


**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра общей математики

УТВЕРЖДАЮ

Декан физического факультета

  
И.С. Огнев  
(подпись)

«23» мая 2023 г.

Рабочая программа дисциплины  
**«Теория функций комплексной переменной»**

Направление подготовки  
«11.03.01 Радиотехника»

Направленность (профиль)  
«00 Радиотехника»

Форма обучения  
очная

Программа одобрена  
на заседании кафедры

от «18» апреля 2023 года, протокол № 8

Программа одобрена НМК

математического факультета

протокол № 9 от «3» мая 2023 года

Ярославль

### 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Теория функций комплексной переменной» относится к числу фундаментальных математических дисциплин. Цель освоения дисциплины заключается в том, чтобы дать студентам знания по теории аналитических функций, конформных отображений, теории вычетов и их приложений, элементам операционного исчисления. Эти знания необходимы студентам для усвоения теоретических основ физических дисциплин, читаемых на физическом факультете.

### 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория функций комплексной переменной» относится к обязательной части образовательной программы и входит в модуль «Математика».

Её содержание диктуется внутренней логикой математики, целостностью и завершенностью отдельных разделов и их иерархией, а также её связями с другими математическими и физическими дисциплинами. Для освоения дисциплины студентам нужны знания из курсов математического анализа, линейной алгебры. С другой стороны, дисциплина «Теория функций комплексной переменной» дает студентам знания, необходимые для изучения таких курсов, как «Методы математической физики», «Квантовая механика».

### 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесённые с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
<b>ОПК-1</b> Способен использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности	<b>ИД-ОПК-1_1</b> Осуществляет постановку задачи, выбирает способ её решения	<b>Знать:</b> основные понятия и результаты теории функций комплексной переменной: - тригонометрическую и показательную формы комплексного числа, - предел последовательности комплексных чисел, - сферу Римана, основные элементарные функции комплексного переменного, - многозначные функции и точки ветвления, - непрерывность, дифференцируемость, - условия Коши-Римана, - геометрический смысл производной функции, - свойства аналитических функций, - сопряженные гармонические функции, - интеграл функции комплексного переменного по ориентированной кривой, - интегральную теорему Коши, - интегральную формулу, формулу

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
		<p>Ньютона — Лейбница,          - теорему Мореры, принцип максимума модуля аналитической функции,          - теорему о разложении функции в ряд Тейлора и Лорана,          - теорему Лиувилля,          - определение и классификацию конечных и бесконечных изолированных особых точек,          - поведение функции в окрестности изолированной особой точки,          - теорию вычетов и ее приложение к вычислению интегралов, теоремы о вычетах,          - определение и основные принципы конформного отображения,          - дробно-линейные функции, функцию Жуковского,          - преобразование Лапласа и его свойства,          - изображение элементарных функций.          - методы решения важнейших задач.</p> <p><b>Уметь:</b>          - реализовывать основные способы и алгоритмы решения задач.</p>
	<p><b>ИД-ОПК-1_2</b>          Применяет математический аппарат, физические законы и теории для решения прикладных и теоретических задач</p>	<p><b>Уметь:</b>          - применять понятия, результаты и методы теории функций комплексной переменной в других разделах математики и физики.</p> <p><b>Владеть навыками:</b>          - действий с комплексными числами в алгебраической и показательной форме;          - работы с основными элементарными функциями комплексного переменного;          - определения области аналитичности функции,          - применения свойств аналитических функций;          - вычисления интеграла по ориентированной кривой;          - применения интегральной теоремы Коши и интегральной формулы Коши для вычисления интеграла;          - нахождения области сходимости ряда Тейлора и Лорана;          - разложения функции в ряд Тейлора и Лорана,</p>

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
		<ul style="list-style-type: none"> <li>- нахождения особых точек и проведения их классификации;</li> <li>- определения поведения функции в окрестности изолированной особой точки;</li> <li>- применения теорем о вычетах к вычислению интегралов по замкнутому контуру и несобственных интегралов;</li> <li>- применения свойств конформных отображений для отображения областей;</li> <li>- решения дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа.</li> </ul>

#### 4. Объём, структура и содержание дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет **4** зачёт. ед., **144** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)  Формы ЭО и ДОТ (при наличии)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Комплексные числа и действия с ними. Предел последовательности.	3	2	2				12	Самостоятельные работы 1,2
2	Функции комплексного переменного.	3	4	4				6	Самостоятельная работа 3
3	Аналитические функции и их свойства.	3	4	4				6	Самостоятельная работа 4
4	Интеграл от функции комплексного переменного.	3	4	4				6	Самостоятельная работа 5

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)  Формы ЭО и ДОТ (при наличии)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
5	Ряды аналитических функций.	3	4	4		2		6	Контрольная работа 1
	в том числе с ЭО и ДОТ					1			
6	Ряд Тейлора. Аналитическое продолжение.	3	4	4				6	Самостоятельная работа 6
7	Ряд Лорана и изолированные особые точки.	3	4	4				6	Самостоятельная работа 7
8	Теория вычетов и ее приложение для вычисления интегралов.	3	4	4				6	Самостоятельная работа 8
9	Понятие о конформном отображении.	3	2	2		3		7	Самостоятельная работа 9 Контрольная работа 2
	в том числе с ЭО и ДОТ					1			
10	Основные понятия операционного исчисления.	3	2	2				6	Самостоятельная работа 10
	Промежуточная аттестация						0,3	3,7	Зачёт  При подготовке к зачёту: Задания для самопроверки по результатам освоения дисциплины
	в том числе с ЭО и ДОТ							2	Задания для самопроверки по результатам освоения дисциплины ЭУК в LMS Moodle
	ИТОГО 144 часа		34	34		5	0,3	70,7	144
	в том числе с ЭО и ДОТ					2		2	

*Примечание: объём (в часах) самостоятельной работы в рамках установленного данной РПД количества часов, выполняемой студентом с применением ЭО и ДОТ (в ЭУК «Теория функций комплексной переменной» в LMS Moodle), определяется каждым студентом в зависимости от уровня его подготовки и способов выполнения данного вида работ.*

## Содержание разделов дисциплины:

### Раздел 1. Комплексные числа и действия с ними.

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Предел последовательности комплексных чисел. Открытые, замкнутые, ограниченные и компактные множества на комплексной плоскости. Сфера Римана.

Стереографическая проекция.

### Раздел 2. Функции комплексного переменного.

Основные элементарные функции комплексного переменного: многочлены, рациональные функции, экспонента, гиперболические и тригонометрические функции. Многозначные функции и точки ветвления. Ветви функций  $\sqrt[n]{z}$  и  $\operatorname{Ln}(z)$ .

Непрерывность, дифференцируемость, условия Коши-Римана. Геометрический смысл производной функции комплексной переменной.

### Раздел 3. Аналитические функции, их свойства.

Определение и примеры аналитических функций. Свойства аналитических функций. Сопряженные гармонические функции.

### Раздел 4. Интеграл от функции комплексного переменного

Интеграл функции комплексного переменного по ориентированной кривой. Общие свойства интеграла, связь с криволинейными интегралами. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши. Интегральные представления для производных. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции. Первообразная аналитической функции. Формула Ньютона — Лейбница. Теорема Мореры. Интегралы, зависящие от параметра. Принцип максимума модуля аналитической функции.

### Раздел 5. Ряды аналитических функций.

Числовые ряды и функциональные ряды. Сходимость и равномерная сходимость, признак Вейерштрасса.

### Раздел 6. Ряд Тейлора. Аналитическое продолжение.

Теорема о разложении функции в ряд Тейлора. Вторая теорема Абеля. Теорема единственности. Элементарные функции комплексной переменной. Продолжение с действительной оси.

### Раздел 7. Ряд Лорана. Изолированные особые точки.

Теорема о разложении аналитической в кольце функции в ряд Лорана. Единственность разложения в ряд Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана. Теорема Лиувилля. Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Нули аналитической функции. Бесконечно удаленная особая точка. Поведение функции в окрестности изолированной существенно особой точки. Понятие о целых и мероморфных функциях. Примеры.

### Раздел 8. Теория вычетов и ее приложение к вычислению интегралов.

Вычет аналитической функции. Нахождение вычета в изолированной особой точке. Теоремы о вычетах. Приложение вычетов к вычислению интегралов по замкнутому контуру и несобственных интегралов. Формула для нахождения вычета в полюсе. Вычет в бесконечно удаленной точке.

### Раздел 9. Понятие о конформном отображении.

Определение конформного отображения. Примеры. Основные принципы конформного отображения. Дробно-линейные функции. Функция Жуковского. Отображения, осуществляемые аналитическими функциями.

### Раздел 10. Основные понятия операционного исчисления.

Преобразование Лапласа и его свойства. Изображение элементарных функций. Аналитичность изображения. Восстановление оригиналов при помощи

теорем разложения. Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений.

## **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

В процессе обучения используются следующие технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии:

**Электронный учебный курс «Теория функций комплексной переменной» в LMS Электронный университет Moodle ЯрГУ**, в котором:

- представлены задания для самостоятельной работы обучающихся по темам дисциплины;
- осуществляется проведение отдельных мероприятий текущего контроля успеваемости студентов;
- представлены тексты лекций по отдельным темам дисциплины;
- представлены правила прохождения промежуточной аттестации по дисциплине;
- представлен список учебной литературы, рекомендуемой для освоения дисциплины;
- представлена информация о форме и времени проведения консультаций по дисциплине в режиме онлайн;
- посредством форума осуществляется синхронное и (или) асинхронное взаимодействие между обучающимися и преподавателем в рамках изучения дисциплины.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;

- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT» [http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Свешников А. Г. Теория функций комплексной переменной : учебник для студ. физ. спец. ун-тов / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. - 6-е изд., стереотип. - М.: Наука, 2010.
2. Волковыский Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного : учеб. пособие для вузов / Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. - 4-е изд., перераб. - М.: Физматлит, 2002.

### **б) дополнительная литература**

1. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. Учебник. М.: Наука, 1974.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Уч. пос. М.: Наука, 1979.
3. Чаплыгин В.Ф., Ряды аналитических функций. Методические указания. Ярославль, 1997.
4. Чаплыгин В.Ф., Приложение вычетов к вычислению интегралов. Методические указания. Ярославль, 1997.
5. Чаплыгин В.Ф., Элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. Методические указания. Ярославль, 2006.
6. Невский, М. В., Элементы теории функций комплексного переменного: учеб. пособие. Ярсл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2014.

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.



Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор:

Заведующая кафедрой  
общей математики, доцент, к.ф.-м.н.

Е.А. Марушкина

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Теория функций комплексной переменной»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**Задания для самостоятельной работы**  
*(данные задания выполняются студентом самостоятельно  
и преподавателем в обязательном порядке не проверяются)*

**Самостоятельная работа № 1**

**Вариант 1.**

1. Вычислить:  $\operatorname{Re} \frac{(2+i)(1+4i)}{2-i}$ .
2. Найти тригонометрическую форму чисел:  $2 - \sqrt{3}i$ ,  $-\cos \varphi - i \sin \varphi$ .
3. Указать на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию:  $\operatorname{Re} \frac{z-i}{z+i} = 0$ .
4. Записать с помощью неравенств внутренность эллипса с фокусами в точках  $2i$  и  $-2i$  и большой полуосью, равной 4.
5. Решить уравнение:  $iz^2 + 4 = 0$ .

**Вариант 2.**

1. Вычислить:  $\operatorname{Im} \frac{(3+i)(6-i)}{3+2i}$ .
2. Найти тригонометрическую форму чисел:  $1 + \sqrt{2}i$ ,  $a + bi$ .
3. Указать на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию:  $\operatorname{Im} \frac{z-i}{z+i} = 0$ .
4. Записать с помощью неравенств внутренность полосы, состоящей из точек, отстоящих от мнимой оси на расстоянии, меньшем четырех.
5. Решить уравнение:  $z^2 + z + 1 = 0$ .

**Правила выставления оценки по результатам самостоятельной работы:**

Оценка по результатам самостоятельной работы считается в баллах по следующему принципу:

- за каждое полностью правильно выполненное задание – 3 балла;
- при решении допущены незначительные ошибки – 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены грубые ошибки – 1 балл;

- полностью неправильно выполненное задание – 0 баллов.

Максимальное количество баллов по итогам самостоятельной работы – 15 баллов,

Набранное количество баллов от 13-15 соответствует оценке «отлично», 10-12 баллов – оценке «хорошо», 6-9 баллов – оценке «удовлетворительно», менее 6 баллов – оценке «неудовлетворительно» (умения на данном этапе освоения дисциплины не сформированы).

## Самостоятельная работа № 2

### Вариант 1.

1. Вычислить:  $\left( \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - 2i} \right)^{10}$ .

2. Найти все значения корня:  $\sqrt[6]{\frac{(1+i)^3}{\sqrt{3}-i}}$ .

3. Выяснить геометрический смысл соотношения:  $|z| = \operatorname{Re} z + 1$ .

4. Найти сумму:  $1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos 20x$ .

### Вариант 2.

1. Вычислить:  $\left( \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + 2i} \right)^{15}$ .

2. Найти все значения корня:  $\sqrt[4]{\frac{(1-i)^3}{1 + \sqrt{3}i}}$ .

3. Выяснить геометрический смысл соотношения:  $0 < \arg z \leq \frac{3\pi}{4}; |z - 1| \leq 2$ .

4. Найти сумму:  $1 + \sin x + \dots + \sin 10x$ .

### Правила выставления оценки по результатам самостоятельной работы:

Оценка по результатам самостоятельной работы считается в баллах по следующему принципу:

- за каждое полностью правильно выполненное задание – 3 балла;
- при решении допущены незначительные ошибки – 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены грубые ошибки – 1 балл;
- полностью неправильно выполненное задание – 0 баллов.

Максимальное количество баллов по итогам самостоятельной работы – 12 баллов,

Набранное количество баллов от 11-12 соответствует оценке «отлично», 8-10 баллов – оценке «хорошо», 5-7 баллов – оценке «удовлетворительно», менее 5 баллов – оценке «неудовлетворительно» (умения на данном этапе освоения дисциплины не сформированы).

### Самостоятельная работа № 3

#### Вариант 1.

1. Вычислить:  $\cos(1+i)$ ,  $\operatorname{Ln}(-1)$ .
2. Решить уравнение:  $e^z - i = 0$ .
3. Выяснить, в каких точках функция дифференцируема  $f(z) = \bar{z} + z^2$ .
4. Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается, если отображение осуществляется функцией  $\omega = z^2 + z$ .
5. Найти длину спирали, на которую с помощью функции  $e^z$  отображается отрезок  $y = x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ .

#### Вариант 2.

1. Вычислить:  $sh(-2+i)$ ,  $\operatorname{Ln} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ .
2. Решить уравнение:  $\operatorname{Ln} z = i$ .
3. Выяснить, в каких точках функция дифференцируема:  $f(z) = |z|^2 \operatorname{Re} z$ .
4. Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается, если отображение осуществляется функцией:  $\omega = z^2 + (i+1)z$ .
5. Найти площадь области, на которую с помощью функции  $e^z$  отображается отрезок  $0 \leq x \leq 1$ ,  $1 \leq y \leq 2$ .

#### Правила выставления оценки по результатам самостоятельной работы:

Оценка по результатам самостоятельной работы считается в баллах по следующему принципу:

- за каждое полностью правильно выполненное задание – 3 балла;
- при решении допущены незначительные ошибки – 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены грубые ошибки – 1 балл;
- полностью неправильно выполненное задание – 0 баллов.

Максимальное количество баллов по итогам самостоятельной работы – 15 баллов,

Набранное количество баллов от 13-15 соответствует оценке «отлично», 10-12 баллов – оценке «хорошо», 6-9 баллов – оценке «удовлетворительно», менее 6 баллов – оценке «неудовлетворительно» (умения на данном этапе освоения дисциплины не сформированы).

### Самостоятельная работа № 4

#### Вариант 1.

1. Выяснить, существует ли аналитическая функция, имеющая данную действительную часть  $u(x, y)$ :  $u(x, y) = x^2 + y$ .
2. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , если  $u(x, y) = e^y \sin x + 2x + 3$ ,  $f(0) = 4 - i$ .

#### Вариант 2.

1. Выяснить, существует ли аналитическая функция, имеющая данную мнимительную часть  $v(x, y)$ :  $u(x, y) = x - y$ .

2. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , если  $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ ,  $f(i) = -1 + 2i$ .

Правила выставления оценки по результатам самостоятельной работы:

Оценка по результатам самостоятельной работы считается в баллах по следующему принципу:

- за каждое полностью правильно выполненное задание – 3 балла;
- при решении допущены незначительные ошибки – 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены грубые ошибки – 1 балл;
- полностью неправильно выполненное задание – 0 баллов.

Максимальное количество баллов по итогам самостоятельной работы – 6 баллов,

Набранное количество баллов 5-6 соответствует оценке «отлично», 3-4 баллов – оценке «хорошо», 2 балла – оценке «удовлетворительно», менее 2 баллов – оценке «неудовлетворительно» (умения на данном этапе освоения дисциплины не сформированы).

**Самостоятельная работа № 5**

**Вариант 1.**

1. Вычислить интеграл

$$\int_l (z + \bar{z}) dz, \quad \text{где } l - \text{дуга окружности } |z| = 1; \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2}.$$

2. Вычислить интеграл

$$\int_l \frac{dz}{\sqrt[3]{z}}, \quad \sqrt[3]{1} = 1, \quad l = \{z: |z| = 1, \quad 0 \leq \arg z \leq \pi\}.$$

3. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^2}{(z-2i)^3} dz.$$

**Вариант 2.**

1. Вычислить интеграл

$$\int_l (2z + 1)\bar{z} dz, \quad \text{где } l - \text{дуга окружности } |z| = 1; \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2}.$$

2. Вычислить интеграл

$$\int_l \sqrt{z}, \quad \sqrt{1} = -1, \quad l = \{z: |z| = 1, \quad 0 \leq \arg z \leq \pi\}.$$

3. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z)^2}.$$

Правила выставления оценки по результатам самостоятельной работы:

Оценка по результатам самостоятельной работы считается в баллах по следующему принципу:

- за каждое полностью правильно выполненное задание – 3 балла;
- при решении допущены незначительные ошибки – 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены грубые ошибки – 1 балл;
- полностью неправильно выполненное задание – 0 баллов.

Максимальное количество баллов по итогам самостоятельной работы – 9 баллов,

Набранное количество баллов 8-9 соответствует оценке «отлично», 6-7 баллов – оценке «хорошо», 3-5 балла – оценке «удовлетворительно», менее 3 баллов – оценке «неудовлетворительно» (умения на данном этапе освоения дисциплины не сформированы).

### Самостоятельная работа № 6

#### Вариант 1.

1. Определить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^n}.$$

2. Определить область сходимости и область равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n+1}.$$

#### Вариант 2.

1. Определить область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z-i}{z+i} \right)^n.$$

2. Определить область сходимости и область равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z+2)^n}.$$

#### Правила выставления оценки по результатам самостоятельной работы:

Оценка по результатам самостоятельной работы считается в баллах по следующему принципу:

- за каждое полностью правильно выполненное задание – 3 балла;
- при решении допущены незначительные ошибки – 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены грубые ошибки – 1 балл;
- полностью неправильно выполненное задание – 0 баллов.

Максимальное количество баллов по итогам самостоятельной работы – 6 баллов,

Набранное количество баллов 5-6 соответствует оценке «отлично», 3-4 баллов – оценке «хорошо», 2 балла – оценке «удовлетворительно», менее 2 баллов – оценке «неудовлетворительно» (умения на данном этапе освоения дисциплины не сформированы).

### Самостоятельная работа № 7

#### Вариант 1.

1. Найти область сходимости и область равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^3 \cdot 2^n}.$$

2. Разложить функцию  $f$  в ряд по степеням

$$f(z) = \frac{1}{z-1}, \quad z_0 = 2i.$$

**Вариант 2.**

1. Найти область сходимости и область равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} -1^n \frac{(z+2)^{2n}}{n}.$$

2. Разложить функцию  $f$  в ряд по степеням

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2}, \quad z_0 = i.$$

Правила выставления оценки по результатам самостоятельной работы:

Оценка по результатам самостоятельной работы считается в баллах по следующему принципу:

- за каждое полностью правильно выполненное задание – 3 балла;
- при решении допущены незначительные ошибки – 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены грубые ошибки – 1 балл;
- полностью неправильно выполненное задание – 0 баллов.

Максимальное количество баллов по итогам самостоятельной работы – 6 баллов,

Набранное количество баллов 5-6 соответствует оценке «отлично», 3-4 баллов – оценке «хорошо», 2 балла – оценке «удовлетворительно», менее 2 баллов – оценке «неудовлетворительно» (умения на данном этапе освоения дисциплины не сформированы).

**Самостоятельная работа № 8**

**Вариант 1.**

1. Разложить функцию  $f$  в ряд Лорана по степеням

$$f(z) = \frac{2}{z(z-i)}, \quad z_0 = i.$$

2. Указать конечные особые точки функции  $f$  и определить их характер

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + i)^3}.$$

3. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , если

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x, \quad f(i) = -1 + 2i.$$

## Вариант 2.

1. Разложить функцию  $f$  в ряд Лорана по степеням

$$f(z) = \frac{2}{z(z-i)}, \quad z_0 = 0.$$

2. Указать конечные особые точки функции и определить их характер

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2(z-i)}.$$

3. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , если

$$u(x, y) = e^y \sin x + 2x + 3, \quad f(0) = 4 - i.$$

### Правила выставления оценки по результатам самостоятельной работы:

Оценка по результатам самостоятельной работы считается в баллах по следующему принципу:

- за каждое полностью правильно выполненное задание – 3 балла;
- при решении допущены незначительные ошибки – 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены грубые ошибки – 1 балл;
- полностью неправильно выполненное задание – 0 баллов.

Максимальное количество баллов по итогам самостоятельной работы – 9 баллов,

Набранное количество баллов 8-9 соответствует оценке «отлично», 6-7 баллов – оценке «хорошо», 3-5 балла – оценке «удовлетворительно», менее 3 баллов – оценке «неудовлетворительно» (умения на данном этапе освоения дисциплины не сформированы).

## Самостоятельная работа № 9

### Вариант 1.

1. Найти дробно-линейное преобразование по заданным условиям: точки  $i$ ,  $1$ ,  $1-i$  переходят в точки  $0$ ,  $\infty$ ,  $1$ .

2. Найти образ области  $D$  при отображении  $\omega = e^z$ ,  $D = \{z: -\pi < \operatorname{Im} z < 0\}$ .

3. Найти, куда функция Жуковского переводит область

$$D = \left\{z: |z| < \frac{1}{2}\right\}$$

### Вариант 2.

1. Найти дробно-линейное преобразование по заданным условиям: точки  $1$  и  $i$  неподвижны, а  $0$  переходит в  $\infty$ .

2. Найти образ области  $D$  при отображении  $\omega = e^z$ ,  $D = \left\{z: |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}\right\}$ .

3. Найти, куда функция Жуковского переводит  $D = \left\{z: |z| < \frac{2}{3}\right\}$ .

### Правила выставления оценки по результатам самостоятельной работы:

Оценка по результатам самостоятельной работы считается в баллах по следующему принципу:

- за каждое полностью правильно выполненное задание – 3 балла;
- при решении допущены незначительные ошибки – 2 балла;



- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены грубые ошибки – 1 балл;
- полностью неправильно выполненное задание – 0 баллов.

Максимальное количество баллов по итогам самостоятельной работы – 9 баллов,

Набранное количество баллов 8-9 соответствует оценке «отлично», 6-7 баллов – оценке «хорошо», 3-5 балла – оценке «удовлетворительно», менее 3 баллов – оценке «неудовлетворительно» (умения на данном этапе освоения дисциплины не сформированы).

### Самостоятельная работа № 10

#### Вариант 1.

1. Найти общее решение уравнения  $x'' + 2x' + x = te^{-t}$ , а также его частное решение, удовлетворяющее условиям:  $x(0) = 1, x'(0) = 2$ .
2. Найти ток  $i(t)$  в RC-цепи при подключении постоянной э.д.с.  $e(t) = \bar{t}$ , если  $u_c(0) = u_0$ .

#### Вариант 2.

1. Найти общее решение уравнения  $x'' + x' = 2\cos t$ , а также его частное решение, удовлетворяющее условиям:  $x(0) = 0, x'(0) = -1$ .
2. Найти ток  $i(t)$  в RC-цепи при подключении постоянной э.д.с.  $e(t) = \bar{t}$ , если  $u_c(0) = u_0$ .

Правила выставления оценки по результатам самостоятельной работы:

Оценка по результатам самостоятельной работы считается в баллах по следующему принципу:

- за каждое полностью правильно выполненное задание – 3 балла;
- при решении допущены незначительные ошибки – 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены грубые ошибки – 1 балл;
- полностью неправильно выполненное задание – 0 баллов.

Максимальное количество баллов по итогам самостоятельной работы – 6 баллов,

Набранное количество баллов 5-6 соответствует оценке «отлично», 3-4 баллов – оценке «хорошо», 2 балла – оценке «удовлетворительно», менее 2 баллов – оценке «неудовлетворительно» (умения на данном этапе освоения дисциплины не сформированы).

### Контрольная работа № 1

*(проверка сформированности ОПК-1, индикатор ИД-ОПК-1\_1*

*(в части умений работы с комплексными числами, функциями комплексной переменной, аналитическими функциями и интегрированием функций комплексной переменной)*

#### Примеры заданий:

##### Вариант 1.

1. Решить уравнение  $z^2 - 3iz - 2 = 0$ .

2. Вычислить  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{64}$ .
3. Исследовать ряд на сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{3^n}$ .
4. В каких точках дифференцируема функция  $f(z) = \bar{z}z^2$ .
5. Вычислить интегралы  $\oint_{|z|=2} \frac{\sin zdz}{(z+i)^6}$ ;  $\int_l \frac{z}{\bar{z}} dz$ , где  $l: \{z: |z|=2p^2; \arg z \leq \pi\}$ .

## Вариант 2.

1. Решить уравнение  $z^2 + 2iz + 10 = 0$ .
2. Вычислить  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{32}$ .
3. Исследовать ряд на сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{3^n}$ .
4. В каких точках дифференцируема функция  $f(z) = \bar{z}^2 z$ .
5. Вычислить интегралы  $\oint_{|z|=2} \frac{\cos zdz}{(z-i)^4}$ ;  $\int_l \frac{\bar{z}}{z} dz$ , где  $l: \{z: |z|=2; 0 \leq \arg z \leq \pi\}$ .

### Правила выставления оценки по результатам контрольной работы:

Оценка по результатам контрольной работы считается в баллах по следующему принципу:

- за каждое полностью правильно выполненное задание – 3 балла;
- при решении допущены незначительные ошибки – 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены грубые ошибки – 1 балл;
- полностью неправильно выполненное задание – 0 баллов.

Максимальное количество баллов по итогам контрольной работы – 15 баллов,

Набранное количество баллов от 13-15 соответствует оценке «отлично», 10-12 баллов – оценке «хорошо», 6-9 баллов – оценке «удовлетворительно», менее 6 баллов – оценке «неудовлетворительно» (умения на данном этапе освоения дисциплины не сформированы).

## Контрольная работа № 2

(проверка сформированности ОПК-1, индикатор ИД-ОПК-1\_2  
(в части умений работы с вычетами и рядами функций комплексной переменной))

### Примеры заданий:

#### Вариант 1.

1. Вычислить интеграл  $\int_C \frac{dz}{z^6 + 1}$  C:  $x^2 + y^2 = 2x$ .
2. Вычислить интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2}$ .
3. Вычислить интеграл  $\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\cos \phi + 2}$ .
4. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(z+i)^n}{2^n(n+1)} + \frac{4n^2}{3^n(z+i)^n} \right)$ .
5. Вычислить интеграл  $\int_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4 + 2z^2 + 1}$ .
6. Вычислить интеграл  $\int_{|z|=2} \frac{z^5 dz}{z^6 + 1}$ .

### **Вариант 2.**

1. Вычислить интеграл  $\int_C \frac{dz}{z^6 + 1}$  C:  $x^2 + y^2 = 2y$ .
2. Вычислить интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4)^2}$ .
3. Вычислить интеграл  $\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\cos \phi + 3}$ .
4. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(z-2i)^n}{3^n(n^2 + 1)} + \frac{n2^n}{(z-2i)^n} \right)$ .
5. Вычислить интеграл  $\int_{|z-i|=2} \frac{1 - e^{z^2}}{z^2(z-i)} dz$ .
6. Вычислить интеграл  $\int_{|z|=2} \frac{z^6 dz}{z^7 + 1}$ .

### Правила выставления оценки по результатам контрольной работы:

Оценка по результатам контрольной работы считается в баллах по следующему принципу:

- за каждое полностью правильно выполненное задание – 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены грубые ошибки – 1 балл;
- полностью неправильно выполненное задание – 0 баллов.

Максимальное количество баллов по итогам контрольной работы – 12 баллов,

Набранное количество баллов от 11-12 соответствует оценке «отлично», 9-10 баллов – оценке «хорошо», 6-8 баллов – оценке «удовлетворительно», менее 6 баллов – оценке «неудовлетворительно» (умения на данном этапе освоения дисциплины не сформированы).

### **Задания для самопроверки по результатам освоения дисциплины перед экзаменом**

**(выполняются в ЭУК «Теория функций комплексной переменной» в LMS Moodle)**

В задании 5 задач, за правильное решение каждой задачи дается 2 балла. На выполнение задания дается время 2 часа.

Количество набранных баллов от 9 до 10 соответствует оценке «отлично».

Количество набранных баллов от 7 до 8 соответствует оценке «хорошо».

Количество набранных баллов от 5 до 6 соответствует оценке «Удовлетворительно».

Количество баллов меньше 5 соответствует оценке «Неудовлетворительно».

**Примерные задачи:**

1. Решить уравнение  $z^2 + 2iz + 10 = 0$ .

2. Найдите все решения уравнения. Результат представьте в форме  $a + ib$ :

$$|z| = z^2.$$

3. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , если  $u(x, y) = e^y \sin x + 2x + 3$ ,  $f(0) = 4 - i$ .

4. Разложить функцию в ряд по степеням  $z - z_0$ :

$$f(z) = \frac{2}{z(z-i)}, \quad z_0 = i.$$

5. Вычислить с помощью вычетов интеграл  $\int_{|z-i|=2} \frac{1 - e^{z^2}}{z^2(z-i)} dz$ .

**2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

**Список заданий к зачету**

На зачете проверяется сформированность компетенции ОПК-1, (индикатор ИД-ОПК-1\_2 в части умений работы с комплексными числами, функциями комплексной переменной, аналитическими функциями и интегрированием функций комплексной переменной, вычетами).

Зачет выставляется по результатам контрольной работы при условии набора по итогам ее выполнения студентом с одной попытки не менее 6 баллов.

**Правила выставления оценки по результатам контрольной работы:**

Оценка по результатам контрольной работы определяется в баллах по следующему принципу: правильно выполненное задание оценивается в 2 балла.

Каждое из заданий может быть оценено половиной заявленных по нему баллов, в случае, когда при его выполнении правильно применен алгоритм, но имеются ошибки в численных расчетах.

Полностью неправильно выполненное задание - 0 баллов.

**Примеры заданий:**

1. Вычислить  $|\cos(3+18i)|$ .

2. В каких точках дифференцируема функция  $f(z) = z^{-2} \operatorname{Re} z + \bar{z}$ .

3. Вычислить с помощью интегральной формулы Коши  $\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{(z-i)(z+i)^2} dz$ ,  
Г окружность  $|z-i|=4$ .

4. Вычислить интеграл с помощью теоремы о вычетах  $\int_{|z+i|=3} \frac{z^3}{z^2(z+5)^2} dz$

5. Вычислить интеграл с помощью теоремы о вычетах  $\int_{|z-1+i|=\sqrt{2}} \frac{z}{z^2+1} dz$ .

## **Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Теория функции комплексной переменной»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Теория функций комплексной переменной» являются лекции. По большинству тем предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. В процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать.

Учитывая то, что практических занятий не очень много, большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные. Кроме того, в течение семестра студенты должны выполнить домашнюю самостоятельную работу.

Полный список заданий для самостоятельной работы по темам (разделам) дисциплины приведен в ЭУК в LMS Moodle «Теория функций комплексной переменной». Вопросы, возникающие в процессе или по итогам решения этих задач, можно задать на консультациях или в форуме (чате) в ЭУК в LMS Moodle.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков, в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде 10 самостоятельных работ и двух контрольных работ. Почти на каждом занятии проводятся небольшие самостоятельные работы на знание определений и формулировок основных теорем. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий для самостоятельной работы, которые вызвали затруднения. В конце изучения дисциплины студенты сдают зачёт.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Теория функций комплексной переменной» самостоятельно студенту крайне сложно. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Таким образом, для того, чтобы выучить теорию и научиться применять ее для решения задач, нужно посещать лекции, активно работать на практических занятиях, выполнять все домашние задания и самостоятельно изучать специальную литературу.