоскость.
4. Проективные координаты
5. Содержание проективной геометрии. Принцип двойственности.
6. Проективные преобразования
7. Двойное отношение. Аналитический подход.
8. Общий взгляд на геометрию.
9. Неевклидовы геометрии

## 3. Правила выставления оценки на зачёте

В конце семестра проводится тест в LMS Электронный университет Moodle ЯрГУ. Тест состоит из 15 вопросов.

После прохождения теста студент получает одну из отметок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

**Оценка «Отлично»** выставляется студенту, если за тест он получил отметку из промежутка [4,5; 5] (решил верно число заданий из промежутка [13,5; 15]).

**Оценка «Хорошо»** выставляется студенту, если за тест он получил отметку из промежутка [3,5; 4,5] (решил верно число заданий из промежутка [10,5; 13,5)).

**Оценка «Удовлетворительно»** выставляется студенту, если за тест он получил отметку из промежутка [3; 3,5) (решил верно число заданий из промежутка [9; 10,5)).

**Оценка «Неудовлетворительно»** выставляется студенту, если за тест он получил отметку меньшую трёх (решил верно меньше девяти заданий).

По итогам контрольных, самостоятельных мероприятий семестра, а также с учётом отметки за тест студент получает «зачёт» или «незачёт».

«Зачёт» - если каждая отметка не ниже трёх.

**Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций**

**Пороговый уровень:**

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии изученных разделов математики, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- **владение** инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении практических задач;
- **способность самостоятельно** применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- **усвоение основной** литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- **самостоятельная работа** на практических занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, **достаточный уровень культуры** исполнения заданий.

**Продвинутый уровень:**

- **достаточно** полные и систематизированные знания в объёме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- **владение** инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- **способность** самостоятельно решать практические задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- **усвоение основной и дополнительной** литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- **умение ориентироваться в базовых** теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- **самостоятельная работа** на практических занятиях, участие в групповых обсуждениях, **высокий уровень культуры** исполнения заданий.

**Высокий уровень:**

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать **обоснованные** выводы;
- **безупречное владение** инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- **способность** самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- **полное и глубокое усвоение основной и дополнительной** литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- **умение ориентироваться в основных** теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- **активная самостоятельная работа** на практических занятиях, **творческое** участие в групповых обсуждениях, **высокий уровень культуры** исполнения заданий.

#### **Описание процедуры выставления оценки**

Оценка «незачёт» выставляется студенту, у которого формируемые дисциплиной элементы компетенций УК-1, ОПК-1 сформированы ниже, чем на пороговом уровне. В противном случае студент получает «зачёт».

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Дополнительные главы геометрии»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основными формами работы преподавателя со студентами в курсе являются: лекции, практические занятия, аудиторные контрольные работы, домашние самостоятельные работы.

Основные трудности у студентов в процессе изучения дисциплины связаны со следующими факторами:

- В силу достаточно редко используемых студентами геометрических построений в процессе обучения в университете усвоение курса «Дополнительные главы геометрии» вызывает определенные трудности. Поэтому необходимо регулярно посещать аудиторные занятия, иметь при себе необходимые инструменты (простой карандаш, линейку, ластик), выполнять домашние задания.

- В процессе изучения дисциплины необходимо учиться перестраивать свой взгляд на окружающую действительность в зависимости от изучаемой геометрии или от изучаемого подхода (синтетического или аналитического), учиться оперировать языками различных геометрических разделов, выработать единый взгляд на геометрию.

Курс «Дополнительные главы геометрии» заканчивается зачётом. При выставлении итоговой отметки учитывается выполнение всех работ в течение семестра, а также теста в конце семестра.