

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

В.Ф. Чаплыгин

История и методология математики

Текст лекций

Рекомендовано

*Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальности Математика
и направлению подготовки Математика*

Ярославль 2007

УДК 51:37
ББК В1г.я73
Ч 19

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2007 года*

Рецензенты:
кафедра геометрии ЯГПУ им. К.Д. Ушинского;
профессор А.В. Ястребов

Чаплыгин, В.Ф. История и методология математики : текст лекций / В.Ф. Чаплыгин; Ярослав. гос. ун-т. — Ярославль : ЯрГУ, 2007. —120 с.
ISBN 978-5-8397-0521-0

Отражены четыре основных периода развития математики. Изложение ведется в хронологическом порядке на фоне развития материальной и духовной культуры человеческой цивилизации. Достаточно полно говорится о создании математики как науки в Древней Греции. Излагая историю открытия дифференциального и интегрального исчисления Ньютоном и Лейбницем, автор подчеркивает роль их предшественников. То же самое можно сказать о создании неевклидовой геометрии. Одна из лекций посвящена развитию математики в России и СССР, месту русских ученых в мировой математике.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 010101 Математика и направлению подготовки 010100 Математика (дисц. "История и методология математики", блок ОПД), очной формы обучения.

Рис. 19. Библиогр.: 15 назв.

УДК 51:37
ББК В1г.я73

ISBN 978-5-8397-0521-0

© Ярославский
государственный
университет, 2007
© В.Ф. Чаплыгин, 2007

Лекция 1

Математика как наука, её место в ряду других наук. Предмет и методы математики, её возникновение. Математика Египта и Вавилона

Самое слово "математика" (греч. μαθηματικὴ) происходит от μαθημα, что означает познание, наука, значение. В течение длительного времени в отечественных источниках использовалось определение математики, данное Ф. Энгельсом в «Анти-Дюринге» (1878 г.): «Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть – весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевывать его происхождение из внешнего мира, но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное». Математику, отвечающую на вопрос, чему равен объем цилиндра, не важно, из какого материала он сделан, какого он цвета и т.д. Если физику интересуют реальные объекты, их физические свойства, геометрия – математика имеет дело с идеальными объектами. Интересуясь количеством предметов, мощностью множества, математик совершенно игнорирует характер этих предметов. Для своего времени определение Ф. Энгельса достаточно точно характеризовало предмет математики и её содержание. Однако за прошедшие 130 лет математика довольно значительно изменила свой характер, что привело к необходимости дать новое определение математики. Приведем некоторые из них. Кудрявцев Л.Д. в книге «Современная математика и методы её преподавания» (М.: Наука, 1980) даёт следующее определение: «Математика – это наука о специальных логических

структурах, называемых математическими структурами, у которых описаны определенные отношения между элементами». При этом он отмечает, что некоторые математические структуры являются непосредственными моделями реальных явлений, другие – связаны с реальными явлениями лишь посредством цепи понятий и логических структур. Эти вторые структуры являются продуктом внутреннего развития математики. Само понятие «математическая структура» Л.Д. Кудрявцев не определяет.

Д.П. Костомаров и А.Н. Тихонов понимают под математикой науку, изучающую математические модели. Под математической моделью понимается приближенное описание, отражение некоторых реальных явлений с помощью математических средств и символов. Это могут быть уравнения, неравенства, таблицы, диаграммы, формулы, функции, графики, графы и т.д. Математическая модель того или иного явления с течением времени в связи с получением новых данных, разработкой более современных математических методов, изучением условий применения может существенно меняться. Весьма поучительным примером в этом смысле является задача внешней баллистики. В 1537 г. в сочинении «Новая наука» Н.Тарталья показал, что траектория полета снаряда представляет параболу и наибольшая дальность полета достигается, если снаряд выпущен под углом 45° к горизонту. Но эта модель действует на небольших начальных скоростях $V_0 \leq 30 \text{ м/сек}$ при незначительном сопротивлении воздуха. При скоростях $30 \text{ м/сек} \leq V_0 \leq 90 \text{ м/сек}$ необходимо учитывать лобовое сопротивление, зависящее от скорости и формы летящего снаряда, а также свойств среды. Для сверхзвуковых скоростей модель еще более усложняется. Подробнее о совершенствовании этой модели можно узнать в книге А.Н. Тихонова и Д.П. Костомарова «Вводные лекции по прикладной математике» (М.: Наука, 1984).

Замечательным примером математической модели является закон всемирного тяготения, открытый И. Ньютоном, который позволил с единой точки зрения объяснить законы классической механики, учение о движении планет, в частности, законы Кеплера. Большой круг явлений в физике, химии, биологии, эконо-

мике достаточно адекватно описывается дифференциальными уравнениями, как обыкновенными, так и в частных производных.

Из приведенных примеров видно, что предметом изучения науки является окружающий нас мир. Задачи возникли из практики, они были связаны со счетом, землемерием, строительством, навигацией, экономикой и т.д. А методы их решения должна была разработать математика. Какое же место занимает математика среди других наук? И.М. Яглом в книге «Математические структуры и математическое моделирование» (М.: Сов. радио, 1980) писал: «Хорошо известно, что весь массив наук делится на большие группы: математические науки, естественные науки и гуманитарные науки или, как шутливо говорил Л.Д. Ландау: сверхъестественные науки, естественные науки, неестественные науки». И.М. Яглом так комментирует это деление. Естественные науки – это физика, астрономия, медицина и другие, которые изучают окружающий нас мир (можно сказать натуральный или физический). Гуманитарные науки – это история, философия, лингвистика, филология, политология, психология, социология, юриспруденция, они изучают человеческие отношения, средства общения, т.е. социум. Таким образом, они имеют дело также с реально существующими объектами, которые можно наблюдать, проводить эксперименты. Математика же фактически изучает саму себя, черпая задачи из других групп наук. Математика разрабатывает методы решения не только тех конкретных задач, для которых они созданы, но обобщает и усовершенствует методы для решения новых классов задач. Это приводит к возникновению новых теорий и математических дисциплин. Иногда математика намного опережает время, и некоторые открытия ждут своего практического применения десятилетия, а то и столетия. Так было с теорией групп, булевыми функциями, функциями комплексной переменной, неевклидовыми геометриями и др.

Можно считать, что математика начала свое развитие с создания понятия единицы и числа. Н.Н. Лузин писал: «Мы должны склониться перед гением человека, создавшего понятие единицы, а вместе с ним возникла математика. Идея числа – вот с чего началась история величайшей из наук». Л.Кронекер высказал иную

точку зрения: «Целые числа сотворил господь бог, а все прочее – дело людских рук».

В истории математики выделяют четыре периода её развития:

- 1) Период зарождения математики – до VI – V вв. до н. э.
- 2) Период элементарной математики или математики постоянных величин – V в. до н. э. – XVII в. н. э.
- 3) Период математики переменных величин – XVII – XVIII вв.
- 4) Период современной математики – с XIX в. по настоящее время.

Первые представления о числе и форме появились у человека в эпоху позднего палеолита (около 15 – 20 тыс. лет тому назад), о чем свидетельствуют найденные археологами наскальные рисунки в Испании, Франции, Сибири, на которых изображены фигурки зверей и рыб. С давних времен человек научился отличать один предмет от нескольких, видеть разницу между одним и двумя предметами. Однако на протяжении тысяч лет то общее, что присуще трем людям, трем пальцам, трем лодкам, не отделялось от характера предметов. В словосочетаниях «три человека», «три лодки», «три озера», употребляемых одним племенем, не присутствовало одно и то же слово, которое обозначало бы «три». Но, научившись различать два и три предмета, человек переходит к счету предметов. Первоначально числовые ряды были короткими, не более 15 – 20, а для обозначения больших количеств предметов употреблялись термины «толпа», «стадо», «куча», «тьма», «горсть», «охапка» и др. У некоторых племен происходит нечто, напоминающее установление взаимнооднозначного соответствия между количеством предметов и количеством пальцев на руках и ногах. Известный русский путешественник Н.Н. Миклухо-Маклай описывает процесс счета папуасов Новой Гвинеи: «Папуас загибает один за другим пальцы руки, причем издает определенный звук, например, “бе”, “бе”, “бе”..., досчитав до пяти, он говорит “ибон-бе” (т.е. одна рука, по-нашему 5). Затем он загибает пальцы другой руки, снова повторяя “бе”, “бе”, “бе”, пока не дойдет до “ибон-али” (две руки, т.е. 10). Затем он идет дальше,

пока не доходит до “самбо-бе” и “самбо-али” (одна нога, две ноги, т.е. 15 и 20)». Если требовалось продолжить счет, то папуас пользовался пальцами рук и ног соплеменника. В русском языке слово “пять” отвечает старославянскому “пясть”, что означает кулак, в латинском языке “лима” – это одновременно и “рука” и “пять”. Наиболее распространенные системы счисления имеют основания 5 и 10 (встречаются 15 и 20). Некоторые племена Бразилии считали тройками (по числу суставов на каждом пальце левой руки, не считая большого) т.е. до 12, а далее до 60. Но понятия числа как такового пока не было. Человек фиксировал количество предметов не только пальцами рук и ног, но и кучкой камешков (лат. *calculus*), раковин, связкой прутьев, узелками на веревке, засечками или зарубками на камне или кости. Так, в 1937 г. в Моравии была найдена кость волка длиной 18 см с 55 зарубками, сгруппированными по 5. Позже количество предметов фиксировалось черточками на папирусе, глиняных табличках, а с изобретением бумаги – на ней.

Математика древнего Египта

До настоящего времени дошли два папируса математического содержания. Папирус Ринда, относящийся примерно к 1650 г. до н.э., размером 5,5 м × 0,32 м (хранится в Британском музее в Лондоне) и Московский папирус, который на двести лет старше, его длина примерно та же, ширина вчетверо меньше. В первом из папирусов собраны 84 задачи прикладного характера, во втором – 25 задач также прикладного характера. В этих папирусах выполняются действия с целыми и дробными числами, вычисляются площади прямоугольника, треугольника и трапеции.

Площадь круга находится как $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$, где d – диаметр круга. Из







приближенного равенства $\frac{\pi d^2}{4} \approx \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{64}{81}d^2$ получаем

$\pi \approx 3,16$ (не так уж плохо!). Египтяне правильно находили объемы параллелепипеда, цилиндра, пирамиды и, что удивительно,

правильной усеченной четырехугольной пирамиды по «нашей» формуле $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$. В папирусах содержатся задачи на пропорциональное деление, задачи, связанные с геометрической и арифметической прогрессиями.

Задача 1. В каждом из 7 домов по 7 кошек, каждая из которых съела 7 мышей, а каждая мышь по 7 колосьев ячменя, из каждого колоса выросло бы по 7 мер зерна (сколько всего?).

Задача 2. Разделить между феллахами зерно так, чтобы разница (в мерах) между каждым человеком и его соседом составляла постоянное значение.

Запись чисел иероглифическая, непозиционная. Запись  означала число 12321, в ней первый иероглиф («указательный палец») обозначает десять тысяч, каждый из следующих двух иероглифов («цветок лотоса») выражает тысячу;  («мерная веревка», имевшая длину 100 локтей), выражает 100; символ  («путы» для стреножия коров) – 10;  («мерная палка») – 1. Употреблялись также иероглифы, обозначающие $10^5, 10^6, 10^7$. Заметим, что римская нумерация также является иероглифической непозиционной системой, с символами I, V, X, L, C, D, M, что соответствует числам 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000. Операции с целыми положительными числами проводились по правилам, близким нашим. Сложение проводилось, начиная с младших разрядов с переходом, в случае необходимости, в следующий разряд. Вычитание из большего числа меньшего выполнялось по «нашему» алгоритму. Сложение и вычитание обозначались символами  и  («хождение» в одну и другую сторону). Умножение сводилось к удвоению одного из множителей и последующему сложению.

*1	15	Если требовалось умножить 15 на 13, то составлялась таблица, а затем из левого столбца, набрав $13=1+4+8$, суммировали соответствующие числа из правого столбца. $15+60+120=195$.
2	30	
*4	60	
*8	120	

При делении особую роль играли так назы-

ваемые аликвотные дроби, т.е. дроби вида $\frac{1}{n}$. Если требовалось

$\frac{2}{5}$	2*	разделить 28 на 5, то строилась таблица (умножения на 5). Затем набирали из чисел правого столбца число 28 и из левого столбца получали результат $\frac{28}{5} = 1 + 4 + \frac{1}{5} + \frac{2}{5}$, но вместо $\frac{2}{5}$ писали сумму аликвотных дробей $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. Составлялись специальные таблицы представления дробей вида $\frac{2}{n}$ в виде сум-
$\frac{1}{5}$	1*	
1	5*	
2	10	
4	20*	

мы аликвотных дробей для $5 \leq n \leq 331$.

Так $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$, $\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$ и т.д.

В Египте понимали, что треугольники со сторонами 3, 4, 5 или 20, 21, 29 (в общем виде a, b, c , для которых $a^2 + b^2 = c^2$) являются прямоугольными. Решение каждой задачи носило чисто рецептурный, догматический характер, т.е. указывалась последовательность действий, приводящих к результату, но никаких доказательств или выводов формул в папирусах не содержалось.

Математика в древней Месопотамии

Еще 4 тыс. лет до н.э. в междуречье (между реками Тигр и Евфрат) возникли государства, где уже применяли плуг-сеялку, строили крупные города и храмы, водочерпательное колесо (для орошения), были развиты ремесла и торговля. (К слову, в этих местах расположен многострадальный Ирак). Позже эти земли были завоеваны вавилонянами, которые унаследовали культуру древних государств, в том числе математические сведения. В этих местах было найдено большое количество клинописных глиняных табличек, содержащих математические тексты, относящиеся к 2 тыс. лет до н.э. Система счисления вавилонян основывалась на двух основных элементах – это «клин» ∇ , обозначавший 1, и «крюк» \hookleftarrow , обозначавший 10. Система нумерации бы-

ла смешанной позиционной десятично-шестидесятеричной. Так, запись $\overline{4443344337}$ означает $34 \cdot 60 + 25 = 2065$. Аналогично записывались шестидесятеричные дроби. Рассматривались в том числе и дроби, знаменатели которых содержали множители, отличные от 2, 3 и 5. Такие дроби приводят к бесконечным шестидесятеричным дробям, возможно, что вавилоняне понимали их периодичность (сравните с десятичными дробями, отвечающими обыкновенным дробям $\frac{2}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{48}$). Деление при помощи таблицы обратных чисел сводилось к умножению. Имелись таблицы произведений, квадратов, кубов целых чисел. Было известно правило учета процентов простых и сложных. Решались задачи, которые с современной точки зрения сводятся к уравнениям первой, второй и третьей степени. Геометрические сведения вавилонян практически совпадали с египетскими, однако в них содержались зачатки тригонометрии, что было вызвано потребностями астрономии (возможно, отсюда и произошло, что $1^0 = 60', 1' = 60''$).

Приведем примеры задач.

Задача 1. Площадь A , составленная из двух квадратов, равна 1000. Сторона одного из квадратов составляет $\frac{2}{3}$ стороны другого, уменьшенную на 10. Каковы стороны квадратов?

Если x – сторона первого, а y – второго, то имеем систему
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1000 \\ y = \frac{2}{3}x - 10 \end{cases}, \text{ откуда получаем уравнение } \frac{13}{9}x^2 - \frac{40}{3}x - 900 = 0,$$
 положительный корень которого $x = 30$.

Здесь приведено современное решение, в первоисточнике оно выглядело иначе.

Задача 2. За какое время удваивается сумма денег, ссуженная под 20% годовых?

Понятно, что задача сводится к уравнению $\left(\frac{6}{5}\right)^x = 2$. Отмечалось, что $3 < x_0 < 4$, что проверяется без труда, а далее фактически использовалась линейная интерполяция и получали

$$x = 3 + \frac{2 - \left(\frac{6}{5}\right)^3}{\left(\frac{6}{5}\right)^4 - \left(\frac{6}{5}\right)^3} \approx x_0.$$

Вавилонянам были известны суммы

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^n + (2^n - 1) = (2^{n+1} - 1), \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n\right) \sum_{k=1}^n k.$$

Кроме упомянутых систем счисления, разными народами (греки, евреи, армяне, славяне) использовались алфавитные системы счисления. Типичный пример – греческая система.

α	β	γ	...
1	2	3	...
ι	κ	λ	
10	20	30	$\bar{\alpha}=1000$
ρ	σ	τ	
100	200	300	$\bar{\beta}=2000$

Пример: ρ ι β = 112

Мы пользуемся позиционной десятичной системой счисления, которой обязаны Индия.

Лекция 2

Построение основ математической науки. Фалес, Пифагор, Архимед, Аполлоний, Евклид, Евдокс, Птолемей, Диофант

Процесс накопления математических сведений и фактов, формирования понятия числа, зарождения геометрии и тригонометрии (в частности, измерение углов с достаточно высокой точностью) продолжался на протяжении тысячелетий. В Египте и Вавилоне выполняли арифметические действия с целыми числами и обыкновенными дробями, знали прогрессии, умели вычислять площади и объемы, знали соотношение между длинами сторон прямоугольного треугольника. Однако математика носила вычислительный характер, задачи решались по рецептам, предписаниям, которые носили догматический характер, но объяснений, доказательств в ней не содержалось, т.е. в математических текстах говорилось, «как?» решать задачи, но не объяснялось «почему?» именно так. Но без постановки этого вопроса и ответа на него математика как наука немыслима.

В середине первого тысячелетия до н.э. цивилизация в Древней Греции достигает очень высокого развития в экономике (земледелие, торговля, ремесла, строительство, архитектура), общественно-политической и культурной жизни. В политике отмечалось зарождение демократических начал, больших успехов достигла философия (Аристотель, Демокрит, Сократ, Платон, Гераклит и др.). Развивались диалектика, логика, риторика. Философы пытались объяснить в рамках некоторой рациональной теории устройство окружающего мира, вселенной, а также место и роль человека в ней. В Греции последовательно возникают три натурфилософские школы: Ионийская в Милете (VII – VI вв. до н.э.), Пифагорийская в Самосе (VI – V вв. до н.э.) и Афинская (вторая половина V в. до н.э.), которые были основаны соответственно Фалесом, Пифагором Самосским и Платоном. Все они занима-

лись математикой, были, безусловно, знакомы с математическими знаниями древних египтян и вавилонян.

Первым математиком или, как тогда говорилось, геометром (кстати сказать, математиков называли геометрами до XVIII в. н.э.) считают **Фалеса**. Фалес (625 г. – 547 г. до н.э.) по основному роду занятий был купцом, по своим торговым делам он посетил Египет, Вавилон и познакомился там с математическими знаниями. Ему приписывается заслуга доказательства теорем: 1) о пропорциональности отрезков, отсекаемых параллельными прямыми на сторонах угла; 2) о равенстве вертикальных углов и углов при основании равнобедренного треугольника; 3) о равенстве 90° вписанного угла, опирающегося на диаметр окружности; 4) второго признака равенства треугольников.

Пифагор (570 – 500 гг. до н.э.) в своей школе объединил в единое целое геометрию, арифметику, астрономию и музыку – так называемый квадривий. Пифагор и его ученики уделяли много внимания теории чисел, наделяя их мистическими свойствами. Они изучали числа четные и нечетные, простые и составные, фигурные, совершенные, дружественные. К фигурным относились

треугольные числа вида: $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$,

квадратные: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$,

прямоугольные: $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$,

пятиугольные: $1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) = \frac{(3n-1)n}{2}$,

т.е. все они являются суммами соответствующих арифметических прогрессий, а происхождение названия ассоциируется с геометрическими фигурами

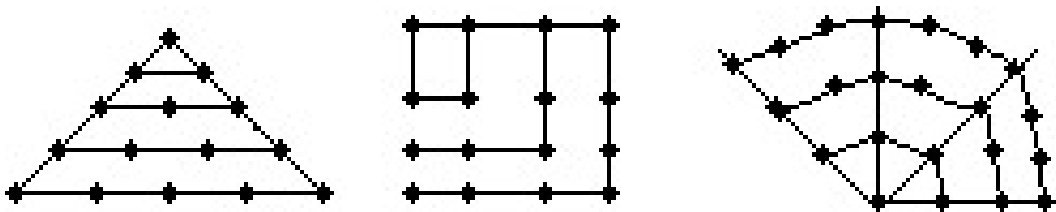


Рис. 1

Совершенным называлось натуральное число, равное сумме всех своих делителей, кроме самого числа. Например, $6=1+2+3$, $28=1+2+4+7+14$, $496=1+2+4+8+16+31+62+124+248$. Дружественными называлась пара таких натуральных чисел, что сумма всех делителей одного из них (без самого этого числа) равна другому числу. Например, числа 220 и 284: $220=1+2+4+71+142$, т.е. 220 равно сумме всех делителей числа 284, а $284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110$, т.е. равно сумме делителей числа 220. Пифагорейцы изучали вопросы делимости, арифметические и геометрические прогрессии, так называемые средние значения:

арифметическое $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$

геометрическое $g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$

гармоническое $h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$

Они умели доказывать теорему Пифагора (скорее всего геометрически). Приведем одно из таких доказательств.

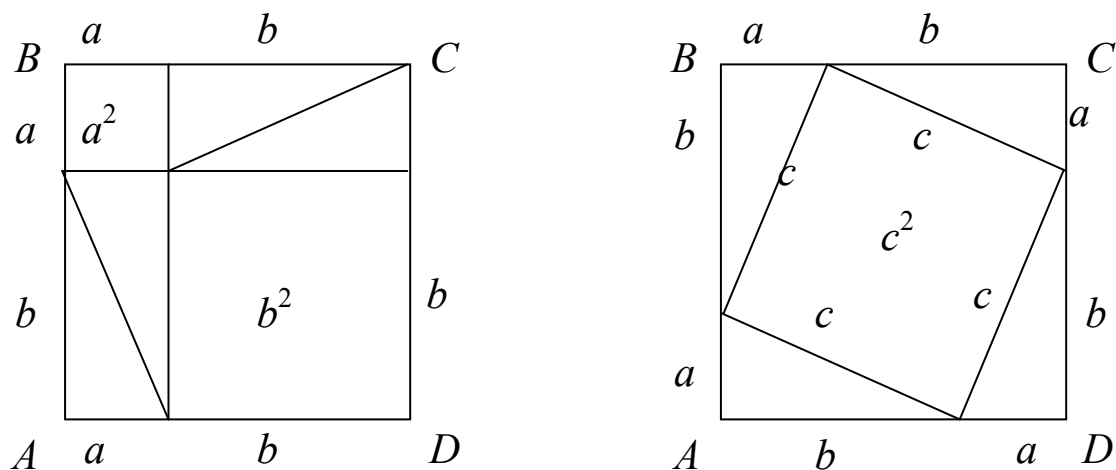


Рис. 2

Квадрат ABCD со стороной, равной $a+b$, можно составить из квадратов со сторонами a и b и четырех прямоугольных тре-

угольников с катетами a и b , либо из квадрата со стороной c и тех же четырех треугольников. Таким образом, приравняв площади, получаем равенства $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$, откуда следует, что $c^2 = a^2 + b^2$. Все это выражалось словами в терминах площадей. Кроме того, они умели строить пифагорейские тройки (это три натуральных числа a , b , c такие, что $c^2 = a^2 + b^2$):
 n ; $\frac{1}{2}(n^2 - 1)$; $\frac{1}{2}(n^2 + 1)$, если n – нечетное число, и
 n ; $\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1$; $\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1$, если n – четное число.

Очень серьезным испытанием для пифагорейцев явилось открытие иррациональности числа $\sqrt{2}$, а точнее сказать, несоизмеримости стороны квадрата с его диагональю. Один из пифагорейцев Гиппас Месапонтский решил найти рациональное число, которым измеряется диагональ квадрата со стороной 1. (По учению Пифагора все управляется (измеряется) числами (имелось в виду рациональными), и Гиппас искал число, которым «управляется» (измеряется) диагональ единичного квадрата). Суть его рассуждений была примерно такой. Если x – длина диагонали квадрата, то $x^2 = 1 + 1 = 2$. Значение x не может быть целым числом, т.к. $x=1$ дает $x^2 = 1 < 2$, $x=2$ дает $x^2 = 4 > 2$. Тогда он берет $x = \frac{7}{5}$ и получает $x^2 = \frac{49}{25} < 2$ и $x = \frac{17}{12}$, что дает $x^2 = \frac{289}{144} > 2$.

Долгие поиски рационального числа давали то $x^2 < 2$, то $x^2 > 2$. И тогда Гиппас проводит рассуждение в общем виде, которое хорошо известно. Предполагая, что существует рациональное число

$x = \frac{m}{n}$, где числа m и n взаимно-простые и $x^2 = 2$, т.е. $\frac{m^2}{n^2} = 2$, он

получает, что $m=2p$, $n=2q$. Таким образом, $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \left(\frac{2p}{2q}\right)^2$ и числа

m и n оказываются не взаимно-простыми, а взаимно-составными. Согласно Аристотелю («Аналитика I», с. 23) позже было проведено исследование и установлена несоизмеримость диагонали

квадрата с его стороной с помощью алгоритма Евклида. Аристотель был категорически против использования арифметики в геометрии и разрешал пользоваться в ней только циркулем и линейкой. Судьба Гиппаса сложилась трагически. Он поставил под сомнение основной тезис Пифагора (святая святых): «все управляется числами», и допускал, что теория Пифагора не всегда верна. Вскоре он гибнет в кораблекрушении. Таким образом, возникает потребность в новых числах, отличных от рациональных.

Приведем принадлежащее А.Н. Колмогорову доказательство несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной. Напомним, что два отрезка a и b называются соизмеримыми, если существует отрезок c , который целое число раз укладывается в a и целое число раз в b , т.е. $a=nc$, $b=mc$, где n, m – натуральные числа. Понятно, что в этом случае отношение длин рационально, в противном случае – иррационально. Для нахождения отрезка c используется алгоритм Евклида, напомним его суть. Пусть заданы два отрезка a и b . Если они равны, то $c=a=b$ ($m=n=1$). Пусть $b<a$. Тогда отложим отрезок b на a столько раз, сколько возможно. Если $a=nb$, процесс закончен ($c=b$). Если же $a=q_1b+r_1$, где $0<r_1<b$, то откладываем r_1 на b . Пусть $b=q_2r_1+r_2$, где $0<r_2<r_1$. Далее отложим отрезок r_2 на r_1 , $r_1=q_3r_2+r_3$ и т.д. Если на некотором шаге $r_{n-1}=q_{n+1}r_n$, т.е. $r_{n+1}=0$, то $r_n=c$ и поднимаясь снизу вверх, легко выразить a и b через c . Если же всякий раз получаем остаток, отличный от нуля, то отрезки a и b несоизмеримы.

А.Н. Колмогоров предложил следующее рассуждение. Пусть дан квадрат $ABCD$ со стороной a и диагональю d . Пусть $BC_1=BC=a$, а $C_1D=r_1$. Очевидно, что $r_1<\frac{a}{2}$ (в противном случае окажется, что $2\geq\frac{9}{4}$), поэтому, откладывая r_1 на CD дважды, получим $CD_1=D_1D_2=r_1$ и $D_2D=a-2r_1=r_2>0$. Из чертежа видим, что $C_1D_1=r_1$, а угол $D_1C_1D=90^\circ$, и процедура повторяется. Необходимо откладывать на D_1D отрезок C_1D , равный r_1 , т.е.

на диагонали квадрата (треугольник D_1C_1D легко достроить до квадрата), откладываем его сторону. Следовательно, получаем

$$d = a + r_1,$$

$$a = 2r_1 + r_2,$$

$$r_1 = 2r_2 + r_3,$$

$$r_2 = 2r_3 + r_4 \text{ и т.д.}$$

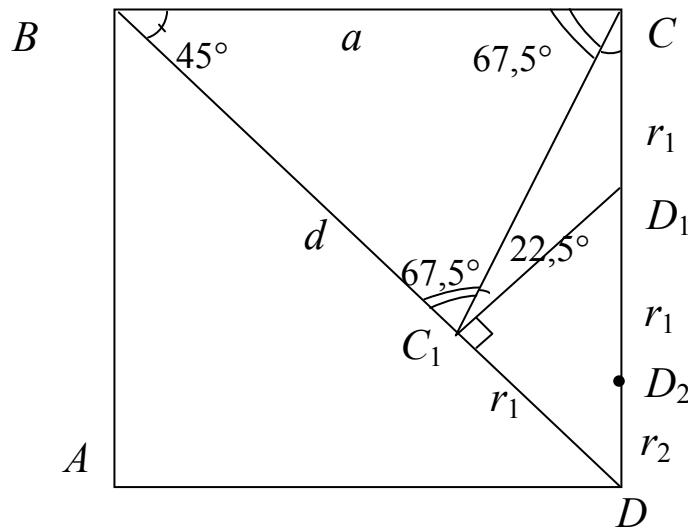


Рис. 3

Таким образом, процесс продолжается до бесконечности, так как все остатки $r_n > 0$.

Вслед за иррациональностью $\sqrt{2}$ была доказана иррациональность $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., $\sqrt{17}$ (конечно, без $\sqrt{9}$ и $\sqrt{16}$). Архит в конце V в. до н.э. доказывает иррациональность чисел вида $\sqrt{n(n+1)}$ для любого натурального числа n . Сейчас это можно было бы доказать следующим образом. Если уравнение $x^2 - p = 0$, где p – натуральное число, имеет рациональный корень, то он является целым числом (почему?), но уравнение $x^2 - n(n+1) = 0$ целых корней не имеет (почему?), а следовательно, $\sqrt{n(n+1)}$ – число иррациональное.

Во второй половине V в. до н.э. Гиппократ Хиосский пишет первое из известных систематическое изложение геометрии «Начала» (до нас это сочинение не дошло). Считается, что их содер-

жание соответствует примерно первым четырем книгам «Начал» Евклида, написанным в III в. до н.э.

В частности, Гиппократ интересовался построением фигур, ограниченных двумя дугами окружностей, названных «луночками», для которых с помощью циркуля и линейки можно построить прямоугольник, равновеликий «луночке». Приведем пример одной из таких «луночек» Гиппократа.

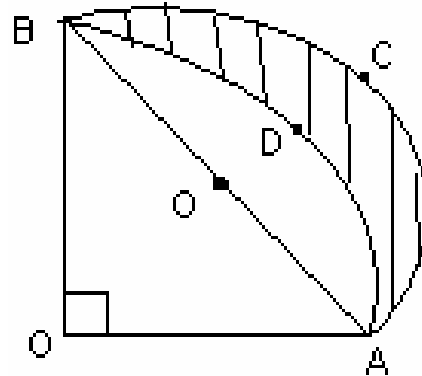


Рис. 4

Пусть дан сектор BOA и $\angle BOA = \frac{\pi}{2}$, на хорде AB как на

диамetre построена полуокружность BDA . «Луночка» ограничена дугами BDA и BCA . Ее площадь $S = S_1 - S_2$, где S_1 – площадь полукруга $BACB$, а S_2 – площадь сегмента $BDAB$. Если радиус сектора $OA = OB = r$, то его площадь $S_3 = \frac{\pi r^2}{4}$, а площадь сегмента

$S_2 = S_3 - S_{\triangle OBA} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{1}{2}r^2$. Так как $AB = r\sqrt{2}$, то площадь полу-

круга $S_1 = \frac{\pi r^2}{4}$ и, следовательно, $S = \frac{\pi r^2}{4} - \left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{1}{2}r^2 \right) = \frac{1}{2}r^2$,

то можно взять прямоугольник со сторонами $\frac{1}{2}r$ и r , площадь ко-

торого равна площади «луночки». Гиппократ нашел три таких «луночки» и только в XIX веке было установлено, что их всего 5. Оказалось, что дело сводится к соизмеримости угловых мер внешней и внутренней дуг, причем отношения мер могут принимать только 5 значений: 2:1; 3:1; 3:2; 5:1 и 5:3. (в рассмотренном случае 2:1).

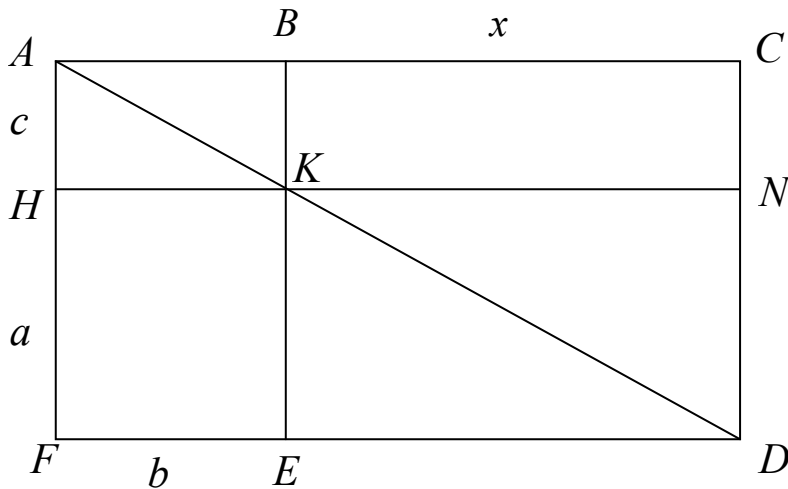


Рис. 5

Геометрические методы, разработанные греками, позже легли в основу геометрической алгебры. Первичным элементом являлся отрезок. Сложение двух отрезков сводилось к прикладыванию одного из них к другому, и рассмотрению его на продолжении первого. Вычитание сводилось к отбрасыванию меньшего отрезка от большего. Произведению отрезков a и b отвечал прямоугольник со сторонами a и b . Если требовалось разделить отрезок ab (это прямоугольник со сторонами a и b) на отрезок c , то выполнялись следующие построения. Прямоугольник $FHKE$ это ab . Он достраивается до прямоугольника $ABFE$, где $AN=c$. Далее находится точка D как пересечение продолжений отрезков AK и FE .

Тогда, обозначив $BC=x$, используя теорему Фалеса, получаем

$$\frac{c}{a} = \frac{AN}{NF} = \frac{AK}{DK} = \frac{AB}{BC} = \frac{b}{x},$$

откуда следует, что $x = \frac{ab}{c}$. Можно непосредственно увидеть, что

площади прямоугольников $FHKE$ и $BCNK$ равны, т.е. равны ab и cx . Действительно, прямоугольник $FHKE$ получится, если удалить из треугольника AFD треугольники ANK и KED , а прямоугольник $BCNK$ получается удалением из треугольника ACD ,

равного треугольнику AFD , треугольников ABK и KND , соответственно равных треугольникам $АНК$ и KED .

Греческим математикам было известно «золотое сечение». Говорят, что точка C осуществляет «золотое сечение» отрезка AB ($C \in AB$), если

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}. \text{ Если обозначить } AB=a, AC=x,$$

то имеем $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$ или $x^2 + ax - a^2 = 0$. Мы бы

решили квадратное уравнение и получили при

этом $x = -\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}$ или $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Греки

строили прямоугольный треугольник с кате-

тами a и $\frac{a}{2}$, тогда его гипотенуза равна

$$\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ и отрезок } AE=x \text{ легко постро-$$

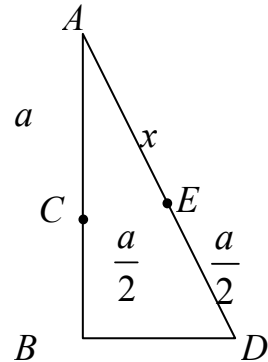


Рис. 6

ить, вычитая из гипотенузы меньший катет ($DE = \frac{a}{2}$). Отложив

$AC=AE$, получим требуемую точку C . Все эти построения выполнялись с использованием циркуля и линейки. Кстати, квадратное

уравнение $x^2 - px + q = 0$, где $p > 0$, $q > 0$, причем q имеет размерность 2 – это площадь, также можно решить геометрически, если

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 \geq q$. Так как $x = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, то для нахождения x требуется выполнить следующее. Если $q=ab$, то можно найти отрезок

\sqrt{q} . Строим полуокружность с диаметром $AB=a+b$ ($AC=a$, $CB=b$).

Тогда $DC = \sqrt{ab} = \sqrt{q}$. После чего строим прямоугольный треугольник KLM с гипотенузой $KM = \frac{p}{2}$ и катетом $LM = \sqrt{q}$, то-

гда катет $KL = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, а x получается как разность KM и KL (если $KP=KL$, то $x=PM$).

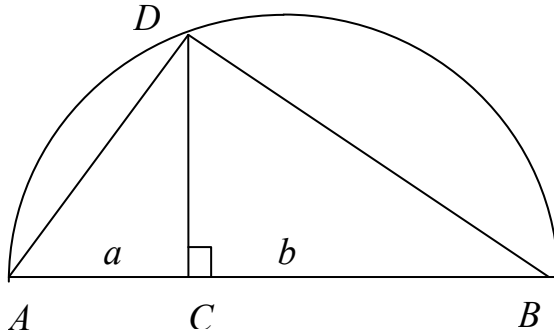


Рис. 7

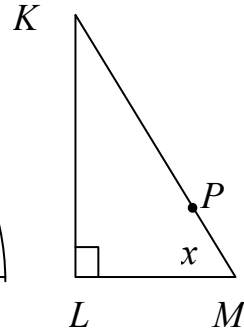


Рис. 8

«Луночки» Гиппократы по существу примыкают к трем задачам древности: 1) трисекция угла, 2) удвоение куба, 3) квадратура круга, которые надо было решить с помощью циркуля и линейки. Речь идет о делении на три равные части данного угла, построении ребра куба по ребру куба вдвое меньшего объема и построении квадрата, равновеликого кругу по его радиусу. Строго неразрешимость первых двух задач, сводящихся к кубическим иррациональностям, была доказана Ванцелем в 1837 году, а неразрешимость третьей следует из доказанной Линдемманом в 1882 г. трансцендентности числа π .

Евдоксом ($\approx 408 - 315$ гг. до н.э.) была построена теория отношений и пропорций отрезков. Фактически в теории Евдокса содержится аксиома Архимеда ($\approx 287 - 212$ гг. до н.э.): для любых двух отрезков a и b найдутся такие натуральные числа m и n , что $ma > b$, $mb > a$. Два отношения $a:b$ и $c:d$ считаются равными, если: 1) всякий раз из неравенства $ma > nb$ следует $mc > nd$; 2) из неравенства $ma < nb$ следует $mc < nd$ (здесь m и n натуральные числа); 3) из неравенства $ma = nb$ следует $mc = nd$. Здесь просматривается аналогия теории Евдокса с теорией действительного числа Дедекинда, основанной на сечениях во множестве рациональных чисел. Фактически теория отношений позволяла избегать проблем,

связанных с иррациональностью, или что то же самое, с несоизмеримостью отрезков.

После завоевания Северной Африки на юго-восточном берегу Средиземного моря Александр Македонский в 332 – 331 гг. до н.э. заложил город, названный в его честь Александрией. Он хотел сделать его столицей мира, но сам Александр умер в 323 г. до н.э., а город был построен Птолемеем Сотером. Одной из достопримечательностей города стал Музейон – обиталище муз, который просуществовал 700 лет и оказал огромное влияние на развитие научной мысли. Птолемей приглашает в Александрию философов, архитекторов, скульпторов, естествоиспытателей. Для них были построены дворцы, музей и громадная библиотека, где было собрано свыше 500 тысяч рукописей. Здесь находились манускрипты Гомера, Платона, Аристотеля, Софокла, Еврипида и др. Здесь творили Аполлоний, Архимед, Клавдий Птолемей, Диофант, Папп, Эратосфен и др. Туда же из Афин приезжает ученик Аристотеля **Евклид** ($\approx 365 - 300$ гг. до н.э.). К этому времени был выработан логический стиль, метод греческой математики, который предполагал четкие предпосылки, введение определений, логическую строгость выводов. Несколько руководств по математике были уже написаны до Евклида Гиппократом, Леоном, Тевдием и др. Евклид написал ряд книг, из которых большую славу ему принесли «Начала» – рукопись, состоявшая из 13 пергаментных свитков, называемых книгами. Вероятно, Евклид был хорошо знаком со многими математическими сочинениями. Он взял из них все лучшее, все известные математические истины и ясно, последовательно, строго доказывает изложенное. Он развил дедуктивный метод, намеченный в академии Платона, на основе логических трудов Аристотеля, который и является сутью математики. Пользуясь им, он, исходя из системы определений, аксиом и постулатов, строит единую математическую теорию с помощью логического вывода предложений и теорем. «Начала» Евклида лежали в основе школьной геометрии около двух тысяч лет. Эта книга издавалась больше всех остальных (уступая Библии) и больше всего изучалась.

I книга начинается с определений, аксиом и постулатов. Определения имеются и в книгах 2-7, 10 и 11, однако аксиом и постулатов в других книгах нет. Постулатов (*postulatum* (лат.) – требование) было 5, их формулировки:

I. Надо потребовать, чтобы могли проводить прямую через 2 точки.

II. Надо потребовать, чтобы могли продолжать неограниченно конечную прямую – отрезок.

III. Надо потребовать, чтобы могли проводить окружность из любой точки плоскости, как из центра, любым радиусом.

IV. Надо потребовать, чтобы все прямые углы рассматривались как равные углы.

V. Надо потребовать, чтобы две прямые, находящиеся в одной плоскости, рассматривались как имеющие общую точку, если при пересечении их третьей прямой образуется сумма внутренних углов, не равная двум прямым углам.

Аксиом было десять, приведем их формулировки, которые начинаются со слов «надо допустить, что ...»:

I. две величины, равные одной и той же третьей, равны между собой;

II. прибавляя к равным величинам поровну, получаем равные величины;

III. отнимая от равных величин поровну, получаем равные величины;

IV. прибавляя к неравным величинам поровну, получаем неравные величины;

V. отнимая от неравных величин поровну, получаем неравные величины.

VI. удвоение равных величин дает равные величины;

VII. половина равных величин дает равные величины;

VIII. совмещенные всеми своими точками величины суть величины равные;

IX. любая часть (правильная) величины всегда меньше целой величины;

X. прямые не могут замыкать пространства.

(Ясно, что речь идет о геометрических понятиях)

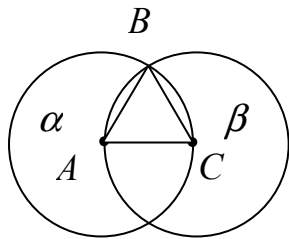


Рис. 9

Позже система аксиом геометрии неоднократно пересматривалась, но наиболее распространенной и общепризнанной является система аксиом Д. Гильберта, в первой редакции опубликованная в 1899 г. в сочинении «Основания геометрии». Позже он внес в нее ряд дополнений и усовершенствований. Кроме аксиом и постулатов, в первой книге «Начал» содержится 36 понятий основных фигур, их равенства и неравенства, перпендикулярности и параллельности прямых и плоскостей и 48 теорем-предложений.

На примере предложения 1 продемонстрируем стиль изложения. Существует равносторонний треугольник с любой данной на плоскости стороной AC .

1) Можно мыслить окружность, например α , с центром в точке A и радиусом AC (постулат 3).

2) Можно мыслить окружность, например β , с центром C и радиусом CA (постулат 3).

3) Существует прямая, проходящая через A и B , где B – точка пересечения окружностей α и β (постулат 1).

4) Сконструировали треугольник ABC (определение треугольника).

Конечно, в пункте 3 не обосновано существование точки B , что невозможно сделать без аксиомы непрерывности. Евклид опирается в этом случае на интуицию и опыт.

Во II книге излагается равновеликость прямоугольников, что потом используется в сложных преобразованиях. В ней, например, содержатся два предложения-теоремы:

1) Прямоугольник, основание которого состоит из n слагаемых, равновелик сумме n прямоугольников с основаниями названных слагаемых и высотами первого прямоугольника.

2) Квадрат, построенный на сумме двух отрезков, равновелик сумме двух квадратов со сторонами a и b и удвоенному прямоугольнику со сторонами a и b (нетрудно узнать формулу $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$).

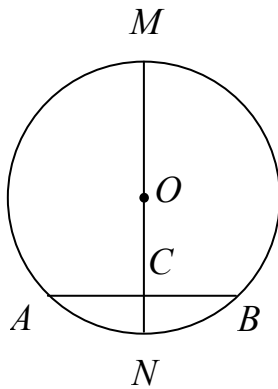


Рис. 10

В III книге рассматривается круг и его элементы – центр, хорды, центральные и вписанные углы. Рассмотрим, например, предложение 1 о нахождении центра круга.

Приведем построение, не следуя стилю «Начал». Возьмем две произвольные точки A и B на окружности. Строится (мыслится) хорда AB (постулат 1). Доказывается, что вся хорда, кроме точек A и B, находится внутри круга. Находится середина отрезка AB – точка C. Проводится $CX \perp AB$. И пусть M и N – точки пересечения CX с окружностью. Находится середина отрезка MN – точка O и доказывается, что она является центром круга.

В книге IV рассматриваются фигуры, вписанные в круг и описанные около него, в частности, правильные многоугольники с числом сторон $3 \cdot 2^n$, $4 \cdot 2^n$, $5 \cdot 2^n$, $15 \cdot 2^n$ и их построение для любого натурального числа n .

Книга V содержит теорию отношений Евдокса, т.е. фактически теорию действительного числа.

Книга VI посвящена теории подобия многоугольников, их свойствам, в том числе отношению их периметров и площадей, она содержит теорему Фалеса.

В книгах VII, VIII и IX излагаются начала теории делимости натуральных чисел, дается начало теории простых и составных чисел, доказывается бесконечность множества простых чисел (докажите это), приводится алгоритм нахождения НОД и НОК натуральных чисел. В них содержатся прогрессии и теорема о совершенных числах:

Если число $S = \sum_{k=0}^n 2^k$ простое, то число $S_1 = S \cdot 2^n$ совершенное (докажите теорему сами).

При $n=1$ получаем 6, $n=2$ дает 28, для $n=3$ число $S=15$ составное и $S_1=120$ не является совершенным, при $n=4$ $S_1=496$, оно

совершенное. Остается до сих пор неизвестным, все ли совершенные числа исчерпываются приведенным представлением.

В книге X проводится классификация иррациональностей вида $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, где a и b – соизмеримые отрезки.

В книгах XI, XII и XIII излагается стереометрия: взаимное расположение прямых и плоскостей, в частности, перпендикулярность, параллельность, скрещиваемость (прямых), призмы и их классификация по видам, пирамиды, доказывается равновеликость тетраэдров при равновеликости оснований и равенстве высот и тот факт, что объем тетраэдра составляет $\frac{1}{3}$ объема треугольной призмы при равновеликости их оснований и равенстве высот.

Находятся отношения объемов шаров, построение пяти правильных многогранников и доказывается, что их только 5: тетраэдр, гексаэдр, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр. Приведем доказательство этой теоремы. В основу положим формулу Эйлера $V+G-P=2$, где V – число вершин, G – граней, P – ребер многогранника. Пусть взят правильный многогранник, гранями которого являются правильные n -угольники, а из каждой вершины выходят s ребер, составляющие равные многогранные углы. Тогда $n \cdot G = 2P$, $s \cdot V = 2P$, $G = \frac{2P}{n}$, $V = \frac{2P}{s}$. Подставляя полученные выраже-

ния в формулу Эйлера, получаем равенство $\frac{2P}{s} + \frac{2P}{n} - P = 2$, из которого имеем

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{n} = \frac{1}{P} + \frac{1}{2},$$

следовательно, $\frac{1}{s} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$. Так как $s \geq 3$, то $\frac{1}{s} \leq \frac{1}{3}$ и

$\frac{1}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{P} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, а поэтому $n < 6$, таким образом, $n \leq 5$.

Аналогично доказывается, что $s \leq 5$.

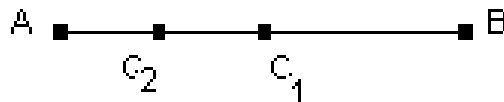
Так как неравенства $s \geq 4$ и $n \geq 4$ не могут выполняться одновременно, то случаи $n = s = 4$; $n = 4, s = 5$; $n = 5, s = 4$; $n = s = 5$ невозможны. Оставшиеся пять возможных вариантов сведем в таблицу. Задаем значения s и n , вычисляем P, B, Γ .

n	S	P	B	Γ	Вид многогранника
3	3	6	4	4	Тетраэдр
3	4	12	6	8	Октаэдр
3	5	30	12	20	Икосаэдр
4	3	12	8	6	Гексаэдр
5	3	30	20	12	Додекаэдр

При построении математических теорий в античной Греции выделяется класс проблем, связанных с понятием бесконечности, предельными переходами, соотношением дискретного и непрерывного. В трудах Демокрита (460 – 370 гг. до н.э.) высказывается атомистическая теория строения вещества, которая переносится в математику и фактически приводит к бесконечно малым величинам. Нашлись научные противники этого, в частности, Зенон (родился около 500 г. до н.э.) приводит логические парадоксы (апории):

1) дихотомия, 2) Ахиллес и Черепаха, 3) полет стрелы.

Идея первого парадокса состоит в том, что нельзя преодолеть расстояние от А до В,



не пройдя первой половины пути AC_1 ; но попасть в C_1 невозможно, не дойдя до C_2 – середины AC_1 и т.д. Таким образом, движение не начнется.

Второй парадокс состоит в том, что Ахиллес, который бежит со скоростью $10^m/c$, не догонит черепаху, находящуюся в начальный момент на 10 м впереди него, так как пока он пробежит 10 м, она проползет некоторое расстояние S_1 , пока он пробежит 5 м, черепаха проползет расстояние S_2 и т.д. Таким образом, фактиче-

ски дело сводится к суммированию бесконечного ряда, но это сопряжено с предельным переходом.

Умение обращаться с бесконечно малыми величинами и осуществлять предельный переход требовалось и для нахождения площадей плоских фигур (круга, его частей, параболического сегмента и т.п.), объемов тел. Считается, что один из ранних методов вычисления площадей – метод исчерпывания, предложен Евдоксом. Идея метода состоит в том, что в криволинейную фигуру (параболический сегмент, к примеру) вписываются многоугольники, приближающие сегмент все точнее и точнее. Затем неявно с помощью интуитивных и практических соображений делается нечто вроде предельного перехода, в результате получается точное значение площади (это напоминает меру Жордана).

Огромный вклад в развитие инфинитезимальных методов внес **Архимед** (287 – 212 гг. до н.э.). Он провел в молодости несколько лет в Александрии и на протяжении всей своей жизни поддерживал связь с ее учеными. Архимед – гениальный ученый древности. Назовем часть его рукописей, разделив их на три группы:

I группа:

1. «О шаре и цилиндре» (2 книги).

2. «Измерение круга».

3. «О многогранниках».

4. Теорема Архимеда: площадь треугольника

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, которая позднее переоткрыта и опубликована Героном.

5. Построение (приближенное) правильного семиугольника.

6. «Псаммит» (исчисление песчинок).

Все эти работы существенно дополняют «Начала» Евклида.

II группа:

1. «Квадратура параболы».

2. О коноидах и сфероидах.

3. О спиралях.

Коноидами Архимед называл параболоиды вращения, а сфероидами – эллипсоиды.

В этих работах вычисляются площади плоских фигур и криволинейных поверхностей с использованием бесконечных процессов, фактически Архимед очень близко подошел к понятию предела.

III группа:

1. «Трактат о равновесии плоских фигур или о центрах плоских фигур».

2. «Трактат о плавающих телах».

Приведем ряд результатов из этих работ.

Архимед доказал, что площадь параболического сегмента

ADB равна $\frac{4}{3} S_{\triangle ADB}$ или $S_{\triangle ADC}$, где $AC = \frac{4}{3} AB$.

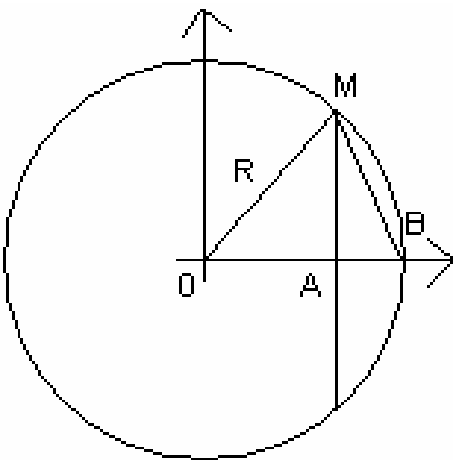


Рис. 12

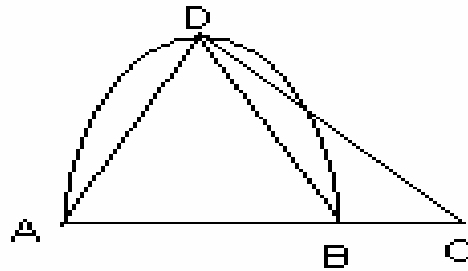


Рис. 11

Он также доказал, что «площадь сферы в четыре раза больше площади ее большого круга», т.е. $4\pi R^2$; площадь шарового сегмента равновелика кругу, радиус которого равен отрезку его прямой, проведенной из вершины сегмента к окружности его основания.

Для нас это не проблема:

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx = \\
 &= 2\pi \int_r^R \left(\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} \right) dx = \\
 &= 2\pi (R^2 - Rr).
 \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$AM^2 = R^2 - r^2, \quad MB^2 = R^2 - r^2 + (R - r)^2 = 2R^2 - 2Rr.$$

Но ведь в распоряжении Архимеда не было интеграла. Архимед установил: «Для всякого шара цилиндр, имеющий основанием большой круг этого шара, а высотой – отрезок прямой, равный диаметру шара, и сам будет в полтора раза больше поверхности шара» (Цитируется по книге Андропова Н.К. «Трилогия предмета и метода математики».) Не ручаясь за точность цитаты, отметим так же, что $V_{ц.}:V_{ш.}=3:2$, кроме того, что $S_{п.п.ц.}:S_{сф.}=3:2$. «Всякий круг равновелик прямоугольному треугольнику, один из катетов которого равен радиусу круга, а другой длине окружности». Для нас это очевидно $\frac{1}{2}r \cdot 2r\pi = \pi r^2$, но ведь равновеликость доказана геометрически в духе Евдокса. Архимед рассмотрел многогранники, которые называются полуправильными (например, октаэдр, ограниченный четырьмя правильными равными треугольниками и четырьмя правильными равными шестиугольниками). Архимед рассмотрел 13 таких многогранников, а всего их существует 15. В трактате «Псаммит» (от греч. "песок") он ставит задачу найти число песчинок, находящихся в шаре с центром в центре Земли, а радиусом, равным расстоянию между центрами Земли и Солнца. Действуя не только как глубоко мыслящий математик, но и как прекрасный экспериментатор-астроном, он оценивает радиус шара. Понимая, что объемы шаров относятся как кубы их радиусов, Архимед начинает с вычисления числа песчинок в шаре равных маковому зернышку (диаметр равен $\frac{1}{40}$ дюйма), в котором содержится не более 10^4 песчинок (мириада), второй шар берется диаметром 1 дюйм = 2,54 см, в котором содержится $10^4 \cdot 40^3 = 64 \cdot 10^7$ песчинок. Третий шар берется диаметром 100 дюймов, четвертый – 10^4 дюймов и т.д. В том шаре, о котором речь шла выше, получилось 10^{58} песчинок, но Архимед идет дальше, увеличивая диаметр шара. Он создает свою десятичную позиционную систему счисления:

Числа первые: $1, 10, 10^2, \dots, 10^7$ (I октада);

Числа вторые: $10^8, 10^9, \dots, 10^{15}$ (II октада);

Числа третьи: от $10^{2 \cdot 8}$ до $10^{8 \cdot 2 + 7}$ (III октада)

Числа четвертые: от $10^{3 \cdot 8}$ до $10^{8 \cdot 3+7}$ (IV октада)

.....

Числа октадные: $10^{8 \cdot 10^8}$ (октада октадных чисел) и т.д.

Тем самым фактически устанавливается бесконечность множества натуральных чисел. Архимед оперировал с очень большими числами. В задаче о быках Гелиоса он получает численность стада 50389073, а при решении уравнения $x^2 - 4729494 \cdot y^2 = 1$ в целых числах он использует число с 206545 знаками. Архимед нашел объемы тел, полученных вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг каждой из осей $V_1 = \frac{4}{3} \pi \cdot b^2 a$ и $V_2 = \frac{4}{3} \pi \cdot a^2 b$ и выяснил, какой из них больше (очевидно, если $a > b$, то $V_2 > V_1$). Он доказывает, что эллипс $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right)$ равно-

велик кругу с радиусом $r = \sqrt{ab}$. Архимед рассматривает спираль $r = \alpha \varphi$, которая названа его именем, и нашел площадь, «заметенную» радиусом–вектором при изменении φ от 0 до 2π .

В трактате «О равновесии плоских фигур ...» решаются задачи статики нахождения центра массы плоской фигуры, там же рассмотрена теория рычага.

В трактате «О плавающих телах» он устанавливает, что «поверхность жидкости в состоянии покоя принимает форму сферы», там же он формулирует «закон Архимеда», рассматривает условия равновесия тел (сферических сегментов, параболоидов, сфероидов, плавающих в жидкости).

Эратосфен ($\approx 276 - 194$ гг. до н.э.) впервые нашел радиус Земли. Он нашел расстояние по меридиану Земли, отвечающее $7^\circ 12'$, оно равнялось 5000 стадий. Следовательно, длина всего меридиана $5000 \cdot \frac{360^\circ}{7^\circ 12'} = 5000 \cdot 50 = 45000$ км (допущена ошибка

около 11%, настоящая длина составляет примерно 40 тыс. км). Он нашел способ нахождения простых чисел («решето Эратосфе-

на»), разработал новый календарь и добавил к 365 суткам $\frac{1}{4}$ часть дня, что приводит к високосным годам.

Традиции Евклида и Архимеда в Александрийской школе продолжил **Аполлоний** ($\approx 260 - 170$ гг. до н.э.), построивший теорию конических сечений. Он обладал выдающимися математическими способностями и к нему обращались не по имени, а просто «великий математик». Аполлонием написан трактат «Конические сечения» из 8-ми книг. Первые 4 книги дошли до нашего времени на греческом языке, следующие 3 – в арабском переводе, а последняя была утеряна и по

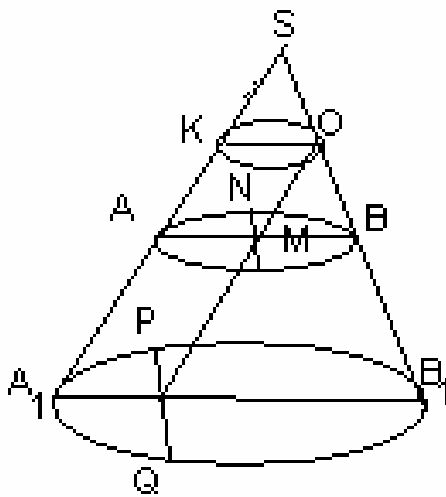


Рис. 13

комментариям Паппа (320 г. н.э.) восстановлена английским математиком Эдмундом Галеем (1656 – 1742 гг.). Конические сечения получили у Аполлония название: эллипс, парабола, гипербола, которые существуют и поныне. Свойство параболы, известное сейчас в виде $y^2 = 2px$, установлено Аполлонием геометрически.

Взяв прямой круговой конус (SA_1B_1 – его осевое сечение). Проведена плоскость $OPQ \perp A_1SB_1$ ($PQ \perp A_1B_1$), она же параллельна образующей SA_1 . Плоскость ANB параллельна основанию конуса. Из произвольной точки N окружности, полученной в сечении, опускается перпендикуляр на диаметр AB , т.е. $NM \perp AB$.

Получаем:

- 1) $MN^2 = AM \cdot MB$ ($\triangle ANB$ – прямоугольный и $MN \perp AB$).
- 2) $\triangle OMB$ подобен $\triangle SKO$, откуда $\frac{OM}{SK} = \frac{MB}{KO}$, $MB = \frac{KO}{SK} OM$;
- 3) $AM = KO$, поэтому $MN^2 = KO \frac{KO}{SK} OM = 2p \cdot OM$;
- 4) $y^2 = 2px$, «передано выше геометрически».

Так получается для любого сечения ANB , где бы ни взять на высоте конуса точку M .

В I книге устанавливаются основные свойства конических сечений.

Во II книге вводятся (впервые) асимптоты и рассматриваются касательные прямые к коническим сечениям.

В III книге изучаются равенства площадей прямоугольных фигур, связанных с коническими сечениями, а сами они рассматриваются как геометрические места точек с определенными свойствами.

В IV книге рассматривается вопрос, сколько точек пересечения могут иметь конические сечения с окружностью и другими коническими сечениями.

В V книге рассмотрены нормали к кривым и их построение.

В VI книге вводится понятие конгруэнтных и подобных конических сечений.

В VII и VIII книгах рассматриваются сопряженные диаметры, устанавливается инвариантность суммы квадратов сопряженных диаметров кривых.

Фактически Аполлоний был предвестником аналитической геометрии, теории кривых второго порядка, построенной в XVIII веке Р. Декартом и П. Ферма.

Еще одним замечательным представителем Александрийской школы был **Клавдий Птолемей** (ок. 85 – 165 гг. н.э.). Он написал «Большое сочинение» (состоявшее из 13 книг), арабские математики назвали его «Самое большое сочинение», по-арабски «Альмагест». В нем он излагал систему мира, расположение небесных тел и их обращение, описывал явления суточного движения. Система мира была геоцентрической. Он работал в Александрийской обсерватории. Свои исследования проводил с помощью астролябии, построил небесный глобус, на котором были нанесены звезды и созвездия с их долготами и широтами (сферические координаты). В «Альмагесте» греческая тригонометрия достигла высшего уровня (приведены формулы $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, таблицы хорд с шагом в $30'$), дополнена геометрия Евклида. Им, в частности, доказана теорема, носящая теперь его имя: произведение

длин диагоналей вписанного в круг четырехугольника равно сумме произведений длин его противоположных сторон. Ее не трудно доказать с помощью теоремы синусов.

Приведем некоторые сведения о деятельности **Диофанта** (около 250 г. н.э.). Из его «Арифметики», состоявшей из 13 книг, сохранилось 6, в них содержатся начала алгебраических методов. Риторическая алгебра Евклида и Архимеда заменяется синкопированной, в которой употребляются сокращения слов, связанных с алгебраическими понятиями. Задачи, которые он рассматривал, сводились к уравнениям или системам уравнений первой и второй степени, в том числе неопределенным.

Примеры:

1) Найти два числа так, чтобы их произведение находилось в заданном отношении к их сумме, т.е. $xy = k(x + y)$;

2) Разложить данное квадратное число $a^2 = 16$ на два квадрата $\left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = 16$.

А также задачи, приводящие к уравнениям 3-й и 4-й степени:

1) к кубу и квадрату прибавить один и тот же квадрат так, чтобы квадрат остался квадратом, и куб – кубом, т.е. $y^2 + x^2 = u^2$, $z^3 + x^2 = v^2$;

2) найти 3 квадрата так, чтобы сумма их квадратов была также квадратом: $(x^2)^2 + (y^2)^2 + (z^2)^2 = u^2$.

Неопределенные уравнения с целыми коэффициентами, для которых находят целые или рациональные решения, называются диофантовыми.

Папп (около 320 г. н.э.) пишет труд «Математические кол-лекции» из восьми книг. До нас дошли только 6 из них.

Во II книге рассматриваются числа вида 10^n , где n – натуральное число.

В III книге излагается построение пяти правильных многогранников, вписанных в шар.

В IV книге рассмотрены кривые поверхности и кривые линии двойкой кривизны, связанные с задачами о трисекции угла и

квадратуре круга. Доказан ряд теорем о кривых: квадратриссы, спирали, конхоиды.

Книга V содержит изопериметрические задачи. Доказать что: 1) из всех треугольников, построенных на одном основании, наибольшую площадь имеет равнобедренный; 2) из двух правильных многоугольников с равными периметрами бóльшую площадь имеет многоугольник с большим числом сторон; 3) площадь правильного многоугольника меньше площади круга, длина окружности которого равна периметру многоугольника; 4) из всех фигур равного периметра наибольшую площадь имеет круг.

Там же рассматриваются 13 полуправильных многогранников, введенных Архимедом, кстати, в предисловии к V книге Папп пишет о сотах, которые строят пчелы, затрачивая наименьшее количество воска на фигуры, содержащие большее количество меда.

Папп доказывает, что объем шара больше объема любого правильного многогранника, имеющего с шаром равную площадь поверхности.

VI книга содержит комментарии к книгам Теодосия «Сферика», Аристарха Самосского «О величинах и расстояниях», Евклида «Оптика» и «Феномены».

В VII книге Папп рассматривает два вида анализа и синтеза. Он разбирает наиболее трудные математические понятия и сочинения своих предшественников, в том числе и утерянных впоследствии, что позволило ученым XVII и XVIII веков по трудам Паппа восстановить многое из того, что было создано древнегреческими математиками.

В VIII книге излагаются начала механики, проводится различие между теоретической и практической механикой.

Но, к сожалению, Александрия теряла интерес к математике, отдавая предпочтение философии и религии. Судьба Александрийской школы сложилась трагически. Религиозные распри, принятие императором Константином (274 – 337 гг.) христианства в качестве государственной религии вызвали преследование сторонников языческих религий. Они оставляют Александрию и поселяются в храме Сераписа, который был осажден христианами и

уничтожен вместе со всеми хранившимися там историческими и научными ценностями. Погибла богатейшая библиотека. Погиб ряд ученых, в числе их первая женщина-философ и математик **Ипатия** ($\approx 370 - 415$ гг. н.э.), это случилось в марте 415 года.

Сделаем некоторые выводы. В VI – V вв. до н.э. в Греции математика становится наукой. В нее вошли доказательства, дедуктивный метод рассуждений. Большие успехи были сделаны греческими математиками в теории чисел, обозначена проблема иррациональности (как результат несоизмеримости отрезков), сформировалась как наука геометрия, построена теория конических сечений. Развита метод бесконечно малых. Значительным явлением явилась написание Евклидом «Начал». В период со II в. до н.э. до II в. н.э. получила дальнейшее развитие теория конических сечений, геометрия, положено начало тригонометрии, строится теория решений неопределенных уравнений. Так начинался второй период развития математики.

Лекция 3

Математика Востока

после упадка античного мира – Китай, Индия, Средняя Азия

Математические познания китайцев восходят к XXV в. до н.э. Самым ранним из известных истории математическим сочинением, написанным в Китае и дошедшим до нас, является «Математика в девяти книгах». Предположительно, это руководство составлено выдающимся ученым и государственным деятелем Чжан Цанем (152 г. до н.э.), которое впоследствии неоднократно перерабатывалось и дополнялось. Это, конечно, не книга в современном понимании этого слова, а рукописные свитки, каждый из которых содержит задачи, объединенные одной темой, и предназначенные для определенной категории специалистов: землемеров, строителей, астрономов, сборщиков налогов и т.д. Изложение догматическое, рецептурное. Дается условие задачи, ответ, а после группы однотипных задач приводится алгоритм их решения (это уже некоторые обобщения).

Книга 1. «Измерение полей». За единицу площади принимается прямоугольник со сторонами 15 и 16 бу (1 бу \approx 133 см). Формулы для вычисления плоских прямоугольных фигур даны правильные. Для вычисления площади круга и его частей берется $\pi=3$. Площадь кругового сегмента считалась равной площади трапеции, большее основание которой совпадает с основанием сегмента, а высота и меньшее основание – с высотой сегмента. Эта приближенная формула является более точной для сегментов с малой высотой. Позже китайские математики уточнили значение π : 3,1547 (I в. до н.э.), $\sqrt{10}$ (II в. н.э.), 3,14 (III в. н.э.) и в конце концов добрались до седьмого знака после запятой.

Книга 2. «Соотношение между различными видами зерновых культур». Приводится методика вычисления налога в

объемных долях, который взимался зерном. Ясно, что одна мера различного зерна ценилась по-разному. Приводились расчеты, применяемые при переработке зерна. Это было связано с решением задач на пропорциональное деление. Использовалось деление, пропорциональное обратным величинам.

Книга 3. «Деление по ступеням». В ней содержалось простое и сложное тройное правило, связанное с пропорциональным делением. Оно применялось для распределения доходов между государственными чиновниками.

Книга 4. «Шао – Гуан». Посвящена геометрическим задачам:

- 1) нахождение стороны прямоугольника по известной его площади и другой стороне;
- 2) нахождение радиуса круга по его площади;
- 3) нахождение диаметра шара по его объему.

При решении двух последних задач приходилось извлекать квадратные и кубические корни.

Книга 5. «Оценка работ». Рассматривались задачи, связанные со строительством крепостных стен, валов, плотин, башен, ям, рвов и т.д. Вычислялся объем работы, потребность в рабочей силе, материалах, транспортных средствах и т.п.

Книга 6. «Пропорциональное распределение». Речь идет о налогообложении, которое связано с пропорциональным делением. Содержится серия задач на суммирование арифметических прогрессий и задачи на совместную работу лиц с различной производительностью труда.

Книга 7. «Избыток – недостаток». В ней решаются линейные уравнения и их системы. В частности, используется метод ложных положений.

Приведем пример: 9 слитков золота весят столько же, сколько 11 слитков серебра. Если поменять местами 2 слитка, то веса будут отличаться на 13 ланов (16 ланов равны 1 цзиню). Найти вес каждого слитка. Понятно, что задача сводится к решению

системы уравнений. Если x – вес слитка золота, а y – вес слитка

серебра в ланах, то $\begin{cases} 9x = 11y, \\ 8x + y + \frac{13}{16} = 10y + x \end{cases}$ или $\begin{cases} 9x - 11y = 0, \\ 7x - 9y + \frac{13}{16} = 0. \end{cases}$

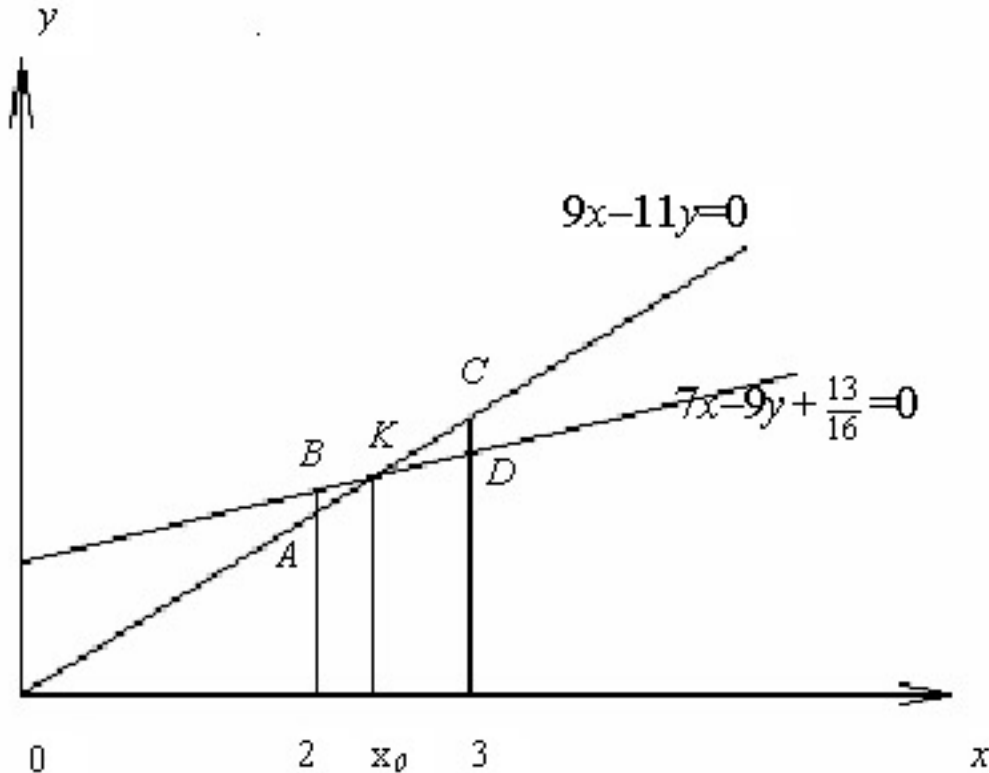


Рис. 14.

Подставляя $x_1=3$, а $x_2=2$ в первое уравнение, получаем $y_1=\frac{27}{11}$, $y_2=\frac{18}{11}$. Если подставить в левую часть второго уравнения x_1 и y_1 , получим $z_1=-\frac{49}{11 \cdot 16}$ – недостаток, а для x_2, y_2 имеем $z_2=\frac{15}{11 \cdot 16}$ – избыток, и следовательно, (см. рис. 14) из подобия треугольников ABK и DCK имеем, $\frac{AB}{CD} = \frac{z_2}{-z_1} \Rightarrow \frac{x_0 - 2}{3 - x_0} = -\frac{z_2}{z_1} \Rightarrow x_0 = 2\frac{15}{64}$, $y_0 = 1\frac{53}{64}$ (цзиней). Т.е. применяется правило двух ложных положений.

4	5	2-й сорт
8	1	3-й сорт
39	24	меры

Умножив ее первый столбец на 5 и четыре раза вычитая второй, получили

36	3-й сорт
99	меры

Отсюда $z = \frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$, из второй таблицы находим $y = \frac{17}{4}$ и из первой $x = \frac{37}{4}$.

Книга 9. Содержит задачи на определение недоступных расстояний и высот с помощью теоремы Пифагора и свойств подобных треугольников. Некоторые задачи требовали решения полного квадратного уравнения.

Китайские математики знали треугольник Паскаля. Они умели решать сравнения. Приведем пример такой задачи: найти числа, которые при делении на 3, 5, 7 дают соответственно остатки 2, 3, 2, т.е. $x \equiv 2 \pmod{3}$, $x \equiv 3 \pmod{5}$, $x \equiv 2 \pmod{7}$. Очевидно, $x = 23 + 105k$, $k \in \mathbb{Z}$. Эта задача относится к III в. до н.э. Позже встречались существенно более сложные системы сравнений: $x \equiv 32 \pmod{83}$, $x \equiv 70 \pmod{110}$, $x \equiv 30 \pmod{135}$. $x = 24600 + 135 \cdot 83 \cdot 22p$, $p \in \mathbb{Z}$. Китайские математики решали приближению уравнения 3-й и 4-й степеней. Им была известна схема Горнера. По своему духу математика Китая близка математике Египта и Вавилона. С XIV в. н. э. в связи со сложившимися политическими условиями начинается период застоя математики Китая, длившийся несколько веков.

Первые математические сведения **Индии** содержатся в религиозных книгах: сутры и веды, они написаны на санскрите в VIII – VII вв. до н.э. Феноменальные математические способности приписывались Будде. О развитии математики в Индии можно судить по трудам трех наиболее выдающихся ученых: Ариабхатты (475 -?), Брахмагупты (598 – 660 гг.) и Бхаскары (1114 – 1184 гг.).

Ариабхатта написал сочинение «Ариабхаттиам», состоявшее из 4 частей и содержащее 123 стихотворных формы (изложение в стихотворной форме характерно для индийских математиков). В рукопись входили «Небесная гармония» – собрание численных астрономических таблиц, необходимых в астрономических вычислениях, и «Начало счисления», которые состоят из 33 правил, изложенные для лучшего запоминания в стихотворной форме.

В 1 правиле:

- 1) он называет на санскрите числа, каждые из которых в десять раз больше предыдущего: 1, 10, 100, 1000, ... , 1000000, ... , 1000000000;
- 2) квадрат есть четырехугольник с равными сторонами и равными углами. Его площадь есть произведение двух равных сторон – чисел;
- 3) произведение трех равных сторон – чисел есть куб – фигура с двенадцатью ребрами.

2 правило дает правило извлечения кубических корней, основанное на формуле $(a + v)^3 = a^3 + 3a^2v + 3av^2 + v^3$. В нем содержится намек на знание нуля (сунья) и позиционного применения наложения числовых знаков. Заметим, что индийские цифры в своем написании эволюционировали около 1000 лет и окончательный вид приобрели в XVI в. в печатных руководствах Европы.

3 правило. Половина окружности, умноженная на половину диаметра, дает площадь круга: $\frac{1}{2}C \cdot \frac{1}{2}D = p R \cdot R = p R^2$. Заметим, что p он считал равным 3,1416.

4 правило содержит усовершенствованную таблицу хорд Птолемея, вместо хорд используется полухорда (что ближе к синусу).

5 правило дает краткую таблицу полухорд с интервалом $3^\circ 45' = 225'$ от 0° до 15° .

6 правило позволяет вычислять затмение небесных светил.

7 правило говорит об арифметической прогрессии, о вычислении n -го члена по первому члену и разности и нахождение суммы n ее членов. (Все это в стихотворной форме.)

8 правило. В риторической форме дается решение квадратного уравнения $ax^2 + vx + c = 0$ в виде $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}$. (Запись современная.)

9 правило дает способ вычисления числа ядер в пирамидальном треугольном множестве (в словесной форме), что в переводе на современную символику передается в виде формул $S = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{6}$,

которые приводят к множеству $\{1, 4, 10, 20, \dots\}$.

10 правило. Ядра складываются в пирамидальные правильные четырехугольные множества:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

эта формула была известна Архимеду.

11 правило: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

12 правило содержит словесную формулу нахождения простых и сложных процентов.

13 правило дает «тройное правило» для решения задач с пропорциональными величинами. В рукописи приведена задача: «16-летняя девушка – рабыня стоит 32 нишка, что стоит 20-летняя рабыня?» Зависимость здесь обратно пропорциональна, т.к. чем старше рабыня, тем она дешевле. Таким образом $\frac{16}{20} = \frac{x}{32}$;

$x = 32 \cdot \frac{4}{5} = 25\frac{3}{5}$ (нишка). В следующем правиле используется метод инверсии (латинское *inversio* – переворачивание).

14 правило предлагает задачу: «Найти число, которое будучи умножено на 3, затем разделено на 5, к результату прибавлено 6, затем извлечен квадратный корень, потом вычтена 1, результат возведен в квадрат и получено 4». Решается задача с конца, вы-

полнением обратных действий: $\sqrt{4} = 2$, $2+1=3$, $3^2=9$, $9-6=3$, $3\cdot 5=15$, $15:3=5$ – это ответ. Здесь же приведена еще одна задача: «Прекрасная девушка с лучистыми глазами, скажи мне, если ты поняла метод инверсии: какое число, будучи умноженное на 3, затем увеличенное на $\frac{3}{4}$, разделено на 7, уменьшено на $\frac{1}{3}$, умножено само на себя, уменьшено на 52, после чего извлечен квадратный корень, прибавлено 8, разделено на 10, дает число 2». Решение:

$2\cdot 10=20$, $20-8=12$, $12^2=144$, $144+52=196$, $\sqrt{196} = 14$, $14: \frac{2}{3}=21$, $21\cdot 7=147$, $147:\frac{7}{4}=84$, $84:3=28$ – это ответ.

15 правило в словесной форме задает систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ y + z + u = b \\ z + u + x = c \\ u + x + y = d \end{cases}, \text{ где } a, b, c, d \text{ заданы.}$$

Брахмагупта пишет сочинение, которое в переводе называется «Улучшенная система Брахмы», состоявшее из 20 книг, две из них посвящены математике: 12-я – арифметике, 18-я – алгебре.

«Арифметика» состоит из 10 глав. В 1-й главе рассмотрены 8 правил операций с натуральными числами, записанными в позиционной десятичной системе: 1) сложение, 2) вычитание, 3) умножение, 4) деление, 5) возведение в квадрат, 6) извлечение квадратного корня, 7) возведение в куб, 8) извлечение кубического корня. Правила 9-14 определяют действия с обыкновенными дробями (деление одной дроби на другую сводится к умножению первой на обратную ко второй). Правила 15 – 19 определяют действия с пропорциональными числами. 20-е правило – правило меры. В «Арифметике» приводятся восемь определений: 1) определение смесей, вычисления проб и процентов, 2) прогрессии, 3) вычисления в плоской геометрии, 4) – 7) касаются пространст-

венной геометрии (в основном объемы тел), 8) правило – измерение и вычисление с помощью теневого проектирования. Во 2-й главе содержатся те же правила, но в шестидесятеричной позиционной системе счисления (сравните с Вавилоном). В 3-й главе приведены суммы треугольных, квадратных и кубических чисел (примерно как у Ариабхатты). 4-я глава содержала ряд формул: Герона для вычисления площади треугольника, площади четырехугольника, вписанного в окружность $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где $2p = a + b + c + d$; диагонали четырехугольника, вписанного в круг, выражаются через его стороны: $x^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}$, $y^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$, где a, b, c, d – длины последовательно идущих сторон. Там же приводятся Пифагоровы тройки: катеты m и $\frac{1}{2}\left(\frac{m^2 - n^2}{n}\right)$, гипотенуза $\frac{1}{2}\left(\frac{m^2 + n^2}{n}\right)$, где n и m – произвольные натуральные числа $m > n$.

«Алгебра» Брахмагупты состоит из восьми глав. 1-я глава: решение неопределенных уравнений $ax + by = c$; 2-я глава: действия над иррациональностями; 3-я глава: решение уравнений $ax = b$; 4-я глава: решение уравнений второй степени с одной неизвестной; 5-я глава: решение уравнений с несколькими неизвестными, взятые из астрономии; 6-я глава: решения уравнений вида $xu + ax + by = c$, где a, b и c – натуральные числа; 7-я глава: решение уравнений вида $ax^2 + b = y$, где a и b – натуральные числа; 8-я глава: задачи, имеющие приложение к астрономии.

Бхаскара написал труд «**Венец астрономической системы**». В нем содержится «Арифметика» из 13 глав. 1-я глава содержит таблицы мер длины, веса и денег. 2-я глава: действия с натуральными числами (как у Брахмагупты). Изложены действия с дробями, используются действия с нулем. Ему известны равенства $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

операции над степенями с натуральными показателями $(a^2)^2 = a^4$, $a^2 \cdot a^3 = a^5$ (запись современная) и т.д. Знаков умножения, сложения, вычитания не было. Сложение сводилось к записи слагаемых рядом; вычитание: уменьшаемое писали рядом с вычитаемым, над которым ставилась точка; умножение обозначалось меткой «bha», стоявший после множителей. Извлечение квадратного корня обозначалось «ка» (от «kaṇi» – радикал). Запись ka 275 ka 26 означает $\sqrt{275} - \sqrt{26}$. Таким образом, если у Ариабхатты и Брахмагупты алгебра была риторической (словесной), то у Бхаскары она становится «синкопированной» (т.е. появляются сокращения слов). Таким образом, зарождается буквенная символика. В «Арифметике» Бхаскары есть задачи, решаемые с помощью инверсии (как у Ариабхатты), но есть задачи иного характера. Они решаются методом, называемым по-латыни «regula falsi» («правило фальшивое»). «Из пучков цветов чистых лотосов взяты третья, пятая, шестая части, которые соответственно преподнесены богам Шиве, Вишне и Солнцу. Четвертая же часть досталась Бавани. Оставшиеся шесть отданы многоуважаемому учителю. Скажи мне немедленно число всех цветков». Решение предлагается такое: берется число, делящееся на 3, 4, 5, 6, пусть это 60. Тогда

$$60 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) = 57$$

$60 - 57 = 3$, а надо иметь в остатке 6, следовательно, 60 необходимо увеличить вдвое, что даст 120. В «Арифметике» словами описана формула $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$. Изложено решение иррациональных уравнений $x \pm a\sqrt{x} = b$, $cx \pm a\sqrt{x} = b$. Бхаскара показывает, как их решать. Приводятся неопределенные уравнения. Там же содержатся сведения о соединениях (размещениях, сочетаниях, перестановках).

Следует отметить, что главной заслугой математиков Индии является создание абсолютной позиционной системы счисления натуральных чисел, введение нуля, который сначала обозначался точкой (вместо цифры в отсутствующем разряде), а затем круж-

ком. Нуль назывался сунья (в переводе «пусто»). Точное время создания позиционной системы неизвестно, однако сохранилась плита, относящаяся к 595 г., на которой число 346 записано в такой системе, а в 662 г. сирийский епископ Себехт пишет об искусном методе счисления натуральных чисел при помощи 9 знаков (значащих цифр), «для восхваления которого нельзя найти достаточных слов». Они ввели и правильно трактовали отрицательное число. Брахмагупта трактует число как имущество, либо как долг и объясняет операции: сумма двух имуществ – есть имущество, сумма двух долгов – есть долг, сумма имущества и долга – их разность, в случае их равенства – нуль.

В другой части своего сочинения «Вычисление корней» Бхаскара говорит: «Я предпринял в настоящее время попытку изложить и разобрать сущность алгебры и анализа».

1-я глава содержит 6 действий над плюсом и минусом, 6 действий с нулем, 6 действий над одним неизвестным, 6 – над несколькими переменными, 6 – над иррациональными величинами. Речь идет о сложении, вычитании, умножении, делении, возведении в степень и извлечении корня. Все делается в стихотворной форме. Интересны его действия с нулем: «Увеличенные или уменьшенные на нуль имущество или долг остаются без изменения, вычтенные из нуля они принимают обратные значения (долг становится имуществом, а имущество – долгом). Делимое 3, делитель нуль. Результат деления $\frac{3}{0}$, которое есть бесконечность,

называется «частное от нуля». Оно не претерпевает изменений: величина, которую называют «частное от нуля», не может ни увеличиваться, ни уменьшаться, какие бы большие сложения или вычитания мы ни производили, подобно тому, как во времени, не имеющем ни начала, ни конца, целые бесконечные существования бытия». Он строит правила действия с буквами и иллюстрирует их на числах. Имеются тождества (здесь они записаны в современном виде)

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}, \quad \sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Приводится преобразование

$$\sqrt{16 + \sqrt{120} + \sqrt{72} + \sqrt{60} + \sqrt{48} + \sqrt{40} + \sqrt{24}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{6}.$$

Решаются неопределенные уравнения первой и второй степеней, а также – уравнения первой степени с одной неизвестной. Приводим задачу: «Некто сказал своему приятелю: друг мой, дай мне 100 и я буду вдвое богаче тебя! Второй ответил: если ты мне дашь 10, то я буду в 6 раз богаче тебя. Спрашивается, сколько имеет каждый?» (40; 170)

Уравнения второй степени $ax^2 + bx = c$ решаются по схеме: умножаем на $4a$, $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$, прибавляем b^2 ,

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2,$$

$$\text{отсюда } (2ax+b)^2 = b^2 + 4ac \Rightarrow 2ax+b = \pm \sqrt{b^2 + 4ac} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}.$$

Долговые (отрицательные) значения Бхаскара не признает:

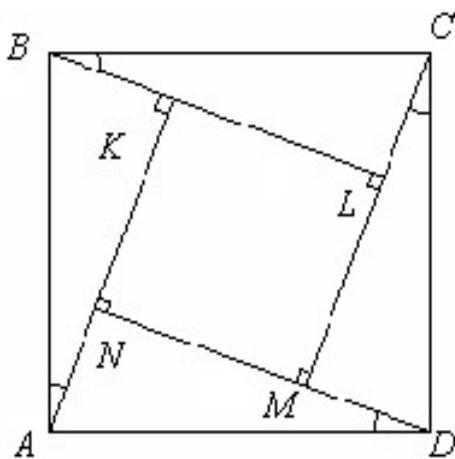


Рис. 15.

«абсолютно долговые числа люди не принимают во внимание». Так, для уравнения $x^2 - 45x = 250$ он находит оба корня $x_1 = 50$ и $x_2 = -5$, но к второму относится негативно. Бхаскара приводит «арифметическое доказательство» теоремы Пифагора (см. рис. 15.)

$ABCD$ – квадрат, со стороной длины c .

$KLMN$ – квадрат, $BL=b$, $BK=a$.

Следовательно,

$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2 = a^2 + b^2.$$

Наибольшего расцвета индийская культура достигла к VI в. н.э. Он считается золотым или классическим веком Индии, математика достигает наибольшей высоты в VIII-XII вв. В Индии создаются университеты (в Наланде, Викромашиле и др.), в которые приезжала молодежь даже из соседних стран.

Средняя Азия

В 622 г. в Аравии зарождается новая религия – ислам. Арабы создают феодальную державу – халифат. Под знаменем ислама арабы прошли на восток, покорив Ирак, Иран, Среднюю Азию (таджики, узбеки) и частично Индию. Затем они прошли на запад по Северной Африке, перешли Гибралтар, заняли часть Испании и, перейдя Пиренеи, проникли в Южную Францию, где были остановлены войсками Карла Мартелла в 732 г. Арабы энергично взялись за перевод на арабский язык научных рукописей с индийского и греческого языков и их изучение. Вскоре столицей халифата становится Дамаск, в VIII в. столица переносится в Багдад. Там создается «Дом мудрости» с библиотекой и обсерваторией. Ученые арабы изучают литературу, философию, логику, математику, астрономию по греческим и индийским источникам. На арабский язык переводятся астрономические таблицы полухорд Брахмагупты. На арабский язык были переведены труды Аристотеля, Евклида, Архимеда, Аполлония, Птолемея, Диофанта, Паппа, Герона, благодаря чему эти сочинения сохранились. Появились Комментарии этих работ. Все это способствовало пробуждению творческой математической мысли и появлению самостоятельных, оригинальных работ арабских и других мусульманских ученых Среднего Востока. Математические знания были принесены арабами в Европу. Так, крупным научным центром в X в. была Кордова (Испания), ее библиотека насчитывала 600 тыс. рукописей. Туда на протяжении нескольких столетий приезжали за знаниями молодые люди из Западной Европы.

Одним из крупнейших среднеазиатских математиков был **Мухаммед ибн Мусаал-Хорезми** (787 – 850 гг.). Им была написана «Арифметика», сама она не сохранилась, но в 1857 г. был

найден ее латинский перевод (сам перевод был выполнен в XII в.) под заголовком «Algrithmi de Numero Indorum», начинался он словами: «Сказал Алгоризми, воздадим должную хвалу Богу...». «Алгоризми» перешло в «Алгорифм», а затем «Алгоритм», что означает искусство вычислять по единому простому принципу.

Второй его работой была «Алгебра» (на арабском языке «Китай мухтасар аль-Джебр воль-Мукабала»). Само слово «Алгебра» произошло от названия операции «аль-джебр» (восстановление) и «кабала» (приведение), смысл которой в переносе членов уравнения из одной его части в другую. В словесной форме он проводит классификацию выражений, содержащих неизвестные.

Приведем ее, используя нашу символику:

- 1) один квадрат равен нескольким корням $x^2 = ax$;
- 2) один квадрат равен числу $x^2 = a$;
- 3) несколько корней равны числу $ax = b$;
- 4) один квадрат и несколько корней равны числу $x^2 + bx = a$;
- 5) один квадрат и число равны нескольким корням $x^2 + a = bx$;
- 6) несколько корней и число равны одному квадрату $ax + b = x^2$.

Уравнения рассматриваются только с положительными коэффициентами. Так, квадратные уравнения имеют три вида:

$$x^2 + px = q \quad x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

$$x^2 = px + q \quad x = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

$$px = x^2 + q \quad x_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, x_2 = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Дается геометрическая интерпретация алгебраического решения для уравнений $x^2 + px = q$ (см. рис. 16, 17).

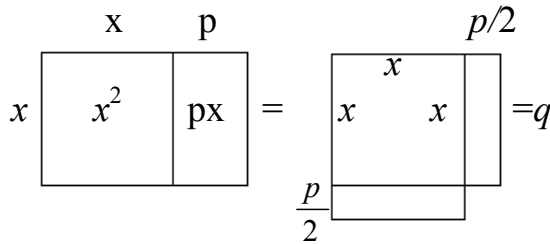


Рис. 16.

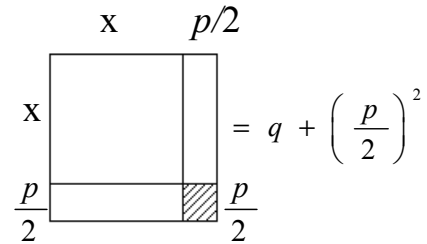


Рис. 17.

Далее понятно, что

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2},$$

откуда

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Сабит ибн Корра (836 – 901 гг.) работал в Багдаде, занимался астрономией, переводил с греческого на арабский греческих классиков (в частности, работу Архимеда о построении правильного семиугольника). При переводе «Таблицы хорд» Птолемея фактически приходит к понятию синуса и устанавливает теорему $a : \sin A = b : \sin B$, где a и b – катеты прямоугольного сферического треугольника. Он занимался дружественными числами. При переводе работы Архимеда «О цилиндре и шаре» обращает внимание на задачу о разбиении шара плоскостью на два шаровых сегмента с данным отношением объемов, что приводит к проблеме решения кубических уравнений и использованию инфинитезимальных методов, открытых Архимедом.

Абу-л-Вафа (940 – 998 гг.) перевел с комментариями «Арифметику» Диофанта, усовершенствовал «Алгебру» Мухаммеда. Он составил таблицу синусов, доведя шаг до $0,5^\circ$, а точность до восьмого знака после запятой.

Абу Рейхан ал-Бируни (≈ 975 – 1050 гг.) изучал «Начала» Евклида и «Альмагест» Птолемея. Составляет еще более точную таблицу синусов с шагом $15'$, дает таблицу тангенсов через 1° , рассматривает 4 случая решения плоских треугольников с помощью тригонометрии, использует сферическую тригонометрию

для решения сферических треугольников (5 случаев). Для сферических треугольников устанавливает теорему синусов:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

и теорему косинусов:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A,$$

здесь A, B, C – углы,

a, b, c – стороны,

$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a$ сферического треугольника.

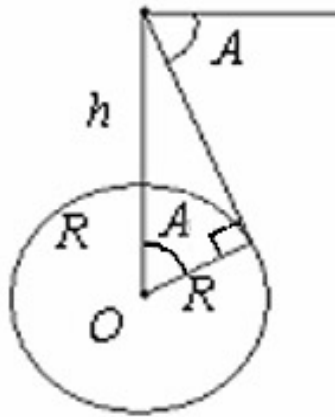


Рис. 18.

В труде «Геодезия – определение расстояний между местностями на земле» решает задачу: Даны города $A(\varphi_1, \lambda_1)$ и $B(\varphi_2, \lambda_2)$, где φ – широта, а λ – долгота. Найти длину дуги АВ сферы. Что находится с помощью вышеприведенных формул. Бируни определяет радиус земного шара путем наблюдения с горы понижения линии видимого горизонта (см. рис. 18).

$$\frac{R}{R+h} = \cos A \Rightarrow R = \frac{h \cdot \cos A}{1 - \cos A}, \text{ что приводит к } R \approx 6000 \text{ км.}$$

Омар Хайям (1048 – 1123 гг.) занимался математикой, физикой, астрономией, астрологией, философией, богословием, историей, арабской литературой. В «Трактате о доказательствах задач алгебры и алмукабулы» (приведение) дает систематическое изложение решений уравнений до третьей степени включительно.

Решение в общем виде находится геометрически с помощью пересечения двух конических сечений. В «Комментариях к трудным постулатам Евклида» излагает свою теорию параллельных, опирающуюся на допущения, эквивалентные V постулату. Он делает попытку установить единую теорию для чисел и величин, строя их отношения. Алгебре он дает следующие определения: «Алгебра есть научное искусство. Ее предмет – это абсолютное число и измеримые величины, являющиеся неизвестными, но отнесенные к какой-либо известной вещи так, что их можно определить, а та известная вещь есть количество или индивидуально определенное отношение и к этой известной вещи приходят, анализируя условия задачи; в этом искусстве ищут соотношения, связывающие данные в задачах величины с неизвестной, которая вышеуказанным образом составляет предмет алгебры». Несколько многословно, но суть понятна. О. Хайям провел реформу старого персидского календаря, который давал ошибку в 1 день за 5000 лет.

Насирэддин Туси (18.2.1201 – 25.6.1274) основал в городе Марага на юге Азербайджана обсерваторию, которая стала крупным научным центром. На основании собственных наблюдений очень точно определяет годовую прецессию $51,4''$. Это удивительно! В его сочинении «Изложение Евклида» доказывается равносильность V постулата утверждениям: 1) существует четырехугольник с четырьмя прямыми углами; 2) сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым. В «Трактате о полном четырехстороннике» развита теория отношений, изложена теория фигур, состоящих из четырех пересекающихся прямых, собраны способы решений плоских и сферических треугольников, решена задача об определении сторон сферического треугольника по трем углам и трех углов по трем сторонам. Он приблизился к пониманию действительного числа, данного И. Ньютоном спустя несколько столетий: «каждое из этих отношений может быть названо числом, которое определяется единицей так же, как один из членов этого отношения определяется другим из этих членов».

У И. Ньютона определение формулируется так: «Под числом мы понимаем не столько количество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу» («Всеобщая арифметика» 1707 г.).

Джеммид Гиясэддин ал-Каши (?–1436 г.) жил в Самарканде, работал в обсерватории Улугбека (внука Тимура). Ал-Каши предложил способ приближенного решения уравнений третьей степени. Он знал метод, который сейчас называется схемой Горнера. Дал способ извлечения кубических корней на основе формулы $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Он вычислил число π с 17 верными десятичными знаками, для чего определил периметр вписанного в окружность $3 \cdot 2^{28}$ –угольника. Он знал соотношение между биномиальными коэффициентами $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$.

Таким образом, заслуга арабских и среднеазиатских математиков состоит в сохранении и распространении греческой и индийской математики, в частности, в Европу. Были разработаны алгоритмы действия с десятичными числами, развита алгебра, плоская и сферическая тригонометрия.

Лекция 4

Математика Европы до XVII в.

Народы Европы до III века н.э. были язычниками. Римский император Константин I в начале 312 года объявил государственной религией христианство. За семь веков христианская религиозная система, зародившаяся в Палестине, была принята: у франков в 496 году; у англосаксов в 590 году; в Германии в VIII веке; в Чехии в 965 году; в скандинавских странах в 864 – 65 годах; в Болгарии в 874 году; в Польше и России в 988 году, и позже в странах Прибалтики. Тем самым христианство объединило народы Европы.

Арабы и магометане наводили ужас на Европу в течение VII – VIII веков н.э. Французский король Карл Мартелл разгромил арабов в 732 году при Пуатье и остановил их продвижение в Европу. Испания и Португалия еще долго вели борьбу с арабами. Португалия стала независимым королевством только в 1139 году, а Испания вела борьбу с ними с 718 до 1492 года. Еще больший ужас наводили на Европу турки-магометане, которые в XIII веке образовали турецкое княжество в Малой Азии, в XIV в. перешли на Балканский полуостров, покорили Сербию и Болгарию и все владения Византийской империи, включая Ближний Восток и Константинополь. Начались европейские крестовые походы (всего 7) по отвоеванию у турок гроба господня в Иерусалиме (XI – XIII вв.). Европейцы во время этих походов почерпнули на Востоке знания по медицине, математике, изготовлению стекла, созданию бумаги для письма (Германия, 1390 г.). В середине XV в. изобретено книгопечатание.

Фактически уровень математических знаний в Европе в V – VI веках был крайне примитивным.

Крупнейшим научным авторитетом в ранний период был монах **Бозций Северин (480 – 524 гг.)**, который перевел на латинский язык сочинения Аристотеля, «Арифметику» Никомаха,

«Начала» Евклида. Он сам написал ряд популярных сочинений по математике. Они неоднократно переписывались и ими пользовались как математическими руководствами около тысячи лет. Отчасти это можно объяснить тем, что Северин Боэций принял за католическую веру мученическую смерть. В числе его сочинений «Введение в арифметику», которое по существу является переводом Никомаха (I – II веков). В нем содержалось учение о простых и составных числах, пропорциях и др. Можно упомянуть еще одного церковного математика, **Алкуина (735 – 800 гг.)**, уроженца Британии, который написал сам на латыни сочинение «Задачи для оттачивания ума». В древней Индии Брахмагуптой тоже предлагались задачи для удовольствия. Одна из задач Алкуина «Собака гонится за кроликом прыжками по 9 футов каждый, а прыжок кролика – семь футов. За сколько прыжков собака настигнет кролика, если первоначально расстояние между ними было равно 150 футов». (Предполагается, что собака и кролик тратят на один прыжок равное время).

В X веке в г. Реймсе (Франция) монахом **Гербертом (940 – 1003 гг.)**, позднее ставшим Римским папой **Сильвестром II**, была открыта школа, где Герберт преподавал 10 лет. В ней учили счету с применением абака (счетной доски), использовалась римская нумерация и наряду с ней и индусская (десятичная позиционная система счисления с нулем). Следует отметить, что хранителями математических знаний являлись ученые монахи, хранившие, изучавшие и переписывавшие естественно-научные и математические сочинения древних. Большое значение имели переводы с арабского языка на латинский язык. Так, **Жерар (1114 – 1187 гг.)**, живший в Кремоне, перевел более 80 сочинений.

В XII – XIII веках в Европе появляются первые университеты: в Италии (Салерно, 1115 г., Болонья, 1158 г., Педжия, 1188 г., Винченца, 1204 г., ..., Рим (1303 г.); и др.), Англии (Оксфорд, 1167 – 1168 гг.; Кембридж, 1209 г.), Франции (Париж, ≈1180 г., Орлеан, 1231 г.); Испании (Валенсия, 1212 г.; Севилья 1254 г.; Барселона, 1450 г.; и др.); Португалии (Лиссабон, 1290 г.); Чехии (Прага, 1347 г.); в Австрии (Вена, 1347 г.); Польше (Краков, 1364 г.), Венгрии, 1367 г., Швеции (Упсал, 1477 г.), Дании

(1471 г.), Германии (Гейдельберг, 1368 г., Эрфурт, 1379 г.). К сожалению, в России университеты появились лишь в 1755 г. в Москве, в 1819 г. в Санкт-Петербурге, в 1804 г. в Казани, в 1880 г. в Томске.

Как правило, университет имел три основных факультета:

- *Богословский (теологический)*, где готовились священники, архиереи и епископы. Изучались Библия, Евангелие, Апостол, философия Платона и Аристотеля, приспособленные к христианскому учению.

- *Юридический*, где обучались будущие чиновники, судьи, нотариусы. Изучались подлинники законов страны в их историческом развитии, сравнительное право, особенно классическое римское право, философия и ее история.

- *Медицинский*, предназначенный для подготовки врачей, аптекарей и ученых – медиков. Изучались классики Гиппократ и Гален, Авиценна, анатомия.

Таким образом, набор изучаемых дисциплин соответствовал профилю факультета. Был в университетах и подготовительный факультет (искусств), где изучалось 7 свободных искусств: грамматика, риторика, диалектика, квадривиум: арифметика, геометрия, астрономия и музыка. Уровень был невысоким. До XVI века лица, претендовавшие на звание магистра, приносили клятву, что они знают шесть книг из «Начал» Евклида. После прохождения обучения на подготовительном факультете студенты переходили на один из основных факультетов.

Фактически в XII – XV веках в странах Западной Европы, благодаря торговым связям, происходит усвоение математики Древнего Востока, Греции и Средней Азии. Чего либо нового и оригинального создано не было.

Первым ученым – математиком Европы считается **Леонардо Пизанский (1170 – 1250 гг.)**. Он был сыном Бокаччио (что означает «добродушный»), а сын по-латыни *fibiо*, отсюда происходит второе его имя, или псевдоним **Фибоначчи** (отсюда числа Фибоначчи или последовательность Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$, выражавшая рост кроличьей семьи). В 1202 г. он пишет «*Liber abak*» («Книга вычислений» или «Книга об абаке»).

Потом он пишет еще раз эту книгу в 1228 году. В 1220 году он пишет «Практическую геометрию». В 1225 году он побеждает на математическом турнире (бое) в Пизе **Иоанна Палермского**, который предложил Леонардо задачу: найти число, прибавляя к квадрату которого или вычитая из которого число 5, вновь получаем квадрат: $\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2$; $\left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2$.

В «Книге об абак» он использует индийскую десятичную позиционную систему счисления. Книга состоит из 15 глав. Он рассматривает действия с натуральными числами, обыкновенными дробями, их сокращения, находит НОД, приводит к общему знаменателю. Дает решения задач на пропорции, задач, сводящихся к линейным уравнениям. Приводится метод извлечения квадратных и кубических корней. Так,

$$\sqrt[3]{a^3 + r} \approx a + \frac{r}{3a(a+1)+1}, \text{ где } r < a.$$

Например,

$$\sqrt[3]{900} \approx \sqrt[3]{729+171} \approx 9 + \frac{171}{3 \cdot 9 \cdot (9+1)+1} = 9 \cdot \frac{171}{271} \approx 9,63 \quad (\text{более точное значение } 9,65).$$

Собраны разные задачи по геометрии, решаемые на основе теоремы Пифагора алгебраическим способом. В «Практической геометрии» Фибоначчи дано доказательство формулы Герона для площади треугольника, отличное от тех, что содержится у Евклида, Птолемея и арабских авторов. Доказывается, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Он приводит задачи на нахождение площадей многогранников, круга, сферы, поверхности цилиндра. Для вычисления π он находит периметры описанного и вписанного правильных 96-угольников, что приводит к $\pi \approx 3,1418$. Он устанавливает тождества:

- $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (bc-ad)^2$
- $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ad+bc)^2 + (bd-ac)^2$

«Книга об абаке» на протяжении XIV – XV веков имела широкое распространение в Европе, выполняя свою цель, чтобы *«род латинян не пребывал в незнании математики»*.

Иоанн Палермский предложил Фибоначчи задачу: *найти такие числа x , y , z , чтобы числа $x+y+z+x^2$, $x+y+z+y^2+x^2$, $x+y+z+z^2+y^2+x^2$ были квадратами*. Фибоначчи находит эти числа:

$$x = \frac{16}{5}, \quad y = \frac{48}{5}, \quad z = \frac{144}{5} \quad (\text{это не так уж и просто}).$$

Назовем ряд имен, относящихся к рассматриваемому периоду.

Роджер Бэкон (1214 – 1294 гг.) – английский философ и естествоиспытатель. Обучение начал в школе Оксфорда, продолжил в Парижском университете. Затем постригся в монахи. Изучал труды Аристотеля, «Начала» Евклида, «Альмагест» К. Птолемея, труды Архимеда. За резкую критику духовенства и высших светских сословий получил 10 лет тюрьмы. Очень уважал и восхвалял математику, называл ее вратами и ключом для других наук. Он утверждал, что только путем математики можно достичь полной истины. В других науках тем меньше будет ошибок и сомнений, чем больше им удастся опереться на математику.

Томас (Фома) Брадвардин (1290 – 1349 гг.) Им написан ряд математических трактатов. Один из них «Теоретическая геометрия». В ней, в частности, дана теория звездчатых многогранников, говорится о телесных углах, пяти правильных многогранниках. В «Трактате об отношениях...» рассматриваются $\sqrt{a} : \sqrt{b} = a^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{2}}$ («половинное отношение»), $\sqrt{a^3} : \sqrt{b^3} = a^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{2}}$ («полуторное отношение»). В «Трактате о континууме» (от лат. continuum – «непрерывное, сплошное»), написанном в 1328 – 1335 гг., говорится: «...одни: Аристотель и большинство нынешних мыслителей утверждают, что континуум не составляется из атомов, а составляется из частей, которые делимы без конца. Другие же говорят, что континуум составляется из неделимых (Демокрит), а третьи, что составляется из точек, они (третьи), в свою очередь, делятся надвое: часть считает, что континуум состоит из конечного, а другая из бесконечного числа точек».

Никола Орезм (1323 – 1382 гг.) Имел звание магистра, преподавал в 1348 – 1361 гг. математику в Парижском колледже. Позже он становится епископом в Льежье (Нормандия). Написал трактаты: «О сфере», «Об отношениях», «Алгоритм отношений», где введено понятие дробных показателей $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{3}{4}}, a^{\frac{3}{2}}, \dots, 4^{\frac{3}{2}} = 8$ (8 находится в полуторном отношении к 4). Все это делается риторически, а не символически.

Никола Шюке (год рождения неизвестен – 1500 г.). Написал сочинение «Наука о числах в трех частях», где рассматривает арифметическую и геометрическую прогрессии, способы приближенного решения уравнений, продолжает употребление дробных показателей. Вводит обозначение $12^1, 12^2, 12^3$, что означает $12x, 12x^2, 12x^3$. Из его обозначений 8^3 , умноженное на $7^{1-\tilde{m}}$, выраженное риторически, затем возникает запись $8x^3 \cdot 7x^{-1} = 56x^2$.

Иоганн Миллер (Региомонтанус) (1436 – 1476 гг.) (Германия). В 1461 г. он написал «Пять книг о треугольниках всякого рода», в которой тригонометрия, в том числе сферическая, впервые выделена из астрономии в самостоятельную ветвь математики. Региомонтанус расширил понятие числа, включив рациональные числа, применяя алгебру к решению геометрических задач. Таблица синусов составлена Региомонтанусом с шагом в $1'$ и точностью до седьмого знака. Для этого он брал круг радиуса 10^7 и вел вычисления в обыкновенных дробях (десятичные еще не вошли в обиход в Европе). Он ввел названия функций тангенса и котангенса, составил таблицу их значений.

Немецкий художник и ученый **Альбрехт Дюрер (1471 – 1528 гг.)** написал трактат «Руководство к измерению циркулем и линейкой», в котором рассматриваются: 1) учение о линиях; 2) учение о плоских фигурах; 3) учение о телесных вещах; 4) учение о построении тел в пространстве.

Одновременно с А. Дюрером в Германии живет и творит **Михаэль Штифель (1486 – 1567 гг.)**. Он пишет и издает в Нюрнберге в 1544 году «*Arithmetica integra*» («Арифметика в целом»), где пишет об операциях над рациональными и иррациональными числами и об алгебре XVI века. Там же содержатся

прогрессии: разностные и кратные (арифметические и геометрические), методы решения уравнений, вводятся элементы символики. В книге содержится таблица.

$-n$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	n
$\frac{1}{a^n}$	$\frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a^1	a^2	a^3	a^n

В 1545 году М. Штифель издает «Немецкую арифметику» для народных масс, в которой приводятся жизненно важные вычисления, задачи на квадратные уравнения.

Итак, к концу XV века в Европе сложилась система обучения (школы, университеты), слой образованных людей пополнялся. Универсальным языком науки стал латинский язык, на который были выполнены переводы с арабского, древнегреческого. Т.е. в основном шел процесс усвоения ранее созданной математики. Но наметилось и продвижение вперед: действия с дробными показателями степени, алгебраическая символика, выделение тригонометрии в самостоятельную ветвь математики.

Серьезный шаг вперед в развитии математики был сделан итальянскими математиками в XVI веке: **Сципионом дель Ферро (1465 – 1526 гг.)**, **Джероламо Кардано (1501 – 1576 гг.)**, **Никколо Тарталья (1500 – 1557 гг.)**, **Людовико Феррари (1522 – 1565 гг.)** Их усилиями были решены в радикалах уравнения третьей и четвертой степеней. Профессор Болонского университета Ферро (Дель Ферро Сципион) находит формулу для решения уравнения $x^3+px=q$ ($p>0$, $q>0$) и сообщает ее своему ученику Фиоре, которому предстоял научный поединок с Н. Тарталья. Н. Тарталья самостоятельно решил уравнения $x^3+px=q$, $x^3=px+q$, $x^3+q=px$ ($p>0$, $q>0$). На турнире, который состоялся 22.02.1535 года. Н.Тарталья за 2 часа решил все предложенные ему задачи, связанные с кубическими уравнениями. А его противник Фиоре не смог справиться с задачами, которые поставил перед ним Тарталья. Идея Тарталья состоит в следующем. Он ищет решение уравнения $x^3+px=q$ в виде $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$. После подстановки в уравне-

ние получаем $(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})^3 + p(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) = q$ или

$$u - v + (p - 3\sqrt[3]{u \cdot v})(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) = q. \quad \text{Полагая } u - v = q, \quad u \cdot v = \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

можно найти u и v из квадратного уравнения $y^2 - qy - \frac{p^3}{27} = 0$. А

именно, $u = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \frac{p^3}{27}}$, $v = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}$ и, следовательно-
но,

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}.$$

Обратите внимание, что $x > 0$. Аналогично решается уравнение $x^3 = px + q$ ($x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$), что приводит к решению

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \quad \text{Заметим, что из-за}$$

отсутствия символики все выполнялось в словесной форме, и тут-то возникает так называемый «неприводимый случай», когда

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0. \quad \text{Но при этом исходное уравнение имеет неполо-}$$

жительный действительный корень. Так будет, например, в уравнении $x^3 = 15x + 4$, которое имеет корень $x = 4$, но при этом

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = -121. \quad \text{А так как комплексных чисел в распоряже-}$$

нии математиков не было, дело заходило в тупик. В 1545 г.

Дж. Кардано пишет сочинение «Великое искусство, или о правилах алгебры» в 40 главах. Он допускает отрицательные и мнимые

корни (у него встречаем $y = 5 + \sqrt{-15}$, $y = 5 - \sqrt{-15}$ в связи с решением уравнения $x^2 - 10x + 40 = 0$), приводит полное уравнение

третьей степени подстановкой $x = y + h$ к уравнению, не содер-

жащему y^2 ($h = -\frac{b}{3a}$). Фактически он доказывает теорему Безу:

«Многочлен $P_n(x)$ делится на $x - a$, только если $P_n(a) = 0$ ». В этой же книге он дает способ решения уравнения четвертой степени, полученного его учеником Л.Феррари с помощью введения кубической резольвенты. Покажем это на примере задачи, решенной Феррари: *«разделить число 10 на три части так, чтобы они образовали геометрическую прогрессию, произведение первых двух членов которой равно $\square 6$ »*. Пусть b_1, b_2, b_3 – искомая прогрессия. Положив $b_2 = x$, получим уравнение $\frac{6}{x} + x + \frac{x^3}{6} = 10$, откуда $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$ или $(x^2 + 6)^2 = 60x + 6x^2$. Прибавим к обеим частям последнего уравнения выражение $2(x^2 + 6)t + t^2$, где t – новое неизвестное, что приводит к уравнению $((x^2 + 6) + t)^2 = (2t + 6)x^2 + 60x + t^2 + 12t$. Найдем такое t , чтобы правая часть являлась полным квадратом, что имеет место, если $30^2 - (2t + 6)(t^2 + 12t) = 0$ или $t^3 + 15t^2 + 36t - 450 = 0$. Это уравнение, называемое кубической резольвентой, указанным выше способом приводится к неполному уравнению (без t^2) и решается описанным методом, что позволяет найти t . Тогда при найденном значении t приходим к уравнению $(x^2 + t + 6)^2 - (\sqrt{2t + 6x} + b)^2 = 0$, где смысл b понятен. Решая совокупность двух квадратных уравнений, получаем окончательный результат. То, что уравнение у Феррари не содержит x^3 , не создает дополнительных проблем, так как полное уравнение четвертой степени легко привести к уравнению без третьей степени неизвестного.

Н. Тарталья был страшно раздосадован тем, что раскрыты его секреты решения кубических уравнений, которые у него якобы обманным путем вызнал Дж. Кардано. Это приводит к длительной полемике: Н. Тарталья бросает вызов Дж. Кардано в «Вопросах» (1546 г.), на которые отвечает ученик Кардано **Феррари (1547 – 48 гг.)**. Эта публичная дуэль дала возможность математикам познакомиться с методами решения в радикалах алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней.

Рафаэль Бомбелли (≈ 1530–1572 гг.), математик и инженер, живший и работавший в Болонье, написал сочинение «Алгебра» из 5 глав, вышедшее в 1572 году. 1-я глава «Большая арифмети-

ка». В ней рассмотрены действия с натуральными и дробными числами. Дана теория и алгоритмы извлечения квадратных и кубических корней. 2-я глава «Всеобщая арифметика». Вводится определение степени уже с помощью символов, рассматриваются операции с многочленами вместо «наших» скобок употребляется «черта», т.е. $(a + b) = \overline{a + b}$. Здесь же рассмотрены уравнения второй, третьей и четвертой степеней. 3-я глава представляет собой сборник задач по алгебре для решения учащихся (272 задачи, взятых у Диофанта (3 в. н. э.)). 4-я глава содержит алгебраические методы решения геометрических задач. 5-я глава «Проблемы планиметрии (правильные многоугольники) и стереометрии (правильные многогранники и их развертки)». Он делает попытку дать теорию мнимых чисел. Он пишет: «Я нашел другой род связанных кубических корней из биномов вида $a + \sqrt{b}$, значительно отличающихся от других, возникающий при решении кубических уравнений вида $x^3 = px + q$, когда $\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2 \dots$. Разность $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$ по извлечении квадратного корня может быть названа ни положительной, ни отрицательной... корни этого рода покажутся многим скорее софистическими, чем имеющими действительное значения...». Для $i = \sqrt{-1}$ он вводит правила: $1 \cdot (+i) = +i$, $(-1)(+i) = -i$, ..., $(-i)(+i) = 1$, $(-i)(-i) = -1$. Для уравнения $x^3 = 15x + 4$ он по формуле Тарталья – Кардано получает

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = (2 + i) + (2 - i) = 4.$$

Как известно, проблема решения алгебраических уравнений степени выше четвертой занимала математиков после успеха итальянцев около 300 лет. Ею занимались Лагранж, Абель, Руффини и, наконец, Э. Галуа дает ее окончательное решение. В результате алгебра изменит свое лицо и предметом ее изучения станут такие структуры, как группы, кольца, поля и т.д.

Большой вклад в математику, в частности в алгебру, внес французский математик **Франсуа Виет (1540 – 1603 гг.)**. По образованию и профессиональной деятельности юрист Виет заинтересовался астрономией Коперника, создавшего гелиоцентрическую систему мира, что привело его к изучению математики. Ему удалось во время войны Франции с Испанией расшифровать тайные письма, пересылаемые Испанией в Нидерланды (в письмах содержалось более 500 знаков). Традиция математических турниров продолжалась, и нидерландский математик **Ван Роумен** предложил задачу математикам Европы. Требовалось решить уравнение

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} + \dots - 3795x^3 + 45x = a,$$

где $a = \sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}}} - \sqrt{\frac{15}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}.$

Ф. Виет, приглашенный к королю Генриху IV во время беседы того с нидерландским посланником, передавшим задачу, дал одно решение сразу, увидев, что левая часть уравнения соответствует выражению $\sin \varphi$ через $\sin \frac{\varphi}{45}$; на другой день он дал еще

22 положительных решения, получаемых из формулы $2 \sin \frac{360^\circ + 12^\circ n}{45}$, $n = \overline{1, 22}$. В свою очередь, Ф. Виет предложил

европейским математикам задачу: с помощью циркуля и линейки построить касательную к трем данным окружностям, лежащим в одной плоскости. Роумен решил задачу, но только с помощью конических сечений, Виет же показал свое решение с помощью циркуля и линейки (есть сведения, что именно так решал ее Аполлоний в III веке до н.э.). С этих пор Виета стали называть Аполлонием Галльским (т.е. французским). В 1591 году выходит работа Виета «Введение в искусство анализа» из 5 глав. I глава: определения и подразделения анализа и приемы, употребляемые в искусстве нахождения истины. II глава: об аксиомах, относящихся к равенствам и пропорциям. III глава: о законе однородности и о степенях и видах сравниваемых величин, состоящем в

том, чтобы приравняемые величины необходимо были однородны. IV глава: правила и предписания количественных вычислений:

Правило 1: прибавление величины к величине. Эти величины должны быть однородными, а именно A плюс B , если это простые длины; A квадрат плюс B – площадь; A куб плюс B – объем. Алгебраисты обозначают знаком «+» сложение.

Правило 2: вычитание величины из величины. Аналогично предыдущему. Алгебраисты обозначают вычитание знаком «–». Но если из A надо вычесть B без D , то остаток пишут $A-(B-D)=(A-B)+D$.

Правило 3: ведение (умножение) одной величины по другой. 1) сторона, умноженная на себя, дает квадрат; 2) сторона, умноженная на квадрат, дает куб; 3) сторона, умноженная на куб, дает квадратно – квадрат. То же на геометрическом языке: 1) длина, умноженная на ширину, дает площадь; 2) длина, умноженная на площадь, дает объем. Если дана величина $(A - B)(C - D)$, то получается $AC - AD - BC + BD$. В этом действии получающееся от двух утвердительных величин – утвердительное, ровно как и получающееся от двух отрицательных величин тоже утвердительное, но если одна величина – утвердительная, а другая – отрицательная, то получается – отрицательная.

Правило 4: деление одной величины на другую. Пусть A и B – две величины и требуется A разделить на B . Эти величины разнородны. Надо провести между ними маленькую черточку и будет $\frac{A}{B}$. Если, например, A – площадь, а B – линия, то $\frac{A_{\text{площадь}}}{B}$ изображает ширину, которая происходит от деления площади A на линию B . Аналогично $\frac{A_{\text{куб}}}{B_{\text{площадь}}}$ означает ширину. Таким образом,

$$\frac{B \cdot A}{B} \text{ – это } A, \quad \frac{B \cdot A_{\text{площадь}}}{B} \text{ – это } A_{\text{площадь}}.$$

V глава. Уравнения. Способ применения: равенство не нарушается антитезисом, т.е. к обеим частям можно прибавлять одну

и ту же величину. Равенство не нарушается, если все члены разделить на одну и ту же величину.

Основное сочинение Виета вышло после его смерти в 1646 году. Как известно, алгебраические обозначения в своем развитии прошли 3 этапа: 1) риторический (словесный); 2) синкопированный (сокращение слов); 3) развитое символическое обозначение. О первом этапе уже говорилось. Упоминалось и о втором, который именно продвинул Виет. Он обозначает 1) неизвестные величины только заглавными гласными буквами латинского алфавита A, E, \dots, O, \dots ; 2) известные неопределенные величины (неопределенные коэффициенты уравнения в общем виде) только согласными буквами B, C, D, \dots ; 3) квадрат неизвестной величины A^2, E^2, \dots, O^2 ; 4) обозначает квадратный корень знаком $\sqrt{\quad}$, измененная буква r (от *radix* – радикал).

Третий этап проходит уже в XVIII веке. Если $x^2+px+q=0$, то

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \text{ а в случае } x^3+px+q=0$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Виет установил связь между корнями и коэффициентами уравнений второй и третьей степени

для уравнения $x^2+px=q$

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = -q,$$

для уравнения $x^3+px=q$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p, \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = q.$$

Окончательный вид теорема Виета приняла после работ Гэрриота и Жирара и опубликована в 1629 году. Виет получает формулы:

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m(m-1)}{2!} \cos^{m-2} x \sin^2 x + \dots$$

$$\sin mx = m \cos^{m-1} x \sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \cos^{m-3} x \sin^3 x + \dots$$

Фактически он вводит бесконечное произведение $\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \dots \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \dots = \frac{2}{\pi}$. Приведем его рассуждения. Пусть $S_4, S_8, \dots, S_{2^{n+1}}$ – площади правильных 2^n многоугольников, вписанных в круг радиуса 1. Так как $S_n = \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$, а $S_{2n} = n \sin \frac{\pi}{n}$, то $S_n : S_{2n} = \cos \frac{\pi}{n}$. Следовательно, $S_{2^n} : S_{2^{n+1}} = \cos \frac{\pi}{2^n}$ и мы имеем отношения

$$S_4 : S_8 = \cos \frac{\pi}{4},$$

$$S_8 : S_{16} = \cos \frac{\pi}{8},$$

.....

$$S_{2^n} : S_{2^{n+1}} = \cos \frac{\pi}{2^n},$$

.....,

перемножив которые получаем $S_4 : S_\infty = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \dots \cos \frac{\pi}{2^n} \dots$.

Здесь $S_4 = 2$, а S_∞ – площадь круга, равная π . (Кстати, символ ∞ ввел Виет). Таким образом,

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \dots \cos \frac{\pi}{2^n} \dots = \prod_{n=2}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^n} = \frac{2}{\pi}.$$

В 1585 году голландский математик **Симон (1548 – 1620 гг.)** вводит десятичную систему мер и десятичные дроби. Для десятичных дробей ввел специальную запись, например: $\begin{matrix} 0123 \\ 5912 \end{matrix}$, то же

5(0)9(1)1(2)2(3)=5,912.

К XVI веку относится творчество **Николая Коперника (1473 – 1543 гг.)**, астронома и математика. В своем творении «Об обращении небесных сфер» (издано в 1548 году в Нюрнберге) он рассуждает о форме Земли, ее месте во Вселенной, определяет положение планет на небесной сфере (в сферических координатах).

тах), описывает их орбиты, дает начало теории движения Луны. К первой книге этого труда приложен трактат по плоской и сферической тригонометрии **Тихо Браге (1546 – 1601 гг.)**, датского астронома и математика, который создал первую в Европе обсерваторию с довольно точными астрономическими инструментами. Ему требовалось вести вычисления с многозначными числами, и поэтому он искал приемы, совершенствующие и ускоряющие вычислительный процесс. Эта проблема через посредство Дж. Крэга была сообщена **Дж. Неперу (1550 – 1617 гг.)**, который взялся за ее решение. В 1594 году он пишет сочинение «Описание чудесного канона логарифмов», которое была напечатано в 1614 г. под заголовком «*Описание чудесных таблиц логарифмов*», и несколько раз переиздавалось в Англии, Франции и Пруссии. Его идея вкратце состояла в следующем. Фактически устанавливалась связь между непрерывно меняющимися обобщенными прогрессиями (арифметической и геометрической) на основе движения по двум параллельным прямым. По одной из них (прямой Y) движется точка N с постоянной скоростью, а по второй (прямой X) движется точка M с переменной скоростью, пропорциональной расстоянию до фиксированной точки R на X. При этом указаны мгновенные положения движущихся точек M, N в тот момент, когда их скорости совпадают, а точка N находится от M на расстоянии 10^{-7} от R.

В современной символике это описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{dy}{dt} = a \quad (1), \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{ax}{10^7} \quad (2), \quad \text{откуда} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{10^7}{x}, \quad \text{а далее}$$

$y = -10^7 \ln x + C$ (у Непера $\ln x$ обозначался как $L(x)$ и назывался «логарифмом числа x »). Постоянную C находим из условия: $y=0$, когда $x=10^7$, что дает $C=10^7 L(10^7)$. Окончательно имеем

$$y = 10^7 L\left(\frac{10^7}{x}\right).$$

Таким образом, у Непера содержатся по существу понятия функции, непрерывности и, пусть неявно, идея дифференциального уравнения.

Несколько позже **Генри Бригс (Briggs) (1561 – 1630 гг.)**, восхищенный работой Дж. Непера, создает таблицу десятичных логарифмов (для чисел от 1 до 1000 с четырнадцатью знаками), а также логарифмов синусов и тангенсов, в 1624 году создается логарифмическая линейка. К 1627 году была составлена таблица десятичных логарифмов для чисел от 1 до 10^5 . Логарифмы по основанию e , т.е. натуральные, появились в это же время, однако они набрали силу позже, когда возникло исчисление бесконечно малых. Ознакомившись с работами Дж. Непера, свои логарифмы создал И. Кеплер.

Математика средневековой Руси

Древнейшей математической рукописью на Руси являются записи новгородского дьякона Кирика (1134 г.). В этой рукописи и некоторых других содержались задачи: а) на определение числа месяцев, дней и часов, прошедших от сотворения мира (к 1134 году прошло 6642 года); б) о приплоде стад, т.е. вычисление сумм прогрессий; в) вычисление размеров Земли, Луны и Солнца, по данным, содержавшимся у Эратосфена (III в. до н. э.), π равнялось 3,125; г) о вычислении дат пасхалий (первое воскресенье после весеннего полнолуния, которое происходит между 18 марта и 18 апреля). Задача о «пасхалиях» достаточно трудная. Ею позже занимался Гаусс.

Первые школы появились при **Ярославе Мудром (978 – 1054 гг.)**, обучение придворных практиковалось ранее при дворе его отца Владимира Святославовича. Нумерация была сходной с древнегреческой алфавитной системой на основе кириллицы:

Ѧ («аз»), Ѣ («веди»), Г («глаголь»), Д («добро»), ..., Ё («фита»), что означало соответственно 1, 2, 3, 4, ..., 9; И («и»), К («како»), Л («люди»), ..., Ч («червь») – 10, 20, 30, ..., 90; Р («рцы»), С («слово»), Т («твердо»), ..., Ц («цы») – 100, 200, 300, ..., 900. Символ \neg , называвшийся «титло», рисовался либо над каждой буквой, либо над группой букв: РѢ (=22), РѦД (=134). Для обозначения тысяч перед их числом ставился знак ≠, например: ≠ЗѢ (=7002).

Существовали две системы счета: «малое число» и «великое число» для обозначения чисел $10^k, k > 8$.

«малое число» «великое число» (названия не приводятся)

⊗ тьма 10^4	10^{12}
⊗ легион 10^5	10^{24}
⊗ леондр 10^6	10^{48}
⊗ ворон (вран) 10^7	$10^{49}, 10^{50}$
⊗ колода 10^8	

После чего было написано, что «более сего несть человеческому уму разумевати».

Дроби на Руси появились как части земельной податной меры – «сохи». «Соха» делилась на «полсохи», «треть сохи», «четверть сохи», «пол – треть сохи», «пол – полтреть сохи», «пол – пол – полтреть сохи», что соответствует: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}$.

$\frac{1}{2}$ часть числа обозначалась словом «пол» (до сих пор используется: полчаса, полкило, пол-литра): $\frac{1}{3}$ – «треть», $\frac{1}{4}$ – «четь» или «четверть» ($\frac{1}{4}$ ведра на 12 л), $\frac{1}{6}$ – полтрети и т.д.

Действия с дробями сводились к аликвотным дробям: $\frac{11}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$, $\frac{29}{96} = \frac{1}{3} - \frac{1}{32}$ и т.д., что выражалось в словесной форме. Числа $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$ назывались «полтрети», «полчетверти» и т. д. (сравните, как мы говорим о времени: полтретьего, полчетвертого). Лишь в 1647 г. в книге «Учение и хитрость ратного строения пехотных людей» появились на чертежах индусские цифры. Но еще до XVIII века в книгах использовались цифры как «русские», так и «индусские». Так, в 1702 г. в книге, посвященной осаде шведской крепости Нотебург, изданной

тиражом 2000 экз.; в половине тиража использованы арабско-индусские, а в другой половине – славянские цифры.

В 1703 году выходит в свет «Арифметика сиречь наука числительная. С разных диалектов на славянский язык переведенная и воедино собрана и на две книги разделена. В лето от сотворения мира 721 г., от рождества Бога Слова. 1703 (от Рождества Христова). Сочинена сия книга через труды Леонтия Магницкого» (По ней учился М.В. Ломоносов). Страницы в этой книге нумеруются по-славянски, а вычисления в тексте производятся по индийской нумерации. Нумерация считается пятым арифметическим действием. Здесь разъясняется, «что есть нумерацио»: *нумерацио, есть, счисление еже совершенно все числа речию именовати, еже в десяти ознаменованях или изображениях содержатся и изображаются: 1, 2, 3, 4, 5, □6 □□, 7, 8, 9, 0. Арифметика определяется так: «Арифметика или численница, есть художество честное, независимое, и всем удобопонятное, многополезнейшее и многопохвальнейшее, от древнейших же и новейших, в разные времена живших изряднейших арифметиков, изобретенное и изложенное».*

При Петре I индусские цифры выбивают на монетах и вскоре славянские цифры исчезают из обихода. Русские математические рукописи изучены недостаточно. Есть документы, относящиеся к XV – XVII вв., в которых виден интерес к философским проблемам математики: определениям основных геометрических объектов (точки, линии, сферы и др.), понятиям бесконечности, непрерывности и др.

Лекция 5

Период создания математики переменных величин

В XVII веке начинается качественно новый период развития математики, она переходит к изучению переменных величин. Ф. Энгельс писал по этому поводу в «Диалектике природы»: «Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошло движение и диалектика и благодаря этому же стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление». Конечно, это событие произошло не вдруг, не одним скачком. К этому времени создается математическое естествознание, которое имеет своей целью объяснить течение природных явлений, законов природы, решить проблемы механики, оптики, объяснить движение планет и т.д. Галилео Галилей (1632, 1638) открывает законы свободного падения тел, Иоганн Кеплер – законы движения планет (1602, 1619), Исаак Ньютон устанавливает закон всемирного тяготения (1687), открыты законы Бойля (1662) и Гука (1660), ряд очень сложных математических проблем решает Христиан Гюйгенс при разработке теории маятниковых часов (1673), которые он изобрел в 1657 г. Астрономия, картография, баллистика, гидравлика, создание различных машин и механизмов ставили перед математикой задачи, требовавшие решения. Возникали и чисто математические проблемы: решение уравнений, отыскание максимумов и минимумов, нахождение касательных к кривым, отыскание объемов тел вращения и т.д., которыми занимались Р. Декарт, И. Кеплер, Б. Паскаль, П. Ферма, М. Роль, И. Ньютон, Б. Кавальери, П. Гюльден. Необходимо отметить, что в XVI – XVII веках в Европе создаются академии: в 1560 г. – в Неаполе, в 1603 г. – в Риме, в 1662 г. – в Париже, а в Лондоне – Лондонское королевское общество в 1660 г. Берлинская АН ведет историю от Бранденбургского научного общества (1700 г.).

Санкт-Петербургская АН основана в 1724 г. (раньше, чем университет в Москве). Обращает на себя внимание факт, что открытие Петербургской академии по времени не намного отстало от открытия академий в Италии, Франции, Англии, Германии (сравните с открытием первых российских университетов).

Как же происходило развитие математики и благодаря кому?

Рене Декарт (1596 – 1650 гг.) – французский философ и математик. В 1637 году он выпускает в свет свою основную работу «Рассуждение о методе, дабы хорошо направлять свой разум и отыскивать научные истины», к которой были приложены три трактата «Диоптрика» (наука о преломлении света), «Метеоры», «Геометрия». До этого им была написана работа «Правило для руководства ума» (но она была опубликована лишь в 1701 г.). Интересна выдержка из нее: «...к области математики относятся только те науки, в которых рассматривается либо порядок, либо мера и совершенно не существенно – будут это числа, фигуры, звезды или что-нибудь другое... и эта наука должна называться не иностранным словом алгебра, но старым уже вошедшим в употребление именем всеобщей математики, ибо она содержит в себе все то, благодаря чему другие науки называются частями математики» (сравните с определением математики, данным Ф.Энгельсом). Приложение «Геометрия» к «Рассуждению о методе ...» состоит из трех книг (глав).

Первая книга «О задачах, которые можно построить, пользуясь только кругами и прямыми линиями». В ней он, в частности, пишет «...не проводя никакого различия между известными и неизвестными линиями, нужно обозреть трудность... до тех пор, пока не будет найдено средство выразить одну и ту же величину двояким образом: это то, что называется уравнением...». Доказывается, что геометрические задачи, решаемые с помощью циркуля и линейки, сводятся к решению уравнений степени не выше второй.

Вторая книга «О природе кривых линий», в которой Декарт делит все кривые на два класса: а) допустимые (строятся линейкой и циркулем непрерывным движением или несколькими таки-

ми последовательными движениями; б) механические (позднее их Лейбниц назвал трансцендентными).

Кривые первого класса – алгебраические кривые – можно задать уравнением $f(x, y)=0$, где $f(x, y)$ – многочлен степени n от двух переменных. Декарт предположил, что их можно построить с помощью шарнирного механизма (доказано в 1876 г. Кемпе). Иное дело – механические или трансцендентные кривые. Уравнения, которыми их можно задать в прямоугольных координатах, не являются алгебраическими. Трансцендентные кривые, в отличие от алгебраических, могут иметь бесконечно много точек пересечения с прямой, точек перегиба, особых точек и т.д. Во второй книге Декарт приводит теоремы о проведении нормалей и касательных. Касательную он определяет фактически как предельное положение секущей (а не как определена у Евклида касательная к окружности: прямая, имеющая с окружностью одну общую точку). Распространяя теорию нормалей и касательных на трехмерный случай, Декарт допускает ошибочное рассуждение, считая, что проекция нормали к пространственной кривой является нормалью к проекции кривой.

Третья книга «О построении телесных или превосходящих телесные задач». В ней строится общая теория решения уравнений. Он использует почти современную символику. Всякое алгебраическое уравнение мыслится в виде $P_n(x)=0$, где $P_n(x)$ – полином с целыми коэффициентами, расположенный по убыванию степеней неизвестных. Он высказывает (без доказательства) соображение, что уравнение степени n имеет n корней (несколько раньше Декарта эту идею высказал А.Жирар), т.е. речь идет об основной теореме алгебры. Декарт доказывает, что уравнение имеет столько положительных корней, сколько знакоперемен в ряду коэффициентов и столько отрицательных, сколько повторений знака (Теорема Декарта). Он ввел приемы, позволяющие изменить корни уравнения (увеличить, уменьшить) путем изменения коэффициентов. Декарт рассмотрел проблему приводимости и показал, что уравнение третьей степени можно решить с помощью циркуля и линейки в квадратных радикалах лишь в случае

его приводимости. Вопрос о приводимости уравнений четвертой степени он сводит к приводимости его кубической резольвенты.

Переменную величину Декарт трактует в двух формах: как отрезок переменной длины и постоянного направления – текущая координата точки, описывающей своим движением кривую, и как непрерывную числовую переменную, пробегающую совокупность чисел, выражающих этот отрезок. Декартовы координаты вводились таким образом: задается одна ось – ось абсцисс, на которой от начальной точки откладывается отрезок длиной x , а значение другой переменной – на отрезке, проходящем через точку M под некоторым (постоянным) углом к оси абсцисс (чаще под прямым). Кривую он рассматривает как геометрическое место точек. Считается, что Декарт знал соотношение между числом вершин, граней и ребер многогранника $V+G-P=2$, доказанное впоследствии Эйлером.

Метод координат развил и использовал для построения геометрической геометрии **П. Ферма (1601 – 1665 гг.)** – юрист по образованию, адвокат по роду деятельности, он увлекался математикой. В своей работе «Введение в изучение плоских и телесных мест» он показывает, что уравнение прямой, проходящей через начало координат, имеет вид $ax=by$, вводит уравнение окружности, гиперболы, параболы, эллипса, а также преобразования координат: поворот и перенос осей, приведение уравнений к каноническому виду. Ферма оставил рукопись «Метод отыскания минимумов и максимумов», где он дает метод отыскания экстремума, описывая словами то, что мы называем теоремой Ферма. $f'(x)=0$, где x – точка внутреннего экстремума дифференцируемой функции $f(x)$. Сам Ферма рассматривает задачу, иллюстрирующую его метод: разделить отрезок длиной b на две части длиной a и $b-a$ так, чтобы площадь прямоугольника S с такими сторонами была наибольшей. Суть его рассуждений была следующей (приводится не цитата, а пересказ). $S = a(b-a)$, заменим a на $a+e$, где e – мало, и получим $S = (a+e)(b-(a+e))$. Приравнивая площади, имеем $a(b-a) = (a+e)(b-(a+e))$, откуда $0 = ae+be-ae-e^2$. Разделив на e , приходим к равенству $-2a+b+e=0$, а отбросив величину

e в силу её малости, получаем уравнение $-2a+b=0$, откуда $a = \frac{b}{2}$,

а $S = \frac{b^2}{4}$. Как особый случай в проблеме максимума и минимума

рассматривается задача о проведении касательной к кривой. Ферма занимается проблемой отыскания площадей и объемов, он фактически строит интегральные суммы и находит интеграл от степенной функции x^a с натуральным и рациональным показателем. П. Ферма получил важные результаты в теории чисел. Он доказывает так называемую теорему Ферма: Если натуральное число n не делится на простое число p , то $n^{p-1} - 1$ делится на p . Сформулировал теорему, которая лишила покоя математиков на несколько веков. Речь идет о великой теореме Ферма: уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в целых числах для натуральных показателей n , больших 2 (не считая тривиального). Ферма высказал гипотезу: число $2^{2^n} + 1$ является простым для любого целого неотрицательного n . Но оказалось, что для $n=0, 1, 2, 3, 4$ она верна, а для $n=5$ число $2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$, что было установлено Л. Эйлером.

Блез Паскаль (1623 – 1662 гг.) выпускает в 1653 г. «Трактат об арифметическом треугольнике», где содержится «треугольник Паскаля», используемый для вычисления биномиальных коэффициентов. В трактате «Опыт о конических сечениях» он доказывает одну из основных теорем проективной геометрии: во всяком шестиугольнике, вписанном в коническое сечение, точки пересечения трех пар противоположных сторон лежат на одной прямой (прямая Паскаля). У Паскаля встречается соотношение $dS^2 = dx^2 + dy^2$ (теорема Пифагора для характеристического треугольника). Известен закон Паскаля в гидростатике и идея гидравлического пресса. Паскаль изобрел первую счетную машину.

Непосредственным предшественником И. Ньютона является **Джон Валлис (1616 – 1703 гг.)**. Он был хорошо знаком с работами Б. Кавальери и Е. Торричелли и геометрией Р. Декарта, он увлекался различными вычислениями. В 1656 г. он пишет «Арифметику бесконечных», в которой устанавливает правила перевода

обыкновенных дробей в десятичные и наоборот. Там же он рассматривает поверхности и тела как алгебраические суммы элементарных частей, частное двух площадей или объемов он представляет как частное сумм рядов и фактически использует предельный переход, вводит символ ∞ , использует запись $\frac{1}{0} = \infty$;

$\frac{1}{\infty} = 0$. Валлис при вычислении площади круга приходит к формуле, содержащей бесконечное произведение $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \dots \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1} \dots$, как и Паскаль, получает формулу

$dS^2 = dx^2 + dy^2$, где dS – дифференциал дуги. В 1693 г. он пишет работу «О пятом постулате», где он принимает за аксиому существование подобных неконгруэнтных треугольников. А непосредственным учителем И. Ньютона был Исаак Барроу, профессор греческого языка и математики в Кембридже. Он переводит с греческого Евклида, Архимеда, Аполлония и пишет сочинение «Лекции по геометрии и оптике», где развивает новый метод нахождения касательных к кривым, исходя из подобия конечного и бесконечно малого треугольников. В 1669 г. И. Барроу отказывается от кафедры им. Генри Люкаса, которой он заведовал с 1660 г. в пользу своего ученика И. Ньютона.

И. Ньютон (1643 – 1727 гг.) родился в фермерской семье и был очень слабым ребенком. Отец умер рано, сын его не видел. Он сначала учился в сельской школе, а затем в королевской школе. Далее он прервал обучение в силу объективных причин и стал помогать матери по хозяйству. В 1660 г. он вернулся в королевскую школу по настоянию учителя и подготовился к поступлению в Кембриджский университет, куда был принят в 1661 г. в качестве субсайзера (бедный студент, прислуживавший бакалаврам и магистрам). Он изучает «Начала» Евклида, алгебру, тригонометрию, древние языки (латинский, греческий, еврейский), богословские науки. Познакомился с гелиоцентрической системой Коперника, интересовался оптикой. В 1665 г. Ньютон оканчивает университет, получив степень бакалавра, и последовательно из-

бирается младшим, затем старшим членом колледжа Кембриджского университета и в 1668 г. – магистром. В 1669 г. он становится профессором и заведует Люкасовской кафедрой, приняв ее от И. Барроу, до 1701 г. (т.е. в течение 32 лет). С 1672 года он член Лондонского Королевского общества, а в 1703 г. становится его президентом, с 1699 г. – член Парижской АН и директор Английского монетного двора.

Готфрид Лейбниц (1646 – 1716 гг.) – сын профессора-юриста в Лейпцигского университета. Получает образование сначала под руководством отца дома, а в 15 лет становится студентом юридического факультета Лейпцигского университета. Он увлекается философией и математикой, изучает Декарта, Бэкона, Кеплера и Галилея. Уровень преподавания физико-математических наук в немецких университетах в то время было ниже, чем во Франции, Италии, Англии. В 1663 г. Лейбниц защищает диссертацию и получает степень бакалавра, в 1664 г. защищает магистерскую диссертацию, в 1665 г. – диссертацию на степень доктора юридических наук «О запутанных делах». В 1672 г. Лейбниц едет в Париж, где пополняет свое математическое образование, встречается с президентом Парижской АН Христианом Гюйгенсом, совершенствует счетную машину Паскаля (после чего она выполняет четыре арифметических действия). В 1673 г. он избирается членом Лондонского Королевского общества. С 1700 г. Лейбниц – член Парижской АН, в этом же году он создает Бранденбургское научное общество, ставшее потом Берлинской АН, и становится его первым президентом. В 1676 – 77 гг. между Г. Лейбницем, И. Ньютоном и Х. Гюйгенсом устанавливается дружеская научная переписка. Г. Лейбниц в письме к секретарю Лондонского королевского общества Г. Ольденбургу вводит математические термины: абсцисса, алгебраические и трансцендентные кривые, интеграл и др. В 1676 г. при содействии Ольденбурга Г. Лейбниц получает рукопись Ньютона «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов» и непосредственно два письма от Ньютона. С 1677 г. Лейбниц и Ньютон регулярно обмениваются посланиями через Ольденбурга. Лейб-

ниц сообщает о методе для решения обратных задач на касательные, о ряде $\frac{\pi}{4} = -1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1} + \dots$

Ньютон сообщает Лейбницу разложения:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots$$

Первое из этих разложений Ньютон получает следующим образом. Он интегрирует разложение

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}x^4 + \dots$ и получает разложение в ряд функции $y = \arcsin x$ и, используя обращение ряда, получает разложение $\sin y = x = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} \dots$

В 1668 г. немецкий ученый А. Меркатор, интегрируя разложение $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots$ получил разложение в степенной ряд

$\ln(1+x)$. Лейбниц пишет, что решает важнейшие задачи геометрии (математики) без помощи бесконечных рядов (в частности, задачи обратного метода касательных). Ньютон дает шифрованный ответ, означавший: «Дано уравнение, заключающее в себе текущие количества (флюенты), найти течения (флюксии) и наоборот». В ответе Лейбница содержались главные формулы дифференциального исчисления. Лейбниц обратил внимание на одно рассуждение у

Б. Паскаля в труде «О синусе в первом квадранте».

Выделяется воображаемый бесконечно малый треугольник E_1E_2K и подобный ему конечный треугольник DOY . Из подобия имеем

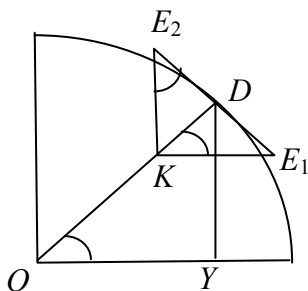


Рис. 19

$$\frac{E_1K}{E_1E_2} = \frac{DY}{OD}.$$

Как писал сам Лейбниц, «этот чертеж послужил началом изобретения дифференциального исчисления».

Бесконечно малый треугольник Лейбниц назвал характеристическим треугольником, из которого $dS^2=dx^2+dy^2$, где $E_1E_2=dS$, $E_2K=dy$, $E_1K=dx$.

Что касается опубликования своих открытий и работ, то события развивались следующим образом. В 1684 г. Лейбниц создает журнал «Acta Eruditorum» и публикует небольшую по объему работу «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которых не служит препятствием ни дробные, ни иррациональные величины и особый для этого род исчисления», сыгравшую величайшую роль в развитии математической науки. В ней, в частности, содержатся правила дифференцирования:

$$d(ax)=adx;$$

если $y=x$, то $dy=dx$;

$$d(x+y)=dx+dy; d(xy)=xdy+ydx;$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2}; d(x^a)=ax^{a-1}dx;$$

$$d\left(\sqrt[b]{x^a}\right)=\frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}dx.$$

И там же он пишет: «Если знать Алгоритм этого исчисления, которое я называю дифференциальным, то все прочие дифференциальные соотношения смогут быть получены при помощи общего вычислительного приема и можно будет находить максимумы и минимумы, а также касательные». В том же году, в том же журнале он публикует труд «О скрытой геометрии и анализе неделимых, и так же бесконечных», где он развивает новое исчисление, называемое Лейбницем интегральным, и вводит символ $\int ydx$ (\int происходит от знака суммы S). Лейбниц уделял большое внимание символике в математике, а также терминам в математической логике. В 1686 г. в «Acta Eruditorum» появляется статья Лейбница «Новое размышление о природе угла касания и соприкосновения и об их применении в математической практи-

ке» для замены более сложных фигур простыми». В ней говорится, что «прямая линия наиболее пригодна для определения направления (кривой), а круг наиболее пригоден для определения кривизны». В 1689 г. выходит новая статья Лейбница «Опыт о причинах движения небесных тел», где вводится понятие порядка бесконечно малых и бесконечно больших величин. В 1692 г. опубликована статья Лейбница в «Журнале ученых» (Париж) «О цепной линии, или Решение знаменитой задачи, предложенной Галилеем», там же в 1694 г. – статья «Новые предложение и употребление дифференциального исчисления к многообразному построению линий по данному свойству касательных», где он находит огибающую семейства окружностей.

И. Ньютон по настоянию своих учеников, и прежде всего Эдмунда Галлея, выпускает в 1687 г. на латинском языке «Математические начала натуральной философии». В предисловии он написал: «Знаменитейший муж Лейбниц сообщил мне свою методу, которая оказалась едва отличающейся от моей и то только терминологией и начертанием формул». В этом капитальном труде много места уделяется механике как науке о движениях, приводятся три классических закона механики (как система аксиом), рассматриваются движения по орбитам, представляющим собой конические сечения, под действием различных сил, движение в различных средах, сопротивление в которых пропорционально скорости или ее квадрату, движение жидкостей, маятников и т.д. Отдел «Математических начал натурфилософии» Ньютона дает исчисления флюксий (производных). Он рассматривает две взаимнообратные задачи: 1) по данным флюэнтам (переменные величины) найти их флюксии (скорости их изменения); 2) по данным флюксиям найти их флюэнты. Ньютон рассматривает проблемы отыскания максимумов и минимумов, исходя из уравнения $y'=0$ – в нашей символике, проведение касательной к заданной кривой, нахождения центра и радиуса кривизны, понятие о точке перегиба кривой, рассматривает площади плоских фигур и длины дуг кривых, приводит таблицы квадратур. В трактате «О квадратуре кривых» приводятся три проблемы: 1) «по данному уравнению, заключающему сколь-либо флюэнт, найти

флюксии; 2) найти кривые, допускающие квадратуру; 3) найти простейшие фигуры, с которыми может быть сравнена любая кривая, у которой ордината y определяется по данной абсциссе x явным уравнением». Отдельным математикам последняя работа была известна в 1676 г., но опубликована она лишь в 1704 г., как приложение к «Оптике».

В работе «Перечисление кривых третьего порядка» (1714 г.) кривые третьего порядка впервые систематически исследованы, всего Ньютон указал 81 вид таких кривых. «Метод разностей» вышел в 1711 г. (рассматриваются интерполяционные формулы, что позднее стали называть методом конечных разностей). В 1707 г. выходит «Универсальная арифметика», Ньютон пишет в ней: «Уравнение может иметь столько корней, каково его измерение, но не более». В этой работе он дает определение числа (оно уже упоминалось выше): «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу».

К большому сожалению, между Ньютоном и Лейбницем возник спор о приоритете открытия дифференциального и интегрального исчисления. Были и открытые выступления, и анонимные. Они стали непримиримыми врагами, не признававшими научные заслуги друг друга, что привело к вражде и между их учениками, которые и сами немало способствовали разжиганию страстей.

14 ноября 1716 г. Лейбниц умирает, оставшись в немилости у Ганноверского герцога, которому он служил 40 лет. Попал же он в немилость за то, что отказался написать историю династии. Духовенство, считая его неверующим, относилось к нему соответственно. Массе народа он был просто неизвестен. Следует отметить, что Лейбниц причастен к созданию Петербургской АН, проект ее он обсуждал с Петром I. За эти заслуги перед Россией ему была назначена ежегодная пенсия в 2000 гульденов.

Дело, начатое Лейбницем, было продолжено его учениками и учениками его учеников: **Якобом (1654 – 1705 гг.)** и **Иоганном (1667 – 1748 гг.) Бернулли**, сыновьями Иоганна **Николаем**

(1695 – 1726 гг.) и Даниилом (1700 – 1782 гг.), племянником Якоба и Иоганна Николаем (1687– 1759 гг.), внуками Иоганна-старшего Иоганном (1744 – 1807 гг.) и Якобом (1759– 1789 гг.). Довольно редкий случай, когда из одной семьи вышло 7 выдающихся ученых, оставивших в науке заметный след. Иоганн Бернулли-старший в 1697 г. предлагает вариационную задачу о кривой наискорейшего спуска, позже названную задачей о брахистохроне, и назначил для ее решения срок в полтора года. Однажды, вернувшись домой, Ньютон, обнаружил письмо с этой задачей и между делом, коротая время до ужина, решил ее. Лейбниц взял эту задачу в дорогу от Ганновера до Вольфенбюттеля и за время пути решил ее.

Учениками Лейбница были два старших Бернулли, Якоб и Иоганн. Якоб Бернулли учился в Базельском университете (Швейцария), открытом в 1460 г., прошел курс обучения на философском факультете, получил степень магистра философии. Затем по желанию отца поступает на богословский факультет, но увлекается математикой, изучает «Геометрию» Р. Декарта. После окончания университета путешествует по Европе (Париж, Амстердам, Лондон), всюду интересуется астрономией, физикой, математикой. Вернувшись в Базель, он преподает в университете экспериментальную физику. Лучшим из его учеников оказался его брат Иоганн (у них была разница в возрасте 13 лет). С 1686 г. Якоб Бернулли заведует кафедрой физики, а с 1687 г. и математики. Братья Якоб и Иоганн Бернулли познакомились и сильно заинтересовались первой опубликованной статьей Лейбница «Новый метод...», вышедшей в 1684 г. Якоб пишет Лейбницу письмо, в котором просит прояснить некоторые места его статьи. В 1692 г. Якоб Бернулли дополняет Лейбница работой о круге и радиусе кривизны, где он доказал, что эвольвентой логарифмической спирали, заданной уравнением $\rho = a^{k\varphi}$, является также логарифмическая спираль. Он завещал высечь на его надгробье логарифмическую спираль и снабдить надписью: «Так же воскресаю в неизменном виде». Напомним, что эволютой для кривой γ является множество центров кривизны этой кривой, которое обычно обозначается $\bar{\gamma}$ и называется эвольвентой.

Якоб Бернулли занимался суммированием различных рядов, как правило, без доказательства их сходимости.

В 1696 г. Якоб предложил Иоганну задачу: «Найти замкнутую кривую заданной длины, заключающую наибольшую площадь» (т.е. изопериметрическую задачу). Решение, предложенное Иоганном, не удовлетворило Якоба, что послужило началом спора между братьями, длившегося до смерти Якоба. Иоганн упрекнул старшего брата тем, что он с большим опозданием решил задачу о брахистохроне, которую своевременно и верно решили И. Ньютон, Г. Лейбниц, И. Бернулли и Г. Лопиталь. Якоб написал работу «Анализ большой проблемы изопериметров», посвятив ее четырем «принцам математики»: Лопиталю, Лейбницу, Ньютону и Фацио де Люилье (Иоганна он в этот список не включил). Его работа положила начало вариационному исчислению. В 1699 г. Парижская АН, а за ней Берлинская АН избрали обоих братьев своими членами. В 1705 г. Якоб Бернулли умирает. В 1713 г. его племянник Даниил Бернулли опубликовал рукописи Якоба Бернулли под названием «Искусство угадывания», где довольно основательно развивается теория вероятностей, приводится закон больших чисел. Попутно рассматривается теория соединений и формула суммирования одинаковых степеней натуральных чисел.

Иоганн Бернулли вначале учился на медицинском факультете Базельского университета, одновременно слушал лекции брата Якоба. В 18 лет стал магистром. Оба брата овладели новой теорией Лейбница, которая для многих математиков была *terra incognita*. В 1690 г. Иоганн Бернулли в Париже обучает исчислению бесконечно малых маркиза Лопиталья. С 1695 г. завязывается оживленная переписка Иоганна Бернулли с Лейбницем, и в том же году он получает место профессора в Гронингенском университете (Нидерланды). С 1705 г. после смерти брата получает его кафедру. Он читает дифференциальное и интегральное исчисление, много занимается теорией обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (с разделяющимися переменными, однородными и линейными). Он интересуется теорией геодезических кривых на поверхностях, предметом и методом механики. Он решил задачу о движении в среде, сопротивление которой пропорционально лю-

бой степени скорости, опубликовал статью в «Acta Eruditorum». 42 года занимал Иоганн Бернулли кафедру математики в Базельском университете. Его учениками были Лопиталь, Эйлер и другие. В 1716 г. Лейбниц предложил английским математикам задачу об ортогональных траекториях (как он говорил, «пощупать пульс у англичан»). Ньютон решил ее в тот же день и передал решение в «Философские труды» Лондонского общества. Лейбниц неожиданно умирает, а Иоганн Бернулли подвергает решение Ньютона сомнению. Это послужило началу полемики между немецкими и английскими математиками.

В 1730 г. Иоганн Бернулли получает награду Парижской АН за сочинение о причинах эллиптической формы траектории движения планет, а в 1734 г. та же академия делит еще одну награду между ним и его сыном Даниилом за сочинение о причине различного наклона планетных орбит, относительно экватора Солнца. Иоганн Бернулли был членом Берлинской, Парижской, Болонской и Петербургской Академий наук и Лондонского королевского общества.

Гильом Франсуа Лопиталь (1661 – 1704 гг.) был знаком с работой Лейбница «Новый метод...» и в 1688 г. составил записки по дифференциальному исчислению. В 1692 г. он 4 месяца занимается математикой с Иоганном Бернулли в собственном поместье и овладевает в совершенстве новой теорией. В 1696 г. он анонимно публикует «Анализ бесконечно малых», в предисловии к которому он приводит историю возникновения нового анализа на основе работ Р. Декарта, Х. Гюйгенса, Г. Лейбница. Он излагает правила отыскания касательных, максимумов и минимумов, точек перегиба и точек возврата, разверток (эвольвент) кривых, огибающих, правило раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, которое сейчас называется его именем. Фактически его сочинение было первым в истории учебником по математическому анализу.

Мишель Ролль (1652 – 1719 гг.) доказал для алгебраической функции теорему: между двумя действительными корнями многочлена всегда лежит корень производной этого многочлена (сравните с теоремой Ролля).

Брук Тейлор (1685 – 1731 гг.) член Лондонского королевского общества (1712 г.), затем его секретарь. В 1714 г. Б. Тейлор представил королевскому обществу рукопись «Метод приращений, прямой и обратный», напечатанную в 1715 г. Его обвиняют в плагиате (якобы разложение интеграла в ряд построил Иоганн Бернулли). Но хорошо известный степенной ряд носит имя Тейлора. Он сам нашел применение ряда к решению уравнения колебания струны.

Колин Маклорен (1698 – 1746 гг.) открыл интегральный признак сходимости числового ряда (Коши – Маклорена), построил методом неопределенных коэффициентов ряд

$$f(h)=f(0)+\frac{h}{1!}f'(0)+\frac{h^2}{2!}f''(0)+\frac{h^3}{3!}f'''(0)+\dots+\frac{h^n}{n!}f^n(0)+\dots.$$

Лекция 6

Восемнадцатое столетие и начало девятнадцатого

В начале XVIII в. продолжали свою научную деятельность И. Ньютон и Г. Лейбниц, создатели дифференциального и интегрального исчисления. Большой вклад внесли в математику Бернулли. Математику XVIII столетия, как считают историки, определяли 5 выдающихся геометров (как всё ещё продолжали называть математиков): Л. Эйлер (1707 – 1783 гг.), Ж. Лагранж (1736 – 1813 гг.), П. Лаплас (1749 – 1827 гг.), Ж.Л. Даламбер (1717 – 1783 гг.), А. Клеро (1713 – 1765 гг.). Этот период отличает внимание, как их называли, «просвещенных деспотов» Фридриха II – короля Пруссии, Екатерины Великой – императрицы России и Людовиков XV и XVI – королей Франции, к наукам и учёным. Владыки состязались между собой в приближении к своим дворам знаменитых учёных.

Леонард Эйлер родился 4 апреля 1707 г. в Базеле в семье пастора. Первоначальное образование получил от своего отца, который в молодости занимался математикой под руководством Якоба Бернулли (старшего). Осенью 1720 г. Л. Эйлер поступает в Базельский университет. В 1724 г. он произносит речь (нечто вроде защиты магистерской диссертации), посвящённую сравнению философии Р. Декарта и И. Ньютона (вспомните «Рассуждение о методе» Р. Декарта и «Математические начала натурфилософии» И. Ньютона), и был удостоен степени магистра (обратите внимание, что ему было только 17 лет!). С 1723 г. он по настоянию отца изучает богословие, но вскоре целиком отдаёт себя математике. В университете Л. Эйлер слушал лекции по математике Иоганна Бернулли (старшего), но ещё важнее для него были беседы, которые проводил с ним И. Бернулли по субботам в течение нескольких лет. В 1726 – 1727 гг. Эйлер публикует в “Acta Eruditorum» первые научные работы, которые содержат решение

задачи об изохроне (в среде с сопротивлением) и о траекториях. (Изохрона – это математическая кривая, по которой тяжёлая частица движется так, что за равные промежутки времени она проходит пути, проекции которых на вертикальную ось равны между собой). Ещё Х. Гюйгенсом было доказано, что такой кривой является циклоида. В 1728 г. Л. Эйлер написал статью о наилучшем расположении мачт на корабле. В 1725 г. Даниил и Николай Бернулли (дети Иоганна Бернулли) были приглашены в Петербургскую АН, открытую в 1724 г. В 1726 г. по рекомендации Бернулли в Петербургскую АН был приглашен Л. Эйлер, куда он и прибыл в мае 1727 г. В Санкт-Петербурге Л. Эйлер провёл два периода своей жизни: с 1727 г. по 1741 г. и с 1766 г. по 1783 г., в общей сложности 31 год. С 1741 г. по 1766 г. Эйлер работал в Берлинской АН, куда его пригласил Фридрих II. Но всё это время он поддерживал связь с Петербургом, помогал в приобретении лабораторного оборудования, вёл научную переписку.

Трудно перечислить все области математики, механики, физики и многих других наук, в которые Эйлер внёс большой вклад. Он развил аналитическую геометрию, в частности, теорию кривых второго порядка. Он много занимался теорией чисел (распределением простых чисел в натуральном ряду, проблемой Гольдбаха), написал около 100 работ. Его интересовала дзета-функция

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

где $s = \sigma + i\tau$.

В математическом анализе Эйлер вводит однородные функции, подстановки для интегрирования функций вида $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, специальные функции

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \quad B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx.$$

Известна постоянная Эйлера – Маскерони

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln[n+1] \right).$$

Эйлер вывел формулу, позволяющую вычислить постоянную C с любой степенью точности и сам вычислил её до 15 знака $C=0,577215664901532\dots$. До сих пор неизвестно, является постоянная C рациональным числом или нет. Кстати, Л. Эйлер доказал иррациональность числа e .

В теории дифференциальных уравнений им предложен метод решения линейных уравнений и их систем с постоянными коэффициентами, он предложил для уравнения

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k y^{(k)} = f(x)$$

замену $x=e^t$, которой оно приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами, предложил метод приближенного решения дифференциальных уравнений вида $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0)=y_0$ (метод Эйлера), в вариационном исчислении – уравнение Эйлера для отыскания экстремалей функционала $\int_a^b F(x, y, y') dx$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

Эйлер решил задачу о кенигсбергских мостах, относящуюся фактически к теории графов, получил формулу $B-P+G=2$, где B , P и G соответственно число вершин, рёбер и граней выпуклого многогранника. Эйлер много сделал в теории функций комплексного переменного. Известны его формула

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

и следствия из неё, условия дифференцируемости функции комплексного переменного, которые впоследствии не совсем справедливо были названы условиями Коши-Римана, установил связь дифференцируемости с конформными отображениями. Эйлер много сделал в тригонометрии, в том числе в сферической, известны углы Эйлера, определяющие положение одной прямо-

угольной декартовой системы $0xyz$ относительно другой $0'x'y'z'$, сферический треугольник Эйлера (длины всех сторон меньше половины длины экватора) и многое другое. За первые 14 лет жизни в Петербурге Эйлер написал 80 работ и более 50 из них опубликовал. За 25 лет в Берлине он написал около 300 работ. Всего же он написал около 850 научных работ, из них примерно 60% – по математике и около 40% – по другим наукам, в т.ч. «Механика или наука о движении, изложенная аналитически» (2 тома, 1736 г.), «Теория движения твёрдого тела» (1756 г.) и труды по теории музыки, теории машин и механизмов, баллистике, навигации, страховому делу, лотерее, теории гороскопов и даже по размещению фонтанов в пригородах Петербурга.

Л. Эйлер был избран членом Петербургской, Берлинской, Парижской Академии наук, членом Лондонского королевского общества, многие его работы были удостоены престижных научных премий. В 1909 г. швейцарское естественно-научное общество приступило к изданию полного собрания сочинений Л. Эйлера. Кроме того, Л. Эйлер вёл колоссальную научную переписку, его эпистолярное наследие составляет около 3000 писем!! Лаплас назвал Л. Эйлера учителем всех математиков второй половины XVIII века.

Жозеф Луи Лагранж родился в итало-французской семье. В 19 лет он стал профессором артиллерийской школы в Турине. После отъезда Л. Эйлера из Берлина в Петербург в 1766 г. Лагранж был приглашён Фридрихом Великим в Берлинскую АН. В приглашении говорилось: «необходимо, чтобы величайший геометр (читай – математик) Европы проживал вблизи величайшего из королей». (Скромно, но с достоинством!). Лагранж пробыл в Берлине до смерти Фридриха II (1786 г.), после этого он вернулся в Париж, где в 1795 г. занял должность профессора Нормальной школы, а в 1797 – Политехнической школы. Познакомившись с мемуаром Л. Эйлера по вариационному исчислению (1755 г.), Лагранж в 1760 – 1761 гг. создаёт аналитическое вариационное исчисление, где разрабатывает алгоритм решения класса вариационных задач (в том числе задача Лагранжа о минимизации функционала при наличии дифференциальных ограничений и

граничных условий, которая возникла в связи с исследованиями по механике). Им же введено понятие вариации функционала и знак вариации δ . Лагранж вёл переписку с Эйлером. В одном из писем Л. Эйлер пишет: «Ваше решение изопериметрических проблем безукоризненно и я рад, что тема, которой я давно занимаюсь, доведена Вами до близкого конца». Лагранж внёс большой вклад в механику. В основу статики он положил общую формулу – принцип возможных перемещений, в динамике этот принцип сочетается с принципом Даламбера: сумма всех приложенных сил равна нулю. Лагранж вводит в механике так называемые обобщённые координаты и получает уравнение, которое сейчас носит его имя. Математический анализ он строит на основе разложения функций в степенные ряды, получает остаточный член формулы Тейлора

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Лагранж доказывает одну из важнейших теорем математического анализа и приводит формулу конечных приращений

$$f(b) - f(a) = f'(c) (b - a).$$

Он даёт правило отыскания условного экстремума (функция Лагранжа $F = f + \lambda\varphi + \mu\psi$, где f – функция, исследуемая на экстремум, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ – уравнения связи, λ , μ – множители Лагранжа). Лагранж вводит интерполяционный многочлен (Лагранжа). Лагранж доказывает в теории чисел теорему (1772 г.): всякое натуральное число есть сумма квадратов четырёх целых чисел. В алгебре Лагранж разрабатывает метод приведения квадратичной формы к сумме квадратов и доказывает теорему о порядке и индексе конечной группы. В теории дифференциальных уравнений находит в параметрической форме решение уравнения (Лагранжа)

$$y = x\varphi(y') + f(y'),$$

разрабатывает теорию особых решений и метод вариации постоянных для линейных уравнений. Лагранж занимался исследова-

нием проблемы о разрешимости в радикалах алгебраических уравнений степени $n \geq 5$.

Пьер Симон Лаплас родился в Нормандии в семье небогатого землевладельца. При поддержке Даламбера становится профессором математики в военной школе в Париже. Он написал два больших мемуара: «Аналитическая теория вероятностей» (1812 г.), где, в частности, излагается распределение Лапласа и предельная теорема, и «Небесная механика» (в пяти томах, 1799 – 1825 гг.). Кроме того, им написаны «Опыт философии теории вероятностей» (1814 г.) и «Изложение системы мира», где излагается его космогоническая гипотеза. «Небесная механика» является завершением, итогом трудов Ньютона, Клеро, Даламбера, Эйлера, Лагранжа и его собственных по теории фигуры Земли, Луны, по задаче трёх тел и теории возмущений планет, включая проблему об устойчивости солнечной системы. Лаплас исследует уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

занимается теорией потенциала. Известна теорема Лапласа о вычислении определителей. Он вводит преобразование (Лапласа)

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \text{ где } p = \sigma + i\tau$$

и обратное ему

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p) e^{pt} dt.$$

Впоследствии эти преобразования нашли всестороннее применение в операционном исчислении. Лапласу принадлежит высказывание: «Ум, который знал бы все действующие в данный момент силы природы, а также относительное положение всех составляющих её частиц и который был бы достаточно обширен, чтобы все эти данные подвергнуть математическому анализу, смог бы охватить единой формулой движение как величайших тел вселенной, так и её легчайших атомов; для него не было бы ничего неопределенного. Он одинаково ясно видел бы и будущее, и

прошлое. Таким образом, совершенство, какое человеческий разум был в состоянии придать астрономии, даёт лишь слабое представление о таком уме». Это ярко выраженный детерминизм.

Жан Лерон Даламбер – французский математик и философ, один из создателей «Энциклопедии наук, искусств и ремёсел», где вёл отделы математики и физики. Основные математические труды относятся к теории дифференциальных уравнений в частных производных (малые колебания бесконечно тонкой однородной струны), использовал для решения уравнения эллиптического типа, встретившегося в гидродинамике, функции комплексного переменного. Даламбер, как и Эйлер, знал условия аналитичности функций, которые были позднее названы условиями Коши – Римана. Даламбер получает удобный достаточный признак сходимости числового ряда, вводит понятие предела, даёт доказательство основной теоремы алгебры о существовании корня у алгебраического уравнения $P_n(x) = 0$, где $P_n(x)$ – многочлен. Оно было аналитическим. Он доказал, что существует такое z_0 , что $|P_n(z_0)| = 0$, и тем самым, z_0 – корень уравнения. Позже алгебраическое доказательство основной теоремы (и не одно) даёт К.Ф. Гаусс.

Алекси Клод Клеро – французский математик и астроном. Он ввёл понятие криволинейного интеграла, полного дифференциала функции нескольких переменных, общего и особого решения дифференциального уравнения (Клеро) первого порядка. А. Клеро занимался исследованием формы Земли, доказал ряд фундаментальных теорем в высшей геодезии, разработал новую теорию движения Луны.

Крупные успехи в математике названных учёных привели Лагранжа к пессимистическим выводам. В письме к Даламберу он пишет: « Не кажется ли Вам, что высшая геометрия (математика) близится отчасти к упадку, её поддерживаете только Вы и Эйлер». Лагранж даже на некоторое время прекращает занятия математикой. Даламбер своим ответом не обнадежил его. Ещё категоричней оказался Араго, который в «Похвальной речи о Лапласе» (1842 г.) говорит: «Пять геометров Клеро, Эйлер, Далам-

бер, Лагранж, Лаплас разделили между собой тот мир, существование которого открыл Ньютон. Они исследовали его во всех направлениях, проникли в области, которые считались недоступными, указали множество явлений в этих областях, которые ещё не были открыты наблюдениями и, наконец, в этом их вечная слава, они охватили с помощью одного принципа, одного единственного закона самые тонкие и таинственные явления в движении небесных тел. Таким образом, геометрия осмелилась распоряжаться будущим, и ход будущих столетий только подтвердит во всех подробностях заключение науки».

Но, как будет показано ниже, математика не была исчерпана, и она получает новый мощный импульс развития со стороны учёных Франции (Галуа и др.), Германии (К.Ф. Гаусс и др.), России (Н.И. Лобачевский, М.В. Остроградский, П.Л. Чебышев и др.).

Лекция 7

ХІХ столетие и начало ХХ

Нроме великих имён, упомянутых в конце предыдущей лекции, о которых мы будем говорить чуть позже, следует упомянуть ряд математиков, чьё творчество пришлось на конец ХVІІІ и начало ХІХ веков.

Адриен Мари Лежандр (1752 – 1833 гг.) – французский математик, разработал и применил в вычислениях метод наименьших квадратов (1805 – 1806 гг.), а чуть раньше этот метод был предложен К.Ф. Гауссом (1794 – 1795 гг.). Лежандр написал «Теорию чисел», которая сохранила свою ценность до сих пор.

Он вводит символ $\left(\frac{a}{p}\right)$, об определении которого и значении бу-

дет сказано позже, когда речь пойдёт о Гауссе. В 1794 г. он написал учебник «Элементарная геометрия», где делает попытку доказать V постулат Евклида. Во втором издании «Элементарной геометрии» (1799 г.) Лежандр доказывает, что сумма углов треугольника не может быть меньше 180° . Однако V постулат доказать ему не удалось. В вариационном исчислении он установил признак существования экстремума функционала. Лежандр занимался эллиптическими и сферическими функциями, построил полную ортогональную на $[-1; 1]$ систему многочленов, с помощью которой можно приближённо представить в виде ряда любую интегрируемую функцию. Известны функции Лежандра, являющиеся решениями дифференциального уравнения

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + (v(v+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2})y = 0,$$

где v и μ – константы. В частности, если $v=0, 1, 2, \dots$, а $\mu = 0$ – решениями будут многочлены Лежандра:

$$P_0(x)=1, P_1(x)=x, P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1), \dots, P_n(x)=\frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Лежандр интересовался распределением в натуральном ряду простых чисел и вывел формулу, которая позволяет довольно точно найти сумму простых чисел, находящихся в промежутке от 1 до 10^6 .

Как уже упоминалось, Л. Эйлер доказывает иррациональность числа e (1737 г.), а Ламберт – числа p (1766 г.) Трансцендентность этих чисел была доказана существенно позже: числа e – Ш. Эрмитом (1873 г.), а числа p – К. Линдеманом (1882 г.), последним доказана неразрешимость задачи о квадратуре круга.

Итак, в XVIII веке оформился математический анализ, вариационное исчисление, теория дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных), сформировались аналитическая геометрия, теория чисел, начертательная и дифференциальная геометрии (в работах Г. Монжа и Ж. Монье).

Следует отметить, что в середине XVIII века развернулась научная дискуссия Л. Эйлера с Ж. Даламбером и Д. Бернулли о свойствах логарифмов отрицательных и мнимых чисел, а также о природе решений уравнения колебания струны. В этом споре приняли участие и другие крупнейшие математики второй половины XVIII века, Г. Монж, Ж. Лагранж. Вопрос состоял в возможности представления любой функции аналитическим выражением, в частности, суммой тригонометрического ряда. Дискуссия продолжалась и в XIX веке, в неё включились С. Лакуа, Ж. Фурье, Н. И. Лобачевский. Можно считать, что современное определение функции (без упоминания об аналитическом выражении) было дано П. Дирихле в 1837 г. Таким образом, накопленный огромный фактический материал требовал углубленного логического анализа многих понятий. Вводится геометрическая интерпретация комплексных чисел (К. Вессель – 1799 г., Ж. Аргон – 1806 г.). Выше уже говорилось о том, что ряд крупных математиков, например Ж. Лагранж, Э. Безу, интересовались проблемой разрешимости алгебраических уравнений степени выше четвертой. В 1799 г. Н. Руффини дал первое доказательство не-

разрешимости уравнения пятой степени общего вида в радикалах (но в нём обнаружены пробелы). Он же разработал ряд идей теории групп конечных подстановок. Этой же проблемой занимался Н. Абель, который в 1824 и 1826 гг. доказывает, что алгебраические уравнения степени выше 4-й в общем случае неразрешимы в радикалах, указав частные случаи уравнений, разрешимых в радикалах, построил связанные с ними группы, позже названные абелевыми. В 1801 г. К.Ф. Гаусс даёт полную теорию решения в радикалах двучленного уравнения $x^n = 1$.

Эварист Галуа (1811 – 1832 гг.) знал о предпринятых подходах к решению проблемы разрешимости в радикалах алгебраического уравнения степени $n \geq 5$. Он понял, что общей теории, охватывающей указанные все возможные уравнения, нет. В «Мемуаре об условиях разрешимости уравнений в радикалах» (1832 г.), найденном после его трагической смерти и опубликованном в 1846 г., проблема была решена в окончательном виде, были даны необходимые и достаточные условия разрешимости в радикалах алгебраического уравнения

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

В процессе разрешения проблемы вводятся группа Галуа, поле Галуа, соответствие Галуа. После работ Руффини, Лагранжа, Абеля, Галуа алгебра приобретает новый характер. Она становится наукой об алгебраических системах: группах, кольцах, полях, векторных пространствах, линейной алгебре, решётках и т.д.

Первая треть XIX века охарактеризовалась значительным открытием – созданием неевклидовой геометрии Н.И. Лобачевским. А.Н. Колмогоров писал по этому поводу: «Именно на примере этой геометрии была преодолена вера в незыблемость освящённых тысячелетним развитием математики аксиом, была понята возможность создания существенно новых математических теорий...».

Раньше уже говорилось о попытках доказательства V постулата Евклида, которые, как правило, сводились к его замене равносильным предложением. Ф. Тауринс в 1825 – 1826 гг., исходя из допущения, что сумма углов треугольника меньше 180° (т. е.

отрицает V постулат), получил некоторые теоремы неевклидовой геометрии. Ф. Швейкарт (1818 г.) приходит к выводу, что V постулат нельзя доказать логически и можно построить геометрию, в которой сумма углов треугольника меньше суммы двух прямых углов. Есть основания утверждать, что к мысли о возможности построения наряду с евклидовой геометрией и геометрией неевклидовой пришел К.Ф. Гаусс в 1818 г. Но он не стал публиковать этих идей и не хотел, чтобы это делали те, кто посвящен в его взгляды.

Пытался доказать V постулат Фаркаш Больяй (Бойаи), венгерский математик, кстати, учившийся вместе с К.Ф. Гауссом в Геттингене. По стопам отца пошел сын Янош Больяй, который в 1832 г. как приложение к сочинениям своего отца издал свои исследования под названием «Аппендикс» и поэтому считается одним из творцов неевклидовой геометрии. Таким образом, идеи витали в воздухе, их концентрация увеличивалась. Н.И. Лобачевский пришел к новой геометрии после нескольких попыток доказательства V постулата. Н.И. Лобачевский строит так называемую абсолютную геометрию (без использования V постулата). 11 (23) февраля 1826 г. Н. И. Лобачевский на заседании отделения физико-математических наук Казанского университета сообщает о своём сочинении «Сжатое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных» и просит принять его в «Учёные записки физико-математического факультета». Однако сообщение Н. И. Лобачевского не получило одобрения коллег и скорее всего было утеряно. Трудный путь признания прошла его геометрия. И уже через 12 лет после его смерти, т. е. в 1868 г. итальянский математик Э. Бельтрами показал, что геометрия Лобачевского (а именно планиметрия) реализуется на поверхности, названной псевдосферой, таким образом, была построена модель неевклидовой геометрии. К.Ф. Гаусс, не высказываясь в печати, высоко оценил труды Н.И. Лобачевского (1829 – 1840 гг.), и по его предложению Н.И. Лобачевского избирают в 1842 г. членом-корреспондентом Геттингенского научного общества.

Н.И. Лобачевский родился 20.11(1.12) 1792 г. в Нижнем Новгороде. Детство его было довольно трудным. Однако благодаря усилиям матери он был принят в Казанскую гимназию (1802 – 1807 гг.), а затем поступил в Казанский университет (1807 – 1811 гг.). После окончания университета он был оставлен в нём и в 1811 г. утверждается магистром, в 1814 г. – адъюнктом, в 1816 г. – экстраординарным, а в 1822 г. – ординарным профессором. Четыре года был деканом физико-математического факультета, а с 1827 по 1846 гг. – ректором Казанского университета, для которого он сделал очень много. Кроме геометрических работ, Н.И. Лобачевский имел ряд фундаментальных результатов в алгебре, математическом анализе, в частности, в теории тригонометрических рядов, он также получил удобный метод приближённого решения уравнений.

Карл Фридрих Гаусс (1777 – 1855 гг.) занимает в ряду математиков XIX века одно из выдающихся мест. Он родился в семье водопроводчика. В 1795 – 1798 гг. учился в Гёттингенском университете, с 1799 г. – доцент в Брауншвейгском университете, с 1807 г. до конца жизни он заведует кафедрой математики и астрономии в Гёттингенском университете и одновременно занимает должность директора астрономической обсерватории. В 1801 г. выходит первое крупное сочинение Гаусса «Арифметические исследования», где собраны результаты по теории чисел в высшей алгебре. В нём излагается теория квадратичных вычетов, первое доказательство квадратичного закона взаимности. Напомним, что если сравнение $x^2 \equiv a \pmod{m}$ имеет решение, что означает делимость $x^2 - a$ на m , где x , m и a – целые числа, то a называется квадратичным вычетом по модулю m , если же решений сравнения нет – то a называется квадратичным невычетом по модулю m . Так, сравнение $x^2 \equiv 9 \pmod{10}$ имеет решения ($x = 3, 7, 13$ и т.д.) и, следовательно, 9 – квадратичный вычет по модулю 10, сравнение $x^2 \equiv 7 \pmod{10}$ решений не имеет, т.к. квадрат целого числа не может оканчиваться цифрой 7 и поэтому 7 – квадратичный невычет по модулю 10.

Лежандром был введён символ $\left(\frac{a}{p}\right)$, который определяется следующим образом: $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, если целые числа a и p взаимно простые и a – квадратичный вычет по модулю p , и $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, если a – квадратичный невычет. Закон взаимности утверждает: если p и q – простые нечётные числа, то $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$.

Это соотношение было известно ещё Эйлеру в других терминах, формулировку привёл Лежандр, а первое доказательство дал Гаусс. В том же сочинении Гаусс приводит первое строгое доказательство основной теоремы алгебры. К этим двум теоремам он позже неоднократно возвращался. В конце «Арифметических исследований» излагается теория уравнений вида $x^n - 1 = 0$, что связано с делением круга или вписыванием в окружность правильных многоугольников. Решив уравнение $x^{17} - 1 = 0$, Гаусс даёт способ построения правильного семнадцатиугольника при помощи циркуля и линейки. (Он попросил выгравировать на своем надгробном памятнике круг с вписанным в него 17-угольником). Гаусс доказал, что с помощью линейки и циркуля можно построить лишь те правильные n -угольники, где n – простое число, представимое в виде $n = 2^{2^k} + 1$, ($k = 0, 1, 2, \dots$). При $k = 0$ число $n = 3$, при $k = 1$ число $n = 5$, а при $k = 2$ получаем $n = 17$. Гаусс предлагает метод наименьших квадратов в связи с работами по геодезии (как и Лежандр). Гаусс пишет работу по гипергеометрическим рядам, доказывает признак сходимости числового ряда, занимается внутренней геометрией поверхностей, вводит понятия дифференциальной квадратичной формы, вводит дифференциал поверхности, заданной параметрически.

Гаусс разработал арифметику комплексных чисел (вида $a + bi$, где a и b – целые вещественные числа). Числа 5 и 13 в этой арифметике составные

$$5 = (1 + 2i)(1 - 2i), 13 = (2 + 3i)(2 - 3i).$$

Гаусс много внимания уделяет специальным функциям. Он решает задачу о восьми ферзях (расположить 8 ферзей на шахматной доске так, чтобы ни один из них не находился под ударом другого). Он нашёл 76 решений, позже выяснилось, что всего их – 92. Гаусс занимался теорией вероятностей, интеграл

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$
 носит его имя, известен нормальный закон распределения вероятностей Гаусса – Лапласа, Гауссовский случайный процесс и многое другое.

Георг Фридрих Бернгард Риман (1826 – 1866 гг.) – выдающийся немецкий математик. Учился в Гёттингенском университете, где слушал лекции Гаусса, позже лекции К. Якоби и П. Дирихле – в Берлинском университете. В 1851 г. защищает докторскую диссертацию «Основы общей теории функций одной комплексной переменной». В этой диссертации введены римановы поверхности, используемые при исследовании многозначных функций, разработана теория конформных отображений, введены условия Коши – Римана, о которых упоминалось выше. Риман много занимался изучением ζ -функции

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \text{ где } s = \sigma + i\tau, \sigma > 1,$$

и в частности распределением её нулей в комплексной плоскости. Выдвинутая им гипотеза говорит о том, что нетривиальные нули

ζ -функции лежат на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$. Он ввёл понятие интеграла,

который теперь носит его имя (Римана), получил необходимое и достаточное условие его существования. Им предложен ряд методов интегрирования уравнений в частных производных. В 1854 г. Риман прочитал лекцию «О гипотезах, лежащих в основании геометрии», где он рассматривает геометрию как учение о непрерывных n -мерных многообразиях. Он ввёл так называемые Римановы пространства, обобщающие пространства Евклида, гиперболической геометрии Лобачевского и эллиптической геометрии

Римана, характеризующиеся специальным видом линейного элемента. Большое впечатление производит доказанная Риманом теорема об условно сходящихся рядах.

Огюстен Луи Коши (1789 – 1857 гг.) – один из крупнейших математиков XIX века. Ему принадлежит масса результатов в математическом анализе. Именно он ввёл строгое понятие предела последовательности и функции, дал определение непрерывности функции, признак и критерий Коши сходимости рядов, определение интеграла для непрерывных функций. Он вводит условия дифференцируемости функции (условия Коши – Римана). Доказывает интегральную теорему Коши и выводит две интегральные формулы Коши. Строит разложения функций в степенной ряд, получает формулу для радиуса сходимости, разрабатывает теорию вычетов. В теории дифференциальных уравнений известна начальная задача Коши, теоремы существования решений дифференциальных уравнений обыкновенных и в частных производных (теорема Коши – Ковалевской). В теории вероятностей одно из распределений носит название распределение Коши. Им установлено неравенство Коши для конечных сумм

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2,$$

которое верно и для рядов в случае сходимости рядов в правой части неравенства. Интегральный аналог этого неравенства установлен В.Я. Буняковским, обобщение на более общие случаи получено Гёльдером:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

при условии сходимости интегралов справа, где $p > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Коши доказана теорема о выпуклых многогранниках: если они изометричны друг другу (т. е. один взаимно однозначно отображается на другой с сохранением длин), то второй может быть получен из первого движением как жёсткое целое.

Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815 – 1897 гг.) – выдающийся немецкий математик, один из создателей классического математического анализа (как вещественного, так и комплексного). В основу построенной им теории действительного числа положена аксиома (Вейерштрасса), одна из аксиом непрерывности: *всякое непустое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань, а ограниченное снизу – точную нижнюю грань*. Он доказал важные теоремы о свойствах функции, непрерывной на отрезке, ему и Больцано принадлежит теорема (Больцано – Вейерштрасса) о выделении сходящейся подпоследовательности из любой ограниченной последовательности. Вейерштрасс получает достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда. Вейерштрасс построил пример непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке, доказал теорему о равномерном приближении многочленами произвольной функции, непрерывной на отрезке. Вейерштрасс внёс большой вклад в теорию аналитических функций, в основе которой лежат равномерно сходящиеся степенные ряды. Он ввел понятие аналитического продолжения функции, рассмотрел поведение аналитической функции в окрестности изолированной особой точки, заложил основы аналитических функций многих переменных. В вариационном исчислении Вейерштрасс получает достаточные условия экстремума функционала. В дифференциальной геометрии он изучает геодезические линии и минимальные поверхности. В линейной алгебре Вейерштрасс строит теорию элементарных делителей (используется для приведения матрицы к Жордановой форме). Вейерштрасс является учителем С. В. Ковалевской (об этом подробнее смотри ниже).

И ещё о двух немецких математиках. **Юлиус Вильгельм Рихард Дедекин (1831 – 1916 гг.)** учится у К. Гаусса и П. Дирихле в Гёттингене. Внёс вклад в теорию алгебраических чисел и алгебры (дедекиндово кольцо, дедекиндова решётка, понятие идеала). Дедекин – автор одной из теорий действительных чисел, которая строится на основе сечений в множестве рациональных чисел и аксиоме Дедекинда, которая обеспечивает непрерывность множества действительных чисел.

Георг Кантор (1845 – 1918 гг.) окончил Берлинский университет. С 1879 по 1913 гг. – профессор в университете Галле. Он разработал теорию бесконечных множеств, теорию трансфинитных и кардинальных чисел, доказал несчётность множества всех действительных чисел, ввёл понятие мощности множества. Кантор ввёл понятие предельной точки, производного множества, построил пример совершенного множества (канторово множество). Аксиома Кантора (принцип вложенных отрезков) – одна из аксиом непрерывности: любая последовательность вложенных друг в друга отрезков, длины которых стремятся к нулю, имеет одну общую точку. Кантором доказана теорема о мощности всех подмножеств данного множества (так называемая теорема о все возрастающих мощностях).

Об успехах математики, её достижениях, о выдающихся учёных XIX века можно говорить очень много. (Вспомните о пессимизме Лагранжа!). Но мы остановимся только на работах А. Пуанкаре (1854 – 1912 гг.), Д. Гильберта (1862 – 1943 гг.), И. Фредгольма (1866 – 1927 гг.), В. Вольтерра (1860 – 1940 гг.), Ф. Хаусдорфа (1868 – 1942 гг.), А. Лебега (1875 – 1941 гг.), а затем особо на развитии математики в России и в СССР.

Жюль Анри Пуанкаре – французский математик и астроном, учился в Политехнической (1873 – 1875 гг.) и Горной (1875 – 1879 гг.) школах Парижа. С 1886 г. профессор Парижского университета. Пуанкаре выполнил большой цикл работ в теории дифференциальных уравнений, в частности, разложений решений по начальным условиям и малым параметрам. В работе «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» (1880 г.) он обосновал качественную теорию дифференциальных уравнений, исследовал характер интегральных кривых, дал классификацию особых точек, изучил предельные циклы. Им разработаны методы малого параметра, неподвижной точки (для оператора Пуанкаре), уравнений в вариациях, теория интегральных инвариантов. У него есть исследования по теории трёх тел, вращающейся жидкости. При разработке теории автоморфных функций (для изучения дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами) Пуанкаре использует геометрию

Лобачевского. При изучении функций многих комплексных переменных Пуанкаре получил интегральные формулы, аналогичные формулам Коши. Пуанкаре внёс вклад в математическую физику, решил ряд задач теплопроводности, теории потенциала, электромагнитных колебаний, исследовал колебания трёхмерных континуумов. В 1905 г. Пуанкаре написал сочинение «О динамике электрона» (опубликовано в 1906 г.), где независимо от А. Эйнштейна развил математические следствия «постулата относительности».

Давид Гильберт – немецкий математик, окончил Кёнигсбергский университет, в 1893 – 1895 гг. был профессором того же университета, в 1895 – 1930 гг. Д. Гильберт – профессор Гёттингенского университета, являвшегося одним из основных математических центров (главой Гёттингенской школы долгие годы был Ф. Клейн). Д. Гильберт в 1885 – 1893 гг. занимался теорией инвариантов, в 1893 – 1898 гг. – теорией алгебраических чисел, в 1898 – 1902 гг. – основаниями геометрии (в которой ввёл новую аксиоматику), в 1900 – 1906 гг. – принципом Дирихле, проблемами вариационного исчисления и дифференциальных уравнений; в 1900-1910 гг. – теорией интегральных уравнений; в 1908 – 1909 гг. – решает проблему Варинга

$$\forall m \in \mathbb{N} m = a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n,$$

где a_1, a_2, \dots, a_k , – целые положительные числа, (правда, с грубой оценкой числа слагаемых k в зависимости от n); в 1920 – 1922 гг. – основами математической физики; в 1922 – 1939 гг. – логическими основами математики. Известны интегральный оператор Гильберта – Шмидта, гильбертово пространство (обобщение евклидова пространства на бесконечномерный случай). Важными примерами этих пространств являются l_2 , $L_2[a; b]$, гильбертов кирпич – подпространство l_2 , состоящее из точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, для которых $0 \leq x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n = 1, 2, \dots$.

8 августа 1900 г. на II международном конгрессе математиков Д. Гильберт выступает с докладом «Математические проблемы»,

который содержал 23 проблемы (их называют проблемами Гильберта). Часть из них решена, некоторые не решены до сих пор (более чем за 100 лет). Время показало, что проблемы были подобраны достаточно удачно и вокруг них были сосредоточены усилия большого числа математиков в XX веке. Можно считать, что между А. Пуанкаре и Д. Гильбертом шло необъявленное состязание, но вряд ли имеет смысл выявлять победителя.

И. Фредгольм – шведский математик, внёс большой вклад в теорию интегральных уравнений. Известны уравнения Фредгольма, оператор Фредгольма, альтернатива Фредгольма.

В. Вольтерра – итальянский математик, занимался дифференциальными уравнениями с частными производными (уравнения Вольтерра), интегро-дифференциальными уравнениями. Он считается одним из создателей функционального анализа совместно с Фреше, Хаусдорфом, Банахом, Л. Шварцем, Дж. Нейманом и др.

Анри Лебег – французский математик, главной заслугой которого является создание теории меры (мера Лебега), понятие измеримой функции, понятие интеграла Лебега.

Таким образом, XIX век явился для математики чрезвычайно плодотворным: революционный переворот в геометрии (Лобачевский, Риман), рождение современной алгебры (Абель, Галуа), построение классического математического анализа (Коши, Вейерштрасс, Дедекин), создание теории множеств (Кантор), теории меры (Лебег, Жордан), интеграла Лебега (после интегралов Римана и Коши), теории Вольтерра и многое другое.

Лекция 8

Развитие математики в России

В XVIII веке в России существовало два научных центра: Петербургская АН, образованная в 1724 году, и Московский Университет, открытый в 1755 году. Математические исследования проводились Л. Эйлером и его учениками. Несмотря на выдающиеся многочисленные результаты Л. Эйлера, математика в России не получила развития. Положение начало меняться в XIX в. Открываются университеты в Вильно (1803 г.), Тарту (1808 г.), Казани (1804 г.), Харькове (1805 г.), Петербурге (1819 г.), Киеве (1834 г.) (Все они располагались на территории России). В каждом из них учреждались физико-математические факультеты и кафедры. Генератором математических исследований на протяжении почти 100 лет была Петербургская математическая школа.

Во-первых, следует отметить заслуги **М. В. Остроградского (1801 – 1861 гг.)** и **В. Я. Буняковского (1804 -1889 гг.)**. Оба – уроженцы Украины, получили математическое образование в Париже (на то время самом значительном центре математической мысли). М. В. Остроградский после окончания обучения в Харьковском университете в 1820 г. уезжает в Париж, где находится с 1822 по 1828 г. Он работает в областях математики в тех же направлениях, что и Фурье, Лаплас, Коши, Пуассон, К. Якоби. Его интересы лежат в области механики, математического анализа, уравнений математической физики, вариационного исчисления, обыкновенных дифференциальных уравнений, алгебры и др. Вернувшись в Петербург, он был избран в 1828 г. адъюнктом, а в 1830 г. – академиком, работает в ряде высших учебных заведений Петербурга. Он дал оригинальный вывод уравнения Пуассона, развил метод Фурье для твердых тел и решил задачу о распространении тепла в жидкости. В математическом анализе известен метод Остроградского интегрирования рациональных функций,

правило замены переменных в кратных интегралах (функциональные определители, возникающие при этом, следует называть именами Остроградского и Якоби), получил формулу (Остроградского – Гаусса):

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{A} dv = \iint_S (\vec{A}, \vec{n}) ds,$$

независимо от Гаусса. В "Заметке о линейных дифференциальных уравнениях" он вводит определитель, который сейчас называется определителем Вронского (последний получил его в 1812 г.), но опубликовано это было после 1838 г. М.В. Остроградский считается одним из основателей Петербургской математической школы.

В.Я. Буняковский также получает математическое образование в Париже, где и становится доктором математики в 1825 г. В 1827 г. он возвращается в Россию, становится профессором университета и других высших учебных заведений Петербурга. Его перу принадлежит около 130 работ: по теории чисел (более 40), доказательства квадратичного закона взаимности, задачи диофантова анализа, теории вероятности (более 20). Он обобщает неравенство Коши на случай бесконечных рядов и дает интегральный аналог (1859 г.) неравенства Коши:

$$\left(\int_a^b f(x)\varphi(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b \varphi^2(x)dx,$$

которое чаще называют неравенством Г. Шварца, у которого оно появилось не ранее 1884 г. (кстати, без ссылки на В.Я. Буняковского). Буняковский занимался основаниями геометрии, он тщательно проследил и историю доказательств постулата о параллельных, обнаружил их несовершенство. Пытался сам логически строго доказать V постулат. Неевклидова геометрия ему представлялась логически немыслимой. Он, как и Остроградский, способствовали в большой мере развитию математики в России, они развили многие идеи французских математиков. Их исследования, в свою очередь, дали импульс становлению русской математики.

Пафнутий Львович Чебышёв (1821 – 1897 гг.) – русский математик и механик. В 16 лет поступил в Московский Университет, в 1841 г. за сочинение “Вычисление корней уравнений” награжден серебряной медалью. В 1846 г. Чебышев защищает магистерскую диссертацию “Опыт элементарного анализа теории вероятностей”. В 1847 г. переезжает в Петербург и защищает диссертацию «Об интегрировании с помощью логарифмов» на право чтения лекций, утверждается в звании доцента и читает лекции по алгебре и теории чисел. В 1849 г. Чебышев защищает докторскую диссертацию “Теория сравнений”, удостоенную Демидовской премии Петербургской АН (аналог Нобелевской премии), и с 1850 г. становится профессором Петербургского университета. В 1882 г. Чебышев подает в отставку и целиком отдается научной деятельности. П.Л. Чебышев считается основателем Петербургской математической школы, наиболее крупными представителями которой являлись: А.Н. Коркин, Е.И. Золотарев, А.А. Марков, Г.Ф. Вороной, А.М. Ляпунов, В.А. Стеклов, Д. А. Граве.

Самому Чебышеву принадлежит несколько крупных работ по теории вероятностей, результаты о распределении простых чисел. Он получает оценку

$$a \cdot \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < b \cdot \frac{x}{\ln x},$$

где $\pi(x)$ – число простых чисел, не превосходящих x (постоянные $a=0,921$; $b=1,06$). Позже Валле–Пуссен и Адамаром было показано, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{\frac{\pi(x)}{x}} \frac{1}{\ln x} = 1,$$

как и предполагал Чебышев. Чебышеву принадлежит теорема об интегрировании дифференциального бинома, т.е. $\int x^m (a + bx^n)^p dx$, который приводится к интегрированию рациональных функций лишь при трех соотношениях между рациональными числами p, n, m . Сам этот факт был известен Эйлеру, но доказательство дал Чебышев. Чебышев строит теорию при-

ближений непрерывных функций с помощью системы ортогональных многочленов. Известна теорема Чебышева в теории вероятностей $P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{EX}{\varepsilon}$, здесь X – случайная величина, $X \geq 0$, с математическим ожиданием EX , ε – произвольное положительное число, $P\{X \geq \varepsilon\}$ – вероятность того, что $X \geq \varepsilon$. Труды П.Л. Чебышева получили признание еще при его жизни. Он был избран иностранным членом Болонской АН (1873 г.), Парижской АН (1874 г.), Лондонского королевского общества (1877 г.), Шведской королевской АН (1893 г.) и почетным членом многих других российских и иностранных научных обществ, академий и университетов, что говорит о больших личных заслугах Чебышева и признании вклада русских математиков в великую науку.

Софья Васильевна Ковалевская (1850 – 1891 гг.) обнаружила математические способности в очень раннем возрасте. С 1866 г. она берет уроки математики у известного педагога А.Н. Страннолюбского. Не имея возможности учиться в университете (доступ женщинам в университет был закрыт), она добивается разрешения слушать лекции великого физиолога И.М. Сеченова и заниматься анатомией у В.Л. Грубера в Военно-медицинской академии. Вступив в фиктивный брак (перешедший позже в фактический) с В.О. Ковалевским, она уезжает в Гейдельберг, где изучает математику, посещает лекции Г. Кирхгофа, Э. Дюбуа-Реймона и Г. Гельмгольца. В 1870 г. Ковалевская приезжает в Берлин, где 4 года занимается математикой под руководством К. Вейерштрасса, дававшего ей частные уроки (в Берлинский университет женщины тоже не допускались). Ковалевская получает ряд важных математических результатов, основной из них – теорема о существовании решений нормальной системы уравнений с частными производными (теорема Коши – Ковалевской). В мае 1874 г. Ковалевская возвращается в Россию, однако получить возможность преподавать в университете или на Высших женских курсах ей не удалось. На 6 лет она отходит от занятий математикой и занимается литературно-публицистической деятельностью, пишет театральные рецензии и литературные очерки.

Ковалевская встречалась с видными учеными и писателями: Д.И. Менделеевым, И.М. Сеченовым, С.П. Боткиным, А.М. Бутлеровым, П.Л. Чебышевым, И.С. Тургеневым, Ф.М. Достоевским и др. В 1879 г. по предложению П.Л. Чебышева С.В. Ковалевская прочитала доклад об абелевых интегралах на 6-м съезде русских естествоиспытателей и врачей. Весной 1880 г. переехала в Москву, хотела сдать магистерский экзамен на право преподавания в университете, но разрешения не добилась. В 1881 г. Ковалевская едет в Берлин, затем в Париж, где пытается получить место на Высших женских курсах, но безуспешно. В 1883 г. возвращается в Россию и на 7-м съезде русских естествоиспытателей и врачей делает доклад "О преломлении света в кристаллах". В ноябре 1883 г. уезжает в Швецию по приглашению Г. Миттаг-Лефлера и занимает место приват-доцента в Стокгольмском университете, летом 1884 г. назначена профессором того же университета. В течение 8 лет она прочитала 12 лекционных курсов, в том числе по механике и теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории алгебраических (Вейерштрасса), абелевых, эллиптических и θ -функций, теории потенциала, качественной теории дифференциальных уравнений (Пуанкаре) и др. В 1888 г. С.В. Ковалевская получила премию Парижской АН за работу о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки (гироскоп). Еще за одну работу ей присуждена премия Шведской АН. В конце концов, крупнейшие русские математики Чебышев, Буняковский и Имшенецкий добились избрания в 1889 г. С.В. Ковалевской членом – корреспондентом Петербургской АН (это был первый случай избрания женщины в истории АН). Однако даже это признание её научных заслуг не дало ей право преподавать в университете или вести научную работу в Академии. Она вновь уезжает в Швецию, и тяжелая болезнь сводит ее в могилу в возрасте 41 года. Похоронена она на Северном кладбище Стокгольма. К. Вейерштрасс прислал венок с трогательной надписью: "Любимой Соне от Вейерштрасса".

Андрей Андреевич Марков (1856 – 1922 гг.) – русский математик, академик Петербургской АН. В 1878 г. со степенью кандидата оканчивает Петербургский университет. В том же году

получает золотую медаль за работу “Об интегрировании дифференциальных уравнений при помощи непрерывных дробей”. С 1880 г. он приват-доцент, с 1886 г. – профессор, с 1905 г. – заслуженный профессор того же университета. В своей магистерской диссертации “О бинарных квадратичных формах положительного определителя” Марков получает блестящие результаты в теории чисел, что послужило основой для дальнейших исследований в этой области. Марков внес вклад в математический анализ: теория непрерывных дробей, предельное значение интегралов при некоторых условиях на подынтегральную функцию, улучшение сходимости рядов, теории наилучших приближений, установил неравенство (Маркова) для определения верхней границы производной многочлена на отрезке $[-1;1]$ по верхней границе самого многочлена на этом отрезке:

если $|P_n(x)| \leq M$, то $|P_n'(x)| \leq M n^2, \forall x \in [-1; 1]$.

Марков вводит последовательности зависимых случайных испытаний, которые сейчас называют цепями Маркова, доказывает эргодическую теорему о применимости закона больших чисел к суммам зависимых случайных величин, рассматривает специальный класс случайных процессов (без последствий) (так называемые Марковские процессы). Его учебник “Исчисление вероятностей” (1900 г.) оказал большое влияние на развитие этой науки и на протяжении десятилетий представлял интерес как хорошее учебное пособие.

Александр Михайлович Ляпунов (1857 – 1918 гг.) – русский математик и механик, родился в Ярославле. Окончил Петербургский университет, ученик П. Л. Чебышева, с 1892 г. – профессор Харьковского университета, с 1901 г. – академик Петербургской АН, с 1902 г. работает в Петербурге. Ляпунов создал современную теорию устойчивости равновесия и движения механических систем, зависящую от конечного числа параметров. С математической точки зрения это сводится к исследованию асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений. Устойчивость определяется по отношению к возмущению начальных данных движения. Рассматривая нелинейные системы, он строит их линейные приближения (первое приближение). Ус-

тойчивость определяется спектром матрицы линейной системы. Кроме того, он вводит исследование устойчивости с помощью специальных функций (Ляпунова). Целый цикл работ Ляпунова посвящен теории фигур равновесия равномерно вращающейся жидкости. Он пишет работу «О некоторых вопросах, связанных с задачей Дирихле», относящуюся к математической физике. В теории вероятностей он ввел метод “характеристических функций”, доказал центральную предельную теорему (теорему Ляпунова), обобщив результаты П. Л. Чебышева и А. А. Маркова. Работы А. М. Ляпунова по устойчивости решений дифференциальных уравнений получили широкое развитие и не потеряли своей актуальности до сих пор.

Мы назвали имена выдающихся российских математиков, составляющих ядро Петербургской математической школы, которая своим рождением обязана Петербургской АН.

Перейдем к характеристике Московской математической школы. В отличие от Петербурга, где центром научной мысли, в том числе математики, являлась Академия Наук, в Москве таким центром являлся университет. Физико-математический факультет и кафедры чистой и прикладной математики были созданы при МГУ в 1804 г. Однако в первой половине XIX в. университет только набирал силу, повышался уровень преподавания, квалификация профессоров и преподавателей. За 11 лет (1825 – 1836 гг.) физико-математический факультет окончило 119 человек (т.е. в среднем примерно 11 человек в год), за следующие 18 лет (1837 – 1854 гг.) – 453 человек (т.е. примерно 25 человек в год). В числе выпускников были академики П.Л. Чебышев, И.И. Сомов, Ф.А. Бредихин, профессора В.Я. Цингер, А.Ю. Давыдов, М.Ф. Хандриков, Н.А. Любимов, А.Г. Столетов и другие.

Московское математическое общество (ММО) начало свою деятельность в 1864 г. Это была небольшая группа ученых, в основном университетских профессоров и преподавателей, которая собиралась на квартире всеми уважаемого учителя многих из них профессора Н.Д.Брашмана, который 15.09.1864 г. был избран президентом этого общества (кстати, его лекции слушал Лоба-

чевский в Казанском университете, где Брашман работал с 1825 по 1834 г.).

Между 13 членами ММО были распределены обязанности, каждый из них отвечал за свою отрасль науки, следил за ее успехами и развитием и сообщал об этом на заседании ММО. В апреле 1865 г. ММО решает издавать математический сборник (издается до сих пор, как существует и само общество). Первый выпуск журнала вышел в свет в октябре 1866 г. С 1873 г. начался обмен изданиями с заграничными научными организациями. Большую помощь обществу оказал его влиятельный член П.Л. Чебышев. В конце XIX в. усилилось направление приложения к механике, аэродинамике, гидродинамике и др. С 1905 г. по 1921 г. ММО возглавлял Н.Е. Жуковский, который занимался как теоретическими исследованиями, так и приложениями. Он с успехом применил для решения проблем аэро- и гидродинамики теорию функций комплексного переменного В ТФКП функция

$$W = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$
 носит имя Жуковского. Он много сделал в аэроди-

намике, решал проблемы, связанные с авиацией, разработал теорию подъемной силы крыла самолета (профиль Жуковского) и вихревую теорию винта. После смерти Жуковского в 1921 г. его исследования были продолжены его учениками, ближайшим из которых был С. А. Чаплыгин, который имел научные результаты не только в аэродинамике, но и в теории дифференциальных уравнений – теорема Чаплыгина о дифференциальных неравенствах. Позже прикладная математика с успехом использовалась М.В. Келдышем, М.А. Лаврентьевым и др., в том числе в космонавтике. С 1922 г. по 1931 г. президентом ММО являлся Д.Ф. Егоров (1869 – 1931 гг.). Егорову принадлежат работы в области дифференциальной геометрии, интегральных уравнений, вариационного исчисления. Наибольшую известность ему принесла теорема (1911 г.) о последовательности измеримых функций, сходящейся на данном отрезке почти всюду (теорема Егорова). Вначале Жуковский, затем Егоров и Млодзеевский ввели в практику преподавания научные семинары и лекции, посвященные новым результатам и областям математики.

Это способствовало процессу роста молодых ученых. В семинарах выросли Н.Н. Лузин (1883 – 1950 гг.), В.В. Голубев (1889 – 1954 гг.), И.И. Привалов (1891 – 1941 гг.), В.В. Степанов (1889 – 1950 гг.), а позже П.С. Александров, А.П. Колмогоров, Д.Е. Меньшов, Л.Н. Сретенский, П.С. Урысон, А.Я. Хинчин и другие, составившие основу Московской математической школы. Так Н.Н. Лузин, ученик Д.Ф. Егорова, в 1912 г. доказывает теорему: всякую измеримую функцию можно изменить на множестве сколь угодно малой меры, так что она станет непрерывной (так называемое *C*-свойство), грубо говоря, измеримая функция является почти непрерывной. В 1915 г. Лузин представляет в качестве магистерской диссертации свою книгу "Интеграл и тригонометрический ряд", где *C*-свойство используется по существу. В 1915 г. ученики Лузина П.С. Александров (1896 – 1982 гг.) и М.Я. Суслин (1894 – 1919 гг.) начали заниматься дескриптивной теорией функций, в которой исследуются представления функций при помощи предельного перехода, отправляясь от непрерывных функций. Впоследствии идеи теории функций были внедрены в топологию (П.С. Александров, А.Н. Колмогоров, П.С. Урысон), теорию чисел и теорию вероятностей (А.Н. Колмогоров, А.Я. Хинчин), качественную теорию дифференциальных уравнений (В.В. Голубев, В.В. Степанов), и в другие области математики.

Три научные школы: механики, дифференциальной геометрии (Б.К. Млодзеевский, К.И. Петерсон) и теории функций – вписали наиболее яркие и значительные страницы в историю московской и мировой математики 1860 – 1917 гг.

Следует отметить, что сильные научные коллективы были не только в Петербурге и в Москве, но и в Харькове, Казани, в которых научными центрами являлись старейшие университеты России.

Отметим, хотя бы кратко, заслуги советской математики, т.е. математики в СССР за 1922 – 1991 гг. За это время, кроме названных научных центров с развитой математикой (Петербург, затем Ленинград, Москва, Казань, Харьков), сложились крупные математические школы в Свердловске (Екатеринбурге), Новоси-

бирске (особенно после открытия Сибирского отделения АН СССР), Томске, Одессе, Тбилиси, Вильнюсе, Ростове-на-Дону, Воронеже, Фрунзе (Бишкеке) и других. Признанием заслуг советских математиков явилось проведение в Москве в 1966 г. Международного математического конгресса, где наша математика была представлена широко. Общее число участников составило свыше 4000 математиков. Председатель – И. Г. Петровский. Из наших математиков с часовыми докладами выступили И.М. Виноградов и А.Г. Постников (аналитическая теория чисел); Н.В. Ефимов (гиперболические задачи теории поверхностей), М.Г. Крейн (аналитические проблемы и результаты теории линейных операторов в гильбертовом пространстве); А.И. Мальцев (пограничные вопросы алгебры и логики), И.И. Пятецкий-Шапиро (автоморфные функции и теория групп). Таким образом, из 17 часовых докладов 5 были сделаны советскими математиками. Только в четырех секциях из 15 не было докладов отечественных математиков. Кроме вышеназванных имен, следует назвать В.И. Арнольда, Ю.В. Линника, Н.Н. Боголюбова, С.Л. Соболева, Л.С. Понтрягина, И.Г. Петровского, А.Н. Тихонова, И.М. Гельфанда, А.О. Гельфонда, С.Н. Бернштейна, П.С. Новикова, А.И. Мальцева, Н.Г. Чеботарева, А.Д. Александрова. Этот список можно было бы продолжить, даже если включать в него только имена математиков, широко известных в мире.

Литература

1. Рыбников, К.А. История математики / К.А. Рыбников. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – Т. 1 – 2
2. Стройк, Д.Я. Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк. – М.; Л.: Наука, 1990.
3. Колмогоров, А.Н. Математика в ее историческом развитии / А.Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1991.
4. Рыбников, К.А. Введение в методологию математики / К.А. Рыбников. – М.: Изд-во МГУ, 1995.
5. Ван дер Варден, Б.Л. Пробуждающаяся наука / Б.Л. Ван дер Варден. – М.: Физматгиз, 1959.
6. Хрестоматия по истории математики / под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1976 – 1977.
7. Бурбаки, Н. Очерки по истории математики / Н. Бурбаки. – М: ИЛ, 1963.
8. Хрестоматия по истории математики. Математический анализ. Теория вероятностей: пособие для студентов пед. институтов / под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1977.
9. Гильберт, Д. Основания геометрии / Д. Гильберт. – М.: ОГИЗ, 1998.
10. Рид, К. Гильберт / К. Рид. – М.: Наука, 1977.
11. Андронов, И.К. Трилогия предмета и метода математики / И.К. Андронов. – Ч. I – III. – М., 2004 – 2005.
12. Юшкевич, А.П. История математики в России до 1917 года / А.П. Юшкевич. – М., 1968.
13. Юшкевич, А.П. История математики в Средние века / А.П. Юшкевич. – М., 1961.
14. История математики с древнейших времен до начала XIX века / под ред. А.П. Юшкевича. – Т. 1 – 3. – М.: Наука, 1970 – 1972.
15. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX века / Г. Вилейтнер. – М.: Наука, 1966.

Содержание

Лекция 1. Математика как наука, её место в ряду других наук. Предмет и методы математики, её возникновение. Математика Египта и Вавилона.....	3
Лекция 2. Построение основ математической науки. Фалес, Пифагор, Архимед, Аполлоний, Евклид, Евдокс, Птолемей, Диофант	12
Лекция 3. Математика Востока после упадка античного мира – Китай, Индия, Средняя Азия	37
Лекция 4. Математика Европы до XVII в.	55
<i>Математика средневековой Руси</i>	<i>70</i>
Лекция 5. Период создания математики переменных величин	73
Лекция 6. Восемнадцатое столетие и начало девятнадцатого	88
Лекция 7. XIX столетие и начало XX.....	96
Лекция 8. Развитие математики в России	108
Литература.....	118

Учебное издание

Чаплыгин Владимир Федорович

История и методология математики

Текст лекций

Редактор, корректор А.А. Аладьева
Компьютерная верстка И.Н. Ивановой

Подписано в печать 22.02.2007 г. Формат 60х84/16.
Бумага тип. Усл. печ. л. 6,97. Уч.-изд. л. 5,79.
Тираж 100 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Отпечатано
ООО «Ремдер» ЛР ИД № 06151 от 26.10.2001.
г. Ярославль, пр. Октября, 94, оф. 37
тел. (4852) 73-35-03, 58-03-48, факс 58-03-49.

В.Ф. Чаплыгин

История и методология математики

