

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра общей математики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Алгоритмы теории приближения

Направление подготовки (специальности)
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 24.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 05.05.2025

1. Цели освоения дисциплины

Целью преподавания дисциплины является ознакомление слушателей с основными понятиями, результатами и методами теории приближения и демонстрация того, как методы теории приближения могут быть использованы при решении различных математических задач.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной.

Для освоения данной дисциплины студентам нужны знания из курсов математический анализ, линейная алгебра, аналитическая геометрия. Теория приближения является одним из разделов функционального анализа. Используя методы теории приближения, можно решать задачи численного анализа, дифференциальных и интегральных уравнений. Алгоритмы теории приближения активно используются в теории распознавания образов, при сжатии информации. Знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплины «Алгоритмы теории приближения», используются студентами в процессе изучения специальных дисциплин, а также в ходе выполнения курсовых и выпускных квалификационных работ

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Профессиональные компетенции		
ПК-4 Способен использовать современные методы разработки и реализации конкретных алгоритмов математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ моделирования	И-ПК-4.1 Знает современные методы разработки и реализации алгоритмов математических моделей на базе языков и пакетов прикладных программ моделирования	Знать: <ul style="list-style-type: none">- основные понятия теории приближения;- основные алгоритмы и методы решения важнейших задач теории приближения.- основные алгоритмы и методы решения важнейших задач теории приближения;- свободно ориентироваться в современных системах программирования;- проблематику математических и технических задач, решаемых методами теории приближений.
	И-ПК-4.2 Умеет разрабатывать и реализовывать алгоритмы математических моделей на базе языков и пакетов прикладных программ моделирования	Уметь: <ul style="list-style-type: none">- строго доказывать утверждения;- четко сформулировать результат;- увидеть следствия полученного результата.- реализовывать основные способы и алгоритмы решения задач;- применять понятия, результаты и методы теории приближения в других разделах математики.- оценить трудоемкость выбранного алгоритма

		для решения поставленной задачи; - разработать удобный визуальный пользовательский интерфейс и практически реализовать выбранный алгоритм; - оценить погрешность решения задачи.
	И-ПК-4.3 Имеет практический опыт разработки и реализации алгоритмов на базе языков и пакетов прикладных программ моделирования.	Владеть навыками: – математическим аппаратом теории приближения; - применять методы теории приближения для решения задач численного анализа. - писать программы на основе известных алгоритмов; тестировать их на различных примерах, сравнивать скорости приближения и трудоемкости алгоритмов.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачет. един., 72 акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Вводная лекция	6	1	2					
2	Многочлены Лагранжа и Ньютона	6	2	4		1		2	Самостоятельная работа №1
3	Выбор узлов интерполяции. Кратная интерполяция	6	2	4		1			
4	Вычисление и графики многочленов Чебышева	6	2	4		1		2	Самостоятельная работа №2
5	Алгоритм построения интерполяционного многочлена с узлами в точках Чебышева	6	1	2					
6	Телескопический метод.	6	1	2				2	Самостоятельная работа №3
7	Алгоритм быстрого преобразования Фурье	6	1	3				2	Самостоятельная работа №4

8	Метод наименьших квадратов.	6	2	3		1		2	Самостоятельная работа №5
9	Алгоритм Ремеза	6	2	3				2	Самостоятельная работа №6
10	Приближение ломаными	6	1	2		1			
11	Алгоритмы аппроксимации рациональными дробями	6	1	3		1			
							0,3	5,7	зачет
	Всего		16	32		6	0,3	17,7	

Содержание разделов дисциплины:

Тема 1. Вводная лекция.

Предмет и метод дисциплины "Алгоритмы теории приближения". Роль П.Л. Чебышева в формировании теории приближения как науки. Применение методов теории приближения в численном анализе.

Тема 2. Многочлены Лагранжа и Ньютона.

Форма Лагранжа. Разделение разности и форма Ньютона. Трудоемкость вычисления интерполяционных многочленов. Кратная интерполяция. Алгоритм гнездового перемножения для вычисления производных многочлена, представленного в форме Ньютона.

Тема 3. Выбор узлов интерполяции.

Интерполяция с равномерными узлами. Пример Рунге, показывающий, что интерполяционные многочлены могут не сходиться к исходной функции. Интерполяция с кратными узлами и ее применение для вычисления производных многочлена, заданного в форме Ньютона.

Тема 4. Вычисление и графики многочленов Чебышева.

Рекуррентная формула для вычисления многочленов Чебышева. Многочлены Чебышева как многочлены, наименее отклоняющиеся от нуля.

Тема 5. Алгоритм построения интерполяционного многочлена с узлами в точках Чебышева.

Сходимость алгоритма и его трудоемкость: сравнение с интерполяционными многочленами, построенными по равномерным разбиениям.

Тема 6. Телескопический метод.

Использование многочленов Чебышева для понижения степени приближающего многочлена; примеры.

Тема 7. Алгоритм быстрого преобразования Фурье.

Тригонометрические многочлены. Ряд Фурье. Алгоритм Кули - Таки. Трудоемкость алгоритма. Сравнение алгоритма БПФ и ПФ.

Тема 8. Метод наименьших квадратов.

Пространство Лебега. Сведение задачи нахождения многочлена наилучшего приближения к решению системы линейных уравнений. Процесс ортогонализации.

Тема 9. Алгоритм Ремеза.

Теорема Чебышева. Чебышевский альтернанс. Примеры точного вычисления многочлена наилучшего приближения. Модифицированный алгоритм Ремеза.

Тема 10. Приближение ломаными.

Интерполяция ломаной линией. Связь интерполяционной ломаной с ломаной наилучшего приближения. Аппроксимация ломаными линиями по методу наименьших квадратов. Выбор узлов «сетки» и узлов интерполяции.

Тема 11. Алгоритмы аппроксимации рациональными дробями.

Алгоритмы равномерной дробно - рациональной аппроксимации. Алгоритм Чини-Лоеба. Сходимость алгоритма и оценка скорости сходимости. Алгоритм среднеквадратического приближения функций рациональными дробями.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине могут использоваться:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»
http://www.lib.uniyl.ac.ru/opac/bk_cat_find.php.
- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>

- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»
<https://www.studentlibrary.ru>

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Брудный Ю.А., Иродова И.П. Прикладная теория приближения. Учебное пособие. Ярославль, 1986г. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/19860230.pdf>
2. Иродова И.П. Алгоритмы теории приближения. Учебно-методическое пособие. Ярославль, ЯрГУ, 2019. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20190202.pdf>

б) дополнительная литература

1. Брудный Ю.А., Шалашов В.К. Теория сплайнов. Учебное пособие - Ярославль, 1983г.
2. Брудный Ю.А. Теория приближений. Учебное пособие. – Ярославль, 1981г. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/19810231.pdf>
3. Бердышев В. И., Петрак Л. В. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. - Екатеринбург, УрО РАН 1999.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Автор:

Профессор кафедры общей математики, доктор физ.-мат. наук

И.П. Иродова

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины
«Алгоритмы теории приближения»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,
используемые в процессе текущей аттестации**

Самостоятельные работы

1. Самостоятельная работа № 1

Для функции $f(x)$ построить интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона, выбрав в качестве узлов интерполяции равномерное разбиение отрезка $[a, b]$ на n частей. Вычислить погрешность приближения. Сравнить трудоемкость вычисления

- а) $f(x) = \sqrt{x}$, $[a, b] = [0, 9]$, $n = 3$.
- б) $f(x) = |x - 1| + x$, $[a, b] = [-2, 1]$, $n = 3$.

2. Самостоятельная работа № 2

Для функции $f(x)$ построить интерполяционный многочлен Ньютона, выбрав в качестве узлов интерполяции нули многочлена Чебышева и равномерное разбиение отрезка $[a, b]$ на n частей. Сравнить погрешность приближений.

- а) $f(x) = x^4 + x + 1$, $[a, b] = [-1, 1]$, $n = 3$.
- б) $f(x) = |x - 1| + x^2$, $[a, b] = [-2, 1]$, $n = 3$.

3. Самостоятельная работа № 3

Применить телескопический метод к функции $f(x)$

- а) $f(x) = \sin 2x$, $x \in [-1, 1]$.
- б) $f(x) = e^x$, $x \in [-1, 1]$.

4. Самостоятельная работа № 4

1. Используя метод БПФ, вычислить многочлен наилучшего приближения P_{n-1} для функции f , если

- 1. $f(x) = \sin^4 x$, $n = 2^3$;
- 2. $f(x) = \text{sign}(\cos x)$, $n = 2^4$;
- 3. $f(x) = \arcsin(\sin x)$, $n = 2^5$;
- 4. $f(x) = |\sin x|$, $n = 2^4$;
- 5. $f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$, $n = 2^4$;
- 6. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $n = 2^6$.

Сравнить результаты с точными решениями

- 1. $p_7(x) = \frac{7}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$;

$$2. p_{15}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^7 (-1)^k \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1};$$

$$3. p_{31}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{15} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)x;$$

$$4. p_{15}(x) = \frac{7}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^7 \frac{\cos 2kx}{4k^2-1};$$

$$5. p_{15}(x) = -\ln 2 \sum_{n=1}^{15} \frac{\cos nx}{n};$$

$$6. p_{63}(x) = \sum_{n=1}^{63} \frac{\sin nx}{n}.$$

5. Самостоятельная работа № 5

Используя метод наименьших квадратов, приблизить функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ прямой и параболой. Сравнить погрешности приближений.

а) $f(x) = x^2 + x + 2$, $[a, b] = [0, 4]$, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-1, 0, 1, 2, 3)$,
 $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (2, 3, 4, 0, 6)$.

б) $f(x) = 2x^2 - x - 2$, $[a, b] = [-1, 3]$, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-1, 0, 1, 2, 3)$,
 $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (0, -3, 4, 2, 5)$.

6. Самостоятельная работа № 6

1. Найти с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$:

а) $e(f, C(-1, 1), P_2)$, $f(x) = |x|$;

б) $e(f, C(-\pi, \pi), P_3)$, $f(x) = \sin x$;

в) $e(f, C(0, 4), P_3)$, $f(x) = \sqrt{x}$;

г) $e(f, C(0, 4), P_4)$, $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

Каждую задачу решить с помощью алгоритма Ремеза и модифицированного алгоритма Ремеза.

Индивидуальные задания.

Темы индивидуальных заданий:

1) Сравнение трудоемкости построения интерполяционного многочлена Лагранжа и Ньютона.

2) Алгоритм быстрого преобразования Фурье.

3) Интерполяционные многочлены с узлами интерполяции в точках Чебышева.

4) Модифицированный алгоритм Ремеза.

5) Разложение в ряд по многочленам Чебышева.

6) Телескопический метод.

7) Метод наименьших квадратов.

8) Приближение ортогональными многочленами.

- 9) Симплекс-метод для решения задач теории приближения.
- 10) Квадратурные формулы.
- 11) Кусочно-многочленная аппроксимация с нефиксированными узлами.
- 12) Применение кусочно-многочленной аппроксимации для сжатия изображения

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Вопросы к зачету по дисциплине "Алгоритмы теории приближения".

- 1) Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона. Трудоемкость их вычисления.
- 2) Кратная интерполяция.
- 3) Алгоритм гнездового перемножения
- 4) Многочлены Чебышева и их свойства.
- 5) Выбор узлов интерполяции. Алгоритм построения интерполяционного многочлена с узлами в нулях многочлена Чебышева.
- 6) Телескопический метод.
- 7) Тригонометрические многочлены. Ряд Фурье.
- 8) Алгоритм быстрого преобразования Фурье
- 9) Сведение задачи нахождения многочлена наилучшего к решению системы линейных уравнений. Метод наименьших квадратов.
- 10) Процесс ортогонализации.
- 11) Ортогональные многочлены
- 12) Теорема Чебышева. Чебышевский альтернанс.
- 13) Алгоритм Ремеза вычисления многочлена наилучшего приближения.
- 14) Модифицированный алгоритм Ремеза.
- 15) Кусочно-линейная аппроксимация в пространстве непрерывных функций
- 16) Кусочно-линейная аппроксимация в гильбертовом пространстве
- 17) Алгоритмы аппроксимации дробно-рациональными функциями.

3. Правила выставления оценки на зачете.

По окончании освоения дисциплины в конце 6-го семестра студенту выставляется оценка «зачет» или «незачтено».

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого компетенция сформирована не ниже, чем на пороговом уровне, включающего:

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;

- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Алгоритмы теории приближения»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Алгоритмы теории приближения» являются лекции. По большинству тем предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. В процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Учитывая то, что практических занятий не очень много, большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях. Предполагается, что студенты напишут не менее двух программ с использованием алгоритмов, которые были изучены.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков, в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде контрольных работы. Почти на каждом занятии проводятся небольшие самостоятельные работы. Также проводятся консультации по разбору заданий для самостоятельной работы, которые вызвали затруднения.

В конце шестого семестра студенты сдают зачет. Зачет выставляется по итогам работы в семестре и ответам на вопросы по темам, которые были изучены. Если студенты плохо работали в течение семестра, то им нужно будет написать итоговую контрольную работу. Контрольную работу можно не писать, если будут предъявлены программы, в которых используются алгоритмы, изученные в курсе "Алгоритмы теории приближения".