

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра нелинейной динамики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Теория вероятностей и математическая статистика**

Направление подготовки (специальности)  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 21.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Учебная дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» реализует требования федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению подготовки «Математика и компьютерные науки».

Цель дисциплины - формирование у студентов, будущих специалистов, способности применять основные методы теории вероятностей и математической статистики при решении задач в их будущей профессиональной деятельности (научно-исследовательской, проектной, контрольно-аналитической), а также формирование на основе этой способности иных необходимых общекультурных и профессиональных компетенций.

Задачи дисциплины - дать обучаемым необходимые знания по основным разделам современной теории вероятностей, теории случайных процессов и математической статистики; ознакомить их с принципами проведения физического эксперимента и обработки его результатов; привить им умения и навыки применения стандартных методов и моделей к решению теоретико-вероятностных и статистических задач, и использования при этом расчетных формул, таблиц, графиков, библиотек и пакетов прикладных компьютерных программ; способствовать развитию у обучаемых строгого математического и творческого мышления.

Учебная дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» является составной частью профессиональной подготовки по направлению подготовки «Математика и компьютерные науки».

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» относится к обязательной части образовательной программы и входит в модуль «Математика II».

Знания и умения, приобретаемые обучаемыми по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика», затем непосредственно используются ими при изучении

дисциплин базового цикла:

– «Физика»;

– «Теория информации»,

и дисциплин профессионального цикла:

– «Криптографические методы защиты информации»;

– «Сети и системы передачи информации».

Знания и практические навыки, полученные в результате освоения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», используются студентами при разработке курсовых и дипломных работ, в научно-исследовательской работе.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		

<b>ОПК-1</b> Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	<b>И-ОПК-1.1</b> Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	<b>Знать:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- аксиоматику и основные понятия теории вероятностей;</li> <li>- основные правила вычисления вероятностей событий, классические вероятностные схемы (модели);</li> <li>- основные числовые и функциональные характеристики распределений случайных величин и их свойства;</li> <li>- понятия сходимости случайных величин и классические предельные теоремы теории вероятностей;</li> <li>- основные теоретико-вероятностные и статистические распределения и их свойства;</li> <li>- основные неравенства теории вероятностей;</li> <li>- основные понятия теории случайных процессов, свойства марковских процессов, в том числе свойства пуассоновского и винеровского процессов;</li> <li>- постановку задач и основные понятия математической статистики;</li> <li>- метод точечного оценивания оценок параметров распределений, свойства оценок;</li> <li>- метод интервального оценивания параметров распределений, способы построения доверительных интервалов в стандартных статистических моделях;</li> <li>- основные понятия и методы проверки статистических гипотез;</li> <li>- основные понятия и методы статистической теории принятия решений.</li> </ul>
	<b>И-ОПК-1.2</b> Умеет использовать их в профессиональной деятельности	<b>Уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- анализировать конкретные прикладные задачи на предмет возможности применения теоретико-вероятностных и статистических методов для их решения;</li> <li>- строить теоретико-вероятностные и статистические модели задач и явлений практического характера по специальности</li> </ul>
	<b>И-ОПК-1.3</b> Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	<b>Владеть навыком:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- применения стандартных вероятностных и статистических методов и моделей к решению типовых теоретико-вероятностных и статистических задач;</li> <li>- использования расчетных формул, таблиц, графиков при решении вероятностных и статистических задач.</li> </ul>
<b>Универсальные компетенции</b>		
<b>УК-1</b> Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	<b>И-УК-1.1</b> Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации	<b>Знать:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- принципы сбора, отбора и обобщения информации</li> </ul> <b>Уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- работать с литературой с целью получения новых знаний по теории вероятностей и математической статистике</li> </ul>
	<b>И-УК-1.3</b>	<b>Владеть:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- навыками научного исследования с</li> </ul>

	Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов	применением вероятностно-статистических методов; - навыками поиска научной информации в библиотеках и интернете; - опытом работы с реферативной, справочной, периодической и монографической литературой с целью получения новых знаний по теории вероятностей и математической статистике; навыками использования библиотек прикладных программ для решения прикладных вероятностных и статистических задач с использованием компьютера.
--	--	--

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **8** зачетных единиц, **288** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
	Раздел 1. Теория вероятностей. Понятие вероятности. Алгебра событий.								
1	Понятие случайного события и его вероятности. Классическая вероятностная модель для случая равновозможных исходов. Приложения комбинаторики в теории вероятностей.	5	2	2				2	
2	Геометрическая вероятность. Задача Бюффона. Понятие о методах Монте-Карло.	5	2	2		1		2	
3	Операции над событиями. Теорема сложения. Формула включения и исключения. s-алгебра. Борелевские множества. Аксиоматика Колмогорова. Свойства вероятностной меры.	5	2	2				2	

4	Непрерывность вероятности. Теоремы конструкции и реконструкции.	5	2	2		1		2	
5	Условная вероятность. Теорема умножения. Независимость событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.	5	2	2				2	
6	Схема независимых испытаний Бернулли. Наиболее вероятное число успехов. Полиномиальная схема.	5	2	2		1		2	
7	Предельные теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона. Приложения к математической статистике.	5	4	4				2	Контрольная работа 1
	<b>Раздел 2. Теория вероятностей. Случайные величины.</b>								
8	Случайная величина и ее распределение. Функция распределения. Дискретные и непрерывные распределения. Сингулярные распределения. Плотность распределения	5	2	2		1		2	
9	Основные числовые характеристики случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, моменты высших порядков, асимметрия, эксцесс).	5	2	2		1		2	
10	Основные дискретные распределения и их свойства (биномиальное, пуассоновское, геометрическое)	5	2	2				2	
11	Основные непрерывные распределения и их свойства (равномерное, показательное, нормальное)	5	2	2		1		2	
12	Функция от случайной величины.	5	2	2				2	
13	Многомерные случайные величины. Совместное и частные распределения. Совместная таблица, функция и плотность распределения. Независимость случайных величин.	5	2	2		1		2	

14	Распределения суммы, разности, произведения и частного независимых случайных величин. Примеры.	5	2	2			2	
15	Неравенства Коши-Буняковского (Шварца), Чебышёва. Математическое ожидание. Связь с интегралом Лебега.	5	2	2		1	8	Самостоятельная работа 1
						2	0,5	33,5 экзамен
	<b>Итого за 5 семестр 144 часа</b>		<b>32</b>	<b>32</b>		<b>10</b>	<b>0,5</b>	<b>69,5</b>
16	Мера линейной зависимости случайных величин, свойства. Многомерное нормальное распределение. Линейная регрессия.	6	2	2			2	
17	Условные распределения и условные математические ожидания (одной случайной величины по другой).	6	2	2			2	
18	Производящая функция, свойства. Характеристическая функция. Свойства	6	4	4		1	2	
19	Различные виды сходимости случайных последовательностей, их взаимосвязь. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.	6	2	2		1	8	Самостоятельная работа 2
	<b>Раздел 3. Понятие случайного процесса.</b>							
20	Основные понятия. Марковские цепи. Процессы с непрерывным временем: пуассоновский и винеровский.	6	2	2	1	1	6	Контрольная работа 2
	<b>Раздел 4. Математическая статистика.</b>							
21	Задачи математической статистики. Эмпирическая функция распределения. Гистограмма. Полигон частот.	6	4	4	2	1	2	
22	Оценки неизвестных параметров распределения. Несмещённость, состоятельность, эффективность статистических оценок неизвестных параметров распределения. Неравенство Рао-Крамера. Примеры.	6	4	4		1	2	

23	Выборочные оценки математического ожидания, дисперсии. Методы получения оценок. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия	6	4	4		1		2	
24	Построение доверительных интервалов для оценки параметров на примере биномиального распределения. Построение доверительных интервалов для оценки параметров нормального распределения: а) для математического ожидания в случае известной дисперсии; б) для математического ожидания в случае неизвестной дисперсии; в) для дисперсии и среднеквадратичного отклонения $s$ .	6	4	4		1		2	
25	Проверка статистических гипотез. Проверка независимости случайных величин. Однородность случайных выборок. Критерий $\chi^2$ . Ошибки 1-го и 2-го рода. Критерий Вилкоксона. Другие критерии	6	4	4		1		8	Самостоятельная работа 3
						2	0,5	33,5	экзамен
	<b>Итого за 6 семестр 144 часа</b>		32	32		10	0,5	69,5	
	<b>ИТОГО</b>		64	64		20	1	139	

### Содержание разделов дисциплины:

#### Раздел 1. Теория вероятностей. Понятие вероятности. Алгебра событий.

1. Понятие случайного события и его вероятности. Классическая вероятностная модель для случая равновероятных исходов. Приложения комбинаторики в теории вероятностей.
2. Геометрическая вероятность. Задача Бюффона. Понятие о методах Монте-Карло.
3. Операции над событиями. Теорема сложения. Формула включения и исключения.  $\sigma$ -алгебра. Борелевские множества. Аксиоматика Колмогорова. Свойства вероятностной меры.
4. Непрерывность вероятности. Теоремы конструкции и реконструкции.
5. Условная вероятность. Теорема умножения. Независимость событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Формула полной вероятности для условных вероятностей.
6. Схема независимых испытаний Бернулли. Наиболее вероятное число успехов. Полиномиальная схема.
7. Предельные теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона. Приложения к математической статистике.

#### Раздел 2. Теория вероятностей. Случайные величины.

8. Случайная величина и ее распределение. Функция распределения. Дискретные и непрерывные распределения. Сингулярные распределения. Плотность распределения

9. Основные числовые характеристики случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, моменты высших порядков, асимметрия, эксцесс).
10. Основные дискретные распределения и их свойства (биномиальное, пуассоновское, геометрическое)
11. Основные непрерывные распределения и их свойства (равномерное, показательное, нормальное)
12. Функция от случайной величины.
13. Многомерные случайные величины. Совместное и частные распределения. Совместная функция и плотность распределения. Независимость случайных величин.
14. Распределения суммы, разности, произведения и частного независимых случайных величин. Примеры.
15. Неравенства Коши-Буняковского (Шварца) и Чебышёва. Математическое ожидание. Связь и интегралом Лебега.
16. Мера линейной зависимости случайных величин, свойства. Линейная регрессия. Многомерное нормальное распределение. Связь независимости и некоррелируемости случайных величин.
17. Условные распределения и условные математические ожидания (одной случайной величины по другой).
18. Производящая функция, свойства. Характеристическая функция. Свойства
19. Различные виды сходимости случайных последовательностей, их взаимосвязь. Закон больших чисел (теоремы Чебышева и Бернулли), усиленный закон больших чисел (теорема Колмогорова), центральная предельная теорема (Линдеберга-Леви, Ляпунова).

### **Раздел 3. Понятие случайного процесса.**

20. Основные понятия: Случайные процессы, основные понятия, основные функциональные характеристики. Классификация случайных процессов на основе взаимных корреляционных свойств сечений: с независимыми приращениями, стационарные, стохастически непрерывные, марковские. Цепи Маркова: Конечные однородные цепи Маркова. Переходные вероятности. Уравнения Колмогорова-Чепмена. Простейшая классификация состояний конечной цепи Маркова. Стационарное распределение цепи Маркова. Эргодическое (финальное) распределение. Эргодическая теорема для конечных цепей Маркова. Марковские процессы с непрерывным временем. Марковский однородный процесс с непрерывным временем и дискретным множеством состояний. Переходные вероятностные функции. Уравнения Колмогорова-Чепмена. Интенсивности переходов. Непрерывность и дифференцируемость переходных вероятностных функций. Системы прямых и обратных дифференциальных уравнения Колмогорова, и их решение. Стационарное распределение и система уравнений для его отыскания. Пуассоновский случайный процесс (простейший поток однородных событий): Пуассоновский случайный процесс, его марковость, однородность, стохастическая непрерывность, и консервативность. Простейший поток однородных событий, его связь с пуассоновским процессом. Распределение интервалов между моментами смены состояний пуассоновского процесса. Винеровский случайный процесс: Винеровский случайный процесс, его марковость, однородность и стохастическая непрерывность. Свойства траекторий. Броуновское движение. Стандартный винеровский процесс. Принцип отражения. Распределение основных функционалов стандартного винеровского процесса: момента первого достижения заданного уровня; максимума траектории на отрезке; первого момента достижения максимума (закон арксинуса).

### **Раздел 4. Математическая статистика.**

21. Задачи математической статистики. Эмпирическая функция распределения. Гистограмма. Полигон частот.
22. Оценки неизвестных параметров распределения. Несмещенность, состоятельность, эффективность статистических оценок неизвестных параметров распределения. Неравенство Рао-Крамера. Примеры .



23. Выборочные оценки математического ожидания, дисперсии. Методы получения оценок. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия
24. Построение доверительных интервалов для оценки параметров на примере биномиального распределения. Построение доверительных интервалов для оценки параметров нормального распределения в случаях : а) для математического ожидания в случае известной дисперсии; б) для математического ожидания в случае неизвестной дисперсии; в) для дисперсии и среднеквадратичного отклонения  $s$ .
25. Задача проверки статистических гипотез. Простые и сложные гипотезы. Критерии проверки гипотез. Критическая область. Ошибки 1-го и 2-го родов при проверке гипотез. Уровень значимости и мощность критерия. Наиболее мощный и равномерно наиболее мощный критерий. Лемма Неймана-Пирсона. Применение леммы Неймана-Пирсона для построения наиболее мощного критерия проверки простых гипотез относительно значений параметров нормального распределения. Проверка сложных гипотез о параметрах нормального распределения. Проверка равенства средних и дисперсий двух нормальных совокупностей.
- Проверка независимости случайных величин. Однородность случайных выборок. Критерий  $\chi^2$ . Ошибки 1-го и 2-го рода. Критерий Вилкоксона. Другие критерии.

## **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:  
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»

[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>

- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>

- Электронная библиотечная система «Консультант студента»  
<https://www.studentlibrary.ru>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Гмурман, В. Е., Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для бакалавров - М., Юрайт, 2023 <https://urait.ru/viewer/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-510437>

2. А. М. Зубков, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков. Сборник задач по теории вероятностей: учеб. пособие - СПб., Лань, 2022 <https://reader.lanbook.com/book/184062>

### **б) дополнительная литература**

1. Боровков А. А. Теория вероятностей: Учеб.пособие для вузов. / А. А.Боровков; М-во высш.и сред.спец.образования СССР - 2-е изд.,перераб.и доп. - М.: Наука, 1986. - 431с.

2. Боровков А. А. Математическая статистика: учебник для вузов. / А. А. Боровков - 4-е изд., стереотип. - СПб.: Лань, 2010. - 703 с.

3. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие - М., Юрайт, 2023.  
<https://urait.ru/viewer/rukovodstvo-k-resheniyu-zadach-po-teorii-veroyatnostey-i-matematicheskoy-statistike-510436>

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

### **Автор(ы):**

Доцент, к.ф.-м.н.

Д. В. Гринёв

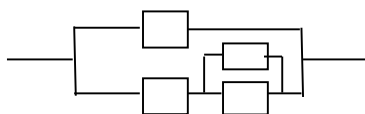
**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Теория вероятностей и математическая статистика»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**Типовые задания для контрольной работы № 1**

1. Каждый узел цепи выходит из строя в течение некоторого времени  $t$  с вероятностью  $q$  независимо от других узлов. Найти вероятность выхода из строя следующей цепи:



2. Бросают две игральные кости. Какова вероятность, что сумма очков равна 9?
3. В магазин поступили 25 одинаковых изделий, из них только 15 изделий 1-го завода. Продавец случайно отбирает 5 изделий. Какова вероятность, что среди них окажется ровно 1 изделие 1-го завода?
1. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания при одном выстреле для каждого из стрелков – 0,8, 0,6, 0,7 соответственно. Какова вероятность промаха второго стрелка, если в мишени оказалась 1 пробоина?
2. В одной партии первый игрок выигрывает у второго с вероятностью 0,6. Что вероятнее для первого игрока: выиграть у второго игрока не более трех партий из четырех или не менее трех партий из пяти?

**Типовые задания для самостоятельной работы № 1**

- 1) В партии из 30 деталей – 5 дефектных. Из этой партии случайно выбираются 3 детали. Какова вероятность, что среди них окажутся только 2 детали без дефектов?
- 2) Производится одновременное бросание 2-х игральных костей. Какова вероятность, что кости упадут так, что число очков на какой-либо кости будет кратно числу очков на другой?
- 3) Случайно выбирается 5-значное натуральное число. Какова вероятность, что его запись симметрична относительно середины?
- 4) На отрезок длины 1 случайно бросается точка, деля отрезок на две части. Для любого вещественного числа  $x$  найти вероятность того, длина меньшей части не больше  $x$ ?
- 5) Точка случайно бросается на квадрат. Какова вероятность, что она окажется ближе к точке пересечения диагоналей, чем к ближайшей от нее вершине квадрата?

**Типовые задания для самостоятельной работы № 2**

1. Страховая фирма заключила 250 договоров. Вероятность страхового случая по каждому в течение года составляет 2%. Найти приближенное значение вероятности того, что число таких случаев в текущем году составит не более 3.
2. Совместное распределение двумерной случайной величины  $(x, h)$  задано таблицей:

h	-1	0	1
x			
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
---	---------------	----------------	---------------

Найти закон распределения случайной величины  $x+h$  и вычислить  $\text{cov}(2x-3h, x+2h)$ . Найти условное распределение  $x$  по  $h$ .

3)  $\xi, \eta$  – случайные величины с матрицей совместного распределения. Найти константу  $c$ . Построить т-цу распределения для с.в.  $z=M\eta | \xi$  и найти  $Mz$ . Найти коэффициент корреляции и построить уравнение линейной регрессии  $\eta$  на  $\xi$ .

$\xi \backslash \eta$	1	2	3
0	0	0	$c$
1	0.1	0.1	0
2	0.2	0.2	0

4. Плотность распределения случайной величины  $x$  имеет вид

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} C(x+1)^2, & x \in [-1, 2], \\ 0, & x \notin [-1, 2]. \end{cases}$$

Найти  $C$ , функцию распределения  $F_x(x)$ ,  $P(x^2 < 1)$ ,  $Mx$ .

5. Пара случайных величин  $x$  и  $h$  образует точку  $(x, h)$ , равномерно распределенную в треугольнике с вершинами в точках  $(0; 0)$ ,  $(1; 1)$ ,  $(1; -2)$ . Найти плотности распределения  $x$  и  $h$ ; коэффициент корреляции, и построить уравнение линейной регрессии  $x$  по  $h$  и  $h$  по  $x$ .

2) Найти характеристическую функцию биномиального распределения  $P\{x = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$ ,  $m = 0, 1, \dots, n$ .

3) Характеристические функции независимых с. в.  $x$  и  $h$  равны  $j_1(x)$  и  $j_2(x)$  соответственно. Найти хар. функцию с. в.  $z=12x-3h$ .

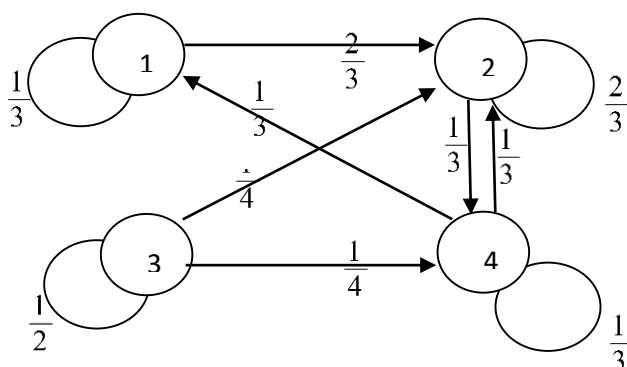
4) Пусть для с.в.  $x$  определены  $Mx=5$  и  $Dx=6$ . Построить три первых члена разложения хар. функции с.в.  $x$  в степенной ряд.

### Типовые задания для контрольной работы № 2

(Случайные процессы.)

1) Задан граф состояний цепи Маркова. Начальное распределение вероятностей  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ .

Найти распределение вероятностей для состояний системы после первого шага.



2) Дана матрица  $P$  переходных вероятностей для цепи Маркова и начальное  $p^{(0)}$  распределение вероятностей для состояний цепи.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & c_1 \\ 0 & \frac{1}{7} & c_2 & \frac{6}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & c_3 & \frac{1}{5} \\ 0 & c_4 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Найти константы  $c_i$ . Построить граф состояний случайного процесса. Провести классификацию состояний. Найти математическое ожидание времени выхода из множества несущественных состояний. Найти предельные вероятности для множества существенных состояний цепи.

$$p^{(0)} = \left( \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0 \right).$$

3) Частица совершает случайные блуждания из точки 0 по точкам отрезка  $-1 \leq x \leq 3$  с целыми координатами. Из каждой внутренней точки отрезка частица делает переход с вероятностью  $\frac{2}{3}$  на 1 единицу вправо и с вероятностью  $\frac{1}{3}$  на 1 единицу влево. В точке (-1) находится отражающий экран, в точке 3 – поглощающий экран. Построить матрицу переходных вероятностей и найти математическое ожидание времени до поглощения частицы.

4) На телефонную станцию поступает поток заявок с интенсивностью 3 заявки в мин. Считая число поступающих заявок пуассоновским случайным процессом, найти вероятность, что в течение 2-х мин. не поступит ни одной заявки.

5)  $x(t)$  – смещение частицы в броуновском процессе с коэффициентом диффузии 1. Если  $x(0)=0$ , то найти вероятность того, что частица впервые достигнет точки 4 за время, большее 16-ти.

**Типовые задания для самостоятельной работы №3 на тему "Нахождение оценок неизвестных параметров распределения, точечных и интервальных, выборочный коэффициент корреляции, проверка статистических гипотез" (Математическая статистика)**

1. Для с.в.  $x$  получена случайная выборка  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Определить несмещенность и состоятельность оценки параметра  $a = Mx$ , определенной формулой,  $a^* = (x_1 + x_2)/2$ .

2. По случайной выборке (3, 5, 0, 4, 7, 5, 6, 2, 3, 4) построить выборочные оценки для м.о. и дисперсии случайной величины (выборочное среднее и выборочную дисперсию). Являются ли они несмещенными?

3 Найти методом моментов оценки неизвестных параметров,  $a$  и  $b$  равномерно распределенной на  $(a, b)$  случайной величины по случайной выборке:

3, 5, 0, 4, 7, 5, 6, 2, 3, 4.

4. Случайная величина  $X$  распределена нормально, причем  $s=3$ . Построить доверительный интервал с коэффициентом доверия 0,95 для неизвестного математического ожидания по случайной выборке, если объем выборки равен 36, а среднее значение равно 4,1.

5. Найти выборочный коэффициент корреляции, сделать вывод о степени линейной связи наблюдаемых случайных величин, построить выборочное уравнение линейной регрессии  $Y$  на  $X$  по данным  $n=5$  наблюдений

$x$	1	2	3	4	5
$y$	1,2	1,4	1,3	1,5	2

6. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины, если известны эмпирические и теоретические вероятности попадания случайной величины в каждый из  $S_i$  непересекающихся интервалов, составляющих разбиение области значений случайной величины:

$n_i$	4	15	10	44	7	13	6
$np_i$	3	19	12	34	16	11	5

## 2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

### Тестовое задание

1. Формула бинома Ньютона:

$$1) (x+y)^n = \sum_{k=1, \dots, n} x^k y^{n-k}$$

$$2) (x+y)^n = \sum_{k=1, \dots, n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

$$3) (x+y)^n = \sum_{k=1, \dots, n} C_n^k x^k y^k$$

2. Пусть  $W$  - дискретное множество элементарных событий. Что называется, событием?

Варианты ответов:

- 1) Любой элемент множества  $W$
- 2) Любое подмножество множества  $W$
- 3) Событием называется то, что происходит случайно.

3. Установить соответствие для понятий

- 1) несовместные события,
- 2) невозможное событие,
- 3) достоверное событие

их свойствам:

- а)  $P(A)=0$
- б)  $P(A)=1$
- в)  $P(AB)=0$

4. Классическое определение вероятности (для конечного множества элементарных событий).

Варианты ответов:

$$1) P(A) = \frac{n_{\text{благопр}}}{N_{\text{всех}}};$$

$$2) P(A) = \frac{N_{\text{всех}}}{n_{\text{благопр}}};$$

$$3) P(A) = \frac{n_{\text{благопр}}}{N_{\text{всех}} - n_{\text{благопр}}}.$$

5. Формулы сложения и умножения вероятностей с условиями выполнения:

Варианты ответов:

- 1)  $P(A + B) = P(A) + P(B)$  для несовместных событий,  $P(AB) = P(A)P(B)$  для независимых событий;
- 2)  $P(A + B) = P(A) + P(B)$  для независимых событий,  $P(AB) = P(A)P(B)$  для несовместных событий;
- 3)  $P(A+B) = P(A)+P(B)$  для любых событий,  $P(AB) = P(A)P(B)$  для любых событий.

6. Сравните вероятности событий  $A$  и  $B$ , если  $A \cap B$ . Варианты ответов:

- 1)  $P(A) > P(B)$
- 2)  $P(A) < P(B)$
- 3)  $P(A) \leq P(B)$ .

7. Аксиоматическое определение вероятности  $P$  для дискретного множества  $W$  элементарных событий

Варианты ответов:

- 1)  $P(\Omega) = 1$ ; для любого события  $P(A) \geq 0$ ; для любых непересекающихся событий  $A_1, A_2 \Rightarrow P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$
- 2)  $P(\emptyset) = 0$ ; для любого события  $P(A) > 0$ ; для любых непересекающихся событий  $A_1, A_2 \Rightarrow P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$
- 3)  $P(\Omega) = 1$ ; для любого события  $P(A) \geq 0$ ; для любых событий  $A_1, A_2 \Rightarrow P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

8. Полная группа несовместных событий

Варианты ответов:

- 1) события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  образуют пгнс, если  $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1$ ;
- 2) события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  образуют пгнс, если  $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$  и все события попарно не пересекаются;

- 3) события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  образуют пгнс, если все события попарно не пересекаются.
9. Условная вероятность
- Варианты ответов:
- 1) условная вероятность события  $A$  при условии события  $B$  определяется формулой  $P(A)/P(B)$  при условии  $P(B)>0$
  - 2) условная вероятность события  $A$  при условии события  $B$  определяется формулой  $P(AB)/P(B)$  при условии  $P(B)>0$ ;
  - 3) условная вероятность события  $A$  при условии события  $B$  определяется формулой  $P(A)/P(A+B)$  при условии  $P(A+B)>0$ .
10. Установить соответствие понятий:
- 1) Независимость событий
  - 2) Формула полной вероятности,
  - 3) Формулы Байеса
- формулам, их представляющим:
- а)  $P(H_i|A)=P(A|H_i)P(H_i)/\sum_{k=1,\dots,n} P(A|H_k)P(H_k)$ , где  $\{H_k, k=1,\dots,n\}$  – пгнс.
  - б)  $P(AB)=P(A)P(B)$ ;
  - в)  $P(A)=\sum_{k=1,\dots,n} P(A|H_k)P(H_k)$ , где  $\{H_k, k=1,\dots,n\}$  – пгнс.
11. Формула Бернулли для вероятности  $k$ - числа успехов в  $n$  независимых испытаниях схемы Бернулли
- Варианты ответов:
- 1)  $P_n(k)=C_n p^k(1-p)^{n-k}$ ;
  - 2)  $P_n(k)=p^k(1-p)^{n-k}$ ;
  - 3)  $P_n(k)=\sum_{k=1,\dots,n} p^k(1-p)^{n-k}$ .
12. Из урны, в которой 3 бел. и 7 чер. шаров, случайно выбирают 2 шара. Найти вероятность, что шары разного цвета.
- Варианты ответов:
- 1) 7/15;
  - 2) 7/30;
  - 3) 21/100.

## **Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» являются лекции. По большинству тем предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам и отработка навыков работы по применению различных теорем теории вероятностей.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения материала в течение обучения при сдаче самостоятельных работ преподаватель задает вопросы, позволяющие выяснить понимание материала. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий для самостоятельной работы, которые вызвали затруднения.

В конце 5 семестра студенты сдают зачет, а в конце 6-го - экзамен. Экзамен принимается по экзаменационным билетам, каждый из которых включает теоретические вопросы и задачи. На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется 3 дня, во время подготовки к экзамену предусмотрена групповая консультация.