

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Основания математики

Направление подготовки (специальности)
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 15.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 05.05.2025

1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения учебной дисциплины является формирование у обучающихся общепрофессиональных и профессиональных компетенций в процессе подготовки студентов к изучению основных математических дисциплин, предусмотренных учебным планом.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной. Она знакомит слушателей с аксиоматическим подходом к построению математических теорий, прививает математическую строгость умозаключений и полезна при изучении любых математических дисциплин, особенно «Алгебра», «Алгебра и теория чисел», «Аналитическая геометрия», «Геометрия и топология», «Теория чисел», «Теория групп», «Топология», «Теория вероятностей» и «Математическая логика», «Современная геометрия», «Введение в коммутативную алгебру и элементы алгебраической геометрии». Курс также имеет связи с философией.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретение следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Профессиональные компетенции		
ПК-1 Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий	И-ПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий	Знать: принципы построения аксиоматических теорий, понятие аксиомы, теоремы, следствия системы аксиом, определения, понятия непротиворечивости, совместности, независимости системы аксиом, о формальных и неформальных теориях, истинности и доказуемости, об аксиоматических системах геометрий Евклида, Гильберта, Лобачевского, абсолютной геометрии, аксиомах эквивалентности, порядка, коммутативного кольца, поля, аксиоматическом построении поля действительных чисел, аксиомах метрики и аксиомах меры
	И-ПК-1.2 Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в	Уметь: анализировать несложный математический текст на предмет корректности определений и умозаключений

	математике и информатике	
	И-ПК-1.3 Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в математике и информатике	Владеть навыком: работы с аксиоматиками абсолютной геометрии, эквивалентности, порядка, коммутативного кольца и поля, метрики и меры

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **3** зачетных единицы, **108** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Вводная лекция: математика и её место в системе научного знания.	1	1	1					Беседы на семинарах, обсуждения примеров
2	Ранняя аксиоматика: «Начала» Евклида	1	1	1					
3	Элементарная геометрия Д. Гильберта.	1	3	3		2		20	Беседы на семинарах, обсуждения примеров Задание для самостоятельной работы № 1
4	Непротиворечивость, совместность, независимость системы аксиом. Истинность и доказуемость	1	1	1					
5	Аксиомы порядка. Аксиомы конгруэнтности.	1	2	2				15	Беседы на семинарах, обсуждения примеров
6	Аксиомы непрерывности и связанные с ними логические проблемы	1	1	1					
7	Аксиома параллельных. Евклидова геометрия, геометрия Лобачевского и абсолютная геометрия	1	1	1					
8	Аксиомы предшествования (линейный порядок)	1	2	2				15	Беседы на семинарах, обсуждения примеров

9	Аксиомы эквивалентности	1	1	1					
10	Аксиомы коммутативного кольца и аксиомы поля. Упорядоченные поля и аксиоматика поля действительных чисел.	1	2	2		2		20	Беседы на семинарах, обсуждения примеров Задание для самостоятельной работы № 2
11	Метрика и мера.	1	1	1					
							0,3	1,7	зачёт
	ИТОГО		16	16		4	0,3	71,7	

Содержание разделов дисциплины:

1. Вводная лекция: математика и её место в системе научного знания.

Абстрагирование и идеализация как источники математических понятий. Независимость математических выводов от опыта и области явлений: отличие математики от естественных и общественных наук. Индукция и дедукция. Универсальность математических знаний. Истинность/ложность математических высказываний. Контрпримеры. Что такое аксиоматический метод построения математической теории.

2. Ранняя аксиоматика: «Начала» Евклида.

3. Элементарная геометрия Д. Гильберта.

Аксиомы связи. Примеры теорем и доказательств. Неопределяемые и определяемые понятия.

4. Непротиворечивость, совместность, независимость системы аксиом. Истинность и доказуемость.

Модель системы аксиом. Геометрия тетраэдра как модель системы аксиом связи. Примеры дискретных геометрий. Следствия системы аксиом и теоремы аксиоматической теории. Всякая теорема аксиоматической теории является следствием её аксиом. Понятие о формальных и неформальных языках и аксиоматических теориях.

5. Аксиомы порядка. Аксиомы конгруэнтности.

Понятия отрезка и луча. Существование луча. Угол. Построение целочисленных точек числовой прямой.

6. Аксиомы непрерывности и связанные с ними логические проблемы.

Аксиомы Архимеда и Кантора, их связь с понятием натурального ряда. Аксиома Дедекинда.

7. Аксиома параллельных. Евклидова геометрия, геометрия Лобачевского и абсолютная геометрия.

Пятый постулат Евклида и эквивалентные ему утверждения. Некоторые результаты геометрии Лобачевского. Геометрия Евклида и модель Пуанкаре геометрии Лобачевского. Абсолютная геометрия.

8. Аксиомы предшествования (линейный порядок).

Строгий и нестрогий порядки. Строгий и нестрогий линейные порядки. Линейно упорядоченное множество.

9. Аксиомы эквивалентности.

Разбиение и смежные классы. Построение рациональных чисел из натуральных. Богатые и бедные аксиоматические теории.

10. Аксиомы коммутативного кольца и аксиомы поля. Упорядоченные поля и аксиоматика поля действительных чисел.

Единственность единичного элемента в коммутативном кольце. Кольца вычетов. Единственность в поле элемента, обратного к данному. Примеры полей. Типы сечений в линейно упорядоченных множествах. Аксиома Дедекинда. Построение действительных чисел как бесконечных десятичных дробей. Существование и единственность поля действительных чисел. Существование и единственность в математике.

11. Метрика и мера.

Аксиомы метрики, метрическая функция и метрическое пространство. Мера, конечная и счётная аддитивности. Класс измеримых подмножеств. Аксиомы измеримости.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»

http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>

- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>

- Электронная библиотечная система «Консультант студента»
<https://www.studentlibrary.ru>

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Успенский В. А. Что такое аксиоматический метод?. / В. А. Успенский - Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000. - 98с.

б) дополнительная литература

1. Вейль Г. Математическое мышление. / Г. Вейль; Под ред. Б. В. Бирюкова, А. Н. Паршина. Пер. с англ. и нем. - М.: Наука, 1989. - 400с.
2. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики - М.: Наука, 1982.
3. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Теория доказательств арифметики - М.: Наука, 1982.
4. Ковалёв С. П., Родин А. В. Аксиоматический метод в современной науке и технике: прагматические аспекты // Epistemology & Philosophy of Science. 2016. Т. XLVII <https://cyberleninka.ru/article/n/aksiomaticheskiiy-metod-v-sovremennoy-nauke-i-tehnike-pragmaticheskie-aspekty/viewer>
4. Ружа И. Основания математики. Пер. с нем. Киев: Вища школа. Головное изд-во. 1981.
5. Успенский, В. А. Апология математики : сборник статей / В. А. Успенский. - Москва : Альпина нон-фикшн, 2017. - 622 с. - ISBN 978-5-91671-735-8. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785916717358.html>

в) ресурсы сети Интернет

1. Аксиоматический метод: Электронная философская энциклопедия https://elenph.org/individual?uri=https://litvinovg.pro/text_structures%23elenphArticle/w2p.html_2020_T_9_shalak_aksiomaticheskii_metod
2. Беклемишев Л. FAQ: Аксиоматический метод. 6 фактов о проблеме математических доказательств, программе Гильберта и смысле в математике <https://postnauka.ru/faq/31113>

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор(ы):

Профессор кафедры АМЛ, д.ф.-м.н.

Н.В. Тимофеева

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины
«Основания математики»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

Задание для самостоятельной работы № 1

1. Используя аксиомы связи, докажите, что 1) каждая точка лежит на некоторой прямой, 2) каждая прямая лежит на некоторой плоскости. **И-ПК-1.2**
2. Постройте определения следующих понятий: данный луч принадлежит данной прямой, полуплоскость, ребро полуплоскости, данный луч принадлежит данной полуплоскости. **И-ПК-1.3**
3. Сформулируйте теорему о существовании полуплоскости, аналогичную приведённой в лекции теореме о существовании луча. **И-ПК-1.3**
4. В геометрии девяти точек перечислите все пары непересекающихся прямых. **И-ПК-1.2**

Задание для самостоятельной работы № 2

1. Докажите, что эквивалентность дробей согласована со сложением и умножением (определение согласованности даётся). **И-ПК-1.2**
2. Решите уравнение $6x=4$ в кольце вычетов по модулю 10. Решите то же самое уравнение в кольце вычетов по модулю 7. Решите уравнение $2x=7$ в кольце вычетов по модулю 10. **И-ПК-1.2**
3. В геометрии девяти точек введите декартовы координаты, используя поле вычетов по модулю 2. Напишите уравнения всех прямых в этой геометрии. Найдите условие параллельности прямых в построенной «аналитической геометрии девяти точек». **И-ПК-1.3**
4. Постройте плоскость над полем вычетов по модулю 2, аналогичную «аналитической геометрии девяти точек» и обычной аналитической геометрии на вещественной плоскости. Сколько точек в полученной вами геометрии? Сколько прямых? Нарисуйте модель этой геометрии и выпишите уравнения всех прямых в ней. **И-ПК-1.3**

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Зачёт выставляется по итогам сдачи студентами заданий для самостоятельной работы и собеседования по темам курса.

Круг вопросов для **собеседования (И-ПК-1.1)** к зачёту даётся содержанием тем курса. Акцент делается на общелогические и гносеологические вопросы и современные аксиоматики.

Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Основания математики»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Основания математики» являются лекции. По всем темам предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам, а также обсуждения важных аспектов теории и разбор примеров.

Во время изучения курса важно обращать внимание на построение определений, аксиом, теорем, доказательств, следить за условиями применимости тех или иных утверждений. Это вырабатывает навык математически строгих рассуждений и поможет не совершать ошибок при изучении других математических курсов. Задачи разнообразны по содержанию, трудности и типологии. Полезно как решать задачи самим, так и анализировать готовые решения, отслеживая корректность умозаключений. Кроме того, очень полезно участвовать в обсуждениях как во время лекций, так и на семинарах.

Для получения зачёта необходимо отчитаться по заданиям для самостоятельной работы и пройти собеседование по теории.