

Министерство науки и образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

В. А. Кузнецова
Л. Б. Медведева

Математика
для студентов
гуманитарных направлений

Учебное пособие

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по гуманитарным направлениям

Ярославль 2012

УДК 51:1/3(075)

ББК В1я73

К89

Рекомендовано

*Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2012 года*

Рецензенты:

А. В. Ястребов, доктор педагогических наук, профессор,
заведующий кафедрой теории и методики обучения математике
ЯГПУ им. К. Д. Ушинского;
кафедра высшей математики ЯГТУ

**К89 Кузнецова, В. А. Математика для студентов гумани-
тарных направлений: учебное пособие / В. А. Кузнецова,
Л. Б. Медведева; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. –
Ярославль : ЯрГУ, 2012. – 300 с.
ISBN 978-5-8397-0872-3**

Пособие обеспечивает задачным материалом следующие разделы математики: «Элементы теории множеств», «Элементы математической логики», «Теория вероятностей», включая изучение случайных величин, «Некоторые вопросы алгебры», «Элементы математического анализа», «Элементы математической статистики», «Вопросы математического моделирования». Предусмотрены задачи разного уровня сложности. Перед каждой темой представлен необходимый для решения задач теоретический материал.

Предназначено для студентов, обучающихся по гуманитарным направлениям (дисциплины «Математика», «Математика и статистика», «Высшая математика», цикл Б2, блок ЕН), очной формы обучения.

УДК 51:1/3(075)

ББК В1я73

© Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова,
2012

ISBN 978-5-8397-0872-3

Введение.

Зачем нужна математика студентам гуманитарных направлений?

В настоящее время на многих гуманитарных факультетах российских университетов изучается математика. Отвечая на вопрос студента-гуманитария «Зачем ему нужна математика?», хочется отметить следующее.

1. Математика является частью общечеловеческой культуры, такой же неотъемлемой и важной, как право, медицина, естествознание и многое другое.

Ученые, создававшие математику, рассматривали ее как составную часть философии, которая служила средством познания мира. Накопление математических фактов, которое около двух с половиной тысяч лет тому назад привело к возникновению математики как науки, шло на протяжении нескольких тысячелетий.

Термины «гуманитарные науки» и «гуманитарное образование» в их нынешнем понимании появились лишь во второй половине XIX века. До этого слово «гуманитарный» понималось так, что и образование, и культура в целом оказывались гуманитарными, а центральным стержнем их была математика.

Начало образованию было положено в Древней Греции. Здесь около VI века до нашей эры была введена *пайдейя* – курс обучения, предназначенный для подготовки юных граждан к активному участию в жизни общества. Пайдейя включала в себя арифметику, геометрию, астрономию, музыку и то, что делает возможным обучение всему этому, – диалектику, состоящую из грамматики, риторики и логики. Перечисленные дисциплины греки называли *свободными искусствами*. Именно под этим названием, переведенным на латынь (*artes liberales*), пайдейя вошла в средневековые университеты в качестве первой ступени обучения. А в Риме заимствованная у греков пайдейя называлась по латыни *humanitas*.

Ни греческое слово, ни латинское слово не были специально придуманы для обозначения вводимой системы образования. Как и раньше, они обозначали соответственно духовность, культуру

(первое) и природу человека (второе). А свободные искусства понимались как занятия, делающие человека свободным, т. е. способным подчинять свои желания голосу разума. Образование с самого своего зарождения отождествлялось с духовностью, культурой и природой человека и предназначалось для приобретения человеком способности руководствоваться разумом в убеждениях и помыслах. В этом смысле все образование было гуманитарным, и главную роль в нем играла математика.

Термин «гуманитарные науки» появился в XV веке, когда появилось название *studia humanitatis*. Этим термином итальянские гуманисты XV века пользовались, чтобы отличить учения, которые они считали существенно человеческими, от божественных (*studia divinae*). «Свободные искусства» в полном составе входят в «человеческие учения», математика тоже. Более того, крупнейшие гуманисты Возрождения Альберти (1404–1472) и Витторио (1378–1446) особо подчеркивали роль математики в образовании. Альберти приходит к выводу, что математика является ключом ко всем наукам, а Витторио говорит, что математика – центральный стержень его гуманистической образовательной программы. Таким образом, и в средние века, и в эпоху Возрождения все образование продолжало оставаться гуманитарным, но центральным стержнем его была математика. В таком виде образование просуществовало примерно до XIX века. Размежевание гуманитарного и негуманитарного знания произошло во второй половине XIX века, причем усилиями представителей тех наук, которые называются теперь гуманитарными.

Поскольку основу гуманитарного образования современного человека составляют все лучшие достижения человеческой мысли, а математика способствует выработке научного мировоззрения, достижению необходимого общекультурного уровня, то *математика* для студента-гуманитария необходима как *общеобразовательная дисциплина*, как, например, экономика для студента-математика.

2. Место математики в жизни и науке определяется тем, что она позволяет перевести «общежитейские», интуитивные подходы к действительности, основанные на чисто качественных (а значит, приблизительных) описаниях, на язык точных определений и формул, из которых можно сделать количественные выводы.

Конечно, для рационального поведения в обществе не требуется высокого уровня математических знаний, но важно то, что математика во многом развивает умение правильно рассуждать, понимать получаемую информацию, обрабатывать ее и делать правильные прогнозы. В сущности речь идет о *формировании интеллекта*.

Под влиянием математики многие отрасли науки поднялись на качественно новый уровень исследования, связанный с изучением более глубоких внутренних механизмов, процессов и законов, управляющих явлениями. И главная причина этого кроется в том, что математика позволяет строить весьма общие и достаточно точные модели для изучения окружающей действительности, в отличие от менее общих и более расплывчатых, предлагаемых другими науками.

Поэтому, знакомясь с математическими методами и сферами их применения, будущий гуманитарий *расширяет свои профессиональные возможности*.

3. Математические рассуждения позволяют правильно устанавливать причинно-следственные связи. Общностью и абстрактностью своих конструкций математика способствует упорядочению ума, учит точно формулировать разного рода правила, предписания, инструкции и строго их исполнять. «Математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит».

Отсутствие элементарной математической культуры и неумение мыслить может сыграть негативную роль во многих сферах деятельности гуманитариев, требующих умения анализировать информацию, вычленять сущность вопроса, владеть логикой рассуждений, обобщать статистический материал, правильно интерпретировать политическую ситуацию и т. д. Формируя дисциплину мышления, математика, по мнению В. А. Успенского, развивает три важнейшие умения: умение отличать истину от лжи, смысл от бессмыслицы, понятное от непонятного [28]. Любой специалист должен уметь рассуждать логически и применять на практике индуктивный и дедуктивный методы. Поэтому каждый студент, занимаясь математикой, формирует свое *профессиональное мышление* и приобретает мыслительные навыки, которые составляют необходимое условие для достижения профессиональных успехов.

Подводя итог, следует сказать, что математическое образование гуманитариев важно с различных точек зрения [5, с. 44]:

логической – изучение математики является источником и средством активного интеллектуального развития человека, его умственных способностей;

познавательной – с помощью математики познается окружающий мир, его пространственные и количественные отношения;

прикладной – математика является той базой, которая обеспечивает готовность человека не только к творческой работе в своей профессиональной области, но и к овладению другими профессиями, делает для него доступным непрерывное образование и самообразование;

исторической – на примерах из истории развития математики прослеживается развитие не только ее самой, но и человеческой культуры в целом;

философской – математика помогает осмыслить мир, в котором мы живем, сформировать у человека научные представления о реальном физическом пространстве.

Данное учебное пособие написано в поддержку курсов математики, которые читаются на различных гуманитарных факультетах. Содержание курса математики на каждом гуманитарном направлении имеет свои особенности, обусловленные спецификой будущей деятельности выпускников. Но поскольку пособие предназначено для гуманитариев разных профилей, то его содержание охватывает многие вопросы математики. В книге отражены следующие разделы: «Элементы теории множеств», «Элементы математической логики» с приложениями, «Теория вероятностей», включая изучение случайных величин, «Некоторые вопросы алгебры», «Элементы математического анализа», «Элементы математической статистики», «Аксиоматический метод построения теорий», «Вопросы математического моделирования».

Не все из этих разделов могут оказаться необходимыми на том или ином факультете. Тем не менее пособие полностью обеспечивает заданным материалом указанные выше разделы курса математики. Оно содержит набор упражнений и задач в количестве, достаточном не только для использования на практических занятиях и в качестве заданий для домашних работ, в том числе и индивидуальных, но и для организации самостоятельной работы студентов.

Разные группы задач преследуют разные цели, поэтому часть задач в пособии приводится с решениями, часть снабжена ответами, но есть и задачи, которые включены в него без ответов и без каких-либо указаний к решению. Кроме того, предусмотрены задачи разного уровня сложности, поэтому студенты с различной математической подготовкой найдут здесь задачи по своим силам и интересам.

Перед каждой темой представлен необходимый для решения задач теоретический материал. Поэтому данное учебное пособие не является только лишь задачником, а в первом приближении для гуманитариев может быть использовано и в качестве учебника.

В конце пособия приводится список литературы, который позволит студентам, интересующимся математикой, расширить и углубить свои знания по предмету, познакомиться с приложениями математики в различных сферах деятельности.

1. Элементы теории множеств

Теория множеств – это раздел математики, в котором изучаются множества и операции над ними. Как самостоятельное направление в рамках математической науки эта теория начала свое развитие во второй половине XIX века и официальное признание получила в 1898 году на первом Международном конгрессе математиков в Цюрихе, где Ж. Адамар (1865–1963) и А. Гурвиц (1859–1919) сообщили о многочисленных содержательных примерах ее применения в математическом анализе. Основоположниками теории множеств считаются Р. Дедекинд (1831–1916) и Г. Кантор (1845–1918). В настоящее время теория множеств представляет собой фундамент многих математических дисциплин и имеет большое прикладное значение.

1.1. Множества и операции над ними

Понятие множества является одним из основных математических понятий. Оно первично, исходно и не определяется через другие более простые понятия. Под *множеством* понимают совокупность различных между собой объектов, мыслимых как единое целое. Объекты, которые образуют множество, называются элементами (или членами) этого множества. Примерами множеств могут служить множество адвокатов в некоторой юридической консультации, множество дел, рассмотренных каким-либо судом за предыдущий месяц, множество действительных чисел. Множества обозначаются большими буквами латинского алфавита: A, B, C, \dots

Множество A считается заданным, если известно, из каких элементов оно состоит, т. е. если о любом объекте a можно сказать, принадлежит он данному множеству или нет.

Если множество A содержит конечное число элементов, то оно называется *конечным* множеством. В противном случае A называется *бесконечным* множеством. Так, множество деревьев в лесу конечно, а множество точек на окружности бесконечно. Если множество A состоит из n элементов, то пишут $|A|=n$ или $n(A)=n$.

Существует несколько способов задания множеств.

1. Множество можно задать словесным описанием его элементов, например:

а) множество действительных чисел;

б) множество правонарушений в Ярославской области за 2000 год;

в) множество студентов Ярославского госуниверситета.

2. Множество можно задать перечислением его элементов. При этом перечисляемые элементы заключаются в фигурные скобки, например: $M = \{2, x, y\}$ – множество, состоящее из элементов 2, x , и y ; $N = \{1, 2, 3\}$ – множество, состоящее из натуральных чисел 1, 2, 3. Такое задание и обозначение применяется для конечных множеств, содержащих небольшое число элементов. Для задания конечных множеств, содержащих большое число элементов, оно слишком громоздко, и тем более оно неприменимо для бесконечных множеств.

3. Третий способ задания множества заключается в указании общего вида его элементов и их характеристического свойства. В этом случае поступают следующим образом: в фигурных скобках указывается общий вид элементов множества, затем проводится вертикальная черта, после которой формулируется характеристическое свойство. Например, множество

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m - \text{целое число, } n - \text{натуральное число} \right\} -$$

множество рациональных чисел.

Свойство считается характеристическим для элементов множества, если этому множеству принадлежат те и только те элементы, которые обладают данным свойством. Если характеристическое свойство элементов обозначить символом $P(x)$, то будем иметь запись $\{x / P(x)\}$. Посредством характеристического свойства можно задавать любые множества: и конечные, и бесконечные.

Для обозначения того, что x является элементом множества A (или что x принадлежит A), применяется запись $x \in A$. Говорят, что *два множества равны* ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов, то есть если все элементы одного множества являются и элементами другого. Если множество не содержит никаких элементов, то оно называется *пустым множеством* и

обозначается символом \emptyset . Множество всех объектов, которые рассматриваются в конкретной задаче или ситуации, называется *универсальным множеством* и обозначается символом U .

Пусть A – заданное множество элементов. Множество B называется *подмножеством* множества A (обозначение $B \subseteq A$), если каждый элемент множества B является элементом множества A . Заметим, что если $B \subseteq A$ и $A \subseteq B$, то $A = B$.

1.1.1. Операции над множествами

Объединение $A \cup B$ множеств A и B есть множество, которое состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B .

Пересечение $A \cap B$ множеств A и B есть множество, которое состоит из тех и только тех элементов, которые одновременно принадлежат каждому из множеств A и B .

Разность множеств A и B есть множество $A \setminus B$, состоящее из таких элементов множества A , которые не принадлежат множеству B .

Частный случай разности множеств – операция дополнения множества до универсума.

Дополнением множества A до универсума U называется множество \bar{A} , состоящее из всех элементов универсального множества U , которые не принадлежат множеству A , то есть разность $U \setminus A$.

Для пояснения различных соотношений между множествами и свойств операций над ними используют диаграммы Эйлера – Венна. На этих диаграммах рассматриваемые множества изображаются в виде совокупностей точек кругов и прямоугольников, расположенных в плоскости.

На рис. 1 области, выделенные серым цветом, изображают соответственно объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$, разность $A \setminus B$ и дополнение \bar{A} .

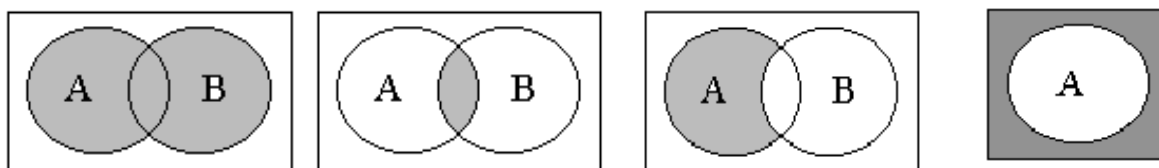


Рис. 1.

1.1.2. Свойства операций над множествами

- | | |
|--|---|
| (1) $A \cup B = B \cup A$ | (1') $A \cap B = B \cap A$ –
свойства коммутативности; |
| (2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; | (2') $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ –
свойства ассоциативности; |
| (3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; | (3') $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ –
свойства дистрибутивности; |
| (4) $A \cup A = A$; | (4') $A \cap A = A$ –
свойства идемпотентности; |
| (5) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; | (5') $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ –
законы де Моргана; |
| (6) $A \cup (A \cap B) = A$; | (6') $A \cap (A \cup B) = A$ –
законы поглощения; |
| (7) $A \cup \overline{A} = U$; | (7') $A \cap \overline{A} = \emptyset$; |
| (8) $A \cup U = U$; | (8') $A \cap \emptyset = \emptyset$; |
| (9) $A \cap U = A$; | (9') $A \cup \emptyset = A$; |
| (7), (8), (9) – свойства пустого | и универсального множеств; |
| (10) $\overline{\overline{A}} = A$ – | закон двойного отрицания; |
| (11) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ – | правило исключения разности. |

Задачи

1. Дайте словесное описание каждого из следующих множеств:

- | | |
|--|---|
| а) $\{x x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x = 0\}$ | б) $\{x x \in \mathbb{R}, 5 \leq x < 9\}$, |
| в) $\{x x \in \mathbb{Z}, x \text{ делится на } 2 \text{ и делится на } 3\}$, | |
| г) $\{x x \in A \text{ или } x \in B\}$, | д) $\{x x \in A \text{ и } x \in B\}$, |
| е) $\{x^3 x - \text{простое число}\}$, | ж) $\{x x \in A, \text{ и } x \notin B\}$. |

2. Опишите каждое из следующих множеств, используя подходящее характеристическое свойство:

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| а) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; | б) $\{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$; |
| в) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$; | г) \emptyset ; |
| д) $\{-5, 8, -11, 14, -17\}$; | е) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. |

3. Задайте перечислением элементов множества, определенные указанием характеристических свойств:

- | | |
|---|--|
| а) $A = \{x x \in \mathbb{N}, x \leq 7\}$; | б) $B = \{x x \in \mathbb{Z}, x < 0\}$; |
| в) $C = \{x x \in \mathbb{Z}, x \leq 2\}$; | г) $B = \{x x \in \mathbb{N}, x < 0\}$. |

4. Определите, какие из следующих множеств равны:

$$A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 3, 3, 5\}, C = \{1, \{3, 5\}\}, D = \{5, 3, 1\}?$$

5. Найдите все подмножества а) множества $A = \{a, b\}$; б) множества $B = \{5, 6, 7\}$.

Ответьте на следующие вопросы: в) сколько подмножеств имеет множество, состоящее из n элементов? г) сколько подмножеств, содержащих нечетное число элементов, имеет множество, состоящее из n элементов?

6. а) Укажите виды правонарушений по степени общественной опасности и представьте множество правонарушений с помощью операций над выделенными подмножествами. Объединением каких подмножеств является множество проступков?

б) Опишите виды правонарушений по сферам общественной жизни и представьте множество всех правонарушений с помощью операций над его подмножествами еще одним способом.

7. Найдите объединение и пересечение множеств A и B , если:

а) $A = \{x | x \in (4, 8)\}$, $B = \{x | x \in (1, 4)\}$;

б) $A = \{x | x \in (-3, 8)\}$, $B = \{x | x \in [5, 6]\}$.

8. Найдите следующие множества: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = \{1, 2, 4, 6, 9\}$, $B = \{3, 4, 5, 8, 9\}$.

9. Даны множества

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}, \quad D = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Найдите множества:

1) $A \cup B \cup C \cup D$;

2) $A \cap B \cap C \cap D$;

3) $A \cap B \cup C \cap D$;

4) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$.

10. В терминах теории множеств объясните загадку: два отца и два сына, а всего трое – как такое может быть?

11. Пусть $A = \{2n / n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{2n+1 / n \in \mathbb{N}\}$. Найдите множества: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.

12. Пусть A – множество четных натуральных чисел, B – множество натуральных чисел, делящихся на 3, и C – множество натуральных чисел, делящихся на 5. Из каких чисел состоят множества $A \cap B$, $B \cap C$ и $A \cap B \cap C$?

13. С помощью диаграмм Эйлера – Венна изобразите следующие множества:

а) $\bar{A} \cap B$, б) $A \cap \bar{B}$, в) $\bar{A} \cap \bar{B}$, г) $\overline{A \cap B}$, д) $A \cup \bar{B}$,

- е) $\bar{A} \cup B$, ж) $\bar{A} \cup \bar{B}$, з) $\overline{A \cup B}$, и) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$,
 к) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

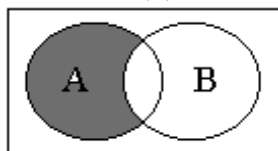
Решение.

На диаграммах Эйлера – Венна будем изображать требуемое множество серым цветом, а множества, помогающие прийти к ответу, – светло-серым цветом.

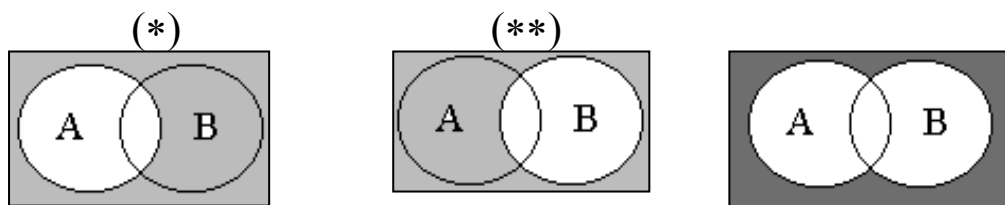
а) Сначала покажем множество \bar{A} (1), тогда искомым множеством (2) будет пересечение выделенного множества и множества В.



б) Искомое множество выглядит следующим образом:



в) Вначале изобразим множества \bar{A} (*), \bar{B} (**), а затем ответ



14. С помощью диаграмм Эйлера – Венна изобразите следующие множества:

- а) $A \cup (B \cap C)$; б) $A \cap (B \cup C)$; в) $A \setminus (B \cup C)$;
 г) $A \cap (B \setminus C)$; д) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; е) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

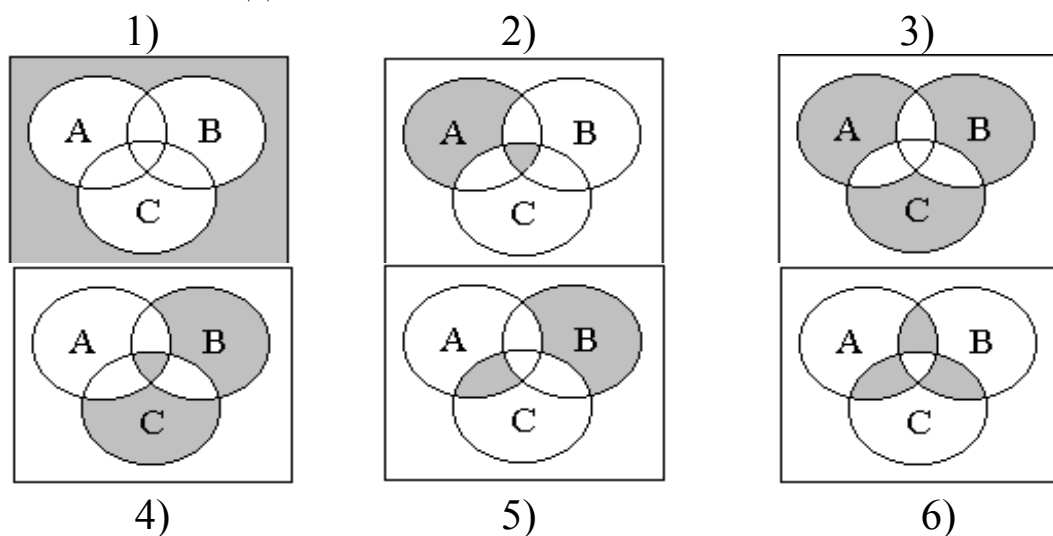
15. С помощью диаграмм Эйлера – Венна изобразите следующие множества:

1. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
2. $\overline{A \setminus (B \cap C)}$;
3. $A \setminus \overline{B \cup C}$;
4. $B \cup \overline{A \setminus B}$;
5. $A \cup B \setminus (A \cap B)$;
6. $\overline{(C \setminus A) \cap (C \setminus AB)}$;
7. $A \cup B \setminus \bar{C}$;
8. $\overline{B \cup (A \setminus B)}$;
9. $\bar{B} \cup (A \setminus B)$;
10. $\overline{A \setminus B} \cup \overline{B \setminus A}$;

11. $\bar{C} \cap (A \setminus B)$;
12. $\overline{A \cap B} \cap (A \cup B)$;
13. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
14. $(A \setminus B) \cap \overline{A \setminus C}$;
15. $(A \setminus B) \cap \overline{A \setminus C}$;
16. $\overline{A \cup B} \setminus \bar{C}$;
17. $\overline{A \cap B} \cap C$;
18. $(A \cup B) \cap \bar{C}$;
19. $(A \setminus B) \cup \bar{A} \cap B$;
20. $A \cap \bar{B} \cup (B \setminus A)$;
21. $\bar{A} \cap B \cup (A \setminus B)$;
22. $\overline{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)}$;
23. $(A \setminus B) \cup B \setminus A$;
24. $C \setminus (A \cup B)$;
25. $\overline{C \cap (A \cup B)}$;
26. $A \cap B \cup (A \setminus B)$;
27. $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
28. $\overline{A \setminus B} \cap A \setminus C$;
29. $A \cup C \setminus \overline{B \cup A}$;
30. $\overline{A \cup B \cap C} \setminus \bar{B}$;
31. $A \setminus \overline{B \cup C} \cap A$;
32. $\overline{A \cup B} \setminus \bar{B}$.

16. Дано: $(A \cup B) \cap C \setminus A = D$. С помощью диаграмм Эйлера – Венна изобразите случаи, когда $D = \emptyset$ и $D \neq \emptyset$.

17. По данным диаграммам Эйлера – Венна определите, какое множество задано:



18. Упростите следующие выражения:

- 1) $A \cap (A \cup B)$;
- 2) $(P \cap Q) \cup (\bar{Q} \cap P)$;
- 3) $A \cap B \cap \bar{B} \cup A \cap B \cup B \cap C \cap \bar{C}$;
- 4) $A \cap B \cup (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$.

19. Докажите следующие тождества:

- а) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
- б) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
- в) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- г) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

$$\text{д) } A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C);$$

$$\text{е) } A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$

$$\text{ж) } A \setminus (A \setminus B) = A \cap B;$$

$$\text{з) } A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C.$$

Решение.

Обозначим множество, стоящее слева от знака равенства, через M , а стоящее справа от знака равенства – через N .

Для того чтобы доказать тождество, нужно доказать, что каждый элемент множества M принадлежит множеству N , и наоборот.

а) Пусть произвольный элемент $x \in M$, тогда $x \in A$ и $x \in B \cap C$. Отсюда следует, что $x \in A$ и $x \in B$, $x \in C$. Тогда $x \in A \cap B$ и также $x \in C$. Значит, $x \in (A \cap B) \cap C$, то есть $x \in N$. Итак, мы показали, что множество M включается во множество N .

Покажем обратное.

Пусть $x \in N$, тогда $x \in A \cap B$ и $x \in C$. Так как $x \in A \cap B$, то $x \in A$ и $x \in B$. Так как $x \in C$ и $x \in B$, то $x \in B \cap C$, но $x \in A$, и следовательно, $x \in A \cap (B \cap C)$, то есть $x \in M$. Таким образом, множество N включается во множество M . Из включений $M \subset N, N \subset M$ следует равенство $M = N$.

20. Верно ли, что

$$\text{а) } \{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\};$$

$$\text{б) } \{1, 2\} \subseteq \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}?$$

21. Привести примеры таких множеств A, B, C , что

$$1) A \in B, B \in C \text{ и } A \notin C; 2) A \subseteq B, B \subseteq C, A \subseteq C; 3) A \in B, A \subseteq B.$$

22. Для каких из следующих пар множеств имеет место одно из отношений $A \subset B, B \subset A, A = B, A \in B, B \in A$?

$$1) A = \{a, b, c, d\}, B = \{a, c, d\}; \quad 2) A = \emptyset, B = \emptyset;$$

$$3) A = \emptyset, B = \{a, b, c\}; \quad 4) A = \{a, b, c\}, B = \{b, c, a\};$$

$$5) A = \emptyset, B = \{\emptyset\}; \quad 6) A = \{\{a\}, a, \emptyset\}, B = \{a\};$$

$$7) A = \{\{a, b\}, \{c, d\}, c, d\}, B = \{\{a, b\}, c\}; 8) A = \{\{a\}, a, 0\}, B = \emptyset.$$

23. Существуют ли множества A, B, C , одновременно удовлетворяющие следующим условиям $A \cap B \neq \emptyset, A \cap C = \emptyset, (A \cap B) \setminus C = \emptyset$?

1.2. Конечные множества

1.2.1. Формула включений-исключений (число элементов в объединении конечных множеств)

Рассмотрим предложения, которые позволят находить число элементов в объединении конечного числа конечных множеств.

Теорема 1. Если пересечение конечных множеств A и B пусто ($A \cap B = \emptyset$), то число элементов в их объединении равно сумме чисел элементов множеств A и B :

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Действительно, пусть множество A содержит m элементов, а множество B — n элементов, причем среди них нет совпавших. Тогда для получения множества $A \cup B$ надо взять все m элементов множества A и добавить к ним все n элементов множества B . Поскольку в A и B нет общих элементов, то множество $A \cup B$ будет содержать $m + n$ элементов.

Теорема 2. Для любых конечных множеств A и B верно равенство

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Доказательство. Множество $A \cup B$ является объединением трех попарно не пересекающихся множеств: $A \setminus (A \cap B)$, $B \setminus (A \cap B)$ и $A \cap B$. Первое из этих множеств содержит $|A| - |A \cap B|$ элементов, второе содержит $|B| - |A \cap B|$ элементов, а третье — $|A \cap B|$ элементов. Значит, число элементов во множестве $A \cup B$ равно $|A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B|$, то есть $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Полученная формула является частным случаем более общей формулы

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| = & |A_1| + |A_2| + \dots + |A_m| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_1 \cap A_m| \\ & - |A_2 \cap A_3| - \dots - |A_2 \cap A_m| - \dots - |A_{m-1} \cap A_m| + \\ & |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k| + \dots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|. \end{aligned}$$

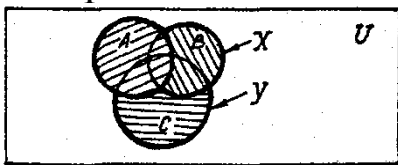
Эту формулу называют *формулой включений и исключений*. В нее, кроме самих множеств A_1, A_2, \dots, A_m , входят их всевозможные пересечения по 2, по 3, ..., по m множеств. При этом если число пересекаемых множеств нечетно, то соответствующее слагаемое входит в формулу со знаком «плюс», а если оно четно — то со знаком «минус».

Приведем примеры решения задач с использованием этой формулы.

Задача. В результате опроса 76 школьников выяснилось, что 45 занимаются в кружке по рисованию, 31 – в танцевальном кружке, 52 – в кружке «умелые руки». Три кружка посещают 8 школьников; кружки по рисованию и «умелые руки» – 28; кружки по рисованию и танцевальный – 16; танцевальный кружок и кружок «умелые руки» – 20. Сколько школьников из опрошенных не занимаются ни в одном кружке?

Решение. Пусть A – множество тех школьников из 76 опрошенных, которые занимаются в кружке по рисованию, B – множество школьников, занимающихся в танцевальном кружке, а C – в кружке «умелые руки». Тогда все эти множества являются подмножествами множества U всех опрошенных школьников. По условию задачи $|U|=76$, $|A|=45$, $|B|=31$, $|C|=52$. Так как школьник, посещающий кружки по рисованию и «умелые руки», принадлежит и множеству A , и множеству C , а значит, принадлежит множеству $A \cap C$, то по условию задачи $|A \cap C|=28$. Аналогично, $|A \cap B|=16$, $|B \cap C|=20$, $|A \cap B \cap C|=8$. Изобразим рассматриваемые множества на диаграмме Эйлера – Венна.

Пусть K – множество, выделенное на диаграмме штриховкой. По условию задачи, K – это множество школьников, которые занимаются хотя бы в одном кружке, т. е. $K = A \cup B \cup C$. Пусть далее T – множество тех школьников из 76 опрошенных, которые не занимаются ни в одном кружке. Чтобы найти $|T|$, необходимо из числа $|U|$ вычесть число $|K|$. Посмотрим, как найти число $|K|$ с помощью диаграммы Эйлера – Венна.



Как показывает диаграмма,

$$|X| = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|, \quad |Y| = |B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|, \quad |Z| = |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } |K| &= |A \cup B \cup C| = |A| + |X| + |Y| + |Z| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

Таким образом, $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Подставим в полученную формулу данные из условия задачи:

$$|K| = 45 + 31 + 52 - 16 - 28 - 20 + 8 = 72.$$

Итак, 72 школьника занимаются хотя бы в одном кружке.

Тогда $|T| = |U| - |K| = 76 - 72 = 4$.

Ответ: 4 школьника не занимаются ни в одном кружке.

Задачи

24. В СИЗО находится 20 человек. Из них 10 человек задержаны по статье A , 12 человек – по статье B и 7 человек – по статье C . Известно также, что по статьям A и B в СИЗО находятся 8 человек, по статьям A и C – 3 человека, B и C – 4 человека, а два человека – по всем трем статьям.

а) Сколько человек задержано ровно по двум статьям?

б) Сколько человек задержано только по одной статье?

в) Сколько человек задержано по другим статьям?

Решение. Первый способ.

Нам известно, что $|A| = 10$, $|B| = 12$, $|C| = 7$, $|A \cap B| = 8$, $|B \cap C| = 4$, $|A \cap C| = 3$, $|A \cap B \cap C| = 2$.

а) Найдем количество человек, задержанных только по статьям A и B :

$$|A \cap B \setminus A \cap B \cap C| = |A \cap B| - |A \cap B \cap C| = 8 - 2 = 6.$$

Число людей, задержанных по статьям A и C , равно

$$|A \cap C \setminus A \cap B \cap C| = |A \cap C| - |A \cap B \cap C| = 3 - 2 = 1,$$

задержанных по статьям B и C –

$$|B \cap C \setminus A \cap B \cap C| = 4 - 2 = 2.$$

Тогда ровно по двум статьям задержаны $6 + 2 + 1 = 9$ (человек).

б) Выясним, сколько человек задержаны только по статье A :

$$|A \setminus A \cap B \setminus A \cap C| = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 10 - 8 - 3 + 2 = 1.$$

Определим, сколько имеется задержанных по статье B :

$$|B \setminus A \cap B \setminus B \cap C| = |B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 12 - 8 - 4 + 2 = 2.$$

Установим число задержанных по статье C :

$$|C \setminus A \cap C \setminus B \cap C| = |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 7 - 3 - 4 + 2 = 2.$$

Таким образом, только по одной статье задержаны $1 + 2 + 2 = 5$ (человек).

в) Найдем, сколько человек задержаны хотя бы по одной из статей A , B и C . Для этого разобьем множество людей, задержанных хотя бы по одной из статей A , B и C на три непересекающихся подмножества: множество людей, задержанных ровно по трем статьям, ровно по двум статьям, точно по одной статье. Первому множеству принадлежит 2 человека, второму – 9, третьему – 5. Сумма этих чисел даст искомое число: $2 + 9 + 5 = 16$. Таким образом, по другим статьям в СИЗО находятся $20 - 16 = 4$ человека.

Второй способ решения использует графическую модель задачи.

Исходя из условия задачи, изобразим основное множество (множество всех людей, находящихся в СИЗО) в виде прямоугольника, а его подмножества (подмножества A , B и C – множества людей, задержанных по соответствующим статьям) – в виде кругов Эйлера. Полученная диаграмма Эйлера – Венна (рис. 2) показывает взаимосвязи между множествами, о которых идет речь в задаче. Условие задачи позволяет теперь определить число элементов в каждом из подмножеств, изображаемых криволинейными областями внутри кругов, и ответить на все поставленные вопросы.

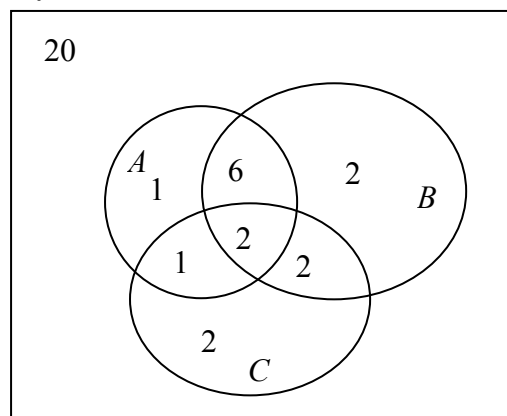


Рис. 2

25. Из группы в 100 студентов, 63 студента посещают лекции по уголовному праву, 39 – по муниципальному праву и 72 – по математике. Известно также, что 44 студента посещают уголовное право и математику, 25 – математику и муниципальное право, 20 – муниципальное право и уголовное право. Кроме того, известно, что 13 студентов успевают по всем предметам.

а) Сколько студентов не посещают лекции ни по уголовному праву, ни по муниципальному праву, ни по математике?

б) Сколько студентов посещают только один из трех предметов?

в) Сколько студентов посещают ровно два предмета?

26. В экзаменационную сессию студенты сдавали три экзамена: по истории, философии и социологии. Из 172 студентов экзамен по истории сдали 110 человек, по философии – 100, по социологии – 80. При этом экзамены по истории и философии сдали 60 студентов, экзамены по истории и социологии – 50, по философии и социологии – 40; 30 студентов сдали все три экзамена. Сколько студентов не сдали ни одного экзамена? Сколько студентов сдали экзамены по истории и философии, но не сдали экзамен по социологии?

27. Из 100 учеников гимнастикой занимаются 28 человек, волейболом – 42, плаванием – 30; гимнастикой и волейболом занимаются 10 человек, гимнастикой и плаванием – 8, волейболом и плаванием – 5. Всеми тремя видами спорта занимаются 3 ученика. Сколько учеников не занимается спортом? Сколько учеников занимается только гимнастикой? только плаванием? Сколько учеников занимается ровно двумя видами спорта?

28. На кафедре иностранных языков работают несколько преподавателей. Из них 6 человек преподают английский язык, 6 – немецкий язык и 7 – французский; 4 работника кафедры преподают английский и немецкий языки, 3 – немецкий и французский, 2 – французский и английский, 1 – все три языка. Сколько человек работает на кафедре? Сколько из них преподают только английский язык? только французский язык?

29. При опросе 30 детей выяснилось, что каждый из них коллекционирует марки, значки или открытки, причем марки коллекционирует 21 ребенок, значки – 18, открытки – 15, марки и значки – 11, марки и открытки – 9, значки и открытки – 7. Сколько детей коллекционируют и марки, и значки, и открытки? Сколько детей коллекционируют только значки?

30. Из 100 студентов 24 не изучают никакого языка; 26 – немецкий, 48 – французский, 8 – немецкий и французский. Сколько студентов изучают только английский язык?

31. После экзаменационной сессии оказалось, что 10 студентов второй группы имеют в зачетных книжках хотя бы одну оценку «отлично», 20 студентов – хотя бы одну оценку «хорошо», 10 – хотя бы одну оценку «удовлетворительно». При этом

«пятерки» и «четверки» имеются у пяти студентов, «пятерки» и «тройки» – у трех студентов, «четверки» и «тройки» – у четырех студентов, а два студента имеют в зачетных книжках и «пятерки», и «четверки», и «тройки». Сколько студентов во второй группе, если известно, что никто во время сессии не получил оценку «неудовлетворительно»?

32. В результате опроса 60 посетителей библиотеки выяснилось, что 25 человек предпочитают детективы, 21 – фантастику, 18 – исторические романы, причем 5 человек из опрошенных любят детективы и исторические романы, 5 – детективы и фантастику, 6 – исторические романы и фантастику, а двум посетителям нравятся и детективы, и фантастика, и исторические романы. Сколько человек из опрошенных не отдают предпочтение перечисленным выше жанрам ?

33. Из 73 школьников в волейбол играют 52, в футбол – 45, в баскетбол – 31. Во все три игры играют 8 ребят, в волейбол и футбол – 28, в волейбол и баскетбол – 20, в футбол и баскетбол – 16. Сколько школьников играют только в баскетбол? только в футбол?

34. В классе 25 учащихся. Из них лыжников 13, пловцов 8, велосипедистов 17, причем каждый спортсмен занимается только двумя видами спорта и учится на «3» и «4». В классе 6 отличников. Сколько в классе спортсменов?

35. В отчете об обследовании 100 студентов сообщалось, что количество студентов, изучающих различные языки, таково: английский язык изучают 30 человек, французский – 50, немецкий – 23, французский и английский – 8, немецкий и французский – 20, немецкий и английский – 10, все три языка – 5 человек. Отчет не был принят. Почему?

36. В СИЗО находится 20 человек. Из них 10 человек задержаны по статье А, 12 – по статье В и 7 – по статье С. Известно также, что по статьям А и В в СИЗО находится 8 человек, по статьям А и С – 3 человека, по статьям В и С – 4 человека, а 2 человека задержаны по всем трем статьям.

- а) Сколько человек задержаны ровно по двум статьям?
- б) Сколько человек задержаны только по одной статье?
- в) Сколько человек задержаны по другим статьям?

37. Из потока в 92 студента 53 студента посещают лекции по уголовному праву, 42 – по муниципальному праву и 62 – по

математике. Известно также, что 34 студента посещают уголовное право и математику, 25 – математику и муниципальное право, 19 – муниципальное право и уголовное право. Кроме того, 10 студентов успевают ходить на занятия по всем трем предметам.

а) Сколько студентов не посещают занятия ни по уголовному праву, ни по муниципальному праву, ни по математике?

б) Сколько студентов посещают занятия только по одному из трех предметов?

в) Сколько студентов посещают ровно два предмета?

38. Староста одного класса дал следующие сведения об учениках: в классе учатся 45 школьников, в том числе 25 мальчиков. 30 школьников учатся на «хорошо» и «отлично», в том числе 16 мальчиков. Спортом занимаются 28 учащихся, в том числе 18 мальчиков, и 17 школьников, учащихся на «хорошо» и «отлично». 15 мальчиков учатся на «хорошо» и «отлично» и занимаются спортом. Докажите, что в этих сведениях есть ошибка.

39. Сколько чисел среди первых 100 натуральных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

40. Сколько чисел среди первой тысячи натуральных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?

41. Из 36 человек, которые учились по специальности «теоретическая физика», во время каникул только двое не были ни в кино, ни в театре, ни в цирке. В кино побывало 25 человек, в театре – 11, в цирке – 17, в кино и театре – 6, в кино и цирке – 10, в театре и цирке – 4. Определите, есть ли студенты, которые побывали и в театре, и в кино, и в цирке, и если есть, то сколько их.

42. В салоне небольшого самолета было 42 пассажира. Некоторые из них были москвичами, остальные – иногородними. Среди москвичей было 9 мужчин. Некоторые из пассажиров были артистами, но ни одна из иногородних женщин артисткой не была. Всего иногородних мужчин было 18. Из них 13 не были артистами. Среди пассажиров, не являвшихся артистами, было 16 мужчин и 11 женщин. 5 москвичей не были артистами. Сколько всего артистов было в самолете?

43. При досмотре на таможне с поезда были сняты несколько коробок, среди которых были коробки картонные и деревянные. Эти коробки были только двух размеров: большие и маленькие, причем одни из них были покрашены в зеленый цвет, а другие – в

черный. Оказалось, что было задержано 16 зеленых коробок, причем зеленых коробок большого размера – 6, а больших зеленых коробок из картона – 4. Черных коробок из картона было 8, а черных коробок из дерева – 9. Больших деревянных коробок было 7, а маленьких деревянных коробок – 11. Выясните, сколько коробок было снято с поезда и сколько среди них маленьких.

44. При обследовании читательских вкусов студентов оказалось, что: 60% студентов читают журнал А; 50% – журнал В; 50% – журнал С; 30% – журналы А и В; 20% – журналы В и С; 30% – журналы А и С; 10% – все три журнала.

а) Сколько процентов студентов читает ровно два журнала?

б) Сколько процентов студентов не читает ни один журнал?

45. Относительно группы в 30 студентов известно, что: 19 студентов изучают математику; 17 – музыку; 11 – историю; 12 – математику и музыку; 7 – историю и математику; 5 – музыку и историю; 2 – математику, историю и музыку.

а) Сколько студентов изучают ровно два предмета из трех?

б) Сколько студентов изучают математику, но не изучают историю?

в) Имеются ли в группе студенты, которые не изучают ни один из указанных предметов?

46. В результате проверки из 36 сотрудников фирмы только двое не были заподозрены ни во взяточничестве, ни в сокрытии налогов, ни в злоупотреблениях служебным положением. Обвинение во взяточничестве было предъявлено 11 сотрудникам, в сокрытии налогов – 25, а в злоупотреблении служебным положением – 17. При этом во взяточничестве и сокрытии налогов – 6, во взяточничестве и злоупотреблении служебным положением – 10, в сокрытии налогов и злоупотреблении служебным положением – 4. Определить, есть ли сотрудники, которые имеют отношение ко всем трем нарушениям.

47. В трансконтинентальном самолете находятся: 9 мальчиков, 5 американских детей, 9 взрослых мужчин, 7 иностранных мальчиков, 14 американцев, 6 американцев мужского пола и 7 иностранок женского пола. Сколько людей в самолете? (Иностранцами считаются люди, которые не являются американцами).

48. Исследование показало, что среди 100 коллекционеров, 63 человека собирают картины, 59 – марки и 38 – открытки. Известно также, что 44 человека собирают картины и марки, 25 –

картины и открытки, 20 – марки и открытки. Кроме того, 13 человек коллекционируют и картины, и марки, и открытки.

а) Есть ли среди обследуемых мнимые коллекционеры?

б) Сколько человек коллекционируют только один из трех предметов?

в) Сколько человек коллекционируют ровно два из трех предметов?

1.2.2. Подмножества конечного множества.

Элементы комбинаторики

Комбинаторика – это раздел математики, основу которого составляют вопросы о количестве и составе определенных подмножеств и последовательностей, которые можно образовывать из элементов конечных множеств. Иначе говоря, комбинаторика дает ответ на вопрос, сколько различных комбинаций (выборок), подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов данного множества.

Первые комбинаторные задачи, по-видимому, были вызваны подсчетом различных комбинаций при игре в карты, кости и другие азартные игры, популярные в средние века. Одним из первых подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости занимался итальянский математик *Тарталья* (1500–1557). В XVII в. изучением теоретических вопросов комбинаторики занимались французские ученые *Б. Паскаль* (1623–1662) и *П. Ферма* (1601–1665). Исходным пунктом их исследований также были проблемы азартных игр. Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами *Я. Бернулли* (1654–1705), *Г. Лейбница* (1646–1716) и *Л. Эйлера* (1707–1783). Но и в работах этих математиков в основном рассматривались приложения к различным играм (лото, пасьянсы и т. д.). Однако основные вопросы комбинаторики и их систематическое изучение связаны с развитием алгебры многочленов и теории вероятностей в XVI–XVIII вв.

В настоящее время комбинаторные задачи встречаются во всех областях знания. Они тесно связаны с проблемами дискретной математики, линейного программирования, статистики. Методы комбинаторики широко используются при решении транспортных задач, для планирования производства и реализации продукции, для составления и декодирования шифров.

При решении комбинаторных задач удобно пользоваться специальными правилами и формулами, которые называются правилами и формулами комбинаторики.

Правила комбинаторики

1. *Правило сложения.* Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b — n способами, причем *любой* выбор элемента a отличен от любого выбора элемента b , то выбор « a или b » можно осуществить $m + n$ способами.

2. *Правило умножения.* Если элемент a можно выбрать m способами, и после каждого такого выбора элемента a элемент b можно выбрать n способами, то выбор элементов « a и b » можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Задачи

49. Имеется пять видов конвертов без марок и 4 вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

50. На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее? То же самое при условии, что спуск и подъем происходят по разным дорогам.

51. Из трех экземпляров учебника алгебры, семи экземпляров учебника геометрии и семи экземпляров учебника тригонометрии надо выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами это можно сделать?

52. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал пяти различных цветов, среди которых есть красный и все полосы горизонтальные? Та же задача, если одна из полос должна быть красной?

53. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, французского, немецкого и итальянского — на любой другой из этих языков?

54. Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно послать трех курьеров и каждое письмо можно дать любому из курьеров?

55. В магазине имеются 5 различных видов коробок конфет и 4 вида коробок печенья. Сколькими способами можно выбрать в подарок коробку конфет или коробку печенья? Сколькими спо-

собами можно составить набор, состоящий из коробки конфет и коробки печенья?

56. Есть 9 монет различного достоинства. Сколькими способами их можно разложить в два кармана?

57. Сколькими способами можно разложить 7 различных монет в 3 кармана? Предполагается, что каждой монете предназначен какой-то карман.

58. Сколько различных положительных трехзначных чисел существует в десятичной системе счисления?

59. Сколько существует в десятичной системе счисления различных четырехзначных положительных чисел, в которых нет повторения цифр?

60. На кафедре математики 9 преподавателей. Сколькими способами можно составить расписание консультаций на 9 дней, если каждый преподаватель проводит консультацию ровно один раз?

61. Семь членов профсоюзного комитета должны выбрать из своего состава председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

62. В группе студентов 25 человек. Необходимо избрать старосту, его заместителя и профорга. Сколькими способами это можно сделать?

63. Четыре студента сдали экзамен. Известно, что все они получили положительные оценки. Сколько может быть вариантов распределения оценок?

64. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2?

65. Для несения почетного караула приглашаются 10 служащих из 6 родов войск. Сколькими способами может быть сформирован состав караула, если в нем обязательно должны быть представлены все рода войск?

66. Сколько упорядоченных пар можно составить из 32 букв, если в каждой паре обе буквы различны?

67. Сколькими способами можно выбрать согласную и гласную буквы из слова «здание»? из слова «математика»? из слова «паркет»?

68. Сколькими способами можно указать на шахматной доске два квадрата – белый и черный? два белых? Решите ту же задачу, если нет ограничений на цвет квадратов.

69. Сколькими способами на шахматной доске можно выбрать белый и черный квадраты, не лежащие на одной горизонтали или одной вертикали?

70. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу (то есть чтобы какое-то число очков встречалось на обеих костях)?

71. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга?

72. На железнодорожной станции имеется m светофоров. Сколько может быть дано различных сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: красный, желтый и зеленый?

Различные схемы составления комбинаций из элементов конечного множества и соответствующие им формулы

Мы рассмотрели некоторые общие правила решения комбинаторных задач. С их помощью можно решать задачи самых разных типов. Однако как в геометрии неудобно всегда сводить решение задачи к аксиомам, а удобнее пользоваться теоремами, так и в комбинаторике вместо решения задачи по общим правилам часто удобнее использовать готовые формулы. Дело в том, что некоторые типы задач встречаются чаще других. Комбинациям, которые возникают в этих задачах, присвоены специальные названия – размещения, перестановки, сочетания. Для числа таких комбинаций получены формулы, которыми и пользуются при решении задач.

Пусть дано множество $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, состоящее из n различных элементов.

Определение 1. Размещениями без повторений из n элементов по m называются упорядоченные m -элементные подмножества множества E , отличающиеся либо набором элементов, либо порядком их следования.

Число таких размещений обозначается символом A_n^m . Нетрудно показать, что

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1).$$

Задача 1. Сколькими способами можно выбрать из группы, насчитывающей 40 студентов, старосту, профорга и физорга?

Решение. Любой выбор является размещением без повторений из 40 элементов по три (он задается упорядоченным множеством из трех элементов без повторений, составленным из множества студентов); поэтому число способов выбора равно $A_{40}^3 = 40 \cdot 39 \cdot 38 = 59\,280$.

Задача 2. Сколькими способами можно опустить 4 письма в 12 почтовых ящиков, если в каждый ящик опускается не более одного письма?

Решение. В этой задаче речь также идет о выборе четырех ящиков из 12, при этом порядок выбора ящиков важен. Отсюда искомое число равно $A_{12}^4 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880$.

Определение 2. Размещения без повторений из n элементов по m ($m \leq n$) называются перестановками без повторений из n элементов.

Из определения следует, что перестановки без повторений – это размещения, которые отличаются друг от друга только порядком следования элементов. Иначе говоря, перестановки – это упорядоченные множества, составленные из элементов данного множества.

Число перестановок из n элементов без повторений обозначается символом P_n . Из предыдущей формулы следует, что

$$P_n = n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Используя эту формулу, число размещений из n элементов по m можно найти иначе: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Задача 3. Три студента победили в олимпиаде по математике. Сколько существует способов вручения им дипломов первой, второй и третьей степени?

Решение. В задаче требуется найти число способов распределения трех студентов на трех местах, то есть о числе перестановок без повторений из трех элементов. По формуле для числа перестановок для трех элементов получим: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Задача 4. Сколькими способами можно обить 6 стульев тканью, если имеются ткани шести различных расцветок и все стулья должны быть разного цвета?

Решение. Каждому стулу соответствует какой-нибудь один цвет. Поэтому способов обивки стульев будет столько, сколькими способами можно распределить 6 предметов на шести местах, то

есть числу перестановок из шести элементов без повторений:
 $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Определение 3. Перестановкой с повторениями из элементов (a_1, a_2, \dots, a_n) состава (k_1, k_2, \dots, k_n) называется упорядоченное множество, содержащее $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ элементов, в которое элемент a_1 входит k_1 раз, элемент a_2 входит k_2 раз, ..., элемент a_n входит k_n раз.

Число таких перестановок обозначают символом $P(k_1, k_2, \dots, k_n)$.

$$P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$$

Задача 5. Сколько «слов» можно получить, переставляя буквы в слове «математика»?

Решение. Слово «математика» является упорядоченным множеством из 10 элементов, т. е. перестановкой из 10 элементов с повторениями состава $(2, 3, 2, 1, 1, 1)$ (буква «м» входит в перестановку 2 раза, буква «а» – 3 раза, буква «т» – 2 раза, буквы «е», «и», «к» – по одному разу). Значит, при перестановках букв получится

$$P(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200 \text{ «слов»}.$$

Задача 6. Сколькими способами можно разложить 28 различных предметов по четырем различным ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось по 7 предметов?

Решение. Поскольку нам надо разложить все 28 предметов, то речь идет о перестановках из 28 элементов, а так как порядок расположения предметов в одном ящике не существен, то имеем дело с перестановками с повторениями типа $(7, 7, 7, 7)$. Таким образом, искомое число способов равно

$$P(7, 7, 7, 7) = \frac{28!}{7! \cdot 7! \cdot 7! \cdot 7!} = \frac{28!}{(7!)^4}.$$

Определение 4. Сочетаниями без повторений из n элементов по m называются m -элементные подмножества множества E , содержащие разные наборы элементов.

Из определения следует, что различные сочетания отличаются друг от друга составом элементов. Формула для вычисления числа сочетаний без повторений из n элементов по m имеет вид

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Задача 7. Сколькими способами можно выбрать команду из четырех человек для соревнования по бегу, если имеется 10 бегунов?

Решение. По условию задачи необходимо выбрать четырех человек из 10, при этом порядок выбора значения не имеет. Это значит, что речь идет о сочетаниях из 10 по 4. Число таких сочетаний равно $C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$.

Задача 8. У одного человека есть 11 книг по математике, а у другого – 15 книг. Сколькими способами они могут выбрать по 3 книги каждый для обмена?

Решение. Первый из 11 книг может выбрать 3 книги C_{11}^3 способами, второй из своих 15 книг 3 книги выбирает C_{15}^3 способами. При обмене каждый набор из трех книг первого может быть взят с каждым набором из трех книг второго. Поэтому число способов обмена равно $C_{11}^3 \cdot C_{15}^3$.

Задачи

73. В цехе работают 8 токарей. Сколькими способами можно поручить трем из них изготовление трех различных видов деталей (по одному виду на каждого)?

74. Сколькими способами можно опустить 5 писем в 11 почтовых ящиков, если в каждый ящик опускают не более одного письма?

75. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 5 мужчин и 5 женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

76. Сколькими способами могут разместиться 20 человек в пяти вагонах метро, если каждый человек занимает место независимо от другого? (Важно не только то, сколько человек село в каждый вагон, но и то, кто из 20 человек в какой вагон сел).

77. Сколько различных «слов» можно получить, переставляя буквы в слове 1) «парабола», 2) «следователь»?

78. Сколькими способами можно переставлять буквы: 1) слова «перешеек» так, чтобы четыре буквы «е» не шли подряд? 2) слова «огород» так, чтобы три буквы «о» не шли подряд? 3) слова «обороноспособность» так, чтобы две буквы «о» не шли подряд?

79. Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17, если данные два человека из этих 17 не могут быть выбраны одновременно?

80. Сколькими способами можно разбить 30 рабочих на 3 бригады по 10 человек в каждой бригаде? На 10 групп по 3 человека в каждой?

81. Сколькими способами можно разделить карточную колоду в 36 карт пополам так, чтобы в каждой половине было по два туза?

82. Сколько можно составить пятизначных чисел, в десятичной записи которых хотя бы один раз встречается цифра 5?

83. Из урны, содержащей 10 шаров, из которых 4 белых и 6 красных, извлекают 3 шара и откладывают в сторону. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы а) все отложенные шары оказались белыми? б) среди отложенных шаров белых оказалось ровно 2?

84. 7 яблок, 3 апельсина и 5 лимонов раскладываются в три пакета, но так, чтобы в каждом было одинаковое количество фруктов. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы в каждом пакете находилось по одному апельсину?

85. На собрании должны выступить 5 человек – А, Б, В, Г, Д. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов, если 1) Б не должен выступать до того, как выступил А; 2) если Б должен выступить сразу после А?

86. Сколькими способами можно поставить 8 шашек на черные поля доски?

87. Сколькими способами можно поставить на черные поля доски 12 белых и 12 черных шашек?

88. Сколькими способами можно заполнить карточки «Спортлото» (зачеркнуть 6 номеров из 49)? Во скольких случаях из выбранных шести номеров после тиража три окажутся угаданными правильно? Во скольких случаях правильно будут угаданы 4 номера? 5 номеров? 6 номеров?

89. 20 различных деталей раскладывают в три ящика, причем в первый ящик кладут три детали, во второй – 5 деталей, а в третий – все остальные детали. Сколькими способами это можно сделать?

90. Сколько пятибуквенных «слов», каждое из которых состоит из трех согласных и двух гласных, можно составить из букв слова «уравнение»?

91. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если каждое число должно состоять из трех четных и трех нечетных цифр, причем никакие две цифры в нем не повторяются?

92. В лаборатории работают 8 физиков и 10 химиков. Надо создать рабочие группы по трем темам. В первую группу должны войти 4 физика, во вторую – 5 химиков, а третья должна состоять из трех человек, которые могут быть как физиками, так и химиками. Сколькими способами можно создать такие группы?

93. В течение 10 недель студенты должны написать 10 контрольных работ, в том числе 2 по математике. Сколькими способами можно составить расписание этих работ так, чтобы контрольные работы по математике не шли друг за другом?

94. В первой группе класса «А» первенства по футболу участвуют 17 команд. Разыгрываются медали: золотые, серебряные и бронзовые. Сколькими способами они могут быть распределены?

95. Сколько можно составить телефонных номеров из пяти цифр так, чтобы в каждом отдельном номере все цифры были различны?

96. Научное общество студентов на некотором факультете состоит из 25 человек. Необходимо избрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами это можно сделать, если каждый член общества может занимать лишь один пост?

97. 13 человек обменялись рукопожатиями. Сколько было рукопожатий?

98. Сколько хорд определяют 5 точек окружности?

99. Каждый телефонный номер состоит из 7 цифр. Сколько телефонных номеров не содержит других цифр, кроме цифр 2, 3, 5, 7?

100. Сколькими способами из 12 различных конфет можно составить набор, если в наборе должно содержаться четное количество конфет?

101. В мешке содержатся 8 шаров: 3 красных и 5 зеленых. Сколькими способами из мешка можно вынуть два шара разного цвета? два шара одного цвета?

102. Сколько пятибуквенных «слов» можно составить из 7 гласных и 25 согласных букв, если гласные и согласные буквы в «слове» должны чередоваться? Решите эту задачу при условии, что ни одна буква в слове не должна повторяться.

103. Сколькими способами можно разделить колоду карт из 52 листов пополам так, чтобы в каждой пачке было по два туза?

104. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «кофеварка» так, чтобы гласные и согласные буквы чередовались?

105. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «каракули» так, чтобы никакие две гласные не стояли рядом?

106. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «логарифм» так, чтобы второе, четвертое и шестое места были заняты согласными буквами?

107. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец, 6 чайных ложек (все чашки, ложки и блюдца отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития?

108. Сколькими способами можно разделить 27 уголовных дел между адвокатами А, Б и С так, чтобы А и Б вместе получили бы вдвое больше дел, чем С?

109. Трое юношей и две девушки выбирают место работы. В городе есть три завода, куда берут только мужчин, и две фабрики, где требуются и мужчины, и женщины. Сколькими способами они могут распределиться между этими предприятиями?

110. Из группы, состоящей из 8 мужчин и 5 женщин, нужно выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Сколькими способами это можно сделать?

111. Шифр камеры хранения состоит из одной буквы и трех цифр. Сколько можно набрать разных шифров, если имеется 11 букв и 10 цифр?

112. Сколькими способами можно выбрать из чисел от 1 до 20 два числа так, чтобы их сумма была нечетной?

113. Сколько чисел, меньших, чем миллион, можно записать с помощью цифр 8 и 9?

114. Даны 6 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Сколько пятизначных чисел можно составить, используя эти цифры, если: а) каждая цифра в числе встречается не более одного раза? б) повторения допустимы? в) числа должны делиться на 5?

115. Даны 6 цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Сколько четырехзначных чисел можно составить, используя эти цифры, если: а) никакие цифры в числе не встречаются более одного раза? б) повторения допустимы? в) числа должны быть четными? г) числа должны делиться на 4?

116. Сколькими способами из 15 человек можно выбрать группу людей для работы, если в группу могут входить от 3 до 14 человек?

117. Имеется 3 волчка с 6, 8 и 10 гранями соответственно. Сколькими различными способами они могут упасть? Сколькими различными способами они могут упасть, если известно, что, по крайней мере, два волчка упали на сторону, помеченную цифрой 1?

118. Сколько различных браслетов можно сделать из пяти одинаковых изумрудов, шести одинаковых рубинов и семи одинаковых сапфиров (в браслет входят все 18 камней)?

119. Сколькими способами можно из тех же камней выбрать 3 камня для кольца?

120. Стороны каждой из двух игральных костей помечены числами 0, 1, 3, 7, 15, 31. Сколько различных сумм может получиться при метании этих костей?

121. Сколькими способами можно разложить 10 книг на 5 бандеролей по 2 книги в каждой (порядок бандеролей во внимание не принимается)?

1.3. Числа и операции над ними. Системы счисления

Среди всех множеств в математике особо выделяются числовые множества. К ним относятся:

- 1) множество натуральных чисел \mathbb{N} ;
- 2) множество целых чисел \mathbb{Z} ,
- 3) множество рациональных чисел \mathbb{Q} ,
- 4) множество вещественных чисел \mathbb{R} ;
- 5) множество комплексных чисел \mathbb{C} .

Эти множества связаны между собой отношением включения

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Взаимосвязь между разными классами чисел отражает также следующая таблица.

Комплексные числа	Действительные числа	Рациональные числа	Целые числа	Натуральные числа (т. е. целые положительные): 1, 2, 3, ..., 17,	Число нуль: 0	Отрицательные целые числа: -1, -2, -3, ..., -17, ..., -1001, ...
				Дробные положительные числа: $\frac{1}{2}, \frac{7}{3}, \dots, \frac{1111}{6},$		Дробные отрицательные числа: $-\frac{1}{2}, -\frac{7}{3}, -\frac{1111}{6}, \dots$
				Иррациональные положительные числа: $\sqrt{2}, \sqrt{3} \pm 1, \dots, \pi, \dots$		Иррациональные отрицательные числа: $-\sqrt{2}, -\sqrt{3} - 1, \dots, -\pi, \dots$
	Мнимые числа $i, -i, -2 + 3i, \dots, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \dots$					

Натуральные числа

Натуральные числа – это числа, которые используются при счете. С одной стороны, они обозначают *количество предметов*: один предмет, два предмета, десять предметов и т. д. С другой стороны, с их помощью обозначают порядок следования: первый, второй, третий и т. д. Поэтому различают количественные числа (один, два, три, четыре ...) и порядковые числа (первый, второй, третий ...).

Все натуральные числа, за исключением единицы, подразделяются на *простые* и *составные*.

Натуральное число p , большее 1, называется *простым*, если оно делится только на 1 и на себя. Всякое натуральное число, отличное от 1 и не являющееся простым, называется *составным*.

Таким образом, все натуральные числа можно разбить на три класса: один состоит из всех простых чисел, другой – из всех составных чисел, третий – из одного числа 1, которое не является ни простым, ни составным.

В связи с большой ролью простых чисел в арифметике целых чисел особое внимание уделяется вопросам распределения простых чисел в натуральном ряду. Евклидом было доказано, что множество простых чисел бесконечно, а древнегреческому ученому Эратосфену (276–194 гг. до н. э.) принадлежит один из удобных способов выделения простых чисел в данном отрезке натурального ряда. Этот способ носит название «*решето Эратосфена*» и состоит в следующем.

Пусть дан отрезок натурального ряда: 1, 2, 3, ..., n . Требуется выделить в нем все простые числа, а все составные зачеркнуть. Число 1 зачеркиваем, так как оно не является простым. Число 2 простое. Выделяем его, а все остальные числа, кратные 2, зачеркиваем, как составные. Первое не вычеркнутое число 3 – простое. Выделяем его и после этого зачеркиваем все остальные числа, кратные трем. Продолжаем этот процесс дальше. В общем случае, если в результате указанных рассуждений мы выделили первые r простых чисел и зачеркнули все числа, кратные им, как составные, то следующим простым числом будет первое невыделенное и незачеркнутое число данного отрезка.

Указанные рассуждения достаточно проводить лишь для тех простых чисел p из данного отрезка, для которых $p^2 < n$. Встретив в процессе указанных рассуждений простое число из данного отрезка, для которого $p^2 > n$, рассуждение можно заканчивать.

Для примера применим «решето Эратосфена» для выделения простых чисел на отрезке натурального ряда от 1 до 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Как известно, натуральные числа можно складывать, вычитать, умножать и делить. Однако эти операции неравноправны. Операции сложения и умножения во множестве \mathbb{N} выполнимы, то есть при сложении и умножении натуральных чисел всегда получается число натуральное. А вот операции вычитания и деления возможны не всегда; говорят, что множество натуральных чисел замкнуто относительно операций сложения и умножения и не замкнуто относительно операций вычитания и деления. Чтобы сделать возможным выполнение и этих операций, потребовалось расширить множество натуральных чисел.

Целые и рациональные числа

Расширение множества натуральных чисел проходило в двух направлениях. Во-первых, в рассмотрение были введены целые отрицательные числа ($\mathbb{N}^- = \{-1, -2, -3, \dots, -n, \dots\}$) и число 0.

Множество натуральных чисел, множество целых отрицательных чисел, а также число 0 составляют множество целых чисел \mathbb{Z} .

Множество целых чисел уже замкнуто относительно трех операций: сложения, вычитания и умножения, но не замкнуто относительно операции, обратной умножению, – операции деления. Чтобы сделать выполнимой и операцию деления, множество целых чисел расширяют, вводя в рассмотрение дроби – части единиц измерения, из которых единицы измерения могут быть составлены, а также совокупности этих частей. К необходимости учитывать такие части соответствующих единиц измерения приводили также задачи измерения пространственных, временных, физических и других величин.

С точки зрения арифметики такое расширение целых чисел делает действие деления выполнимым для любых чисел, кроме деления на 0. Появляется *множество рациональных чисел \mathbb{Q} .*

Рациональными числами назовем сначала пары взаимно простых целых чисел p и q , где $q \geq 1$, записываемые в виде $\frac{p}{q}$ (черта играет пока роль разделительного знака).

В случае $q = 1$ выражение $\frac{p}{1}$, где черта – знак деления, означает целое число p , являющееся частным от деления p на 1. Таким образом, целые числа представляются как частный случай чисел рациональных. Все рациональные числа $\frac{p}{q}$, где $q > 1$, называются новыми числами, не содержащимися в \mathbb{N} .

Заметим, что, введя черту для обозначения действия деления, множество \mathbb{Q} можно рассматривать как множество всевозможных выражений $\frac{a}{b}$, где $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, а черта означает знак деления. Выражения указанного вида называют обыкновенными дробями. Надо помнить, что различные по виду обыкновенные дроби

могут задавать одно и то же рациональное число, а именно: дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{a_1}{b_1}$ задают одно и то же рациональное число тогда и только тогда, когда $a \cdot b_1 = a_1 \cdot b$. Иначе, $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$ тогда и только тогда, когда $a \cdot b_1 = a_1 \cdot b$. Сказанное позволяет определить рациональное число по-новому. *Рациональное число* – это класс равных между собой обыкновенных дробей. В каждом таком классе есть единственная несократимая дробь с положительным знаменателем. Можно считать, что весь класс задается именно такой дробью. Однако следует понимать, что любая обыкновенная дробь однозначно определяет целый класс равных дробей, то есть некоторое рациональное число.

Десятичные дроби и рациональные числа

Дроби, у которых знаменатель представляет собой степень десятки, называются *десятичными дробями*. Записываются эти дроби особым образом:

$$\frac{7}{10} = 0,7; 1\frac{3}{10} = 1,3; 3\frac{17}{1000} = 3,017.$$

Чтобы обратить обыкновенную дробь, знаменатель которой отличен от степени десяти, в десятичную, надо ее числитель разделить на знаменатель «уголком». В результате деления получим или конечную десятичную дробь, или бесконечную, в которой имеется некоторый набор повторяющихся цифр – период:

$$\frac{1}{4} = 0,25; \frac{3}{8} = 0,375; \frac{1}{3} = 0,333..., \frac{2}{11} = 0,181818...;$$

$$\frac{22}{7} = 3,142857142857142857....$$

Набор повторяющихся цифр в записи бесконечной десятичной дроби называется *периодом* дроби, а сама дробь называется *бесконечной периодической дробью*. При записи периодической дроби период заключается в скобки: $0,181818... = 0,(18)$; $0,333... = 0,(3)$; $3,142857142857142857... = 3,(142857)$.

Заметим, что конечная десятичная дробь может рассматриваться как бесконечная десятичная периодическая дробь с периодом, состоящим из 0.

Можно доказать, что любая обыкновенная дробь может быть записана в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Обратное также верно: любая бесконечная десятичная периодическая дробь является записью некоторой обыкновенной дроби, то есть некоторого рационального числа.

Посмотрим, как по данной десятичной периодической дроби найти обыкновенную дробь, которая представлена данной десятичной.

1. Пусть $a = 0,777\dots$. Умножим это равенство на 10 и получим

$$10a = 7,777\dots, \text{ то есть } 10a = 7 + a. \text{ Отсюда } a = \frac{7}{9}.$$

2. Пусть $a = 0,(18)$. Умножим это равенство на 100, получим $100a = 18,(18)$

$$\text{Это означает, что } 100a = 18 + a. \text{ Отсюда имеем } a = \frac{18}{99}.$$

Задачи

122. Вычислите:

$$a) (1\frac{3}{4} : 1,125 - 1,75 : \frac{2}{3}) \cdot 1\frac{5}{7};$$

$$б) \frac{12\frac{4}{5} \cdot 3\frac{3}{4} - 4\frac{4}{11} \cdot 4,125}{2\frac{4}{7} : \frac{3}{35}};$$

$$в) \frac{(19\frac{1}{6} + 43,75) : \frac{5}{6} - (26,8 - 23\frac{3}{7}) : \frac{6}{35}}{(13,3 - 11,5) : 1\frac{4}{5}} \cdot 0,5;$$

$$г) \frac{20\frac{8}{15} \cdot 7,5 - 54,6 : \frac{2}{5}}{3\frac{13}{21} \cdot 8,4 - 34,4 : 14\frac{1}{3}} + 43,75 : 11\frac{2}{3} + 24,6 : 1\frac{1}{5}.$$

123. Следующие рациональные числа запишите в виде десятичных дробей: а) $\frac{3}{7}$, б) $\frac{7}{200}$, в) $\frac{19}{625}$, г) $\frac{4}{7}$, д) $\frac{10}{11}$, е) $\frac{1}{17}$, ж) $\frac{3}{31}$, з) $\frac{3449}{3025}$.

124. Каким из следующих множеств принадлежит число $1\frac{8}{11}$:

1) \mathbb{Z} ; 2) \mathbb{Q} ; 3) \mathbb{N} ; 4) \mathbb{Z}_+ ; 5) \mathbb{Z}_- ; 6) \mathbb{R} ; 7) \mathbb{R}_+ ;

8) $[-1; 6]$; 9) $[-\frac{8}{11}; 9]$; 10) $[0; +\infty)$; 11) $[-6; -\frac{8}{11}]$.

125. Содержит ли множество $\mathbb{Q} \cap [-1; 7]$ число:

1) $\frac{3}{8}$; 2) -1 ; 3) 7 ; 4) $\sqrt{2}$; 5) -12 ; 6) 19 ; 7) π ; 8) $\frac{4}{2\pi}$?

126. Пусть $A = [-2; 8]$, $B = (-4; 11)$, $C = (0; 9)$. Найдите множества:

1) $A \cap B \cap C$; 2) $A \cup B \cup C$; 3) $(A \cup B) \cap C$;
4) $\overline{A} \cap B \cup C$; 5) $\overline{A \cup B} \cap C$.

127. Пусть $A = \{3n - 1 / n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{5n + 2 / n \in \mathbb{N}\}$,

$C = \{2n + 1 / n \in \mathbb{N}\}$. Найдите множества: 1) $A \cap B$; 2) $A \cap C$;

3) $A \cap B \cap C$; 4) $A \cap B \cup C$.

128. По данной десятичной периодической дроби найдите обыкновенную дробь, которая представлена данной десятичной:

1) $0,(2)$; 2) $0,(23)$; 3) $1,(7)$; 4) $3,5(72)$; 5) $0,3(8)$; 6) $5,26(5)$.

129. Вычислите:

1) $0,(2) + 0,(3)$; 2) $0,(2) + 0,(37)$;

3) $0,(73) - 0,4(87)$; 4) $\frac{(\frac{2}{3} + 0,(3)) : 0,25}{0,12(3) : 0,0925} + 12,5 \cdot 0,32$;

5) $\frac{0,725 + \frac{3}{5} + 0,175 + 0,42(6) + 0,12(3)}{0,128 \cdot 6,25 - 0,0345 : 0,12}$;

6) $\frac{0,8(5) + 0,17(1)}{0,8(5) - 0,17(1)} + \frac{0,8(3) + 0,1(6)}{0,8(3) - 0,1(6)}$.

130. Покажите, что при обращении в обыкновенную бесконечной периодической дроби вида $A,(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ – цифры, а $\overline{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}$ – число, записанное этими цифрами, получается следующий результат

$$A,(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r) = A + \frac{\overline{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}}{999\ldots9}.$$

131. Покажите, что при обращении в обыкновенную смешанной бесконечной периодической дроби $A,\overline{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}(\overline{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m})$ справедлива следующая формула:

$$A,\overline{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}(\overline{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}) = A + \frac{\overline{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r\beta_1\beta_2\ldots\beta_m} - \overline{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}}{99\ldots900\ldots0},$$

где цифра 9 повторяется столько раз, сколько цифр в периоде, а 0 – столько раз, сколько цифр после запятой до периода.

132. Укажите, какие из первых пятнадцати натуральных чисел являются простыми, а какие – составными.

133. Представьте следующие числа в виде произведения простых множителей: 1 375, 9 009, 1 124.

Действительные числа

Со времен древних греков известна задача измерения длины диагонали квадрата, сторона которого равна 1. Еще тогда было обнаружено, что никакая доля единицы, как бы мала она ни была, не укладывается на диагонали целое число раз. Это означало, что рациональных чисел для измерения длин отрезков не хватает. Возникло понятие соизмеримых и несоизмеримых отрезков, то есть отрезков, которым при заданной единице измерения можно поставить в соответствие число – длину, и отрезков, которым такого числа поставить в соответствие нельзя. Естественно, что опять появилась необходимость расширить множество рациональных чисел. Расширение указанного множества было необходимо также и для выполнимости операции извлечения корня любой степени из рационального числа.

Можно доказать, что число $\sqrt{2}$, определяющее длину квадрата со стороной длины 1, не является числом рациональным; оно представляется десятичной бесконечной непериодической дробью.

Числа, представляющие собой десятичные бесконечные непериодические дроби, называются иррациональными.

Примерами иррациональных чисел являются:

$$\sqrt{2} = 1,414213562373..., \sqrt{3} = 1,7320508...,$$

$\sqrt{14} = 3,74165738...,$ число $\pi = 3,1415926535...,$ равное отношению длины окружности к ее диаметру, число $e = 2,718281828459... .$

Число π известно с глубокой древности. Вавилонские, египетские, китайские и греческие математики нашли различные приближенные значения этого числа: $3, 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2, \sqrt{10}, \frac{22}{7}, \frac{355}{113}, \frac{377}{120}$ и другие. Рассматривая вписанные в окружность правильные $2n$ -угольники, Архимед вычислял π с большой точностью. Он, например, определил, что $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. Немецкий математик

Г. Лейбниц (1646–1716) доказал, что число π можно представить в виде следующей бесконечной суммы:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Число e (названное в честь шотландского математика XVI в. Джона Непера неперовым) также может быть представлено в виде ряда:

$$e = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Используя ЭВМ и представление чисел π и e рядами, можно подсчитать их с любой точностью. Следует также сказать, что π и e относятся к так называемым трансцендентным числам – числам, которые не могут быть корнями никакого многочлена с целыми коэффициентами.

Объединение множеств рациональных и иррациональных чисел составляет множество *действительных (вещественных) чисел*. Это множество замкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень. Однако оно не замкнуто относительно операции извлечения корня, так как не из всякого действительного числа можно извлечь корень четной степени, например, как известно, нельзя извлечь квадратный корень из числа -2 . Чтобы и эта операция была выполнимой, множество действительных чисел расширяют, добавляя к ним новые числа – комплексные числа. Но о них мы здесь говорить не будем.

Важным свойством множества действительных чисел является его *упорядоченность*. Это свойство означает, что любые два действительных числа можно сравнить между собой, то есть указать, какое из них больше или меньше. Для сравнения нужно последовательно сравнивать цифры, стоящие на одинаковых позициях в записи этих чисел. Например, $2,381615\dots > 2,381529\dots$, так как на первых четырех позициях соответствующие цифры одинаковы, а $6 > 5$. Описанное правило сравнения работает при одном соглашении: не рассматривать периодические десятичные дроби с периодом 9. Это возможно, так как всякую бесконечную периодическую дробь с периодом 9 можно заменить равной ей конечной десятичной дробью.

Задачи

134. Докажите, что следующие числа являются иррациональными:

- а) $\sqrt{2}$, б) $\sqrt{7}$, в) $\sqrt[3]{4}$, г) $\sqrt[5]{7}$,
д) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, е) $\sqrt{3} - \sqrt{5}$, ж) $7 + 2\sqrt{3}$.

Решение. а) Предположим, что число $\sqrt{2}$ – число рациональное. Тогда найдутся целые числа m и n , взаимно простые и такие, что $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ (дробь $\frac{m}{n}$ – несократимая). После возведения равенства в квадрат получим $2 = \frac{m^2}{n^2}$ или $m^2 = 2n^2$. Отсюда следует, что число m^2 делится на 2, а так как 2 – простое число, то и m делится на 2. Это значит, что $m = 2k$. Но тогда $m^2 = 4k^2$, и равенство $m^2 = 2n^2$ можно записать следующим образом $4k^2 = 2n^2$. Отсюда $n^2 = 2k^2$, и, следовательно, n^2 , а значит, и n делится на 2. Таким образом получено противоречие с тем, что числа m и n взаимно простые. Противоречие указывает на то, что наше предположение о том, что число $\sqrt{2}$ рациональное, неверно. Это число является иррациональным.

д) Допустим, что $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r$ – число рациональное. Возведем это равенство в квадрат: $2 + 2\sqrt{6} + 3 = r^2$. Выразим из получившегося равенства $\sqrt{6}$: $\sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2}$. В левой части этого равенства стоит число иррациональное $-\sqrt{6}$, а в правой – рациональное, так как арифметические операции возведение в степень, вычитание и деление не выводят за пределы множества рациональных чисел. Опять получили противоречие. Наше предположение неверно, и число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ является рациональным.

135. Может ли сумма, разность, произведение, частное двух иррациональных чисел быть числом рациональным? Если может, то привести примеры.

136. Сравните числа по величине:

- а) 0, 142816... и 0, 142827...; б) $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt{2}$; в) $\frac{2}{7}$ и $\sqrt{\frac{1}{3}}$;
г) $\sqrt{5}$ и 2,421619; д) 3, 12(41) и 3, 1229; е) $\sqrt{6} - 1$ и $-\frac{4}{5}$.

137. Приведите пример рационального числа, стоящего между числами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$.

Позиционные системы счисления

Позиционная система счисления – это способ наименования и записи чисел. Для записи чисел используются цифры. Цифры – это, по существу, символы. Слово «позиционная» означает, что в записи числа роль цифры зависит от ее места (позиции), например 321 и 123 – разные числа, хотя и записаны с помощью одних и тех же цифр. Общепринятой и наиболее распространенной является десятичная система счисления. Она изобретена в Индии. В Европу попала через арабские страны при участии итальянского математика и коммерсанта XIII века Леонарда Пизанского (Фибоначчи).

Запись числа в десятичной системе счисления означает его представление в виде суммы целых степеней десятки, взятых с некоторыми коэффициентами, например:

$$243078 = 2 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 10^0.$$

Число 10 называется основанием системы счисления, а его степень – разрядом. Коэффициент, стоящий перед степенью десятки, означает количество соответствующих разрядов, содержащихся в числе. Единицы соседних разрядов находятся в определенном отношении между собой: для десятичной системы счисления 10 единиц разряда составляют одну единицу следующего разряда. Так, например, 10 десятков дают одну сотню.

Заменяя 10 другим числом, например d , и записывая число в виде степеней d , получим запись числа в другой системе счисления – в системе счисления с основанием d . Таким образом, запись целого числа в d -ичной системе означает представление этого числа в виде суммы степеней основания d с коэффициентами, меньшими основания. Коэффициенты и являются цифрами числа. Следует иметь в виду, что в этой системе d единиц какого-то разряда составляют одну единицу следующего разряда. Пусть $d = 8$. Тогда число 3078, данное в десятичной системе счисления, в системе счисления с основанием 8 будет записываться следующим образом:

$$3078_{10} = 6 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 6006_8.$$

Если $d = 2$, то $3078_{10} = 2^{11} + 2^{10} + 2^2 + 2^1 = 110000000110_2$.

Заметим, что появление двоичной системы счисления, то есть системы счисления с основанием 2, связано с появлением электронно-вычислительных машин и различных автоматических устройств, состоящих из элементов, для которых характерно наличие двух различных устойчивых состояния (эти состояния условно можно обозначить 0 и 1). Например, выключатель (или электромеханическое реле) может быть разомкнут или замкнут, конденсатор – заряжен или разряжен, электронная лампа или полупроводниковый диод – проводить или не проводить ток. Применение таких устройств в вычислительных машинах привело к использованию системы счисления, в которой для записи числа требуется всего две цифры – 0 и 1. В современных электронно-вычислительных устройствах применяется и шестнадцатеричная система счисления. Для записи чисел в этой системе счисления в качестве символов используются не только цифры, но и буквы.

Осуществить перевод целого числа, записанного в десятичной системе счисления, в d -ичную систему можно двумя способами.

1. Заданное целое число надо просто представить в виде суммы степеней основания d . Коэффициенты полученного разложения и будут цифрами числа.

2. Для перевода данного числа в систему счисления с основанием d его надо последовательно делить на d , отбрасывая остатки. Последовательная запись этих остатков справа налево даст цифры числа в d -ичной системе счисления.

Задачи

138. Записать в двоичной системе счисления первые 25 натуральных чисел, заполнив таблицу.

<i>Десятичное число</i>	<i>Запись в двоич- ной системе</i>	<i>Десятичное число</i>	<i>Запись в двоич- ной системе</i>
1	1	13	
2	10	14	
3		15	
4		16	
5		17	
6		18	
7		19	
8		20	

9		21	
10		22	
11		23	
12		24	

139. Следующие числа записать 1) в двоичной, 2) в семеричной, 3) в восьмеричной системах счисления: 13, 50, 26, 28, 81.

140. Переведите в десятичную систему числа, заданные в двоичной системе счисления: 10110110, 10101011, 1100111, 100011000110.

141. Переведите в десятичную систему числа, заданные в семеричной системе счисления: 441, 24621, 13642.

142. Составьте таблицы сложения однозначных чисел для систем счисления с основанием, равным 5, 7, 12.

143. Выполните указанные действия:

1) $23334_6 + 33020_6 + 444_6 + 12341_6$;

2) $10010011_3 - 2210022_3$;

3) $43(10)(11)5_{12} + 3(10)6_{12} + 4(11)25_{12}$.

1.4. Взаимно однозначные соответствия.

Равномощные множества

Пусть даны два множества A и B .

Между множествами установлено *биективное соответствие (биекция)*, если каждому элементу множества A поставлен в соответствие единственный элемент множества B , и обратно: каждому элементу множества B – единственный элемент из A . Биекцию иногда называют взаимно однозначным соответствием. Если между двумя множествами можно установить биективное соответствие, то эти множества называют *равномощными*, или *эквивалентными*. Если множества A и B эквивалентны, то это записывают так: $A \sim B$.

Очевидно, что если $A \sim B$, $B \sim C$, то $A \sim C$.

Множество A называется *конечным*, если оно содержит конечное число элементов. Пустое множество также причисляется к конечным множествам.

Два конечных множества *равномощны* тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое число элементов.

Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*.

Бесконечные множества, эквивалентные множеству чисел натурального ряда, называются *счетными* множествами. Мощность счетного множества обозначается через \aleph_0 и называется *алеф-нуль*. Заметим, что мощность бесконечного множества – это понятие, аналогичное числу элементов в конечном множестве.

Некоторые свойства бесконечных множеств:

1. Любое подмножество счетного множества конечно или счетно.

2. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество. Счетное множество является наименьшим из всех бесконечных множеств.

3. Объединение конечной или счетной совокупности счетных множеств есть счетное множество.

Если множество бесконечно и неравномощно множеству натуральных чисел, то оно называется *несчетным множеством*. К несчетным множествам относится, например, множество всех точек интервала $(0, 1)$. Говорят, что множество точек интервала $(0, 1)$ имеет мощность континуума, которую обозначают символом c .

4. Если из несчетного множества A удалить конечное или счетное множество M , то мощность множества A не изменится.

5. Если к бесконечному множеству добавить конечное или счетное множество, то его мощность не изменится.

6. *Теорема Кантора-Бернштейна*: если множество A эквивалентно подмножеству множества B , а B эквивалентно подмножеству множества A , то A эквивалентно B .

7. У всякого бесконечного множества существует собственное подмножество (подмножество, не совпадающее с самим множеством), эквивалентное этому множеству.

Задачи

144. Приведите примеры равномощных множеств а) конечных; б) счетных; в) мощности континуума.

145. Между какими из заданных множеств можно установить биекцию:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$B = \{ \&, \%, \#, \vee, \leftrightarrow \},$$

$$C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\},$$

$$D = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

$$E = \{x \mid x = \sqrt{5-n} \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

146. Какие из следующих множеств равномощны? Укажите мощность этих множеств: \mathbb{N} , $C = \{\sqrt{2}, \sqrt{4}, \sqrt{6}, \dots, \sqrt{2n}, \dots\}$, $A = \{2n+1 / n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{n^2 / n \in \mathbb{N}\}$; $D = \{x / x \in \mathbb{Z}\}$, $E = \mathbb{Q}$.

147. Установите биекцию:

а) между множеством S нечетных натуральных чисел и множеством \mathbb{N} всех натуральных чисел;

б) между множеством \mathbb{N} и множеством \mathbb{Z} всех целых чисел;

в) между множеством \mathbb{Z}^+ целых неотрицательных чисел и множеством \mathbb{N} ;

г) между множеством \mathbb{Q}^+ неотрицательных рациональных чисел и множеством \mathbb{N} .

Решение. г) Запишем каждое число $r \in \mathbb{Q}^+$ в виде несократимой дроби и назовем высотой числа сумму числителя и знаменателя. Ясно, что имеется лишь конечное множество неотрицательных рациональных чисел данной высоты. Расположим все неотрицательные рациональные числа в последовательность в порядке возрастания их высот. На первое место поместим число $0 = \frac{0}{1}$

(это число высоты 1), затем – число высоты 2 (число $\frac{1}{1}$), далее –

числа высоты 3 (числа $\frac{1}{2}, \frac{2}{1}$) и т. д. Если какую-либо высоту имеют несколько различных рациональных чисел, то они располагаются в порядке возрастания. Таким образом, все элементы данного множества \mathbb{Q}^+ расположатся в виде следующей последовательности:

$$0, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \dots$$

Поставим теперь в соответствие каждому рациональному числу r из \mathbb{Q}^+ тот номер, который это число занимает в нашей последовательности; это соответствие является биекцией между множествами \mathbb{Q}^+ и \mathbb{N} .

148. Найдите мощность множества точек: а) параболы; б) гиперболы.

149. Покажите равномощность множества точек прямой и множества точек интервала $(0, 1)$.

Решение.

Для того чтобы показать равномощность интервала и прямой, необходимо установить между ними биекцию. На координатной плоскости рассмотрим полуокружность с радиусом 0,5 и центром в точке $C(0,5; 0,5)$ (см. рис. 3) и прямую, касательную к окружности в точке $(0,5; 0)$, – ось Ox .

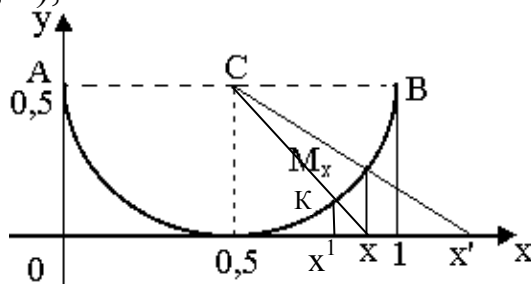


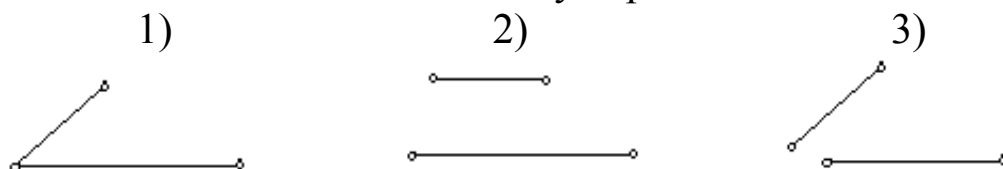
Рис. 3

Каждую точку x из интервала $(0,1)$ проектируем на полуокружность по направлению перпендикуляра к прямой Ox в точку M_x . Затем из центра C окружности проводим луч через точку M_x до пересечения с осью Ox в точке x' . Таким образом, каждой точке интервала ставится в соответствие точка на оси Ox . Пусть теперь точка x интервала рассматривается как точка прямой. Посмотрим, какая точка ей отвечает на интервале. Для нахождения этой точки проведем прямую xC и найдем пересечение ее с полуокружностью. Пусть это будет точка K . Опустим перпендикуляр из точки K на ось Ox . Он пересечет Ox в точке x^1 . В построенном выше отображении x^1 перейдет в точку x . Таким образом, соответствие, при котором точке x интервала $(0, 1)$ ставится в соответствие точка x' оси Ox , является биективным. Задача решена.

150. Докажите равномощность множества точек луча $[0, +\infty)$ и множества точек промежутка $[0, 1)$.

151. Докажите, что окружность и интервал равномощны.

152. Установите биекцию между отрезками:



153. Найдите взаимно однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ на отрезок $[a, b]$.

154. Постройте взаимно однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ на интервал $(0, 1)$.

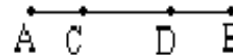
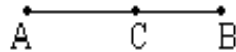
Решение. Выделим на интервале $(0, 1)$ какую-либо последовательность попарно различных точек, например: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}, \dots, x_n = \frac{1}{n+1}, \dots$. Установим следующее соответствие: точке 0 отрезка $[0, 1]$ ставим в соответствие точку x_1 интервала $(0, 1)$, точке $1 \in [0, 1]$ – точку $x_2 \in (0, 1)$, точке $x_1 = \frac{1}{2} \in [0, 1]$ – точку $x_3 = \frac{1}{4}$, и вообще точке $x_n \in [0, 1]$ – точку x_{n+2} , то есть точке $\frac{1}{n+1}$ ставим в соответствие точку $\frac{1}{n+3}$. Любую другую точку $x \in [0, 1]$, не задаваемую числом вида $\frac{1}{n}$, отображаем на интервал в точку, задаваемую тем же числом, что и отображаемая точка. Полученное соответствие, очевидно, является биективным.

155. Постройте биективное отображение окружности единичного радиуса на: а) промежуток $[0, 2\pi)$; б) на отрезок $[0, 1]$.

156. Постройте какую-нибудь биекцию между следующими отрезками:

1) $[A, B], [A, C];$

2) $[A, B], [C, D].$



157. Определите, каким множеством (конечным, счетным или множеством мощности континуум) является каждое из следующих множеств. Ответ обоснуйте.

1) $A = \left\{ x_n / x_n = \frac{n^2 + 1}{n - 3}; \quad n \in \mathbb{N} \right\};$

2) $A = \left\{ x_n / x_n = \frac{2n}{n^2 + 1}; \quad n \in \mathbb{N} \right\};$

3) $A = \left\{ x_n / x_n = \frac{n!}{n + 2}; \quad n \in \mathbb{N} \right\};$

4) $A = \{x / x \in [5; 6]\};$

5) $A = \mathbb{Q};$

6) $A = \{x / x \in \mathbb{N}; \quad x < 5\};$

7) $A = \{x \in \mathbb{N} / x \notin [2; 10]\};$

8) $A = \left\{ x_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} / n \in \mathbb{N} \right\};$

9) $A = \{x \in \mathbb{R} / x \in [0; 10] \setminus \mathbb{Q}\}.$

- 10) Множество всех непересекающихся окружностей на плоскости;
- 11) Множество всех иррациональных чисел;
- 12) Множество всех точек отрезка $[0, 1]$;
- 13) Множество всех десятичных дробей;
- 14) Множество всех вещественных чисел, заключённых между 0 и 1, в десятичной записи которых имеется цифра 7;
- 15) Множество всех рациональных чисел отрезка $[a, b]$;
- 16) Множество всех пар натуральных чисел;
- 17) Множество всех пар рациональных чисел;
- 18) Множество всех точек графика функции: а) $y = \operatorname{tg} x$, б) $y = \log_a x$;
- 19) Множество всех точек квадрата;
- 20) Множество всех точек плоскости, лежащих на осях координат;
- 21) Множество всех чисел вида $a + bi$, где $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $i^2 = -1$.

1.5. Задачи на проценты

Слово «процент» происходит от латинского pro centum, то есть «на сотню». В словаре Даля находим следующее толкование: «процент – число, означающее доход или плату с сотни». Таким образом, 1 процент означает $1/100$, а 1 процент от числа a означает $1/100$ долю от этого числа, то есть равен $\frac{1}{100}a$.

Решение задач на проценты, как правило, сводится к решению следующих трех задач.

Задача 1. Найти, сколько процентов одно число (например, А) составляет от другого числа (например, В).

Решение. Составим пропорцию, исходя из того, что числу В соответствует 100%, а числу А соответствует X%:

$$\frac{A}{B} = \frac{X}{100}.$$

Отсюда получаем

$$X = \frac{A}{B} \cdot 100.$$

Задача 2. Найти процент от числа: найти $p\%$ от числа В.

Решение. Исходя из того, что 100% соответствует число B , а $p\%$ соответствует неизвестное число X , составим пропорцию:
$$\frac{100}{p} = \frac{B}{X}. \text{ Отсюда: } X = \frac{p}{100} \cdot B.$$

Возможно и другое рассуждение. Один процент от числа B равен $\frac{B}{100}$, тогда $p\%$ от этого числа равны $p \cdot \frac{B}{100}$.

Задача 3. Найти число по его проценту: найти число, если $p\%$ его равны A .

Решение. Пусть неизвестное число равно X . Тогда $p\%$ от X равны $\frac{p}{100} \cdot X$. По условию $\frac{p}{100} \cdot X = A$. Отсюда $X = \frac{100}{p} \cdot A$.

158. В n -м году в Ярославле было зафиксировано 2 509 преступлений экономической направленности, из них – 1 334 преступления против собственности. Сколько процентов составляют преступления против собственности от общего числа преступлений экономической направленности.

159. В n -м году в Ярославской области было осуждено 2 072 человека, не достигших совершеннолетия. Из них за кражи – 1 392 человека. Сколько процентов несовершеннолетних осуждено не за кражи?

160. С января по июль 2000 г. в Ярославле было зарегистрировано 574 преступления, связанных с незаконным оборотом наркотиков, из них тяжкие и особо тяжкие составляют 40,4%. Найдите число тяжких и особо тяжких преступлений, совершенных за данный период.

161. В США в 1960 г. было зарегистрировано 2 014 600 преступлений. Найдите число преступлений, зарегистрированных в 1990 г., если известно, что они составляют 718,5% по отношению к 1960 г.

162. В n -м году в Ярославской области было зарегистрировано 2 087 грабежей, что составляет примерно 5,615% от общего числа зарегистрированных преступлений. Найдите число зарегистрированных преступлений.

163. После повышения на 20% зарплата стала составлять 4 200 рублей. Какой была зарплата до повышения?

164. Контингент учащихся школы за последний год сократился на 5% и стал составлять 2 090 человек. Сколько учащихся училось в школе до сокращения контингента?

165. Число тяжких преступлений за последний месяц по сравнению с предыдущим выросло на 6% и стало равняться 53. Сколько преступлений было зафиксировано в предыдущий месяц?

166. За день в городе произошло 35 преступлений, 7 из которых – преступления дорожно-транспортные. Какой процент преступлений не связан с ДТП?

167. За последний год Дума разработала дополнительно к имеющимся 150 законам еще 20%, а затем сократила число законов на 5%. Сколько законов стало в конце наблюдаемого года?

168. По статистическим данным в n -м году в Ярославле было зарегистрировано 15 417 преступлений, что составляет 123,4% по отношению к предыдущему году. Сколько процентов составляют преступления предыдущего года от общего числа преступлений n -го года?

169. За год в области N совершено 6 720 преступлений. Из них тяжких – 33, в состоянии алкогольного опьянения – 3 262, связанных с дорожно-транспортными происшествиями – 1 310. После завершения следствия переданы в суд 4 520 дел. По 3 816 из них уже вынесены приговоры, причем половина из последних – обвинительные. Из всех обвинительных приговоров приведены в исполнение 40%. Заполните до конца следующую таблицу:

Всего	6 720	100%
Тяжких	33	
В состоянии алкогольного опьянения	3 262	
Транспортных	1 310	
Завершено	4 520	
Всего приговоров	3 816	
Обвинительных		
Исполнено		40%

170. Налог на прибыль от производства продукции и услуг составляет 35%. Какой должна быть сумма налогооблагаемой прибыли, чтобы чистая прибыль составляла a рублей?

Решение. Пусть b рублей составляет сумма налогооблагаемой прибыли. Тогда $b - 0,35b = a$, и $b = \frac{100}{65} a = 1\frac{7}{13} a$.

171. Найдите число, зная, что 11% от него составляют 20% от 16,5.

172. Цена на товар была повышена на 25%. На сколько процентов ее надо снизить, чтобы получить первоначальную цену товара?

Решение. Пусть a рублей – первоначальная цена товара, тогда $a + 0,25a = 1,25a$ – цена товара после повышения. Поскольку ее надо снизить на x %, чтобы получить первоначальную цену a , то

$$1,25a - 1,25a \frac{x}{100} = a. \text{ Отсюда } x = \frac{0,25 \cdot 100}{1,25} = 20 (\%).$$

Ответ: 20%.

173. Число a больше числа b на 50%. На сколько процентов число b меньше числа a ?

174. Объем промышленной продукции увеличился в 10 раз. На сколько процентов произошло увеличение?

175. Цех выпускает 200 изделий в год. На сколько изделий увеличится выпуск продукции в год, если производительность труда повысится на 45%?

176. В результате увеличения производительности труда на 35% цех стал выпускать в день 405 изделий. Сколько изделий в день цех выпускал до повышения производительности?

177. Завод перевыполнил план на 3, 5% и выпустил продукции на 238,05 миллиона рублей. Каков план завода?

178. Зарботную плату сначала увеличили на 10%, а затем снизили на 5%, после чего она стала равной 5 313 руб. Какова первоначальная зарплата?

179. Население города за год выросло с 80 000 до 82 400 человек. Найти годовой прирост населения в %.

180. В банк внесена сумма 50 000 рублей. Банк начисляет проценты по ставке 15% годовых. Какая сумма будет на счете вкладчика через два года?

Решение. Обозначим через $S(0)$ сумму, которую внес вкладчик. По условию $S(0) = 50\,000$. Через один год на счете вкладчика окажется сумма

$$S(1) = S(0) + 0,15 S(0) = (1 + 0,15) S(0) = 1,15 S(0).$$

Через два года сумма будет следующей:

$$S(2) = S(1) + S(1) \cdot 0,15 = S(1)(1 + 0,15) = S(0) \cdot 1,15^2.$$

Таким образом,

$$S(2) = 50\,000 \cdot 1,15^2 = 50\,000 \cdot 1,3225 = 66\,125 \text{ (руб.)}$$

Ответ: 66 125 руб.

181. Количество студентов в институте ежегодно увеличивалось на один и тот же процент и за три года возросло с 1 000 до 1 728 человек. На сколько процентов увеличивалось число студентов ежегодно?

Решение. Пусть число студентов ежегодно увеличивалось на $x\%$. Тогда по формуле сложных процентов $1728 = 1000 \left(1 + \frac{x}{100}\right)^3$. Отсюда получаем, что $1 + \frac{x}{100} = 1,2$. Следовательно, $x = 0,2 \cdot 100 = 20$ (%).

Ответ: 20%.

182. Срочный вклад, положенный в банк, ежегодно увеличивается на 3%. Каким станет вклад через 3 года, если в начале он был равен 800 руб.?

183. Пусть вкладчик внес на свой счет в банке $S(0)$ рублей. Банк выплачивает $r\%$ годовых. Выяснить, как изменится сумма денег на счете вкладчика в зависимости от количества лет, которые вклад находился в банке.

184. Сколько лет лежал в банке вклад 16 000 рублей, если по ставке 15 % годовых он достиг величины 27 984,1 рублей?

185. Сберкасса выплачивает 5% годовых. Через сколько лет внесенная сумма удвоится?

186. После двух последовательных повышений заработная плата увеличилась на 87,5%. На сколько процентов зарплата повысилась первый раз, если второе повышение было вдвое больше (в процентном отношении), чем в первый?

187. Температура воздуха утром была a градусов, за день она поднялась на несколько процентов, а за ночь понизилась на столько же процентов и стала равной b градусам. На сколько процентов менялась температура?

Решение. Пусть температура за день поднялась на $x\%$, тогда она стала равной $a \left(1 + \frac{x}{100}\right)$ градусов. За ночь она понизилась на $a \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \frac{x}{100}$ градусов и стала равной $a \left(1 + \frac{x}{100}\right) - a \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \frac{x}{100}$.

Из условия задачи следует, что

$$a \left(1 + \frac{x}{100}\right) - a \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \frac{x}{100} = b.$$

Тогда

$$a \cdot \left(1 - \frac{x^2}{100^2}\right) = b \text{ и } x = \sqrt{\frac{a-b}{a}} 100.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{a-b}{a}} 100\%$.

188. Радиус круга, который составляет 10 см, увеличили на 10%. На сколько процентов увеличилась площадь круга?

189. Как изменится площадь прямоугольника, если:

а) длина его увеличится на 20%, а ширина увеличится на 25%?

б) длина увеличится на 20%, а ширина уменьшится на 20%?

190. Все ребра куба увеличили на 20%, а затем объем получившегося куба уменьшили на 20%. Как изменится первоначальный объем?

191. Одну сторону квадрата увеличили на 10%, а другую – уменьшили на 10%. Как изменится площадь фигуры? Рассмотреть соответствующий геометрический рисунок.

192. Имеются две концентрические окружности с радиусами $R = 2$ см и $r = 1$ см. На сколько процентов уменьшится площадь кольца, если r увеличить на 10%?

193. На сколько процентов надо увеличить сторону квадрата, чтобы его площадь увеличилась на 21%?

194. После двух последовательных снижений цен на одно и то же число процентов стоимость товара с 4 000 рублей снизилась до 3 240 рублей. На сколько процентов снижалась стоимость товара каждый раз?

195. Цена товара была снижена на 20%. На сколько процентов ее надо повысить, чтобы получить исходную цену?

196. Первое число на 20% меньше второго. На сколько процентов второе число больше первого?

197. Товар с перевозкой обошелся в 149 800 рублей. Расходы на перевозку составили 7% от стоимости самого товара. Сколько рублей стоила перевозка товара?

198. Найдите число, если известно, что 25% этого числа равны 45% от числа 320?

199. В первую поездку автолюбитель израсходовал 10% имеющегося в баке бензина, во вторую – 25% остатка. После этого в баке осталось бензина на 13 л меньше, чем было первоначально. Сколько литров бензина было в баке первоначально?

200. В первый день со склада вывезли 30% товара, а во второй – 45% оставшегося товара. Сколько процентов товара осталось на складе?

201. При обработке деревянного бруса его длина уменьшилась на 10%, ширина – на 30%, а толщина – на 20%. Сколько процентов древесины пошло в отходы?

202. Рабочий день уменьшили с 8 до 7 часов. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках заработная плата выросла на 5%? (Считать заработную плату пропорциональной произведенной продукции).

Решение. Обозначим через p исходную производительность труда. Тогда начальный объем производства будет равен $8p$. После увеличения производительности труда на $x\%$ она станет равной $p_1 = p \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)$, а новый объем производства с учетом изменения продолжительности рабочего дня с 8 до 7 часов будет равен $7p_1 = 7p \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)$. Поскольку заработная плата, а следовательно, и объем производства увеличились на 5%, то $7p_1 = 1,05 \cdot 8p$, то есть $7p \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) = 1,05 \cdot 8p$. Отсюда находим, что $x = 20\%$.

Ответ: 20%.

203. Объем строительных работ увеличился на 80%. На сколько процентов необходимо увеличить число рабочих, если производительность труда повысится на 20%? (Считать, что объем строительных работ пропорционален числу рабочих).

204. Производительность труда на предприятии снизилась на 20%. На сколько процентов ее надо повысить, чтобы получить первоначальную производительность труда.

205. За год цех в целом увеличил выпуск продукции на 34%. При этом 20% рабочих цеха увеличили выпуск продукции на 50%. На сколько процентов увеличили выпуск продукции остальные рабочие?

206. Зарботок рабочего повысился на 19%, а цены на продукты и другие товары снизились на 15%. На сколько процентов больше рабочий сможет купить продуктов и товаров?

207. На сколько процентов увеличится покупательная способность населения (количество товаров, которое можно приобрести на данную сумму денег), если цены на все товары снизить на 20%.

208. Цех увеличивал объем выпускаемой продукции ежемесячно на одно и то же количество процентов. Найти это число, если за два месяца объем выпускаемой продукции увеличился на 44%.

209. На некотором участке пути средняя скорость поезда на 20% ниже, чем предусмотрено расписанием. На сколько процентов увеличилось время прохождения этого участка?

210. Объем строительных работ увеличился на 60%. На сколько процентов нужно увеличить число работающих, если производительность труда повысится на 30%?

211. Что больше: 20% от 10% данного числа или 10% от его 20%?

212. В городе N за последний год численность населения уменьшилась на 4%, а число безработных увеличилось на 5%. Сколько процентов от общего числа жителей составляют безработные, если год назад их было 8%?

213. Антикварный магазин приобрел два предмета, а затем продал их на общую сумму 39 900 рублей, при этом прибыль составила 40%. За сколько рублей магазин купил каждый предмет, если при продаже первого предмета прибыль составила 30%, а при продаже второго – 55%.

214. Брокерская фирма приобрела два пакета акций, а затем их продала на общую сумму 7 млн 680 тыс. руб., получив при этом прибыль 28%. За какую сумму фирма приобрела каждый из пакетов акций, если при продаже первого пакета прибыль составила 40%, а при продаже второго – 20%?

215. Сначала зарплату увеличили на 10%, а затем еще раз увеличили на 8%. В результате двух повышений она стала составлять 11 880 руб. Какова первоначальная заработная плата?

216. При социологическом опросе 15 000 респондентов было выяснено, что порядка 84% из них поддерживает введение смертной казни для террористов, порядка 11% ответили, что не поддерживают, остальные затруднились ответить. Сколько человек оказалось в каждой из трех групп? (По материалам газеты «Аргументы и факты»).

217. Продолжительность жизни мужчин в России в среднем составляет 58,5 года, а в странах Евросоюза – 77 лет. На сколько процентов в среднем меньше продолжительность жизни мужчин в России по сравнению со странами Евросоюза? (По материалам газеты «Аргументы и факты».)

2. Элементы математической логики

2.1. Формулы алгебры высказываний. Высказывания и операции над ними

Под **высказыванием** понимают повествовательное предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно. Высказываниями не являются определения, вопросительные и восклицательные предложения, а также субъективные суждения. Высказывания обозначают малыми буквами латинского алфавита. В математической логике отвлекаются от содержательной стороны высказываний, ограничиваясь рассмотрением их **значений истинности (истинностных значений)**. Если высказывание a истинно, то ему приписывают истинностное значение И (или 1) и пишут $[a] = \text{И}$ или $[a] = 1$, а если ложно – истинностное значение Л (или 0) и пишут $[a] = \text{Л}$ или $[a] = 0$. Никакое высказывание не может быть одновременно и истинным, и ложным.

Под **элементарным** (или **простым**) понимают высказывание, рассматриваемое как целое, неразложимое на составные части предложение, внутренняя структура которого нас не интересует. Так же, как составное повествовательное предложение можно образовать с помощью ряда связок из простых предложений, так и **составное** (или **сложное**) высказывание можно получить из элементарных, применяя к ним **логические операции**. Пусть a и b – произвольные высказывания, относительно которых мы не предполагаем, что известны их истинностные значения.

Определение 1. Отрицанием высказывания a называется такое высказывание \bar{a} (читается «не a », «неверно, что a »), которое истинно тогда и только тогда, когда a ложно.

Для пояснения логических операций удобно использовать так называемые **таблицы истинности (истинностные таблицы)**. Таблица, иллюстрирующая определение 1, имеет вид:

$[a]$	$[\bar{a}]$
И	Л
Л	И

Определение 2. Конъюнкцией высказываний a и b называется такое высказывание $a \wedge b$ (читается « a и b », « a конъюнкция b »), которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания a и b .

Истинностная таблица для конъюнкции имеет вид:

$[a]$	$[b]$	$[a \wedge b]$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Вместо знака \wedge для обозначения операции конъюнкции может использоваться знак $\&$.

Определение 3. Дизъюнкцией высказываний a и b называется высказывание $a \vee b$ (читается « a или b », « a дизъюнкция b »), которое истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний a или b .

Союз «или» в данном случае носит неразделительный смысл, поскольку высказывание $a \vee b$ истинно и при истинности обоих высказываний a и b .

Дизъюнкции соответствует следующая таблица истинности:

$[a]$	$[b]$	$[a \vee b]$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Определение 4. Импликацией высказываний a и b называется высказывание $a \Rightarrow b$ (читается «если a , то b », «из a следует b », « a влечет b », « a имплицирует b »), которое ложно тогда и только тогда, когда высказывание a истинно, а b ложно.

Истинностная таблица для импликации такова:

$[a]$	$[b]$	$[a \Rightarrow b]$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

В импликации $a \Rightarrow b$ высказывание a называется **посылкой** (или **условием**), а высказывание b – **заключением**.

Грамматическими выражениями импликации, помимо предложений «если a , то b », «из a следует b », « a влечет b », « a имплицирует b », могут служить и другие словосочетания: « b выполняется при условии, что выполняется a », « b выполняется тогда, когда выполняется a », « a выполняется только тогда, когда выполняется b », « b есть необходимое условие для a », « a есть достаточное условие для b », «в случае a имеет место b ».

Определение 5. *Эквиваленцией* высказываний a и b называется высказывание $a \Leftrightarrow b$ (читается « a тогда и только тогда, когда b », « a необходимо и достаточно для b », « a эквиваленция b »), которое истинно тогда и только тогда, когда истинностные значения a и b совпадают.

Таблица истинности для эквиваленции имеет вид:

$[a]$	$[b]$	$[a \Leftrightarrow b]$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Формулы алгебры высказываний

Определение 6. Формулами алгебры высказываний являются:

1) элементарные формулы, обозначающие элементарные высказывания: $a, b, c, \dots, x, y, 0, 1$;

2) если A и B – формулы, то \bar{A} , $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ также являются формулами алгебры высказываний.

Формула алгебры высказываний принимает одно из двух значений (0 или 1) в соответствии со значениями образующих ее элементарных высказываний. Если рассматривать последние как независимые переменные, то формуле сопоставляется некоторая функция. Такая функция называется *двузначной*: ее области определения и значений составляют пару $\{0, 1\}$.

Определение 7. Две формулы алгебры высказываний A и B называются **равносильными**, если на любом наборе входящих в них переменных они принимают одинаковое значение истинности.

Для обозначения равносильности формул используется символ \equiv : $A \equiv B$.

При записи формул скобки опускаются, если внутри них стоит знак конъюнкции (вместо $a \vee (b \wedge c)$ пишут $a \vee b \wedge c$), порядок действий при вычислениях по формуле принят следующий: 1) отрицание, 2) конъюнкция, 3) дизъюнкция, 4) импликация, 5) эквиваленция.

Основные законы равносильности

- 1) $a \vee a \equiv a$, $a \wedge a \equiv a$ – законы идемпотентности;
- 2) $a \vee b \equiv b \vee a$, $a \wedge b \equiv b \wedge a$ – законы коммутативности;
- 3) $(a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c \equiv a \wedge (b \wedge c)$ – законы ассоциативности;
- 4) $(a \vee b) \wedge c \equiv (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$, $(a \wedge b) \vee c \equiv (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ – дистрибутивные законы;
- 5) $\overline{a \vee b} \equiv \bar{a} \wedge \bar{b}$, $\overline{a \wedge b} \equiv \bar{a} \vee \bar{b}$ – законы де Моргана;
- 6) $a \vee \bar{a} \equiv 1$, $a \wedge \bar{a} \equiv 0$ – закон исключенного третьего и закон противоречия;
- 7) $a \vee 0 \equiv a$, $a \wedge 1 \equiv a$ – законы поглощения 0 и 1;
- 8) $\bar{\bar{a}} \equiv a$ – закон двойного отрицания;
- 9) $a \Rightarrow b \equiv \bar{a} \vee b$;
- 10) $a \Leftrightarrow b \equiv (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$.

Нормальные формы

Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция, состоящая только из переменных или их отрицаний.

Примерами элементарных дизъюнкций служат формулы: $a \vee \bar{b} \vee c$, $\bar{a} \vee \bar{b} \vee c$.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) формулы алгебры высказываний называется ее запись в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций.

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция, состоящая только из переменных или их отрицаний, например: $a \wedge b \wedge c$.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) формулы алгебры высказываний называется ее запись в виде дизъюнкции элементарных конъюнкций.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой формулы алгебры высказываний (**СКНФ**) называется **КНФ**, которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1) все элементарные дизъюнкции, входящие в **КНФ**, различны,
- 2) нет нулевых дизъюнкций,
- 3) ни одна из элементарных дизъюнкций не содержит одинаковых членов,
- 4) каждая элементарная дизъюнкция содержит все переменные, входящие в формулу.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой формулы алгебры высказываний (**СДНФ**) называется **ДНФ**, которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1) все элементарные конъюнкции, составляющие ее, различны;
- 2) она не содержит нулевых конъюнкций;
- 3) ни одна из элементарных конъюнкций не содержит одинаковых членов;
- 4) каждая элементарная конъюнкция содержит все переменные, входящие в формулу.

Чтобы получить **СДНФ** (**СКНФ**), надо сначала найти **ДНФ** (**КНФ**). Тогда будут выполнены условия 1, 2, 3. После этого надо преобразовать эту **ДНФ** (**КНФ**) таким образом, чтобы было выполнено условие 4, и вновь проверить выполнение условия 1.

Задачи

1. Какие из перечисленных ниже предложений являются в математической логике высказываниями и каково значение их истинности?

1. Суд принимает только те из предоставляемых доказательств, которые имеют значение для дела.
2. Число x не превосходит число 7.
3. Хищение не является преступлением.
4. Некоторые приговоры суда являются обвинительными.
5. Картины Пикассо слишком абстрактны.

2. Обозначим высказывание: «Федоров юрист» символом a , а высказывание «Федоров – следователь прокуратуры» – символом b . Дайте словесную формулировку следующим формулам:

- 1) \bar{a} , 2) $\bar{\bar{b}}$, 3) $a \wedge \bar{b}$, 4) $a \Rightarrow b$,
- 5) $b \Rightarrow a$, 6) $\bar{a} \Rightarrow \bar{b}$, 7) $\bar{b} \Rightarrow \bar{a}$, 8) $\bar{a} \vee b$, 9) $\overline{a \wedge \bar{b}}$.

3. Пусть символы c , r , s , p обозначают соответственно высказывания: «сегодня ясно», «сегодня дождь», «сегодня идет снег», «вчера было пасмурно». Прочитайте словесно следующие формулы:

- 1) $c \Rightarrow \overline{r \vee s}$, 2) $r \vee s \Rightarrow \bar{c}$, 3) $(p \Rightarrow c) \wedge (c \Rightarrow p)$,
4) $p \wedge (c \vee r)$, 5) $(c \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p) \wedge (\bar{s} \vee r)$.

4. Переведите на язык алгебры высказываний следующие предложения (в каждом предложении элементарные высказывания должны быть обозначены одним символом):

1. Если светит солнце, то, для того чтобы не было дождя, достаточно, чтобы дул ветер.

2. Неверно, что если дует ветер, то солнце светит только тогда, когда нет дождя.

3. Чтобы погода была солнечной, достаточно, чтобы не было ни дождя, ни ветра.

4. Если ветра нет, то для дождя необходима пасмурная погода.

5. Если погода пасмурная и дует ветер, то дождя нет, но дождь идет. Значит, ветра нет.

6. Неверно, что если погода пасмурная, то дождь идет тогда и только тогда, когда нет ветра.

7. Если для солнечной погоды необходимо отсутствие дождя, то, для того чтобы пошел дождь, достаточно, чтобы погода была пасмурной и безветренной.

8. Будет ветреная погода, и пойдет дождь.

9. Дождь идет только тогда, когда погода пасмурная и безветренная. Но дождя нет. Значит, погода либо солнечная, либо пасмурная и ветреная.

10. Погода не только солнечная, но и безветренная. Значит, если не поднимется ветер, то дождя не будет.

11. Погода будет не только пасмурной, но и дождливой, несмотря на ветер. Значит, солнечной погоды не будет, но дождь прекратится.

5. Запишите формулами следующие сложные высказывания:

а) Студент только тогда переводится на следующий курс, когда успевает по всем дисциплинам.

б) Судебное следствие признается неполным, если по делу не установлены с достаточной полнотой данные о личности обвиняемого.

в) Для того чтобы сумма чисел делилась на 3, достаточно, чтобы каждое слагаемое делилось на 3.

г) Для того чтобы суд пришел к выводу о подложности документа, необходимо, чтобы он устранил его из числа доказательств.

д) Достаточным условием заявления судьи о самоотводе является его заинтересованность в деле.

е) Утрата стороной дееспособности не является достаточным условием приостановления производства по делу.

6. Составьте формулы следующих высказываний:

1. Если Ильин достигнет четырнадцати лет и совершит убийство, то он будет нести уголовную ответственность; если же он не совершит убийство, то он не будет нести уголовную ответственность.

2. Николаев будет нести уголовную ответственность по ст. 158 тогда и только тогда, когда совершит кражу; если Николаев не будет нести уголовную ответственность по ст. 158, то его жена не подаст на развод и поможет ему устроиться на работу.

3. Если меняется характер собственности в стране, то неизбежно меняются взаимоотношения профсоюзов с администрацией предприятий, а меняются эти взаимоотношения, то неизбежно должны меняться содержание деятельности профсоюзов, их организационное строение, формы и методы работы.

7. Для каждой из следующих формул придумайте два формализуемых ею предложения:

1) $\overline{x \Rightarrow y}$; 2) $\bar{x} \Rightarrow (y \vee z)$; 3) $\overline{x \wedge y} \Leftrightarrow \bar{x} \vee \bar{y}$; 4) $\overline{x \vee y} \Leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y}$.

8. На допросе свидетель А сказал, что В говорит неправду. Следователь рассуждает так: «Свидетель А может говорить правду, и тогда В говорит неправду, или свидетель А говорит неправду, и тогда В говорит правду». Как записать рассуждение следователя в виде формулы?

9. На допросе А сказал, что В говорит неправду, а В сказал, что С говорит неправду. Следователь рассуждает так: «Свидетель А может говорить правду и тогда В говорит неправду, или свидетель А говорит неправду и тогда В говорит правду, а С говорит неправду, или свидетель В говорит неправду, и тогда С говорит правду». Как записать рассуждение в виде логической формулы?

10. Запишите следующее предложение в виде формулы: «Если будет хорошая погода, то мы пойдем на речку и будем купаться или поедем в лес и будем собирать грибы». Запишите отрицание полученной формулы и отнесите знак отрицания к элементарным высказываниям.

Решение. Обозначим высказывания «будет хорошая погода», «мы пойдем на речку», «мы будем купаться», «поедем в лес», «будем собирать грибы» соответственно символами a, b, c, d, e . Тогда данное высказывание запишется следующим образом: $a \Rightarrow (b \wedge c \vee d \wedge e)$. Построим его отрицание:

$$\overline{a \Rightarrow (b \wedge c \vee d \wedge e)} \equiv a \wedge \overline{b \wedge c \vee d \wedge e} \equiv a \wedge (\overline{b \wedge c} \wedge \overline{d \wedge e}) \equiv a \wedge (\overline{b} \vee \overline{c}) \wedge (\overline{d} \vee \overline{e}).$$

11. Сформулируйте следующие предложения, используя слова «необходимо», «достаточно», «тогда, когда» и «только тогда, когда»:

а) Если со дня совершения тяжкого преступления прошло десять лет, то лицо освобождается от уголовной ответственности.

б) Если студент учится на юридическом факультете, то он изучает математику.

Указание. Высказывание «Если a , то b » равносильно следующим высказываниям: «Для b достаточно a », «Для a необходимо b », « b тогда, когда a », « a только тогда, когда b ».

12. Известно, что конъюнкция $a \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}$ истинна. Что можно сказать о значениях истинности высказываний a, b и c ?

13. Известно, что дизъюнкция $\overline{a} \vee b \vee \overline{c}$ ложна. Что можно сказать о значениях истинности самих высказываний a, b и c ?

14. Что можно сказать про истинность импликации $a \Rightarrow b$, если: 1) $a \equiv 1$? 2) $b \equiv 1$? 3) $a \equiv 0$? 4) $b \equiv 0$? 5) a – « $5 < 8$ », b – «Потерпевший вправе заявить ходатайство»? 6) a – «кража – преступление», b – «Путин – президент США»?

15. «Это, конечно, Сова. Или я не Вини-Пух. А я – он ...» (А. А. Милн «Вини-Пух»). Рассмотрите высказывание: «Если это не Сова, то я не Вини-Пух». Покажите, что рассуждение Вини-Пуха логически грамотно.

16. Запишите высказывание формулой и составьте для нее таблицу истинности: «Если завтра не будет дождя, мы отправимся на реку или пойдем в лес». Что мы будем делать завтра, если данное высказывание ложно?

Решение. Обозначим через a высказывание «завтра будет дождь», через b – высказывание «мы пойдем на реку», через c – высказывание «мы пойдем в лес». Тогда данное высказывание запишется в виде формулы: $\overline{a} \Rightarrow (b \vee c)$. Таблица истинности этой формулы имеет вид:

a	b	c	$b \vee c$	\bar{a}	$\bar{a} \Rightarrow (b \vee c)$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	0

Высказывание ложно в единственном случае (см. последнюю строку таблицы). Из этой строки заключаем, что «завтра дождя не будет, но ни на реку, ни в лес мы не пойдем».

17. Постройте таблицы истинности для следующих формул:

1) $a \wedge \bar{b}$; 2) $\bar{a} \vee c$; 3) $a \wedge (b \vee \bar{a})$; 4) $(a \vee b) \wedge (a \vee \bar{b})$;

5) $a \wedge b \vee c$; 6) $(a \vee \bar{b}) \wedge c$; 7) $\overline{a \wedge b \wedge c}$; 8) $\bar{a} \vee \overline{b \vee c}$;

9) $a \Rightarrow b \wedge \bar{c} \wedge \bar{a} \Leftrightarrow \overline{b \vee c}$; 10) $x \wedge y \Leftrightarrow z \Rightarrow \overline{x \vee y} \Rightarrow z$;

11) $a \Leftrightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow \bar{a}$; 12) $a \Leftrightarrow \bar{a} \vee b \wedge \bar{c} \Rightarrow b \wedge \bar{a} \vee c$.

18. Составьте таблицы истинности для следующих формул:

а) $\overline{p \Rightarrow (p \Rightarrow q)}$; б) $\overline{(p \Rightarrow q) \Rightarrow q}$; в) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$; г) $p \vee q \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.

19. Докажите с помощью таблиц истинности законы де Моргана:

1) $\overline{a \vee b} \equiv \bar{a} \wedge \bar{b}$; 2) $\overline{a \wedge b} \equiv \bar{a} \vee \bar{b}$.

20. С помощью таблиц истинности докажите равносильность следующих формул:

1) $a \Leftrightarrow b \equiv (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$; 2) $a \Leftrightarrow b \equiv (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$.

21. Проверьте, будут ли равносильны следующие формулы:

1) $a \vee (b \vee c)$ и $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$; 2) $a \wedge (b \vee c)$ и $a \wedge b \vee (a \vee c)$;

3) $a \wedge b \wedge c \vee a \wedge b \wedge \bar{c} \vee a \wedge \bar{b} \wedge c \vee \bar{a} \wedge b \wedge c$ и $a \wedge b \vee a \wedge c \vee b \wedge c$.

22. Упростите следующие формулы алгебры высказываний:

а) $(a \wedge b \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{a}) \vee (b \wedge z \wedge \bar{z})$; б) $((\bar{a} \vee \bar{b}) \Rightarrow a) \vee \overline{a \Rightarrow b}$;

в) $a \wedge b \vee ((a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}))$.

Решение.

а) $(a \wedge b \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{a}) \vee (b \wedge z \wedge \bar{z}) \equiv (a \wedge 0) \vee 0 \vee (b \wedge 0) \equiv 0$.

23. Проверьте равносильность формул с помощью преобразований:

а) $\bar{x} \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge p) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge p) \equiv x \Rightarrow (y \vee p)$;

- б) $\overline{(x \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge \bar{z})} \equiv (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge z) \vee (y \wedge z)$;
 в) $(a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) \equiv (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$;
 г) $(a \vee b \vee c) \wedge (b \vee c \vee d) \wedge (c \vee d \vee a) \equiv a \wedge b \vee a \wedge d \vee b \wedge d \vee c$
 д) $a \wedge b \wedge c \vee a \wedge b \wedge \bar{c} \vee a \wedge \bar{b} \wedge c \vee a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}$ и $a \wedge b \vee a \wedge c \vee b \wedge c$;
 е) $x \wedge y \wedge z \vee x \wedge (y \Rightarrow z) \vee x \equiv x$.

24. Докажите равносильность формул алгебры высказываний двумя способами.

1. $\overline{a \wedge b} \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}) \equiv a \Rightarrow \bar{b}$;
2. $a \wedge (a \vee b) \equiv a$;
3. $a \vee (b \wedge \bar{b}) \Leftrightarrow a \equiv 1$;
4. $a \Rightarrow \bar{b} \wedge \bar{c} \equiv \bar{a} \vee (\bar{b} \wedge \bar{c})$;
5. $a \vee (\bar{a} \wedge b) \equiv a \vee b$;
6. $\overline{a \wedge c} \Rightarrow \bar{b} \wedge c \equiv (a \vee \bar{b}) \wedge c$;
7. $a \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
8. $(a \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}) \equiv a$;
9. $\overline{x \vee y} \wedge (x \Rightarrow y) \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$;
10. $(\bar{a} \Rightarrow b) \wedge (a \vee \bar{b}) \equiv a$;
11. $\overline{x \wedge y \vee \bar{z}} \equiv (x \Rightarrow \bar{y}) \wedge z$;
12. $(\overline{a \wedge \bar{b}} \Rightarrow b) \wedge (a \wedge b \vee \bar{b}) \equiv a \wedge b$;
13. $\bar{x} \wedge (x \vee y) \equiv \bar{x} \wedge y$;
14. $(a \Rightarrow \bar{b}) \wedge c \equiv \overline{a \wedge b} \wedge c$;
15. $x \wedge (\bar{x} \vee y) \equiv x \wedge y$;
16. $a \wedge (a \Rightarrow \bar{a} \wedge b) \equiv 0$;
17. $\bar{x} \vee x \wedge y \equiv \bar{x} \vee y$;
18. $a \Leftrightarrow b \equiv (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$;
19. $\overline{x \vee \bar{x}} \wedge y \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$;
20. $(\bar{a} \vee \bar{b} \Rightarrow a) \vee \overline{a \Rightarrow b} \equiv a$;
21. $(a \Rightarrow b) \vee (\bar{a} \Rightarrow b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{b} \Rightarrow c) \equiv 1$;
22. $a \vee a \wedge b \equiv a$
23. $a \Rightarrow (\bar{b} \Rightarrow \bar{c}) \equiv \bar{a} \vee b \vee \bar{c}$;
24. $(a \Rightarrow \bar{b}) \vee (\bar{a} \Rightarrow b) \equiv 1$;
25. $\overline{a \wedge b} \Rightarrow (a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee b) \equiv a \wedge b \vee b$.

Следующая группа задач иллюстрирует **теорему**:

Каждую двужначную функцию $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n переменных можно представить в виде формулы алгебры высказываний.

Напомним, что *двужначной функцией* называется функция, у которой и переменные, и сама она принимают только два значения: 1 и 0.

Двужначные функции называют также *булевыми функциями*.

25. Проверьте, будут ли булевыми следующие арифметические функции:

- 1) $f(x, y) = xy - x^2$;
- 2) $f(x, y) = (x + y)x$;
- 3) $f(x) = x - 1$;
- 4) $f(x, y) = x^n + y^m - x^k y^r$,

где n, m, k, r – любые натуральные числа.

Решение. 1) Составим таблицу значений функции $f(x, y) = xy - x^2$.

x	0	1	0	1
y	0	0	1	1
$f(x, y)$	0	-1	0	0

Среди значений функции есть значение -1 , следовательно, эта функция не является булевой.

26. Запишите в виде формулы алгебры высказываний следующие арифметические функции от двоичных аргументов:

- а) $f(x) = 1 - x$; б) $f(x, y) = xy$;
 в) $f(x, y) = x + y - xy$; г) $f(x, y) = 1 - x + xy$;
 д) $f(x, y) = 1 - xy$; е) $f(x, y, z) = xz + yz - xyz$;
 ж) $f(x, y, z) = xy + z - xyz$; з) $f(x, y) = x^2 - xy$;
 и) $f(x, y) = x^2 + y - xy$.

Решение. ж) Сначала составим таблицу значений функции $f(x, y, z) = xy + z - xyz$, по которой определим, является ли она булевой. Таблица имеет вид:

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

Функция является булевой, и ее можно реализовать в виде формулы алгебры высказываний. Теперь, используя таблицу, составим *СДНФ* соответствующей формулы алгебры высказываний и упростим ее:

$$\begin{aligned} & \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z \vee x \wedge y \wedge \bar{z} \vee x \wedge \bar{y} \wedge z \vee \bar{x} \wedge y \wedge z \vee x \wedge y \wedge z \equiv \\ & \equiv x \wedge y \vee \bar{y} \wedge z \vee \bar{x} \wedge y \wedge z. \end{aligned}$$

27. По формуле алгебры высказываний найдите соответствующую ей двужначную арифметическую функцию:

- 1) \bar{x} ; 2) $x \wedge y$; 3) $x \vee y$; 4) $x \Rightarrow y$; 5) $x \Leftrightarrow y$; 6) $\overline{x \wedge y \vee x \vee y}$.

2.2. Некоторые приложения алгебры высказываний

Можно выделить следующие направления использования алгебры высказываний:

1. Анализ содержания сложного предложения или группы предложений путем составления формулы и равносильного преобразования ее.

2. Решение логических задач.

3. Анализ рассуждений, который включает в себя проверку правильности уже сделанных выводов на основании данных посылок (правильности аргумента), а также поиск недостающих посылок неполных умозаключений.

4. Анализ и синтез контактных схем.

Остановимся на некоторых из них.

2.2.1. Проверка правильности рассуждения (аргумента)

Проверка правильности аргумента предполагает по форме (структуре) предложений, последовательность которых выражает некоторое рассуждение, определить, правильно это рассуждение или нет. Для решения этой задачи следует, отвлекаясь от содержания рассуждения, заменить фигурирующие в нем элементарные высказывания переменными и получить следующую схему: «Из $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ следует (выводится) φ ». Это надо понимать так: «Если истинны высказывания со структурой, выражаемой формулами $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ (посылки), то истинно и высказывание со структурой, выражаемой формулой φ (заключение)». Иначе говоря, при выводе заключения из некоторой совокупности посылок считается, что если все посылки истинны и рассуждение верно, то и заключение должно быть истинным.

Схему, или правило, вывода (умозаключение, в терминах традиционной логики) с посылками $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ и заключением φ записывают следующим образом:
$$\frac{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n}{\varphi}.$$

Совокупность предложений, про одно из которых, называемое *заключением*, говорится, что оно следует из остальных, называемых *посылками*, называется **аргументом**. Аргумент называется **правильным**, если из конъюнкции его посылок следует заключение.

Это определение равносильно следующему утверждению.

Аргумент является **правильным**, если импликация

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$$

является *тождественно истинной формулой* алгебры высказываний.

Отсюда вытекает следующее правило. Чтобы установить, является ли аргумент правильным, достаточно:

- а) формализовать все посылки и заключение и составить схему рассуждения;
- б) составить конъюнкцию формализованных посылок;
- в) записать импликацию: из конъюнкции посылок следует заключение;
- г) исследовать полученную формулу на тождественную истинность. Если она тождественно истинная, то аргумент правильный, если нет – то неправильный.

Задачи

28. Докажите, что данный аргумент – правильный:

- 1) $\frac{a \Rightarrow b, a}{b}$; 2) $\frac{a \Rightarrow b, \bar{b}}{\bar{a}}$; 3) $\frac{a \Rightarrow b}{\bar{b} \Rightarrow \bar{a}}$; 4) $\frac{a \wedge b \Rightarrow c}{a \wedge c \Rightarrow b}$;
- 5) $\frac{a \Rightarrow b, b \Rightarrow c}{a \Rightarrow c}$; 6) $\frac{a \Rightarrow b, b}{a}$; 7) $\frac{a \Rightarrow b, \bar{a}}{\bar{b}}$.

Заметим, что в классической логике первые пять правил вывода называются соответственно: утверждающий модус, отрицающий модус, правило контрапозиции, правило расширенной контрапозиции, правило силлогизма.

29. Проверьте правильность следующего аргумента.

Если будет потепление погоды, то пойдет снег. Потепления не будет. Следовательно, снега не будет.

Решение. 1. Составим схему рассуждения:

$$\frac{p \Rightarrow c, \bar{p}}{\bar{c}}.$$

2. Запишем импликацию, тождественную истинность которой требуется проверить: $(p \Rightarrow c) \wedge \bar{p} \Rightarrow \bar{c}$.

3. Преобразуем полученную формулу:

$$\begin{aligned} (p \Rightarrow c) \wedge \bar{p} \Rightarrow \bar{c} &\equiv (\bar{p} \vee c) \wedge \bar{p} \vee \bar{c} \equiv \bar{p} \vee c \vee p \vee \bar{c} \equiv p \wedge \bar{c} \vee p \vee \bar{c} \equiv \\ &\equiv (p \vee p \vee \bar{c}) \wedge (\bar{c} \vee p \vee \bar{c}) \equiv (p \vee \bar{c}) \wedge (p \vee \bar{c}) \equiv (p \vee \bar{c}). \end{aligned}$$

Формула, к которой пришли, не является тождественно истинной, ибо может принимать как истинное значение, так и ложное, а значит, данный аргумент не является правильным.

30. Докажите, что аргумент является правильным.

- 1) $\frac{a \Rightarrow \bar{b}, b}{a \wedge b}$;
- 2) $\frac{a \wedge \bar{b}}{a \Rightarrow b}$;
- 3) $\frac{a \Rightarrow (b \Rightarrow c)}{(a \wedge b) \Rightarrow c}$;
- 4) $\frac{a \vee b, a \Rightarrow c, b \Rightarrow c}{c}$;
- 5) $\frac{a \Rightarrow b, c \Rightarrow d, a \vee c}{b \vee d}$.

31. Проверьте правильность следующего аргумента.

На день рождения было решено купить астры или георгины. Было также решено, что купленные цветы должны быть светлыми и красными. В магазине выяснилось, что все светлые астры не красные. Вывод: были куплены георгины.

32. Выясните, логично ли проведены следующие рассуждения.

1. Либо растет курс ценных бумаг, либо налоги повышаются. Если курс ценных бумаг увеличивается, то повышается их ликвидность. Если налоги повышаются, то увеличивается стоимость жизни. Следовательно, либо повышается ликвидность ценных бумаг, либо увеличивается стоимость жизни.

2. Если будет инфляция, то заработная плата увеличится. Если инфляции не будет, то уменьшатся налоги. Следовательно, либо заработная плата увеличивается, либо уменьшаются налоги.

3. Или Иванов победит в соревнованиях, или Петров выиграет в лотерее. Если Иванов победит в соревнованиях, то его наградят грамотой. Если Петров выиграет в лотерее, то он получит приз. Следует ли отсюда, что Иванова наградят грамотой либо Петров получит приз?

4. Дима или заболел, или не выучил уроки. Если Дима болеет, то он не идет в школу. Дима пошел в школу. Следует ли отсюда, что Дима выучил уроки?

5. Обвиняемого нельзя признать виновным, если он не был в Ярославле первого января в 18 часов. Установлено, что в это время обвиняемый был в Москве. Значит, он невиновен.

6. Я заплачу бы за ремонт телевизора, если бы он стал работать. Он же не работает. Поэтому я платить не буду.

7. Неверно, что если Федоров юрист, то он следовательно прокураторы. Федоров не юрист. Следовательно, он не следовательно прокураторы.

8. Если он принадлежит к нашей компании, то он умен и на него можно положиться. Он не принадлежит к нашей компании. Значит, на него нельзя положиться или он не умен.

9. Если он автор этого слуха, то он глуп или беспринципен, но он неглуп и не лишен принципов. Значит, не он автор этого слуха.

10. Намеченная атака удастся, если захватить противника врасплох или же если его позиции будут плохо защищены. Захватить его врасплох можно только, если он беспечен. Он не будет беспечен, если его позиции плохо защищены. Значит, атака не удастся.

11. Если мы не будем продолжать политику сохранения цен, то мы потеряем голоса избирателей. Если же мы будем продолжать эту политику, то продолжится перепроизводство, разве что мы прибегнем к контролю над производством. Без голосов избирателей нас не переизберут. Значит, если нас все-таки переизберут и мы не прибегнем к контролю над производством, то будет продолжаться перепроизводство.

12. В бюджете возникнет дефицит, если не повысить пошлины. Если в бюджете возникнет дефицит, то государственные расходы на общественные нужды сократятся. Значит, если повысят пошлины, то государственные расходы на общественные нужды не сократятся.

13. Если подозреваемый совершил эту кражу, то либо она была тщательно подготовлена, либо он имел соучастника. Если бы кража была подготовлена тщательно, то, если бы был соучастник, украдено было бы гораздо больше. Значит, подозреваемый невиновен.

14. Если Иванов готовится к экзамену и имеет шпаргалки, то он идет сдавать экзамен. Верно ли, что если Иванов готовился к экзамену, но не пошел его сдавать, то у него не было шпаргалок.

15. Если бы он ей ничего не сказал, то она ни за что бы этого не узнала. А не спроси она его, он бы и не сказал ей ничего. Но она об этом узнала. Значит, она его спросила.

16. Профсоюзы штата будут поддерживать этого губернатора только в том случае, если он подпишет данный билль. Фермеры окажут ему поддержку только в том случае, если он наложит на него вето. Очевидно, что он либо не подпишет билля, либо не наложит на него вето. Следовательно, губернатор

потеряет либо голоса рабочих, объединенных в профсоюзы, либо голоса фермеров.

17. Если я пойду завтра на первую пару, то должен буду встать рано, а если я пойду вечером на дискотеку, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно, а встану рано, то буду вынужден довольствоваться пятью часами сна. Я просто не в состоянии обойтись пятью часами сна. Следовательно, я должен пропустить завтра первое занятие или не ходить на дискотеку.

18. Если исход скачек будет предрешен сговором или в игорных домах будут орудовать шулеры, то доходы от туризма упадут и город пострадает. Если доходы от туризма упадут, полиция будет довольна. Но полиция никогда не бывает довольна. Следовательно, исход скачек не предрешен сговором.

19. Если «Шинник» выиграет, то Ярославль будет торжествовать, а если выиграет «Спартак», то торжествовать будет Москва. Выиграет или «Спартак», или «Шинник». Однако если выиграет «Шинник», то Москва торжествовать не будет, а если выиграет «Спартак», то не будет торжествовать Ярославль. Итак, Москва будет торжествовать тогда и только тогда, когда не будет торжествовать Ярославль.

20. Петров или переутомился, или болен. Если он переутомился, то он раздражается. Он не раздражается. Следовательно, он болен.

21. Если завтра будет контрольная по математике, то я пойду в университет, если урок будет подготовлен. Завтра будет контрольная по математике, а урок у меня не подготовлен. Следовательно, я не пойду в университет.

22. Если преступление будет раскрыто сегодня, то отдел завтра утром будет в изумлении. Если преступление сегодня раскрыто не будет, то ему будет казаться, что на него смотрят с сожалением. Следовательно, или отдел будет завтра в изумлении, или ему будет казаться, что на него смотрят с сожалением.

23. Если я поеду домой автобусом, а автобус опоздает, то я пропущу назначенное свидание. Если я пропущу назначенное свидание и начну огорчаться, то мне не следует ехать домой. Но если я не получу эту работу, то я тоже начну огорчаться и мне следует поехать домой. Следовательно, если я поеду автобусом и автобус опоздает, то я получу эту работу.

24. Если Иванов победит на выборах, он будет доволен, а если он будет доволен, то он плохой борец в предвыборной кампании. Но если он провалится на выборах, то потеряет доверие партии. Он плохой борец в предвыборной кампании, если потеряет доверие партии. Но если он плохой борец в предвыборной кампании, то ему следует выйти из партии. Иванов или победит на выборах, или провалится. Следовательно, ему нужно выйти из партии.

25. Николай и Дмитрий одного возраста или Николай старше Дмитрия. Если Николай и Дмитрий одного возраста, то Ольга и Дмитрий не одного возраста. Если Николай старше Дмитрия, то Дмитрий старше Михаила. Следовательно, или Ольга и Дмитрий не одного возраста, или Дмитрий старше Михаила.

26. Если шестнадцатилетний Марков вступит в брак, то он будет объявлен полностью дееспособным, но Марков не вступит в брак. Следовательно, он не будет полностью дееспособным.

27. Или Володин победит на президентских выборах, или Антипов займет вакансию судьи. Если Володин победит на президентских выборах, то он сформирует новое правительство; если Антипов займет вакансию судьи, то его материальное обеспечение улучшится. Следовательно, или Володин не сформирует новое правительство, или материальное обеспечение Антипова улучшится.

28. Либо усиливается борьба с преступностью, либо улучшаются условия жизни. Если усиливается борьба с преступностью, то увеличивается число заключенных. Если улучшаются условия жизни, то уменьшается число преступлений. Следовательно, либо увеличивается число заключенных, либо уменьшается число преступлений.

29. Обвиняемого нельзя привлечь к уголовной ответственности, если в момент совершения преступления он находился в состоянии невменяемости. Установлено, что в момент совершения преступления он не мог руководить своими действиями вследствие хронического психического расстройства. Значит, его нельзя привлечь к уголовной ответственности.

30. Я заключил бы договор купли-продажи с Леонидовым, только если он не лишен дееспособности. Но он признан недееспособным. Поэтому я не буду заключать договор купли-продажи с Леонидовым.

31. Неверно, что если «Астра-Плюс» юридическое лицо, то она закрытое акционерное общество. Но «Астра-Плюс» не юридическое лицо. Следовательно, она не закрытое акционерное общество.

32. Преступление удастся раскрыть, если взять с поличным исполнителя или добиться признания от пособника. Взять с поличным исполнителя можно, только если он потеряет бдительность. Он не потеряет бдительность, если от пособника добьются признания. Значит, преступление раскрыть не удастся.

2.2.2. Решение логических задач

Под логическими задачами обычно понимают такие задачи, которые решаются только с помощью одних логических операций и с использованием аппарата алгебры высказываний. При этом возникают трудности, связанные с переводом задач на язык алгебры высказываний и с использованием аппарата этой алгебры. Логические задачи могут решаться и фактически решаются обычными рассуждениями, иногда довольно длинными. Поэтому удобно использовать «комбинированный» метод, который состоит в том, что обычные рассуждения сочетаются с переводом условий задач на язык алгебры высказываний или со специально составленными таблицами, схемами.

Задачи

33. Однажды следователю пришлось одновременно допрашивать трех свидетелей: Клода, Жака и Дика. Их показания противоречили друг другу, и каждый из них обвинял кого-нибудь во лжи. Клод утверждал, что Жак лжет, Жак обвинял во лжи Дика, а Дик уговаривал следователя не верить ни Клоду, ни Жаку. Но следователь быстро вывел их на чистую воду, не задав им ни одного вопроса. Кто из свидетелей говорил правду?

Решение. Обозначим показания свидетелей Клода, Жака и Дика соответственно буквами *К*, *Ж*, *Д*. Мы не знаем, какие показания истинны, а какие ложны, но нам известно следующее:

1) либо Клод сказал правду, и тогда Жак солгал, либо Клод солгал, и тогда Жак сказал правду;

2) либо Жак сказал правду, и тогда Дик солгал, либо Жак солгал, и тогда Дик сказал правду;

3) либо Дик сказал правду, и тогда Клод и Жак солгали, либо Дик солгал, и тогда неверно, что оба других свидетеля солгали.

Каждое из этих трех высказываний является истинным, для каждого из них составим формулу алгебры высказываний:

$$1) K \wedge \overline{Ж} \vee \overline{К} \wedge Ж,$$

$$2) Ж \wedge \overline{Д} \vee \overline{Ж} \wedge Д;$$

$$3) Д \wedge \overline{К} \wedge \overline{Ж} \vee \overline{Д} \wedge (\overline{\overline{К} \wedge \overline{Ж}}).$$

Так как эти три формулы истинны одновременно, то истинна и их конъюнкция:

$$(K \wedge \overline{Ж} \vee \overline{К} \wedge Ж) \wedge (Ж \wedge \overline{Д} \vee \overline{Ж} \wedge Д) \wedge (Д \wedge \overline{К} \wedge \overline{Ж} \vee \overline{Д} \wedge \overline{\overline{К} \wedge \overline{Ж}}) \equiv 1.$$

В левой части уравнения выполним конъюнкцию, используя дистрибутивный закон и отбрасывая те слагаемые, в которых какое-либо высказывание умножается на свое отрицание, а также заменяя два одинаковых сомножителя одним таким сомножителем:

$$(\overline{К} \wedge Ж \wedge \overline{Д} \vee K \wedge \overline{Ж} \wedge Д) \wedge (Д \wedge \overline{К} \wedge \overline{Ж} \vee \overline{Д} \wedge (K \vee Ж)) \equiv \\ \overline{К} \wedge Ж \wedge \overline{Д} \wedge (K \vee Ж) \equiv \overline{К} \wedge Ж \wedge \overline{Д}.$$

Теперь наше уравнение равносильно совсем простому уравнению:

$$\overline{К} \wedge Ж \wedge \overline{Д} \equiv 1,$$

из которого следует, что $K = 0$, $Ж = 1$, $Д = 0$. Таким образом, Жак говорил правду, а показания Клода и Дика лживы.

34. После родительского собрания к учителю подошел один из родителей:

«Вы не назвали моего сына среди хороших учеников. А ведь мой Федя – отличник и к тому же лучший лыжник класса».

«Да, Вы правы, – ответил учитель, – но хорошим учеником мы считаем ученика, который хорошо учится, дисциплинирован, помогает в учебе отстающим и, кроме того, участвует в работе научного кружка или занимается спортом, а Ваш Федя...».

Что еще собирался сказать учитель?

Решение. Введем обозначения высказываний: 1) A – «Федя хорошо учится»; 2) B – «Федя дисциплинирован»; 3) C – «Федя помогает в учебе отстающим»; 4) D – «Федя участвует в работе научного кружка»; 5) E – «Федя занимается спортом».

Теперь утверждение «Федя – хороший ученик», согласно «определению» хорошего ученика, данному учителем, на языке алгебры высказываний можно записать так: $A \wedge B \wedge C \wedge (D \vee E)$.

Учитель утверждает, что «неверно, что Федя – хороший ученик», то есть он утверждает, что $\overline{A \wedge B \wedge C \wedge (D \vee E)} = 1$.

Преобразуем выражение, стоящее в левой части этого равенства по правилу де-Моргана: $\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D \vee E} = 1$.

Федин отец утверждает (и учитель согласился с ним), что $A=1$, а также $E=1$ (Федя – лучший лыжник класса). Тогда в полученном равенстве первое и последнее слагаемые ложны, поэтому оно равносильно условию $\overline{B} \vee \overline{C} = 1$. Отсюда следует, что учитель хотел сказать Фединому отцу, что Федя недисциплинирован или что он не помогает в учебе отстающим учащимся.

35. Было совершено ограбление. Мегре сообщили, что подозреваются трое бродяг: Луи, Франсуа и Этьен. Бродяги дали следующие показания:

Луи: «Чтобы обвинить меня, достаточно доказать, что Франсуа участвует в ограблении только тогда, когда в нем участвует Этьен, но я не виновен».

Франсуа: «Если Луи невиновен, то, чтобы обвинить меня, достаточно признать Этьена тоже невиновным. Но Этьен виновен тогда и только тогда, когда виновен Луи. А если Этьен виновен, то я не виновен».

Этьен: «Виновен либо я, либо Франсуа и Луи».

Мегре знал, что Этьен всегда лжет, а Луи и Франсуа всегда говорят правду. Это помогло ему распутать дело. Кто был причастен к ограблению?

36. Определить, кто из четырех подозреваемых участвовал в ограблении, если известно, что: 1) если А участвовал, то и В участвовал; 2) если В участвовал, то или участвовал С, или А не участвовал; 3) если D не участвовал, то А участвовал, а С не участвовал; 4) если D участвовал, то А участвовал.

37. Во время допроса каждый из трех подозреваемых сделал следователю три заявления.

Валет: «Я не виновен; Туза я не знаю; Серый знает, кто это сделал».

Хват: «Это сделал не я; с Серым я не знаком; это сделал Туз».

Туз: «Я не виновен; это сделал Серый; Хват лжет, это сделал не я».

Серый: «Я не виновен; это сделал Валет; Хват может за меня поручиться».

При перекрестном допросе каждый из них признал, что из трех сделанных им заявлений два верных и одно неверное. Определите преступника на основании полученной информации.

38. Шестеро подозреваемых в преступлении давали показания. А: «Е виновен». Б: «А лжет, и я не виновен». В: «Виновны А или Е, а возможно, и оба». Г: «В говорит правду». Д: «В и Е – оба лгут». Е: «Я не виновен». Если правду сказал один и только один из подозреваемых, то кто совершил преступление?

39. Четыре ученицы – Мария, Нина, Ольга и Полина – участвовали в соревнованиях и заняли первые четыре места. На вопрос, кто из них какое место занял, три девушки ответили:

- 1) Ольга была вторая, Полина – третья;
- 2) Ольга была первая, Нина – вторая;
- 3) Мария была вторая, Полина – четвертая.

В каждом из этих трех ответов одна часть верна, а другая неверна (какая именно часть верна – неизвестно). Какое место заняла каждая из девушек?

40. При составлении расписания на определенный день в определенном классе преподавателями были высказаны просьбы:

- 1) математик желает иметь первый или второй урок;
- 2) историк желает иметь первый или третий урок;
- 3) литератор желает иметь второй или третий урок.

Как удовлетворить всем пожеланиям и можно ли это сделать одним способом?

41. Составленная перед концертом программа выступления была потеряна. О порядке следования номеров сохранилась лишь следующая информация: танцоры должны выступать или вторыми, или третьими; музыканты – первыми или вторыми, певцы – первыми или третьими. Какой порядок следования номеров был в потерянной программе?

42. Четыре марсианки, оказавшиеся на Земле в 2... году, на вопрос об их возрасте дали ответы:

- 1) Ми – 22 года, Ме – 21 год;
- 2) Мо – 19 лет, Ми – 21 год;
- 3) Ма – 21 год, Мо – 18 лет.

Известно, что все марсианки – разных возрастов, причем только данных: 18, 19, 21 и 22 и что в каждом ответе одна часть верна, а другая неверна. Сколько лет каждой девушке?

43. Аня, Варя и Клава пошли на дискотеку. Одна из них была в красном платье, другая – в белом, третья – в синем. На вопрос, какое платье было на каждой из девушек, они дали такой ответ: Аня была в красном, Варя – не в красном, Клава – в не синем. В этом условном ответе из трех частей одна верна, две неверны. В каком платье была каждая из девушек?

44. Три брата имеют звание капитана, старшины и сержанта. Из трех утверждений «Алексей старшина», «Владимир не старшина», «Семен не сержант» лишь одно верно. Какие воинские звания у братьев?

45. Написав контрольную работу по математике, сестры сообщили своим родителям: Света: «На этот раз я написала на 5»; Люда: «Я написала не на 3»; Ира: «Я написала не на 5».

После проверки работ оказалось, что сестры получили разные положительные оценки и из трех высказываний сестер одно верное, а остальные – ошибочны. Какие оценки получили Света, Люда и Ира?

46. Шесть школьников А, В, С, Д, Е, Т участвовали в олимпиаде по математике. Двое из них решили задачи. На вопрос, кто решил, они ответили:

1) А и Е, 2) В и Т, 3) Т и А, 4) В и Д, 5) С и А.

В четырех из ответов одна часть верна, другая неверна; в одном из ответов обе части неверны. Кто из учеников решил задачи?

47. В конкурсе балльных танцев первые четыре места заняли танцевальные пары А, В, С, Д. На вопрос, какая пара какое место заняла, получены такие ответы:

а) «пара А победила, а В заняла второе место»;

б) «пара Д заняла второе место, а С – четвертое»;

в) «пара А заняла второе место, а С – третье».

Как выяснилось позднее, в каждом из этих утверждений одно высказывание истинно, а другое ложно. Какое место заняла каждая пара?

48. В велогонке участвовали 5 учащихся и заняли первые пять мест. На вопрос, кто из них какое место занял, ребята ответили:

1) «Сережа занял второе место, Коля – третье»;

2) «Надя – третье, Толя – пятое»;

- 3) «Толя – первое, Надя – второе»;
- 4) «Сережа – второе, Ваня – четвертое»;
- 5) «Коля – первое, Ваня – четвертое место».

В каждом ответе одна часть верна, а другая неверна. Определите, кто какое место занял.

49. В университете проводились соревнования по плаванию. Болельщики высказывали следующие предположения: 1) Саша будет первым, а Сережа вторым; 2) Первым будет Дима, а Костя займет третье место; 3) Дима будет вторым, а Сережа может рассчитывать только на третье место. По окончании соревнований выяснилось, что каждый из болельщиков в одном из предположений оказался прав. Кто же из студентов занял первое, второе, третье и четвертое места, если известно, что эти места распределены между вышеупомянутыми ребятами?

50. Семья, состоящая из отца *A*, матери *B* и трех дочерей – *C*, *D*, *E*, купила телевизор. Условились, что в первый вечер будут смотреть передачи в таком порядке:

- 1) Когда отец *A* смотрит передачу, то мать *B* делает то же;
- 2) Дочери *D* и *E*, обе или одна из них, смотрят передачу;
- 3) Из двух членов семьи – мать *B* и дочь *C* – смотрит передачу одна и только одна;
- 4) Дочери *C* и *D* или обе смотрят, или обе не смотрят;
- 5) Если дочь *E* смотрит передачу, то и отец *A*, и дочь *D* делают то же.

Кто из членов семьи в этот вечер смотрел передачу?

51. На вопрос, кто из *A*, *B*, *C* заслуживают доверия, каждый из них высказался о двух других следующим образом:

A: если *B* заслуживает доверия, то заслуживает и *C*.

B: *A* не заслуживает доверия, *C* заслуживает доверия.

C: *A* заслуживает доверия, *B* – нет.

Считая, что каждое из высказываний 1–3 истинно, если исходит от заслуживающего доверия, и ложно в противном случае, определите, кто из троих заслуживает доверия.

52. На вопрос, кто из трех учащихся *A*, *B*, *C* изучал логику, был получен следующий ответ: «Если изучал *A*, то изучал и *B*, но неверно, что если изучал *C*, то изучал *B*». Кто из них изучал логику?

53. Разбирается дело Брауна, Джонса и Смита. Один из них совершил преступление. В процессе расследования каждый из подозреваемых сделал по два заявления.

Браун: «Я не делал этого. Джонс не делал этого».

Джонс: «Браун не делал этого. Смит сделал это».

Смит: «Я не делал этого. Браун сделал это».

Было установлено, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал правду, третий раз солгал, раз сказал правду. Кто же совершил преступление?

54. На выборах четыре кандидата A , B , C и D набрали больше всего голосов, причем количества голосов, ими набранных, не совпадают. О результатах выборов были сделаны следующие предположения:

1) по количеству голосов кандидат C занял второе место, а кандидат D – третье;

2) кандидат C набрал голосов больше всех, а B был вторым;

3) второе место занял кандидат A , а D был четвертым.

Как распределились места между кандидатами, если известно, что в каждом из предположений одно утверждение верно, а другое ложно?

55. Для четырех человек A , B , C и D необходимо составить график работы на четыре дня подряд, учитывая, что:

а) C и D не могут работать в первый день;

б) если D выйдет на работу во второй день или C – в третий, то B сможет поработать в четвертый день;

в) если A не будет работать в третий день, то B согласен работать во второй день;

г) если A или C будут работать во второй день, то C выйдет на работу в четвертый;

д) если C не сможет работать в четвертый день, то A придется работать в первый, а D – в третий.

56. Встретились три друга: скульптор Белов, скрипач Чернов и художник Рыжов. «Замечательно, что один из нас имеет белые, один черные и один рыжие волосы, но что ни у одного из нас нет волос того цвета, на который указывает его фамилия», – заметил черноволосый. «Ты прав», – сказал Белов. Какой цвет волос у художника?

57. Петров, Иванов, Сидоров обвиняются в подделке сведений о подлежащих налоговому обложению доходов. Они дают под присягой следующие показания.

Петров: «Иванов виновен, а Сидоров нет».

Иванов: «Если Петров виновен, то виновен и Сидоров».

Сидоров: « Я не виновен, но хотя бы один из двух других виновен».

Ответьте на следующие вопросы: а) Совместимы ли показания всех троих подозреваемых? б) Показания одного из обвиняемых следуют из показаний другого; о чьих показаниях идет речь? в) Если все трое невиновны, то кто совершил лжесвидетельство? г) Предполагая, что показания всех обвиняемых верны, укажите, кто невиновен, а кто виновен; д) Если невиновный говорит истину, а виновный лжет, то кто невиновен, а кто виновен?

58. Предположим, что имеются следующие сведения о трех болезнях b_1, b_2, b_3 и трех симптомах c_1, c_2, c_3 :

1) У больного, страдающего, по крайней мере, одной из болезней b_1, b_2, b_3 , имеется, по крайней мере, один из симптомов c_1, c_2, c_3 .

2) Если больной страдает болезнью b_2 , но не страдает болезнью b_3 , то у него обнаруживаются симптомы c_1 и c_2 или не обнаруживается симптом c_1 .

3) У больного, страдающего болезнью b_1 , но не страдающего болезнью b_3 , обнаруживается симптом c_2 .

4) У больного, страдающего болезнью b_3 , но не страдающего болезнью b_2 , обнаруживается симптом c_2 , но не обнаруживается симптом c_1 .

5) Если у больного обнаруживается симптом c_1 и он страдает болезнью b_1 или не страдает ни одной из болезней b_1, b_2, b_3 , то у него обнаруживается и симптом c_2 .

Поставьте диагноз на основании симптомов и условий 1–5.

59. Следователь допрашивает четырех гангстеров по делу похищения автомобиля. Джек сказал: «Если Том не угонял автомобиль, то его угнал Боб». Боб сказал: «Если Джек не угонял автомобиль, то его угнал Том». Фред сказал: «Если Том не угонял автомобиль, то его угнал Джек». Том сказал: «Если Боб не угонял автомобиль, то его угнал я». Удалось выяснить, что Боб солгал, а Том сказал правду. Правдивы ли показания Джека и Фреда? Кто угнал машину?

60. Петрову, Иванову, Сидорову предъявляется обвинение в соучастии в ограблении банка. Известно, что похитители скрылись на автомобиле. На следствии Петров показал, что преступники были на синем Москвиче, Иванов сказал, что это была черная Волга, а Сидоров утверждал, что это был Мерседес и ни в коем случае не красный. Можно ли по этим данным определить, на каком автомобиле скрылись преступники?

61. Писатели *A, B, C и D* пишут под псевдонимами *X, Y, Z, W*. Определите, какой именно псевдоним использует каждый из писателей, если известно следующее:

- 1) если *D* не *X*, то *B* есть *X*;
- 2) если *B* не *X* и не *W*, то *A* есть *X*;
- 3) если *C* не *W*, то *B* есть *Z*;
- 4) если *D* есть *Y*, то *B* не *X*;
- 5) если *A* не *X*, то *C* не *Y*.

62. Студент пришел сдавать экзамен автоматическому экзаменатору. На экране автомата появилось пять вопросов, на каждый из которых требуется дать ответ «да» или «нет».

После ответа на все вопросы автомат, оценивая каждый правильный ответ в один балл, ставит общую оценку за экзамен. Студент прочел все вопросы и с огорчением вынужден был констатировать, что он не знает ответа ни на один из них. Все его знания сводились к следующему:

- 1) первый и последний вопросы требуют противоположных ответов;
- 2) напротив, второй и четвертый вопросы должны иметь одинаковые ответы;
- 3) хотя бы один из первых двух вопросов требует ответа «да»;
- 4) если четвертый вопрос требует ответа «да», то пятый вопрос требует ответа «нет».

Картина получалась невеселая, но студент не отчаивался. Он плохо знал предмет, но зато хорошо умел решать логические задачи. Проведя какие-то вычисления, он с радостью обнаружил, что 4 балла ему обеспечены, а если повезет, то он получит и все 5. Попробуйте восстановить рассуждения студента.

63. У автора брошюры в детстве было 4 друга. Звали их Альберт, Карл, Дидрих и Фридрих. В один из осенних дней они впервые переступили порог школы. Учительница сказала им, что с это-

го дня она будет их называть по имени и фамилии. Оказалось, что у друзей фамилии те же, что и имена, только ни у кого из них имя и фамилия не были одинаковы. Кроме того, фамилия Дидриха не была Альберт. Определить фамилию каждого из мальчиков, если известно, что имя мальчика, у которого фамилия Фридрих, есть фамилия того мальчика, имя которого – фамилия Карла.

64. Три брата (Иван, Дмитрий и Сергей) преподают различные дисциплины (химию, биологию, историю) в университетах Москвы, Санкт-Петербурга и Киева. Известно, что 1) Иван работает не в Москве, а Дмитрий не в Санкт-Петербурге; 2) москвич преподает не историю; 3) тот, кто работает в Санкт-Петербурге, преподаёт химию; 4) Дмитрий преподаёт не биологию.

Что и в университете какого города преподаёт Сергей?

2.2.3. Задачи синтеза и анализа контактных схем

Контактная схема является устройством из контактов и проводов, связывающих несколько полюсов (входов, выходов). Высказывания и электрические контакты – объекты совершенно разной природы, но между ними все-таки есть сходство. Высказывания могут принимать только два значения (0, 1), а электрические контакты могут находиться только в двух состояниях («замкнуто», «разомкнуто»). Это сходство служит основой для применения алгебры высказываний к задачам синтеза и анализа схем и, наоборот, для моделирования формул алгебры высказываний схемами.

Идея о возможности такого применения была высказана еще в 1910 г. физиком П. Эренфестом. Однако строгое доказательство возможности и методика применения алгебры высказываний к синтезу и анализу электрических цепей впервые были разработаны в 1930-х гг. советским ученым В. И. Шестаковым и американским ученым К. Э. Шенноном.

Под *синтезом схемы* понимают конструирование схемы по заданным условиям ее работы (замыкания и размыкания), то есть на основе указания состояния контактов, при котором схема работает.

Под *анализом схемы* понимают обратную задачу: определение условий работы заданной схемы по ее виду.

Попутно с этими задачами возникает третья задача – упрощение схемы, то есть конструирование эквивалентной схемы

(схемы, работающей при тех же условиях, при которых работает исходная схема, но с меньшим числом контактов).

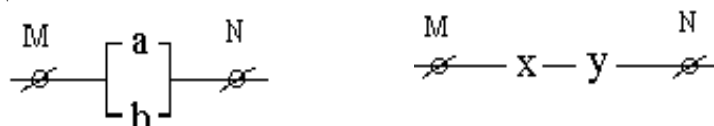
Для установления соответствия между формулами алгебры высказываний и контактными схемами составим следующий словарь.

Язык алгебры высказываний	Язык алгебры контактных схем
a, b, c, \dots — высказывания, каждое из которых может быть истинным или ложным	a, b, c, \dots — контакты, каждый из которых может быть замкнут или разомкнут
1 — истинное высказывание (истина)	Замкнутый контакт (замкнуто)
0 — ложное высказывание (ложь)	Разомкнутый контакт (разомкнуто)

Посмотрим теперь, какие схемы соответствуют основным операциям алгебры высказываний: дизъюнкции, конъюнкции и отрицанию.

Дизъюнкции $a \vee b$ соответствует схема, составленная из контактов a и b так, что она замкнута тогда и только тогда, когда замкнут хотя бы один из контактов, то есть схема, состоящая из параллельного соединения контактов.

Конъюнкции $a \wedge b$ соответствует схема, составленная из контактов a и b так, что она замкнута тогда и только тогда, когда замкнуты оба контакта, то есть схема, состоящая из последовательного соединения контактов.



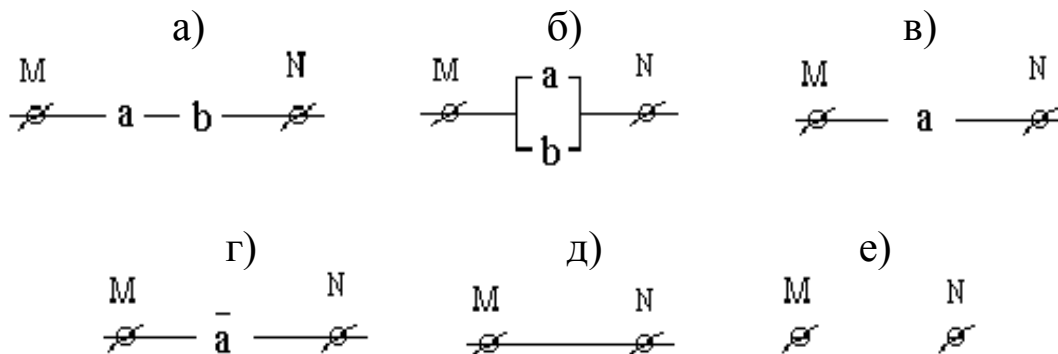
Схема, соответствующая \bar{a} , состоит из контакта \bar{a} , называемого инверсией контакта a и управляемого тем же элементом (реле, выключателем), что и a . Это, по существу, означает, что a и \bar{a} — это два контакта, находящиеся всегда в противоположных состояниях: когда один замкнут, второй — разомкнут.

Так как каждая формула алгебры высказываний может быть выражена с помощью операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, то каждой формуле алгебры высказываний можно поставить в соответствие контактную схему, составленную из контактов и их инверсий с помощью последовательных и параллельных соединений. Соответствие между формулами алгебры высказываний и контактными схемами является взаимно однозначным и обладает тем свойством, что переводит равносильные формулы

алгебры высказываний в эквивалентные схемы, то есть схемы, которые при любых наборах положений входящих в них контактов принимают одинаковые состояния.

Задачи

65. Найдите формулы, которые представляют следующие контактные схемы:



66. Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме, изображенной на рисунке. Рассмотрим высказывания:

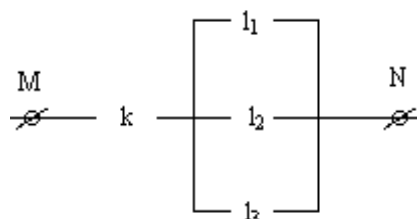
a – «элемент k цепи вышел из строя»,
 b_i – «элемент l_i цепи вышел из строя».

Замкнута ли цепь, если

а) высказывание $a \vee (b_1 \wedge b_2 \wedge b_3)$ истинно,

б) высказывание $\bar{a} \wedge (\bar{b}_1 \vee \bar{b}_2 \vee \bar{b}_3)$ истинно? Является ли одно

из этих высказываний отрицанием другого?



Решение. а) Нет. Если a истинно, то элемент k вышел из строя и тока нет. Если $b_1 \wedge b_2 \wedge b_3$ истинно, то вышли из строя одновременно все три элемента l_i и тока нет.

б) Ток проходит по цепи, так как элемент k и, по крайней мере, один из элементов l_1, l_2, l_3 находятся в рабочем состоянии.

Проверьте, что высказывание (б) есть отрицание высказывания (а) самостоятельно.

67. Составьте контактные схемы для следующих логических функций:

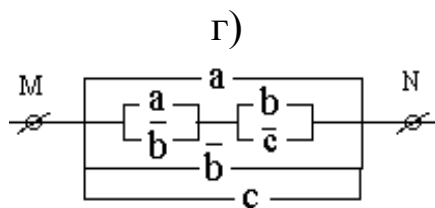
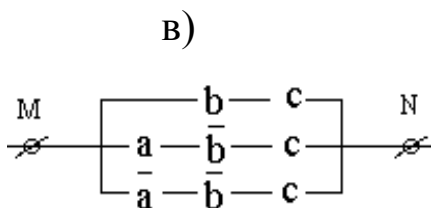
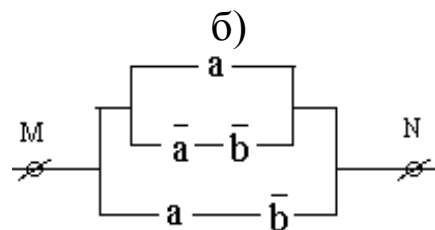
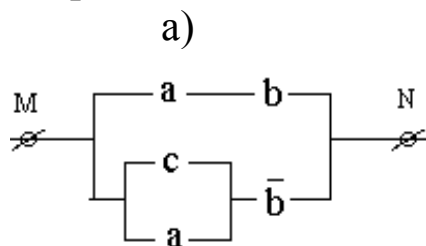
1. $\overline{x \wedge y \vee z \wedge t}$;
2. $x \wedge y \vee y \wedge z \vee x \wedge z$;
3. $(a \vee b \vee c \vee \bar{a}) \wedge (s \vee t)$;

4. $a \wedge b \wedge (c \wedge d \wedge e \vee \bar{d} \wedge e)$;
5. $a \wedge b \wedge c \wedge (e \vee h \vee d)$;
6. $a \wedge (b \vee c) \vee b \wedge c$;
7. $a \wedge b \wedge c \vee a \wedge \bar{b} \wedge c \vee a \wedge b \wedge \bar{c} \wedge d \wedge \bar{y}$;
8. $x \wedge y \vee \bar{x} \wedge y \vee \bar{x} \wedge \bar{y}$;
9. $(x \vee y) \wedge \bar{z} \vee \bar{x} \wedge z \vee y$;
10. $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)$;
11. $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$;
12. $(x \Rightarrow y) \Rightarrow \bar{x} \wedge (y \vee z)$;
13. $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (y \Rightarrow \bar{x})$.

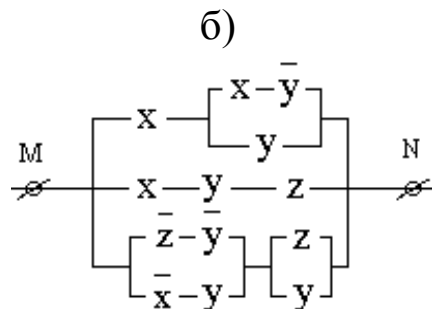
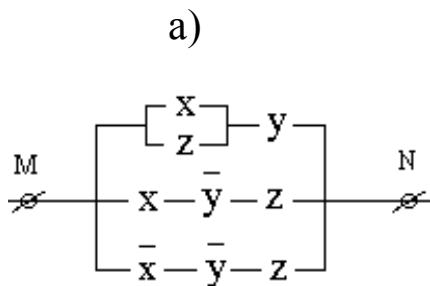
68. Составьте контактную схему из контактов a , b , c и их инверсий так, чтобы она была замкнутой тогда и только тогда, когда:

- а) замкнуты только два из трех контактов a , b , c ;
- б) замкнуты не более двух из трех контактов a , b , c ;
- в) замкнуты не менее двух из трех контактов a , b , c .

69. Упростите схемы:



70. Упростите схемы:



71. Функция $f(x, y, z)$ задана таблицей. Построить контактную схему, представляющую данную функцию

а)

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

б)

x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	1
0	1	1	0
1	1	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1
0	0	1	0
0	0	0	0

72. Машина-экзаменатор дает сигнал «зачет» в том и только том случае, если экзаменующийся правильно ответил хотя бы на два из трех вопросов билета. При вводе в машину правильного ответа замыкается контакт в цепи сигнальной лампочки. Постройте схему этой цепи.

73. Постройте схему, позволяющую включать и выключать в комнате верхний свет любым из трех выключателей, один из которых находится при входе в комнату, другой – над письменным столом, третий – над диваном.

74. Комитет, состоящий из трех человек, включая председателя, выносит решение большинством голосов. Однако решение не может быть принято, если за него не проголосовал председатель. Голосование «за» производится нажатием кнопки, замыкающей контакт, и в случае принятия решения зажигается лампочка. Постройте простейшую схему такой цепи.

75. Прибор состоит из двух блоков. Первый блок состоит из четырех одинаковых деталей и работает при исправности хотя бы двух из них. Второй блок состоит из пяти одинаковых деталей и работает при исправности хотя бы трех из них. Весь прибор работает, если работают оба блока. Составить контактную схему, реализующую работу прибора.

2.3. Предикаты

2.3.1. Понятие предиката. Область истинности предиката

Средствами логики высказываний нельзя выразить тот факт, что из предложения: «Не всякий человек, знающий Уголовный кодекс, становится хорошим юристом» следует предложение: «Есть люди, которые знают Уголовный кодекс, но не являются хорошими юристами». Здесь использованы связи между некоторыми утверждениями, которые высказываниями не являются: «Человек X знает Уголовный кодекс» и «Человек X – хороший юрист». Эти утверждения становятся высказываниями, если вместо переменной X подставить какое-то конкретное ее значение (в нашем случае имеется в виду какой-то конкретный человек). Только после подстановки вместо X конкретного значения эти утверждения принимают истинностные значения 0 или 1 в зависимости от значения истинности полученного высказывания. В сущности, мы имеем здесь дело с функцией, областью определения которой (множеством значений переменной) является множество людей, а множеством значений – множество, состоящее из двух элементов: $\{0, 1\}$. По-другому можно было бы сказать, что мы рассматриваем некоторые свойства людей (свойство человека, состоящее в том, что он знает Уголовный кодекс, или свойство человека, заключающееся в том, что он юрист).

Определение 1. Утверждения, выражающие свойства объектов-переменных и обращающиеся в высказывания при замене переменных их конкретными значениями, называются *предикатами*.

В математических терминах можно было бы сказать, что *предикат* – это функция, отображающая множество объектов произвольной природы во множество $\{0; 1\}$.

Эта функция, как и любая функция, обозначается символами $P(x)$, $F(x)$ и т. д.

Еще *пример*. Рассмотрим предложение: X есть приток реки Y . Это тоже предикат, но уже от двух переменных. В роли X и Y выступают реки. Если вместо X и Y будем подставлять конкретные значения, получим высказывания. Например, «Которосль – приток Волги» – истинное высказывание (1), а «Волга – приток Енисея» – ложное высказывание (0). Здесь имеем отображение множества пар (пар рек) – во множество $\{0, 1\}$. В таких случаях говорят, что рассматриваемый предикат выражает отношения меж-

ду объектами (реками) или, по-другому, выражает некоторое свойство упорядоченных пар объектов (рек). Предикаты, зависящие от двух переменных, называют **двухместными** и обозначают как функцию от двух переменных: $F(x, y)$.

Можно строить предикаты от любого произвольного числа переменных, например утверждение «Человек по имени X , отчеству Y , фамилии Z окончил факультет T Ярославского госуниверситета в I году» есть предикат от 5 переменных.

Обозначают предикаты, как уже говорилось, так же как и функции, большими буквами латинского алфавита, а их переменные – малыми буквами того же алфавита. Например, предикаты: x – студент ЯрГУ; x есть отец y ; $x + y = z$ – могут быть записаны соответственно символами: $P(x)$, $Q(x, y)$, $R(x, y, z)$.

С каждым предикатом связаны два множества: *область определения* и *множество истинности*.

Область определения предиката – это множество значений переменных, от которых зависит предикат.

Множество истинности – это множество тех значений переменных из области определения, при которых предикат превращается в истинное высказывание.

Предикат называется *тождественно истинным*, если его область определения и множество истинности совпадают.

Предикат называется *тождественно ложным*, если его множество истинности – пустое множество.

Предикат называется *выполнимым*, если существуют такие значения переменных, при которых предикат превращается в истинное высказывание, т. е. если его множество истинности не пусто.

2.3.2. Логические операции над предикатами

Определение 2. *Отрицанием предиката $A(x)$, заданного на множестве M , называется предикат $\overline{A(x)}$, определенный на том же множестве M и обращающийся в истинное высказывание для тех и только тех элементов множества M , при которых $A(x)$ – ложное высказывание.*

Определение 3. *Дизъюнкцией $A(x) \vee B(x)$ предикатов $A(x)$ и $B(x)$ с общей областью определения M называется предикат, обращающийся в ложное высказывание для тех и только тех эле-*

ментов множества M , при которых оба предиката $A(x)$ и $B(x)$ становятся ложными высказываниями.

Определение 4. *Конъюнкцией $A(x)$ & $B(x)$ предикатов $A(x)$ и $B(x)$ с общей областью определения M называется предикат, обращающийся в истинное высказывание для тех и только тех элементов множества M , при которых оба предиката являются истинными высказываниями.*

Определение 5. *Импликацией $A(x) \Rightarrow B(x)$ предикатов $A(x)$ и $B(x)$ с общей областью определения M называется предикат, обращающийся в ложное высказывание для тех и только тех элементов множества M , при которых предикат $A(x)$ является истинным высказыванием, а предикат $B(x)$ – ложным.*

Определение 6. Два предиката с общей областью определения *равносильны*, если при подстановке любых значений переменных из области определения в данные предикаты значения истинности получаемых высказываний совпадают.

Законы равносильности предикатов аналогичны соответствующим законам алгебры высказываний.

Над предикатами выполняются еще две операции, соответствующие двум логическим связкам, часто употребляемым в рассуждениях и выражающимся словами: «каждый» («всякий», «любой») и «существует» – и называемые навешиванием кванторов.

Навешивание кванторов на предикат

Пусть $P(x)$ – какой-нибудь предикат. *Навешивание квантора всеобщности* – это операция, которая сопоставляет предикату $P(x)$ высказывание «Для всякого x имеет место $P(x)$ ».

Для обозначения этой операции употребляется знак \forall . В словесных формулировках этот знак заменяет слова «все», «всякий», «любой», «каждый». Символическая запись операции имеет вид: $(\forall x) P(x)$.

Заметим, что высказывание $(\forall x) P(x)$ есть ложное высказывание, кроме того единственного случая, когда $P(x)$ – тождественно истинный предикат. Таким образом, высказывание $(\forall x) P(x)$ истинно в том и только том случае, когда предикат $P(x)$ тождественно истинен.

Навешивание квантора существования – это операция, которая предикату $P(x)$ сопоставляет высказывание «существует та-

кое x , что имеет место $P(x)$ ». Его символическая запись имеет вид $(\exists x)P(x)$.

Высказывание $(\exists x)P(x)$ истинно тогда и только тогда, когда в области определения M предиката найдется хотя бы один объект a такой, что высказывание $P(a)$ истинно. Отсюда следует, что $(\exists x)P(x)$ — истинное высказывание для всех выполнимых предикатов $P(x)$.

Знак существования \exists употребляется вместо слов «хотя бы один», «найдется», «существует».

Несмотря на то что в записях формул $(\forall x)P(x)$ и $(\exists x)P(x)$ встречается буква x , обозначающая переменную, обе эти формулы обозначают высказывания: от переменной x они больше не зависят. Принято говорить, что в формулах $(\forall x)P(x)$ и $(\exists x)P(x)$ кванторы \forall и \exists *связывают* переменную x .

Навешивание квантора всеобщности есть обобщение операции конъюнкции на произвольное конечное или бесконечное множество членов конъюнкции (сомножителей).

Навешивание квантора существования на предикат есть обобщение операции дизъюнкции на произвольное конечное или бесконечное множество членов дизъюнкции (слагаемых).

Если предикат зависит от нескольких переменных, то навешивание одного квантора понижает число переменных на единицу. Чтобы получить из предиката высказывание, надо связать кванторами все его переменные. Например, из предиката $Q(x, y)$: $x > y$, определенного на множестве пар действительных чисел, навешиванием кванторов можно получить 8 высказываний с соответствующими значениями истинности:

$$(\forall x)(\forall y)(x > y) = 0, \quad (\forall x)(\exists y)(x > y) = 1,$$

$$(\forall y)(\forall x)(x > y) = 0, \quad (\exists y)(\forall x)(x > y) = 0,$$

$$(\exists x)(\exists y)(x > y) = 1, \quad (\forall y)(\exists x)(x > y) = 1,$$

$$(\exists y)(\exists x)(x > y) = 1, \quad (\exists x)(\forall y)(x > y) = 0.$$

Этот пример показывает, что разноименные кванторы, вообще говоря, менять местами нельзя: при перестановке кванторов значение истинности получаемого высказывания меняется. Попробуйте выяснить, в каком случае разноименные кванторы можно переставлять.

Заметим, наконец, что между кванторами имеют место соотношения, позволяющие сводить один из этих кванторов к другому:

$$\overline{(\forall x)P(x)} \equiv (\exists x)\overline{P(x)},$$

$$\overline{(\exists x)P(x)} \equiv (\forall x)\overline{P(x)}.$$

Задача. Записать высказывание, используя символы кванторов и предикатов, и построить его отрицание: В каждом городе, на каждой улице есть дом с балконом.

Решение. Пусть $P(x)$: x – город; $Q(x, y)$: y – улица города x ; $R(z)$: z – дом с балконом, $M(x, y, z)$: z – дом на улице y в городе x . Тогда формула высказывания имеет вид

$$(\forall x)(\forall y)(P(x) \wedge Q(x, y) \Rightarrow (\exists z)(M(x, y, z) \wedge R(z))).$$

Построим отрицание этой формулы:

$$\begin{aligned} & \overline{(\forall x)(\forall y)(P(x) \wedge Q(x, y) \Rightarrow (\exists z)(M(x, y, z) \wedge R(z)))} \equiv \\ & \equiv (\exists x)(\exists y) \overline{(P(x) \wedge Q(x, y) \Rightarrow (\exists z)(M(x, y, z) \wedge R(z)))} \equiv \\ & \equiv (\exists x)(\exists y) \overline{(P(x) \wedge Q(x, y) \wedge \overline{(\exists z)(M(x, y, z) \wedge R(z))})} \equiv \\ & \equiv (\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(x, y) \wedge (\forall z) \overline{(M(x, y, z) \wedge R(z))}). \end{aligned}$$

Задачи

76. Какие из следующих выражений являются предикатами?

- а) Человек x – преступник.
- б) $x^2 + x + 1 = 0$.
- в) Человек x – адвокат человека y .
- г) a и b проходят подозреваемыми по делу № z .
- д) $b \Rightarrow a$.
- е) Иван и Марья – супруги.
- ж) $A \cap B = \emptyset$.

77. Определить множество истинности предиката, если

$$P(x) = \{x \in A \mid x \text{ есть четное число}\}, \quad A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

78. Даны предикаты $A(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 3 < 0\}$ и $B(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 2 \geq 0\}$.

Найти множество истинности следующих предикатов:

- а) $A(x) \vee B(x)$; б) $A(x) \wedge B(x)$; в) $A(x) \wedge \overline{B(x)}$;
- г) $A(x) \Rightarrow B(x)$; д) $A(x) \Rightarrow \overline{B(x)}$; е) $\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$.

79. Записать множество истинности предиката

$$(x + 2)(2x + 1)(x^2 - 2)(x^2 + 1) = 0, \text{ определенного на:}$$

- а) множестве натуральных чисел;
- б) множестве целых чисел;

в) множестве рациональных чисел;

г) множестве вещественных чисел.

80. Пусть имеются предикаты $A(x)$ и $B(x)$. Изобразите в виде кругов Эйлера их множества истинности, затем изобразите множества истинности следующих предикатов:

- 1) $\overline{A(x)}$; 2) $A(x) \vee B(x)$; 3) $A(x) \wedge B(x)$;
4) $\overline{A(x) \wedge B(x)}$; 5) $\overline{A(x) \vee B(x)}$; 6) $A(x) \Rightarrow B(x)$;
7) $\overline{A(x) \Rightarrow B(x)}$; 8) $\overline{B(x) \Rightarrow A(x)}$.

81. В аристотелевой логике рассматривалось четыре вида так называемых категорических суждений:

1. «Все S суть P » – общеутвердительное суждение;
2. «Ни одно S не есть P » – общеотрицательное суждение;
3. «Некоторые S суть P » – частноутвердительное суждение;
4. «Некоторые S не суть P » – частноотрицательное суждение.

Пусть S – переменное, а P – фиксированное утверждение. Запишите данные схемы высказываний на языке логики предикатов. Постройте отрицания к ним. Решите эту же задачу для случая, когда и S , и P – переменные.

82. Используя предикаты $P(x) = \{x - \text{простое число}\}$, $S(x) = \{x - \text{четное число}\}$, $Q(x) = \{x - \text{отрицательное число}\}$, $R(x, y) = \{x > y\}$, операции над ними и кванторы, запишите следующие высказывания:

- а) существует простое четное число;
- б) всякое простое число, большее двух, нечетно;
- в) не существует отрицательного числа, большего нуля;
- г) не существует простого четного числа, большего двух.

83. Сформулируйте следующие высказывания и укажите их значения истинности:

- а) $(\forall x)(\exists y)(x + y = 4)$; б) $(\exists y)(\forall x)(x + y = 4)$;
в) $(\exists x)(\exists y)(x + y = 4)$; г) $(\forall x)(\forall y)(x + y = 4)$.

84. Пусть на множестве натуральных чисел определены следующие предикаты: $P(x) = \{x - \text{простое число}\}$, $R(x) = \{x - \text{четное число}\}$, $Q(x) = \{x - \text{нечетное число}\}$, $S(x, y) = \{x \text{ делится на } y\}$. Сформулируйте следующие утверждения:

- а) $P(5)$; б) $R(2) \wedge P(2)$; в) $(\forall x)(S(x, 2) \Rightarrow R(x))$;
 г) $(\exists x)(R(x) \wedge S(x, 6))$; д) $(\exists x)(Q(x) \wedge P(x))$;
 е) $(\forall x)(\overline{R(x)} \Rightarrow \overline{S(x, 2)})$; ж) $(\forall x)(\exists y)(R(y) \wedge S(x, y) \Rightarrow R(x))$;
 з) $(\forall x)((P(x) \Rightarrow (\exists y)(R(y) \wedge S(y, x)))$;
 и) $(\forall x)(\forall y)(Q(x) \wedge P(y) \Rightarrow \overline{S(x, y)})$.

85. Даны следующие предикаты, определенные на множестве людей:

- $A(x) = \{x - \text{преступник}\}$, $B(x) = \{x - \text{судья}\}$,
 $C(x) = \{x - \text{мужчина}\}$; $D(x) = \{x - \text{свидетель}\}$;
 $E(x) = \{x - \text{соучастник}\}$.

Дайте словесную формулировку следующих утверждений:

- а) $(\exists x)(A(x) \wedge C(x))$; б) $(\forall x)(B(x) \Rightarrow \overline{E(x)})$; в) $(\forall x)(D(x) \Rightarrow \overline{A(x)})$

86. Сформулируйте высказывания, которые являются отрицаниями следующих:

- а) существует наибольшее простое число;
 б) любое вымогательство наказывается лишением свободы;
 в) в некотором поезде, идущем из Москвы в Ярославль, в каждом вагоне есть свободное место;
 г) каждый, совершивший преступление, должен быть подвергнут справедливому наказанию;
 д) ни один невиновный не должен быть привлечен к уголовной ответственности.

87. Выразите следующие высказывания на языке логики предикатов. Постройте их отрицания и переведите их на русский язык.

- а) Все работники подлежат обязательному медицинскому страхованию.
 б) Все люди рождаются свободными и равными в своих достоинствах и правах.
 в) Некоторые люди освобождаются от уплаты судебных расходов в доход государства.
 г) Некоторые приговоры суда являются обвинительными.
 д) Ни один приговор суда не должен быть необоснованным.
 е) Существует книга, которую все прочитали.

ж) Не все осужденные за совершение преступлений освобождаются по амнистии.

з) Ни один образец производственного оборудования не может быть передан в серийное производство, если он не отвечает требованиям охраны труда.

88. Запишите с помощью логической символики высказывания:

- а) существует точно одно x , такое что $\Phi(x)$;
- б) существует, по крайней мере, два x , таких что $\Phi(x)$;
- в) существует не более двух x , таких что $\Phi(x)$.
- г) два и только два x обладают свойством Φ .

89. Постройте отрицания следующих высказываний и дайте их словесную формулировку:

- а) $(\forall x)(\forall y)((x > y) \vee (x < y) \vee (x = y))$;
- б) $(\exists x)(\forall y)(y = 0 \Rightarrow x + y = x)$;
- в) $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(x + y = z \vee (\exists t)(x + y = t \wedge z \neq t))$.

90. Предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ определены на некотором множестве T . В каком отношении должны находиться области истинности T_P и T_Q данных предикатов, чтобы предикат

- 1) $P(x) \wedge Q(x)$ принимал значение 1:
 - а) для некоторых $x \in T_P$,
 - б) для всех $x \in T_P$,
 - в) для всех $x \in T_Q$,
 - г) ни для одного значения $x \in T$.
- 2) $P(x) \Rightarrow Q(x)$ принимал значение 1:
 - а) для всех $x \in T$,
 - б) ни для одного значения $x \in T$.

91. Почему высказывания в следующих парах не являются отрицаниями одного другим? Ответ обоснуйте на основе определения операции отрицания.

- а) Все преступления носят экономический характер.
Все преступления не носят экономический характер.
- б) Некоторые юристы работают адвокатами.
Некоторые юристы не работают адвокатами.

92. Придумайте два высказывания, имеющих соответственно форму $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ и $(\exists y)(\forall x)P(x, y)$, так чтобы:

- а) оба они были истинными;
- б) оба были ложными;
- в) первое – ложным, а второе – истинным.

93. Даны предложения: «Каждую задачу решил, по крайней мере, один студент» и «По крайней мере, один студент решил каждую задачу». Имеют ли эти предложения один и тот же смысл? Следует ли хотя бы одно из них из другого? Почему?

94. Запишите символически следующие предложения и определите их значения истинности:

- а) всякое число, умноженное на нуль, есть нуль;
- б) произведение любого числа и единицы равно этому числу;
- в) существует число, которое больше своего квадрата;
- г) квадрат любого числа неотрицателен;
- д) модуль любого числа положителен.

95. Запишите символически следующие предложения и определите их значения истинности. Укажите области определения предикатов:

- а) существует рациональное число, квадрат которого равен 2;
- б) всякое натуральное число либо четно, либо нечетно;
- в) всякое рациональное число представимо в виде дроби $\frac{p}{q}$, где p – целое число, а q – натуральное число;
- г) некоторые натуральные числа делятся на 7.

Определите множества истинности предикатов, на которые навешиваются кванторы. Приведите, где это возможно, примеры чисел из множеств истинности.

96. Запишите символически:

- а) положительные оценки на всех экзаменах являются необходимым условием для перевода любого студента на следующий курс;
- б) $y = 2x + 3$ имеет смысл при любых значениях x и y ;
- в) функция x^2 принимает любое неотрицательное значение.

97. Сформулируйте следующие высказывания, используя квантор всеобщности:

- а) не существует такого числа x , что $x + 1 = x$;
- б) нет человека, не имеющего матери;
- в) не найдется студента, не сдавшего экзамена по уголовному праву и в то же время переведенного на следующий курс;
- г) ни один человек не бессмертен.

98. Сформулируйте отрицания следующих высказываний в утвердительной форме (то есть так, чтобы отрицание высказывания не начиналось со слов: «неверно, что» или «не»):

- а) из всякого положения есть выход;
- б) в каждой стране найдется город, у всех жителей которого один и тот же цвет глаз;
- в) в каждом городе есть вуз, в котором есть факультет, где есть курс, в каждой группе которого ни один студент не занимается спортом;
- г) существует книга, в которой есть страница, в каждой строке которой найдется хотя бы одна буква «а».

99. Запишите следующие высказывания в виде формул с кванторами, предварительно введя обозначения для используемых предикатов:

- 1) есть реки, которые впадают в Волгу;
- 2) не все то золото, что блестит;
- 3) всякий кулик свое болото хвалит;
- 4) не всякий человек может добиться осуществления своей мечты;
- 5) каждый студент-физик выполнил хотя бы одну лабораторную работу.

100. Пусть даны предикаты:

- $M(x)$ – « x – мужчина»;
- $V(x)$ – « x – женщина»;
- $I(x, y)$ – «человек x моложе, чем y »;
- $K(x, y)$ – « x есть ребенок y »;
- $G(x, y)$ – « x состоит в браке с y »;

$U(x)$ – « x живет в Ярославле»;

$A(x)$ – « x живет в Архангельске».

Запишите в символической форме следующие предложения:

- 1) каждый человек имеет отца и мать;
- 2) каждый, кто имеет отца, имеет и мать;
- 3) всякий человек моложе своих родителей;
- 4) не всякий человек состоит в браке;
- 5) каждый человек моложе своего деда;
- 6) существует мужчина, у которого сын женат на женщине младше себя;
- 7) если в Ярославле есть женщина, имеющая брата в Архангельске, то в Архангельске есть мужчина, имеющий сестру в Ярославле;
- 8) не всякий женатый мужчина проживает в Архангельске.

101. Среди следующих предложений найдите пары высказываний, являющихся отрицаниями друг друга:

- 1) все ученики нашей группы подготовились к семинару по уголовному праву;
- 2) некоторые ученики нашей группы подготовились к семинару по уголовному праву;
- 3) ни один ученик нашей группы не подготовился к семинару по уголовному праву;
- 4) некоторые ученики нашей группы не подготовились к семинару по уголовному праву.

3. Элементы математического анализа

3.1. Функции. Элементарные функции

3.1.1. Понятие функции

Пусть D – некоторое множество действительных чисел. Говорят, что на множестве D задана *функция* f , если каждому числу $x \in D$ (*аргументу функции*) поставлено в соответствие единственное число, обозначаемое символом $f(x)$ и называемое *значением функции в точке x* .

Множество D называется *областью определения функции* и обозначается символом $D(f)$. Множество всех значений $f(x)$ функции называется *областью значений функции* и обозначается символом $E(f)$. Итак,

$$E(f) = \{f(x), x \in D(f)\}.$$

Функцию f , определенную на множестве D , обозначают следующим образом:

$$y = f(x), x \in D,$$

или просто пишут $f(x), x \in D$.

Графиком $\Gamma(f)$ функции f (рис. 1) называется множество всех точек (x, y) , для которых $x \in D$, а $y = f(x)$.

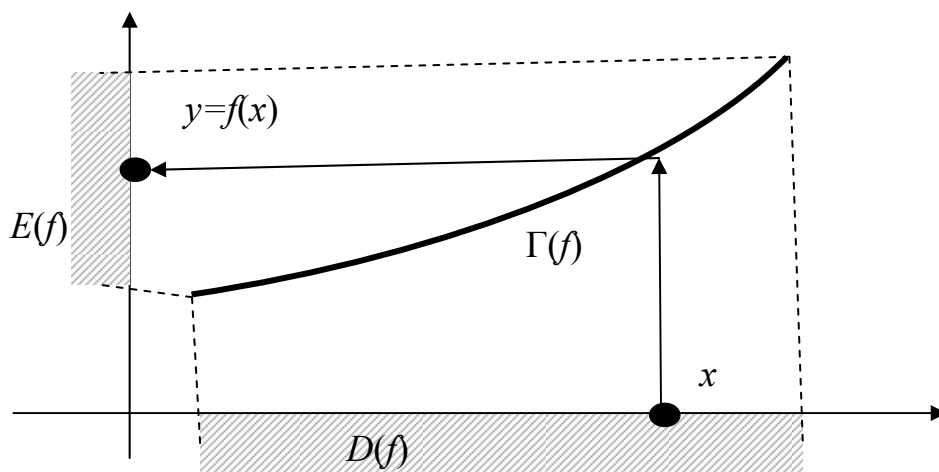


Рис. 1

Наиболее распространенным способом задания функции является аналитический. Он состоит в том, что задается формула, по

которой вычисляются значения функции $f(x)$ по значениям ее аргумента x . При таком задании область определения обычно не указывается, под ней понимается множество всех тех значений x , при которых данная формула имеет смысл. Однако надо иметь в виду, что не всякая формула задает функцию. В качестве упражнения предлагаем выяснить, какие из следующих формул определяют y как функцию от x : а) $2y^2 - 3x + 1 = 0$, б) $2y - 3x^2 - 1 = 0$, в) $x + y^3 = 0$, д) $x^2 + y^2 = 1$, е) $x \cdot y + 2 \cdot y = x - 1$.

Задачи

Найдите область определения функций:

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 6}$.
2. $f(x) = \frac{\ln(x + 10)}{x - 2}$.
3. $f(x) = \frac{3^{\sqrt{x}}}{\lg(3 - x)}$.
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x + 4}}{x^2 + 5x + 6}$.
5. $y = \sqrt{x - 2} - \ln(5 - x)$.
6. $y = \frac{x - 3}{\sin x}$.

Найдите область значений функций:

7. $y = \sin \frac{x}{2}$.
8. $y = -\sin^2 x$.
9. $y = 2 \cos x$.
10. $y = \sqrt{x - 2}$.
11. $y = \sin x + \cos x$.
12. $y = 6 \sin x - 8 \cos x$.
13. $y = \frac{2}{x^2 + 1}$.
14. $y = 2 \cdot 5^{-x^2}$.
15. $y = x^2 + 4x + 5$.

3.1.2. Основные виды функций

1. Четные, нечетные, общего вида

Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если для любого значения $x \in D$ $(-x) \in D$ и выполняется условие $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется **нечетной**, если для любого значения $x \in D$ $(-x) \in D$ и выполняется условие $f(-x) = -f(x)$.

Функция, которая не является четной и не является нечетной, называется **функцией общего вида**.

Можно доказать, что график четной функции симметричен относительно оси Oy , а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Задачи

Выясните четность (нечетность) функций:

16. $y = x^2 + |x|$. 17. $y = x + \frac{2}{x}$. 18. $y = e^{-x^2}$.
19. $f(x) = 9$. 20. $f(x) = (2 - 3x)^3 + (2 + 3x)^3$. 21. $y = \ln(4 - x^2)$.
22. $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x + 1}$. 23. $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x + 1} - \frac{x^3 + 2x^2}{x - 1}$. 24. $f(x) = 0$.

2. Ограниченные и неограниченные функции

Функция называется **ограниченной на промежутке** $[a, b] \subset D(f)$, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|f(x)| < M$. В противном случае функция называется **неограниченной**.

Задачи

Выясните, какие функции являются ограниченными

25. $y = \sin^2 x$. 26. $y = e^{-x^2}$. 27. $y = e^{x^2}$.
28. $y = \sin x + \cos x$. 29. $y = \frac{\cos x}{x^2}$. 30. $y = \frac{4}{2 + x^2}$.

3. Монотонные функции

Функция называется **возрастающей на промежутке** $[a, b] \subset D(f)$, если для любых двух значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

В символической записи это определение выглядит следующим образом:

$$(f \nearrow \text{ на } [a, b]) \Leftrightarrow (\forall x_1 \in [a, b])(\forall x_2 \in [a, b])(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

Функция называется **убывающей на промежутке** $[a, b] \subset D(f)$, если для любых двух значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Символически это определение запишется следующим образом:

$$(f \searrow \text{ на } [a, b]) \Leftrightarrow (\forall x_1 \in [a, b])(\forall x_2 \in [a, b])(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$

Возрастающие или убывающие на всей области определения функции называются **монотонными**.

Задачи

31. Функции f и g возрастают на промежутке X . Верно ли, что функции:

а) $f + g$, $f \cdot g$, и f^2 возрастают на промежутке X ;

б) $-f$ и $\frac{1}{f}$ убывают на промежутке X ?

4. Периодические функции

Функция $y = f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число T , что для любых $x \in D(f)$ выполняются условия $x \pm T \in D(f)$ и $f(x \pm T) = f(x)$. Число T называется периодом функции.

Основные свойства периодических функций

1) Если функция f периодическая и имеет период T , то функция $Af(kx + b)$, где A, k, b постоянны, а $k \neq 0$, также периодическая и ее период равен $\frac{T}{|k|}$.

2) Если число T – период функции $y = f(x)$, то и число $k \cdot T$, где $k \in \mathbb{Z}$, тоже период этой функции.

Задачи

Найдите наименьший положительный период функции или докажите ее непериодичность:

32. $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.

33. $f(x) = 4 \cos 3x$.

34. $f(x) = 2 - \cos 2x$.

35. $f(x) = \sin^2 x$.

36. $f(x) = \sin x + \cos x$.

37. $f(x) = x \sin x$.

38. Докажите, что число 2 не является периодом функции:

а) $y = x^2 - 3$; б) $y = \cos x$; в) $y = 3x - 5$; г) $y = |x|$.

3.1.3. Арифметические операции над функциями

1. Суммой (разностью) функций f и g называется функция $f + g$ ($f - g$), определенная на множестве $D(f) \cap D(g)$, значение которой в точке $x \in D(f) \cap D(g)$ вычисляется по правилу

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x).$$

2. Произведением функций f и g называется функция $f \cdot g$, определенная на множестве $D(f) \cap D(g)$, значение которой в точке $x \in D(f) \cap D(g)$ вычисляется по правилу

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x).$$

3. Частным функций f и g называется функция $\frac{f}{g}$, определенная на множестве $D_1 = D(f) \cap \{x \in D(g) : g(x) \neq 0\}$, значение которой в точке $x \in D_1$ вычисляется по правилу $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

3.1.4. Композиция функций

Композицией функций f и g называется операция последовательного выполнения заданных функций. Обозначается эта операция следующим образом $h = g \circ f$. В результате композиции получается новая функция h , которая называется сложной функцией, полученной из функций f и g (рис. 2). Эта функция имеет областью определения множество $D(h) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\}$ и действует на элементы этого множества по правилу $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

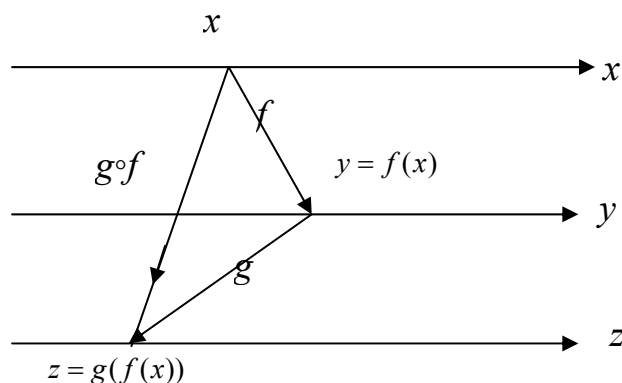


Рис. 2

Задачи

39. Выясните, какие из функций являются сложными:

1) $y = \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{3}};$

2) $y = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^x;$

3) $y = \ln \cos x;$

4) $y = e^{x^2+1};$

5) $y = \operatorname{tg}(8x - 3);$

6) $y = \sqrt{x^2 + x - 4};$

7) $y = 3 \ln x.$

40. Укажите функции f и g , из которых составлена сложная функция $h(x) = g(f(x))$:

- 1) $h(x) = \cos 3x$ 2) $h(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$; 3) $h(x) = \sqrt{\cos x}$;
 4) $h(x) = (3 - 5x)^5$; 5) $h(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$; 6) $h(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

3.1.5. Обратная функция

Пусть функция $y = f(x)$, заданная на множестве D , является на нем монотонной, т. е. возрастает или убывает, и удовлетворяет условию: $\forall x_1, \forall x_2 \in D \quad (x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда для любого $y \in E = E(f)$ найдется единственное число $x \in D$ такое, что $f(x) = y$. Тем самым будет определена функция, которая каждому числу из множества E сопоставляет число из множества D . Эта функция называется **функцией, обратной к f** , и обозначается символом f^{-1} (рис. 3). Ясно, что

$$D(f^{-1}) = E(f), \quad E(f^{-1}) = D(f),$$

$$f(f^{-1}(y)) \equiv y \text{ и } f^{-1}(f(x)) \equiv x.$$

График $\Gamma(f^{-1})$ обратной функции получается из $\Gamma(f)$ преобразованием симметрии относительно биссектрисы $y = x$ первого и третьего координатных углов (рис. 4).

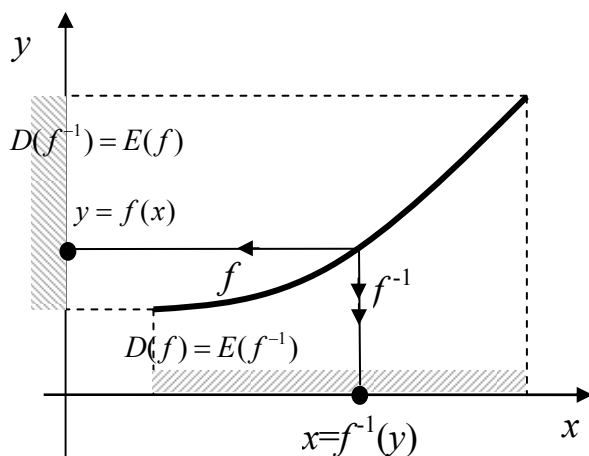


Рис. 3

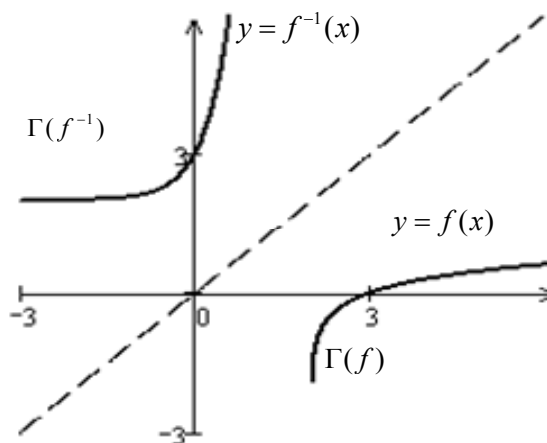


Рис. 4

41. Найдите функцию, обратную данной. Укажите область определения и область значений обратной функции. Постройте

графики данной функции и обратной в одной и той же системе координат:

- 1) $y = 2x$; 2) $y = 5x - 1$; 3) $y = \sqrt{x-2}$; 4) $y = 4 - \sqrt{x-1}$;
 5) $y = (x-4)^2; x \geq 4$ 6) $y = \frac{3}{x-1}$; 7) $y = \frac{1-x}{x+2}$; 8) $y = \ln(x-1), x > 1$.

3.1.6. Основные элементарные функции

В школьном курсе математики вы познакомились с *основными элементарными функциями*. К ним относятся:

- 1) *постоянная функция* $y = C, C \in \mathbb{R}$;
- 2) *линейная функция* $y = kx + b$;
- 3) *квадратичная функция* $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$;
- 4) *степенная функция* $y = x^a, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- 5) *показательная функция* $y = a^x, a > 0, a \neq 1$;
- 6) *логарифмическая функция* $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$;
- 7) *тригонометрические функции* $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$;
- 1) *обратные тригонометрические функции* $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$.

Определения этих функций, их свойства и графики приведены ниже.

Свойства и графики основных элементарных функций

1. Постоянная функция

Это функция $y = c$, которая ставит в соответствие любому $x \in \mathbb{R}$ одно и то же число $c \in \mathbb{R}$ (рис. 5).

2. Степенная функция

Степенная функция $y = x^a$ с показателем $a \in \mathbb{R}$ определяется следующим образом.

• *При натуральном показателе* $a = n$

: $x^1 = x, x \in \mathbb{R}$, и $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ раз}}, x \in \mathbb{R}$, для $n = 2, 3, \dots$

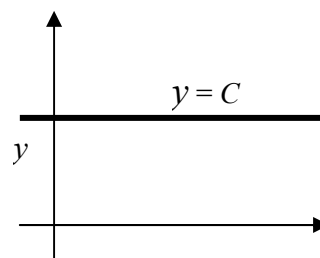


Рис. 5

При нечетном n областью значений функции является множество \mathbb{R} всех действительных чисел, функция нечетная и возрастающая, ее график изображен на рис. 6.

При четном n областью значений является промежуток $[0, \infty)$, функция четная, убывает на промежутке $(-\infty, 0]$ и возрастает на промежутке $[0, \infty)$, ее график изображен на рис. 7.

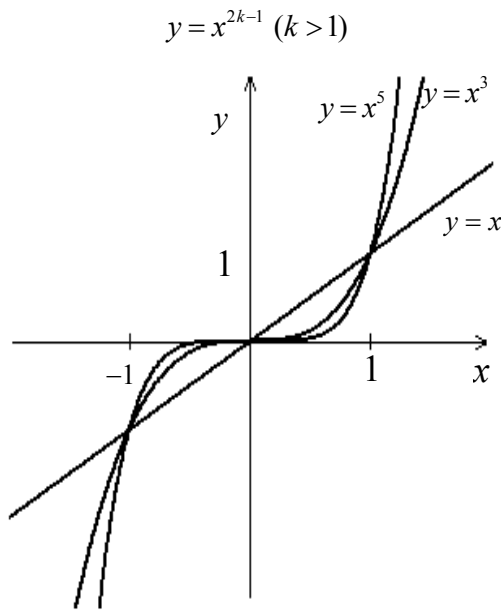


Рис. 6

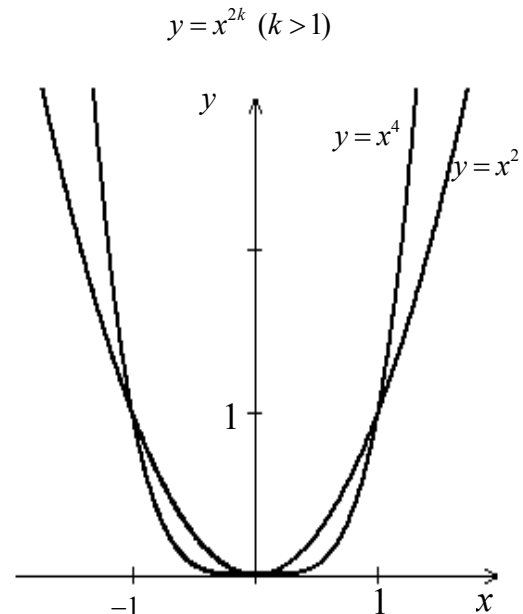


Рис. 7

• **При целом отрицательном показателе $a = -n$:** $x^a = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$,
 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

При нечетном n областью значений функции является множество действительных чисел без нуля: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, функция нечетная, убывающая на промежутках $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$, ее график изображен на рис. 8. **При четном n** областью значений служит промежуток $(0, \infty)$, функция четная, возрастает на промежутке $(-\infty, 0)$, убывает на промежутке $(0, \infty)$, ее график изображен на рис. 9.

• **При положительном рациональном показателе $a = m/n$:**

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}, \quad x \in [0, \infty).$$

• **При отрицательном рациональном показателе $a = -m/n$:**

$$x^{-m/n} = \frac{1}{x^{m/n}}, \quad x \in (0, \infty).$$

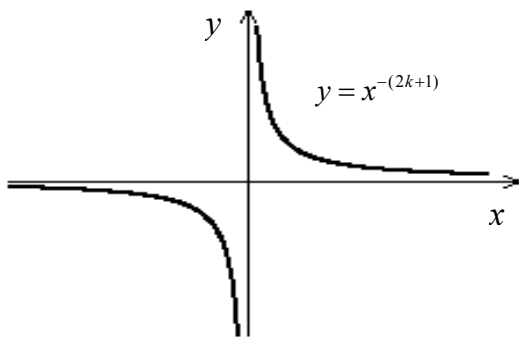


Рис. 8

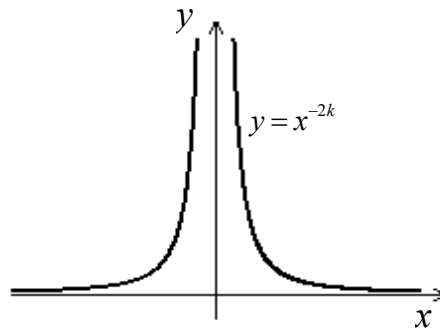


Рис. 9

Степенная функция с нецелым показателем a возрастает при $a > 0$ и убывает при $a < 0$. Соответствующие графики изображены на рис. 10, 11.

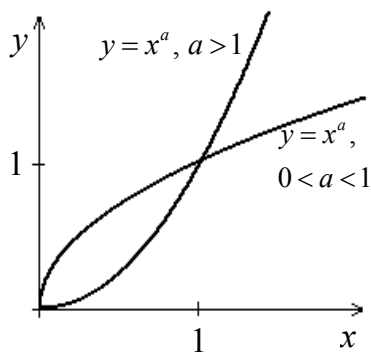


Рис. 10

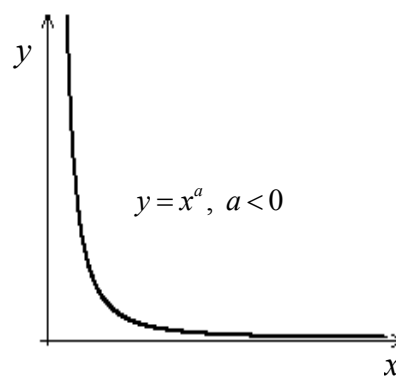


Рис. 11

3. Показательная функция

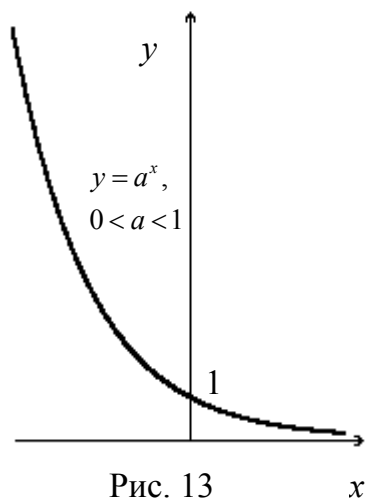
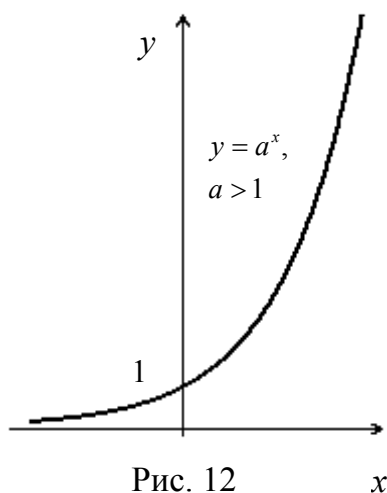
Показательной функцией с основанием a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется функция, определенная на множестве всех действительных чисел и ставящая в соответствие числу $x \in \mathbb{R}$ число $y = a^x$.

Областью определения показательной функции является множество \mathbb{R} , областью значений – интервал $(0, +\infty)$.

Основное свойство показательной функции: $a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2}$.

При $a > 1$ показательная функция возрастает и при x , стремящемся к $+\infty$ ($x \rightarrow +\infty$), a^x тоже стремится к $+\infty$ ($a^x \rightarrow +\infty$). Этот факт записывают следующим образом $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$. Если же $x \rightarrow -\infty$, то $a^x \rightarrow 0$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$). При $0 < a < 1$ показательная функция убывает и при x , стремящемся к $+\infty$ ($x \rightarrow +\infty$), $a^x \rightarrow 0$ ($\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$). Если же $x \rightarrow -\infty$, то $a^x \rightarrow +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$).

Для обоих случаев ее график изображен на рис. 12, 13.



В математических исследованиях очень часто используют показательную функцию $y = e^x$ с основанием e ; e – иррациональное число: $e \approx 2,71$. Эта функция называется *экспонентой* и обозначается символом $\exp x$. Показательные функции с другими основаниями сводятся к экспоненте: $a^x = e^{x \ln a}$.

4. Логарифмическая функция

Показательная функция $x = a^y$ возрастает (убывает) при $a > 1$ ($0 < a < 1$) на всей области определения, поэтому существует обратная к ней функция, которую называют *логарифмической функцией с основанием a* (или просто *логарифмом*). Обозначают логарифмическую функцию символом $y = \log_a x$. Если $a = e$, то вместо $\log_e x$ пишут $\ln x$ (*натуральный логарифм*), если $a = 10$, то вместо $\log_{10} x$ пишут $\lg x$ (*десятичный логарифм*).

Основные свойства логарифмической функции

- 1) область определения $D(\log_a x) = E(a^x) = (0, +\infty)$;
- 2) множество значений $E(\log_a x) = D(a^x) = \mathbb{R}$;
- 3) при $a > 1$ логарифмическая функция возрастает и при x , стремящемся к 0 справа ($x \rightarrow +0$), $\log_a x$ стремится к $-\infty$ ($\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty$), если же x стремится к $+\infty$, то $\log_a x$ уходит на $+\infty$ ($\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$). При $0 < a < 1$ функция убывает, и $\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$.

Графики логарифмической функции изображены на рис. 14.

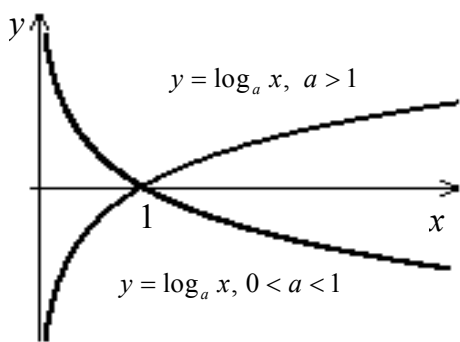


Рис. 14

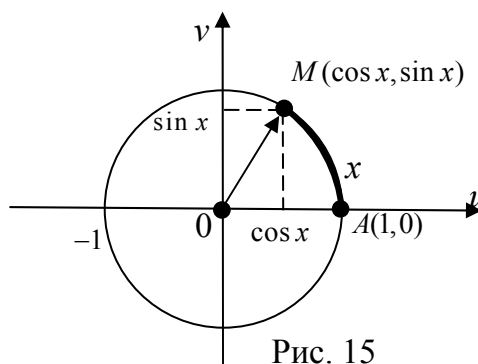


Рис. 15

5. Тригонометрические функции

Выберем на плоскости прямоугольную декартову систему координат uOv (рис. 15). Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат (*единичную окружность*). Пусть x – произвольное действительное число: $x \in \mathbb{R}$. Вектор \overrightarrow{OA} с концом в точке $A(1,0)$ повернем на угол x радиан. В результате получится вектор \overrightarrow{OM} . При повороте против часовой стрелки конец вектора опишет на единичной окружности дугу AM длины x ($x \geq 0$), а при вращении в направлении часовой стрелки ($x < 0$) – длины $|-x|$.

Функция синус ставит в соответствие числу $x \in \mathbb{R}$ ординату такой точки M единичной окружности, для которой вектор \overrightarrow{OM} образует с положительным направлением оси абсцисс угол в x радиан.

Функция косинус ставит в соответствие числу $x \in \mathbb{R}$ абсциссу такой точки M единичной окружности, для которой вектор \overrightarrow{OM} образует с положительным направлением оси абсцисс угол в x радиан.

Итак, если точка M имеет координаты (u, v) , то есть $M(u, v)$, то

$$\cos x = u, \quad \sin x = v.$$

В тригонометрии используются также функции *тангенс*, *котангенс*, *секанс* и *косеканс*, определяемые соответственно равенствами:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{и} \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Свойства тригонометрических функций:

1) области определения: $D(\sin x) = D(\cos x) = \mathbb{R}$,

$$D(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}\}, \quad D(\operatorname{ctg} x) = \mathbb{R} \setminus \{\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}\};$$

2) области значений: $E(\sin x) = E(\cos x) = [-1; +1]$,

$E(\operatorname{tg} x) = E(\operatorname{ctg} x) = \mathbb{R}$;

3) косинус – четная функция, а синус, тангенс и котангенс – нечетные функции;

4) синус и косинус – функции периодические, с основным периодом 2π , а тангенс и котангенс – функции периодические, с основным периодом π ;

5) функция синус возрастает на промежутках $[-\pi/2 + 2\pi k, \pi/2 + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$ и убывает на промежутках $[\pi/2 + 2\pi k, 3\pi/2 + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$; косинус возрастает на промежутках $[-\pi + 2\pi k, 2\pi k]$ и убывает на промежутках $[2\pi k, \pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутках $(-\pi/2 + \pi k, \pi/2 + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$; функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на промежутках $(2\pi k, \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$;

Графики тригонометрических функций изображены на рис. 16 – 19.

6) основные тождества, связывающие тригонометрические функции:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1, 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x, 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x,$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

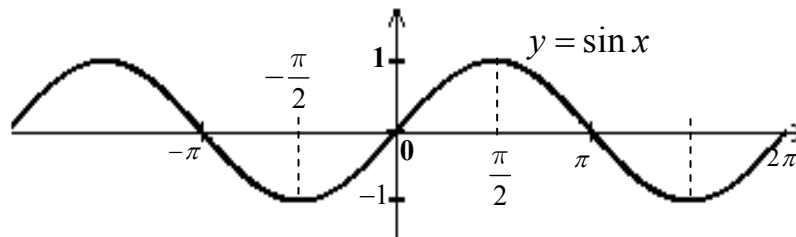


Рис. 16

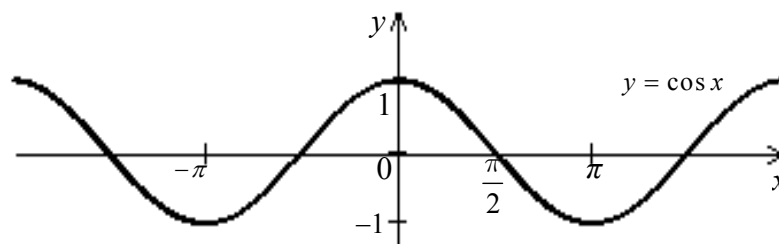


Рис. 17

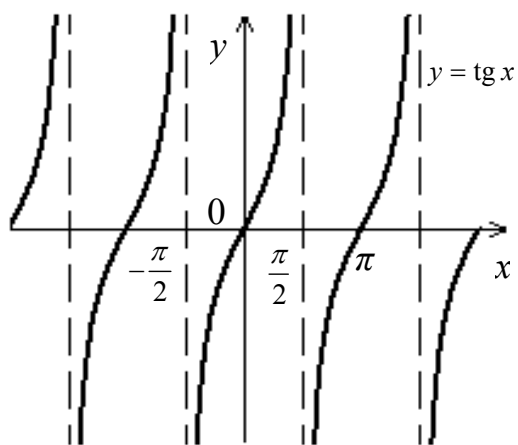


Рис. 18

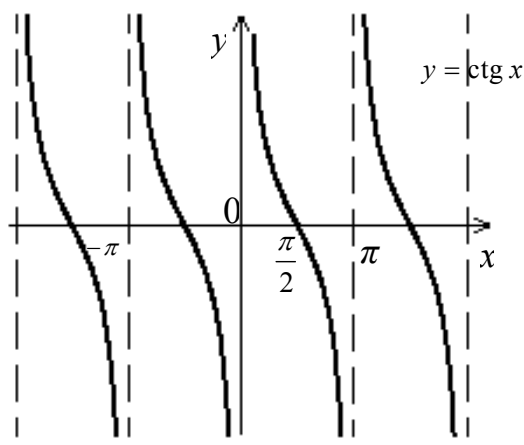


Рис. 19

3.2. Предел функции

Предел – важнейшее понятие математики. Это понятие опирается на интуитивное представление о процессе изменения величины и неограниченного приближения ее значений к какому-либо числу. Точное математическое определение предела сформировалось в математике лишь в начале XIX века. Развитие теории пределов связано с решением задач на нахождение длин кривых, площадей плоских фигур, объемов тел, определение центра их масс, установление мгновенной скорости при неравномерном движении. Решение этих задач привело к формированию на основе понятия предела новых понятий, таких как «производная» и «интеграл», и созданию важнейшего раздела математики под названием «Математический анализ».

3.2.1. Понятие предела функции в точке и на бесконечности

В определении предела функции в точке используется понятие окрестности точки. *Окрестностью точки a* называют любой интервал с серединой в этой точке.

Пусть функция $y = f(x)$ определена вблизи точки a , за исключением, быть может, самой этой точки. Это означает, что в любой окрестности точки a есть хотя бы одна точка из области определения $D(f)$ функции f .

Определение 1. Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ при x , стремящемся к a ($x \rightarrow a$), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta_\varepsilon > 0$, зависящее

от ε , что для всякого числа $x \in D(f)$, удовлетворяющего условию $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Если число b является пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, то пишут: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ или $f(x) \rightarrow b$ при $x \rightarrow a$.

Символически определение 1 можно записать следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta_\varepsilon > 0) (\forall x) (0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Графическая иллюстрация определения представлена на рис. 20.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

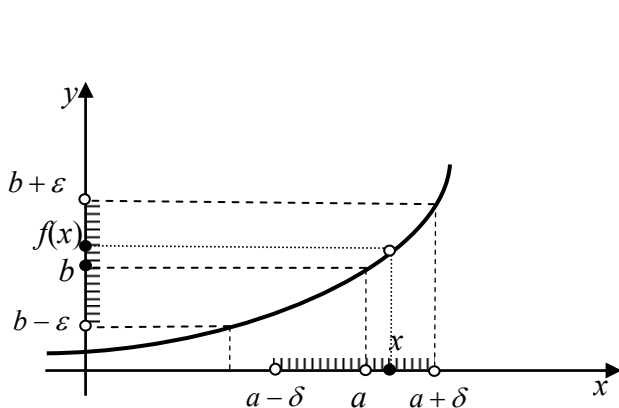


Рис. 20

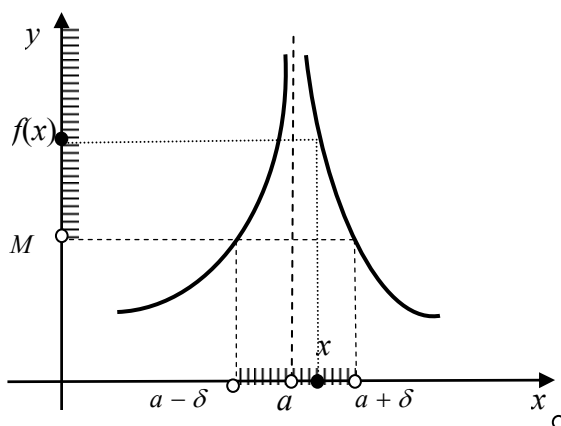


Рис. 21

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* в окрестности точки a (т.е. при $x \rightarrow a$), если для любого сколь угодно большого числа $M (M > 0)$ найдется такое число δ_M , зависящее от M , что для всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta_M$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

При этом пишут $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Символически определение 3 записывается следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0) (\exists \delta_M > 0) (\forall x) (0 < |x - a| < \delta_M \Rightarrow |f(x)| > M) \text{ (рис. 21).}$$

На рис. 21 и 22 представлены различные случаи поведения функции вблизи точки $x = a$, иллюстрирующие определение 3, а также определения 4 и 5.

Определение 4. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0) (\exists \delta_M > 0) ((\forall x)$

$(0 < |x - a| < \delta_M \Rightarrow f(x) > M))$.

Определение 5. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall M) (\exists \delta_M > 0) ((\forall x)$

$(0 < |x - a| < \delta_M \Rightarrow f(x) < M))$ (рис. 22).

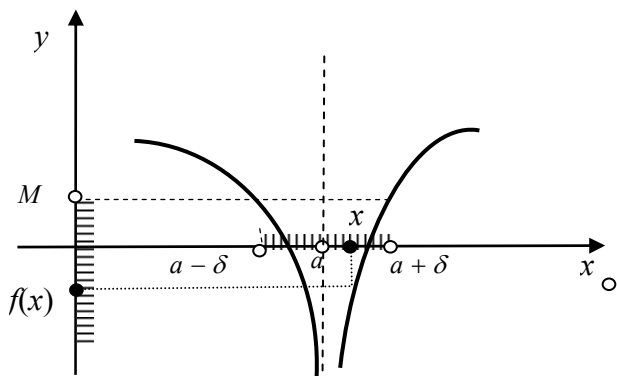


Рис. 22

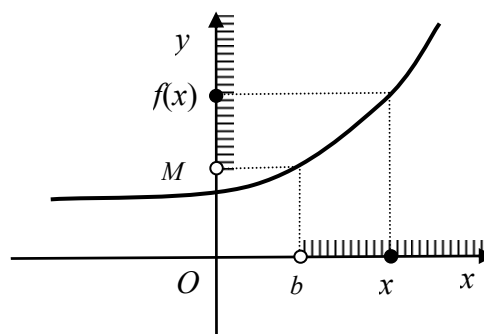


Рис. 23

На рис. 23, 24 и 25 изображены разные случаи поведения функции при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$, соответствующие определениям 6 и 7.

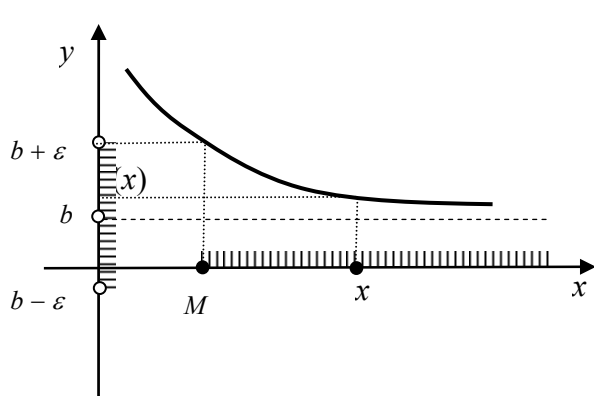


Рис. 24

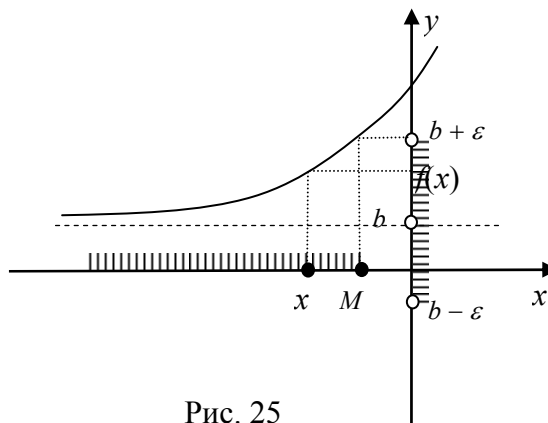


Рис. 25

Определение 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \stackrel{def}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0) (\exists M_\varepsilon > 0) ((\forall x) (x > M_\varepsilon \Rightarrow$

$|f(x) - b| < \varepsilon))$ (рис. 24).

Определение 7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \stackrel{def}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0) (\exists M_\varepsilon) ((\forall x) (x < M_\varepsilon \Rightarrow$

$|f(x) - b| < \varepsilon))$ (рис. 25).

Упражнение. Дайте определения и изобразите графически следующие ситуации: а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (рис. 23); б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; в) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; г) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

3.2.2. Вычисление пределов непрерывных функций в точках из их областей определения

Определение 8. Если функция $y = f(x)$

- 1) определена в точке a ,
- 2) имеет в этой точке конечный предел и
- 3) этот предел равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

то функция называется *непрерывной* в точке a .

Можно показать, что любая элементарная функция непрерывна в каждой точке ее области определения. Поэтому, чтобы найти предел элементарной функции в точке a из области определения, нужно в выражение функции вместо аргумента x подставить его значение a .

Теорема 1. Пусть пределы функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ существуют, конечны и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. Тогда

$$1) \lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cA \quad (c \in \mathbb{R}, c \neq 0);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = AB;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ если } B \neq 0;$$

$$4.1) \text{ в случае, если } A \neq 0, B = 0, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty;$$

$$4.2) \text{ в случае, когда } a = \infty \text{ и } B = \infty, A = \text{const}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Следует сказать, что далеко не всякая подстановка в функцию числа, к которому стремятся значения аргумента x , приводит к нахождению предела. Случаи, в которых указанная подстановка не дает значения предела, называют неопределенностями. Существуют следующие виды неопределенностей:

$$\left[\frac{\infty}{\infty} \right], \left[\frac{0}{0} \right], [0 \cdot \infty], [\infty - \infty], [1^\infty], [\infty^0], [0^0].$$

3.2.3. Предел сложной функции $y = f(u(x))$

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$, $u(x) \neq b$ при $x \neq a$. Тогда если $\lim_{u \rightarrow b} f(u) = A$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(u(x)) = \lim_{u \rightarrow b} f(u) = A.$$

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \in \mathbb{R}$ и функция f непрерывна в точке b . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(u(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} u(x)\right) = f(b).$$

3.2.4. Раскрытие неопределенностей различных типов

1-й тип: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ с неопределенностью вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, где $f(x)$ и

$g(x)$ – степенные или показательные функции.

В случае степенных функций необходимо в числителе и знаменателе вынести за скобку переменную x с наибольшим показателем степени среди всех слагаемых дроби. В случае показательных функций за скобку выносится наиболее быстро возрастающее слагаемое среди всех слагаемых дроби. После сокращения дроби неопределенность исчезает.

Примеры

1. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 5x^3}{2x^3 - 3x^2 + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

В числителе и знаменателе выносим за скобку x в наивысшей степени, т. е. x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 5x^3}{2x^3 - 3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(\frac{3}{x^2} - 5 \right)}{x^3 \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{x^2} - 5 \right)}{\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} \right)} = \frac{0 - 5}{2 - 0 + 0} = -\frac{5}{2}, \text{ так}$$

как при $x \rightarrow \infty$ величины $\frac{3}{x^2}$, $\frac{3}{x}$, $\frac{1}{x^3}$ стремятся к 0 (являются бесконечно малыми).

2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 - 2x - 4x^2}}{\sqrt{4x^4 + 2 + 2x - 3}}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 - 2x - 4x^2}}{\sqrt{4x^4 + 2 + 2x - 3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]. \text{ Чтобы выяснить, какова наивысшая}$$

степень среди слагаемых дроби, сначала следует вынести за

скобки x с наибольшим показателем степени в выражениях под знаками радикалов:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 - 2x} - 4x^2}{\sqrt{4x^4 + 2} + 2x - 3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} = \frac{x^2 \sqrt{1 - \frac{2}{x^3}} - 4x^2}{x^2 \sqrt{4 + \frac{2}{x^4}} + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x^3}} - 4 \right)}{x^2 \left(\sqrt{4 + \frac{3}{x^4}} + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1 - \frac{2}{x^3}} - 4 \right)}{\left(\sqrt{4 + \frac{3}{x^4}} + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right)} = \frac{1 - 4}{2} = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

3. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x + 3^x}{2 - 4^x}$.

Показательная функция a^x при $a > 1$ является возрастающей и при $x \rightarrow +\infty$ стремится к $+\infty$. Быстрее возрастает та функция, у которой больше основание, поэтому в нашей задаче за скобки выносим 4^x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x + 3^x}{2 - 4^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x \left(1 + \frac{3^x}{4^x} \right)}{4^x \left(\frac{2^x}{4^x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{3^x}{4^x} \right)}{\left(\frac{2^x}{4^x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \left(\frac{3}{4} \right)^x}{\left(\frac{1}{2} \right)^x - 1} = \frac{1 + 0}{0 - 1} = -1.$$

Здесь $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^x = 0$, так как $a = \frac{3}{4} < 1$; аналогично, так как $a = \frac{1}{2} < 1$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^x = 0$.

2-й тип: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ с неопределенностью вида $\left[\frac{0}{0} \right]$.

В этом случае надо числитель и знаменатель разложить на множители, среди которых обязательно будет множитель $x - a$, или домножить числитель и знаменатель на одно и то же выражение, после чего сократить дробь. После сокращения неопределенность устранилась.

Примеры

4. Найти $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - x - 20}$.

Имеем неопределенность $\left[\frac{0}{0} \right]$. Числитель и знаменатель дроби

разложим на множители: числитель – по формуле сокращенного умножения $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, а знаменатель – по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, которые находятся по формуле $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Итак, $x^2 - 16 = (x + 4) \cdot (x - 4)$; $x^2 - x - 20 = (x + 4)(x - 5)$ и $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - x - 20} =$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{(x + 4)(x - 5)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x - 4)}{(x - 5)} = \frac{-4 - 4}{-4 - 5} = \frac{8}{9}.$$

Здесь после сокращения дроби вместо x подставлено его значение -4 .

5. Найти $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$.

Имеем неопределенность $\left[\frac{0}{0} \right]$. Дополним числитель до раз-

ности квадратов $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, а знаменатель до разности кубов $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$. Для этого умножим числитель и знаменатель на выражения $\sqrt{x} + 8$ и $\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[3]{x} + 16$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4} &= \lim_{x \rightarrow 64} \frac{(\sqrt{x} - 8)(\sqrt{x} + 8)(\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[3]{x} + 16)}{(\sqrt[3]{x} - 4)(\sqrt{x} + 8)(\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[3]{x} + 16)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 64} \frac{(x - 64)(\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[3]{x} + 16)}{(x - 64)(\sqrt{x} + 8)} = \lim_{x \rightarrow 64} \frac{(\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[3]{x} + 16)}{(\sqrt{x} + 8)} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{64^2} + 4\sqrt[3]{64} + 16}{\sqrt{64} + 8} = \frac{16 + 16 + 16}{8 + 8} = \frac{3 \cdot 16}{16} = 3. \end{aligned}$$

3-й тип: неопределенность вида $[\infty - \infty]$.

Если функция, стоящая под знаком предела, является алгебраической суммой двух рациональных дробей, то неопределенность устраняется или приводится к неопределенности типа 2 после приведения дробей к общему знаменателю. Если же функция, стоящая под знаком предела, представляет собой алгебраическую сумму иррациональных выражений, то неопределенность устраняется или приводится к неопределенности типа 1 путем умножения и деления функции на одно и то же (сопряженное) выра-

жение, приводящее к одной из формул сокращенного умножения, например к формуле

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Примеры

6. Найти $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} \right)$.

Имеем неопределенность $[\infty - \infty]$. Выполним вычитание, приводя дроби к общему знаменателю: $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x-1-1}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x-2}{x^2-1} \right) = \frac{-1-2}{[0]} = \infty.$$

7. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 5} - x)$.

Имеем неопределенность $[\infty - \infty]$. Умножим и разделим функцию, стоящую под знаком предела, на выражение $(\sqrt{x^2 - 2x - 5} + x)$, сопряженное выражению, стоящему под знаком предела:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 5} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x - 5} - x)(\sqrt{x^2 - 2x - 5} + x)}{(\sqrt{x^2 - 2x - 5} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - 5 - x^2}{(\sqrt{x^2 - 2x - 5} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 5}{(\sqrt{x^2 - 2x - 5} + x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]. \end{aligned}$$

Имеем неопределенность 1-го типа. Для ее раскрытия применим тот же метод, что и в примере 2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 5}{(\sqrt{x^2 - 2x - 5} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 5}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} \right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 5}{|x| \sqrt{\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} \right)} + x}.$$

При $x \rightarrow +\infty$ $|x| = x$ по определению модуля. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 5}{|x| \sqrt{\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} \right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 5}{x \sqrt{\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} \right)} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-2 - \frac{5}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 - \frac{5}{x}}{\sqrt{1 - \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}} + 1} = \frac{-2}{1+1} = -1.$$

Итак, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 5} - x) = -1$.

Для раскрытия неопределенностей применяют также замечательные пределы.

3.2.5. Два замечательных предела

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$,

e – иррациональное действительное число, которое называется *числом Эйлера* ($e = 2,7218\dots$).

Сделав замену $y = \frac{1}{x}$, получим другую форму второго замечательного предела

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

С числом Эйлера e связаны две функции: *экспонента* $\exp x = e^x$ и *натуральный логарифм* $\ln x = \log_e x$.

Примеры на применение замечательных пределов

8. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}.$$

Первый множитель представляет собой первый замечательный предел и равен 1. Второй множитель равен $\frac{1}{\cos 0} = 1$. Таким

образом, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$.

9. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$.

Имеем неопределенность $\left[\frac{0}{0} \right]$. Сделаем преобразования числителя, приводящие к первому замечательному пределу. Так как $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$, то $\cos x - 1 = -2 \sin^2 \frac{x}{2}$, и поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{3x^2} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2x^2} = -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \\ &= -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = -\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

10. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{2x-1} \right)^{\frac{3}{x}}$.

Имеем неопределенность $[1^\infty]$. Раскрытие такой неопределенности осуществляется с помощью второго замечательного предела. Для его применения сначала выделим целую часть дроби $\frac{x-1}{2x-1}$. Итак, $\frac{x-1}{2x-1} = \frac{(2x-1)-x}{2x-1} = \frac{2x-1}{2x-1} - \frac{x}{2x-1} = 1 - \frac{x}{2x-1} = 1 + \frac{-x}{2x-1}$.

Функция $\alpha(x) = \frac{-x}{2x-1}$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 0$, так

как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x-1} = 0$. Теперь умножим показатель $\frac{3}{x}$ степени на $\alpha(x) \cdot \frac{1}{\alpha(x)}$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{2x-1} \right)^{\frac{3}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{-x}{2x-1} \right)^{\frac{2x-1}{-x} \cdot \frac{-x}{2x-1} \cdot \frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(1 + \frac{-x}{2x-1} \right)^{\frac{2x-1}{-x}} \right)^{\frac{-3x}{(2x-1) \cdot x}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{2x-1}} = e^{\frac{-3}{0-1}} = e^3. \end{aligned}$$

С раскрытиями других неопределенностей и вычислением пределов более сложных функций можно познакомиться в учебниках [1], [2] и [29].

Задачи

Найдите пределы.

42. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$. 43. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4} + 1 \right)$. 44. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1 - x}$.
45. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1}$. 46. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 2}{2x^2 + 1}$. 47. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\sin \frac{x}{2} - \operatorname{tg} x \right)$.
48. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - x^3 - 15}{x^2 - 16}$. 49. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - x^2 + 2x}{x^3 - x^4}$. 50. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 - 3x^3 + 1}{2x^5 - x + 3}$.
51. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 2}{3^{x+1} - 1}$. 52. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x + 3^{x+1}}{4^{x+1} + 3^x}$. 53. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$.
54. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$. 55. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2}$. 56. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 16}$.
57. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{\sqrt{x} - \sqrt{7}}$. 58. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2}$. 59. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x} + 1}$.
60. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$. 61. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$. 62. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x^2 - x} - \frac{1}{x^2 - x} \right)$.
63. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{3x^2}$. 64. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{4x^2}$. 65. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 10x}$.
66. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+3x}{x+1} \right)^{\frac{5}{x}}$. 67. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+5} \right)^{7x}$. 68. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 2}{4x^2 - 11} \right)^{5x^2}$.

3.3. Производная и некоторые ее применения

3.3.1. Понятие производной. Правила дифференцирования

Понятие производной связано с понятием приращения функции в точке.

Пусть дана функция $y = f(x)$ и фиксирована точка $x_0 \in D(f)$, в некоторой окрестности которой функция определена. Для любой точки x из этой окрестности разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента* в точке x_0 и обозначается символом Δx . Таким образом, $\Delta x = x - x_0$ и $x = x_0 + \Delta x$.

Также говорят, что первоначальное значение аргумента x_0 получило приращение Δx . Вследствие этого значение функции изменится на величину

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ (рис. 26).}$$

Эта разность называется *приращением функции* в точке x_0 , соответствующим приращению Δx . Приращение Δf функции $y = f(x)$ обозначают также символом Δy .

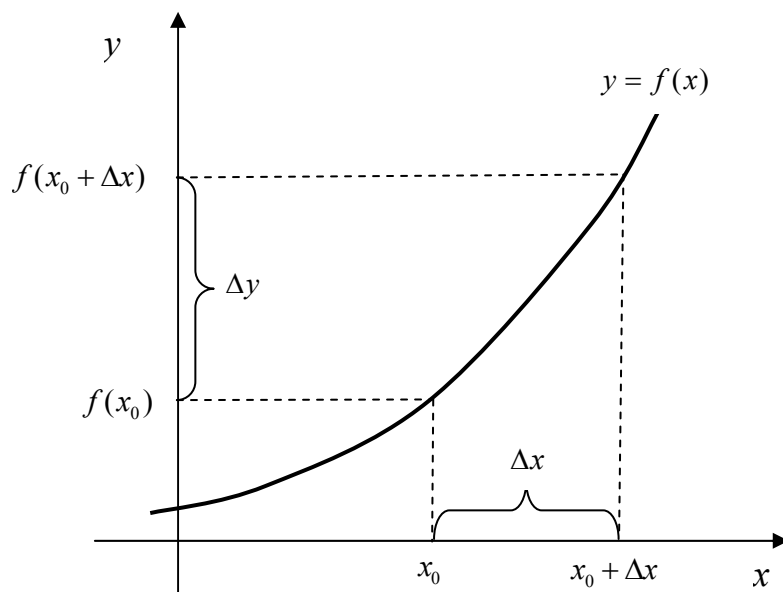


Рис. 26

Определение. *Производной функции f в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению в ней аргумента, если приращение аргумента стремится к 0, при условии, что этот предел существует и конечен.*

Символически это определение записывается следующим образом:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для обозначения производной также используются символы $\frac{df}{dx}$ и f'_x .

Если функция в данной точке x_0 имеет производную, то она называется *дифференцируемой в этой точке*. Функция, дифференцируемая в каждой точке промежутка, называется *дифференцируемой на этом промежутке*. При этом на промежутке определена функция, которая называется *производной функцией* для данной функции и обозначается символом $f'(x)$.

Нахождение производной для данной функции называется *дифференцированием* этой функции.

Правила дифференцирования функций сформулированы в следующих теоремах.

Теорема 1. Если функции f и g дифференцируемы в точке x , то

1) их сумма (разность) дифференцируема в точке x и справедлива следующая формула

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x);$$

2) их произведение дифференцируемо в точке x и справедлива следующая формула

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

В частности, при $g = c = \text{const}$ имеем

$$(cf)'(x) = cf'(x); \left(\frac{f}{c}\right)'(x) = \frac{1}{c}f'(x).$$

Теорема 2. Если функции f и g дифференцируемы в точке x и $g(x) \neq 0$, то их частное тоже дифференцируемо в точке x и справедлива формула

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Теорема 3. Если функция u дифференцируема в точке x_0 , функция f дифференцируема в точке $u(x_0)$, то сложная функция $y(x) = f(u(x))$ дифференцируема в точке x_0 и справедлива формула

$$y'_x(x_0) = f'_u(u(x_0)) \cdot u'_x(x_0).$$

3.3.2. Таблица производных

основных элементарных функций.

Дифференцирование элементарных функций

В левом столбце следующей ниже таблицы приведены формулы для производных основных элементарных функций, в правом столбце – следствия из них и из правила дифференцирования сложной функции.

№	$y = f(x)$	$y = f(u)$, где $u = u(x)$
1	$(C)' = 0$	
2	$(x^a)' = ax^{a-1}$	$(u^a)' = au^{a-1} \cdot u'$
2а	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
2б	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$

3	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
4	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
5	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
6	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
7	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
7a	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
8	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
8a	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
9	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
10	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
12	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Пользуясь этой таблицей и правилами дифференцирования, можно продифференцировать любую элементарную функцию.

Задачи

69. $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2}$. Найти y' .

Решение. Запишем формулу как сумму двух степенных функций и воспользуемся правилом дифференцирования суммы и формулой 2 из таблицы производных:

$$y = x^{\frac{1}{3}} + x^{-2}, \quad y' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} + (-2)x^{-2-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{-3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3}.$$

70. $y = x \sin x$. Найти $y'(\pi)$.

Решение. Применим сначала правило дифференцирования произведения функций, а затем воспользуемся формулами 2 и 3 из таблицы производных:

$$y' = (x)' \sin x + x(\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x.$$

$$y'(\pi) = \sin \pi + \pi \cos \pi = -\pi.$$

71. $y = \frac{e^x}{x^2}$. Найти y' .

Решение. Сначала применим правило дифференцирования частного функций, а затем – формулы 2 и 7а из таблицы производных:

$$y' = \frac{(e^x)'x^2 - e^x(x^2)'}{x^4} = \frac{e^x x^2 - 2xe^x}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}.$$

72. $y = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$. Найти y' .

Решение. Данная функция сложная. Она получена композицией двух функций: $y = \sqrt{u}$ и $u = x^2 + 3x + 1$. Используя правило дифференцирования сложной функции, правило дифференцирования суммы и правило 2а, будем иметь:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}} (x^2 + 3x + 1)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}} (2x + 3 \cdot 1 + 0) = \\ &= \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}}. \end{aligned}$$

Вспомогательную функцию $u(x)$ при дифференцировании сложной функции можно вводить мысленно.

73. $y = \ln \sin x$. Найти y' .

Решение. Введя (мысленно) функцию $u = \sin x$, получим

$$y' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x.$$

74. $y = \sin^3 \frac{x}{5}$. Найти y' .

Решение. Введя (мысленно) функции $u = \sin \frac{x}{5}$ и $y = u^3$, композицией которых является данная функция, получим по правилу дифференцирования сложной функции:

$$y' = 3 \sin^2 \frac{x}{5} \underbrace{\left(\sin \frac{x}{5} \right)'}_u = 3 \sin^2 \frac{x}{5} \cos \frac{x}{5} \left(\frac{x}{5} \right)' = 3 \sin^2 \frac{x}{5} \cos \frac{x}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \sin^2 \frac{x}{5} \cos \frac{x}{5}.$$

При надлежащем навыке дифференцирования все промежуточные действия выполняются в уме, а решение записывается следующим образом:

$$y' = 3 \sin^2 \frac{x}{5} \cos \frac{x}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \sin^2 \frac{x}{5} \cos \frac{x}{5}.$$

75. $y = e^{\arcsin 2x}$. Найти y' .

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции $y = e^u$, где $u = \arcsin 2x$, получим: $y' = e^{\arcsin 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 = \frac{2e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-(2x)^2}}$.

Найдите производные следующих функций.

76. $y = x + 3\sqrt[3]{x^2} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x^2} + \sqrt{5}.$

77. $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^3} + 2.$

78. $y = 5x^2 \sin x.$

79. $y = \sqrt{x} \cos x.$

80. $y = \sqrt{x} \operatorname{tg} x + e^x \cos x.$

81. $y = \sqrt[3]{x} \sin x + 6 \operatorname{tg} x.$

82. $y = \frac{x^2 + 2x}{3 - 4x}.$

83. $y = \frac{x^2 + 7x + 5}{x^2 - 3x}.$

84. $y = \frac{3 \cos x}{2x + 1}.$

85. $y = \frac{x - \sin x}{x^2}.$

86. $y = \frac{x e^x}{\sin x}.$

87. $y = \frac{4 \cos x}{2 + x \operatorname{tg} x}, y'(\pi) = ?$

88. $y = (1 + x/2)^{16}, y'(0) = ?$

89. $y = (2 + 3x)^5.$

90. $y = \left(x^2 + \frac{3}{4}\right)^{10}.$

91. $y = \left(t^4 + \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}\right)^5.$

92. $y = \operatorname{tg} 3x, y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$

93. $y = 2 \sin(3x) + \cos \frac{x}{2}.$

94. $y = e^{-x} \operatorname{ctg}(2 - x).$

95. $y = e^{-x} \sin 3x.$

96. $y = \sqrt{\sin 3x + e^{x^2}}.$

97. $y = \operatorname{ctg} 3x + \sqrt[3]{\cos x}.$

98. $y = \sin^3 x + \sin x^3.$

99. $y = \sin \sqrt{1 - 2x^3}.$

100. $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sin^2 x^2.$

101. $y = \sqrt{\operatorname{tg} 2x} + \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2}.$

102. $y = \sqrt{e^x}, y'(0) = ?$

103. $y = 3\sqrt{x} e^{x^2}, y'(1) = ?$

104. $y = e^{\sin 3x}.$

105. $y = e^{\operatorname{tg} 2x}.$

106. $y = 2^{\sqrt{x+1}}.$

107. $y = 10^{\cos 2x}, y'(\pi/4) = ?$

108. $y = \ln^3 x.$

109. $y = \sqrt[5]{\ln x + 1}.$

110. $y = 2 \ln \cos 3x, y'(\pi/9) = ?$

111. $y = \ln(3x^2 - 2x + 5).$

112. $y = \ln \operatorname{tg} x + \cos(\ln x).$

113. $y = e^{x^4} \ln^2 x.$

114. $y = \ln \sin 2x + \frac{1}{2} \cos^2 x.$

115. $y = \ln \sin \frac{x+2}{x}.$

$$116. \quad y = x \lg(1 - 2x).$$

$$118. \quad y = \frac{\operatorname{tg}(x/2) \ln x}{5^x}.$$

$$120. \quad y = \sqrt[3]{1 + \ln x} + \lg \cos 2x.$$

$$122. \quad y = 2 \ln \operatorname{tg} \frac{x}{8} + e^{\cos^2 3x}.$$

$$124. \quad y = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x.$$

$$126. \quad y = \arcsin 2x + \arccos \frac{x}{2}.$$

$$128. \quad y = e^{\arccos^2 x}.$$

$$130. \quad y = \arcsin \frac{1}{x}.$$

$$117. \quad y = \lg(x^2 + 4).$$

$$119. \quad y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

$$121. \quad y = \cos \ln(2x + 3).$$

$$123. \quad y = \frac{e^{x/2} - 2}{\ln 2x}.$$

$$125. \quad y = \arcsin x^3 \operatorname{arctg} 2x.$$

$$127. \quad y = \sqrt{1 + \arcsin \frac{x}{3}}.$$

$$129. \quad y = e^{4x \operatorname{arctg} x}.$$

$$131. \quad y = \arcsin \sqrt{1 - e^x}.$$

3.3.3. Некоторые практические приложения понятия производной

Понятие производной находит практические приложения не только внутри математики. Оно широко используется в физике, технике, биологии, экономических и социологических исследованиях. В школьном курсе математики с помощью производной исследуются такие свойства функции, как ее монотонность, наличие локальных экстремумов, точек перегиба графика функции, находятся промежутки выпуклости и вогнутости графика, т. е. свойства, которые с определенной степенью точности позволяют изобразить эскиз графика на координатной плоскости. Мы не будем здесь рассматривать эти вопросы. Остановимся лишь на тех применениях, которые опираются на механический смысл производной.

Механический смысл производной. Если точка движется по закону $s = s(t)$, где s — путь, t — время, то $s'(t)$ представляет скорость движения в момент времени t . Вторая производная $s''(t) = [s'(t)]' = v'(t)$ от функции $s = s(t)$ по времени есть скорость изменения скорости, то есть ускорение точки в момент времени t .

В общем случае производную $f'(x)$ функции $y = f(x)$, описывающей зависимость величины y от величины x , можно интерпретировать как «скорость» изменения величины y по отношению к величине x . Так, например, в экономике рассматриваются предельные характеристики экономических объектов или процессов,

которые характеризуют не состояние, а скорость изменения экономического объекта или процесса относительно времени или другого исследуемого фактора. Рассмотрим некоторые из предельных величин, используемых в настоящее время в экономике.

1. *Издержки производства.* Пусть издержки производства y являются некоторой функцией от количества x выпускаемой продукции: $y = C(x)$. Тогда производная $y' = C'(x)$ будет выражать *предельные издержки* производства и приближенно характеризовать прирост переменных затрат на производство дополнительной единицы продукции. Заметим, что средние издержки являются издержками на единицу выпуска продукции: $y_1 = \frac{C(x)}{x}$.

2. *Производительность труда.* Пусть функция $y = u(t)$ выражает объем произведенной продукции за время t . Тогда производная $u'(t_0)$ этой функции выражает *производительность труда* в момент времени t_0 .

3. *Функции потребления и сбережения.* Пусть x – национальный доход, $C(x)$ – функция потребления (часть дохода, которая тратится), а $S(x)$ – функция сбережения. Тогда $x = C(x) + S(x)$.

Дифференцируя правую и левую части равенства по x , получим:

$$C'(x) + S'(x) = 1,$$

где $C'(x)$ – предельная склонность к потреблению, а $S'(x)$ – предельная склонность к сбережению.

4. *Эластичность функции.* Это – мера реагирования одной переменной величины на изменение другой. *Эластичность* функции $y = f(x)$ показывает, на сколько процентов изменится одна переменная в результате изменения другой переменной на 1%, и определяется формулой:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} y'(x).$$

Заметим, что эластичность функции часто применяют при анализе зависимости спроса и предложения от цены. В этом случае она показывает, на сколько процентов приблизительно изменится спрос или предложение при изменении цены на 1%. Если эластичность спроса $|E_x(y)| > 1$, то спрос считается эластичным, если

$|E_x(y)|=1$, то нейтральным, а если $|E_x(y)|<1$, то неэластичным относительно цены.

Задачи

132. Функция издержек производства продукции некоторой фирмой имеет вид: $y(x) = 0,2x^3 - 1,3x^2 + 6x + 240$ (ден. ед.). Найти *средние* и *предельные* издержки производства и вычислить их значение при $x=10$.

Решение. Найдем производную заданной функции: $y'(x) = 0,6x^2 - 2,6x + 6$. Полученная функция определяет предельные издержки производства. Их значение при $x=10$ равно $y'(10) = 0,6 \cdot 10^2 - 2,6 \cdot 10 + 6 = 40$.

Средние издержки данного производства вычисляются следующим образом: $y_1(x) = \frac{0,2x^3 - 1,3x^2 + 6x + 240}{x} = 0,2x^2 - 1,3x + 6 + \frac{240}{x}$,

$$y_1(10) = 0,2 \cdot 10^2 - 1,3 \cdot 10 + 6 + \frac{240}{10} = 20 - 13 + 6 + 24 = 37.$$

Найденные издержки показывают, что при данном уровне производства средние затраты на изготовление одной единицы продукции составляют 37 ден. ед., а увеличение объема на одну единицу обойдется фирме приблизительно в 40 ден. ед.

133. Функция потребления некоторой страны имеет вид: $C(x) = 16 + 0,26x + 0,36x^{\frac{4}{3}}$, где x — совокупный национальный доход (ден. ед.). Найти: 1) предельную склонность к потреблению; 2) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 27 ден. ед.

Решение. Найдем предельную склонность к потреблению: $C'(x) = 0,26 + 0,48x^{\frac{1}{3}}$; ее значение при $x=27$ равно $C'(27) = 0,26 + 0,48 \cdot 27^{\frac{1}{3}} = 0,26 + 0,48 \cdot 3 = 1,7$ ден. ед.

Так как $x = C(x) + S(x)$, то предельная склонность к сбережению $S'(x) = 1 - C'(x) = 1 - (0,26 + 0,48x^{\frac{1}{3}}) = 0,74 - 0,48x^{\frac{1}{3}}$. Ее значение при $x=27$ равно $S'(27) = 1 - 1,7 = -0,7$.

134. Объем y производства мужских костюмов, выпускаемых некоторой фабрикой, может быть описан следующей функцией $y = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 7t + 2100$ (ед.), где t — календарный месяц года.

Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения: а) в начале года ($t = 0$); б) в середине года ($t = 6$); в) в конце года ($t = 12$).

Решение. а) Производительность труда выражается производной $z(t) = y'(t) = t^2 - 7t + 7$ (ед./мес.). Скорость и темп изменения производительности выражаются соответственно производной $z'(t)$ функции $z(t)$ и логарифмической производной $T_z(t) = [\ln z(t)]'$ ее:

$$z'(t) = 2t - 7 \text{ (ед./мес.}^2\text{)}; \ln z(t) = \ln(t^2 - 7t + 7) \text{ и}$$

$$T_z(t) = [\ln z(t)]' = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{2t - 7}{t^2 - 7t + 7} \text{ (ед./мес.}^2\text{)}.$$

В заданные моменты времени имеем соответственно:

$$\text{а) } z(0) = 7 \text{ (ед./мес.)}, z'(0) = -7 \text{ (ед./мес.}^2\text{)} \quad T_z(0) = \frac{-7}{7} = -1 \text{ (ед./мес.)}.$$

$$\text{б) } z(6) = 36 - 42 + 7 = 1 \text{ (ед./мес.)}, z'(6) = 12 - 7 = 5 \text{ (ед./мес.}^2\text{)}.$$

$$T_z(6) = \frac{12 - 7}{6^2 - 7 \cdot 6 + 7} = 5 \text{ (ед./мес.)}.$$

$$\text{в) } z(12) = 144 - 12 \cdot 7 + 7 = 67 \text{ (ед./мес.)}, z'(12) = 2 \cdot 12 - 7 = 17 \text{ (ед./мес.}^2\text{)},$$

$$T_z(6) = \frac{17}{67} \text{ (ед./мес.)}.$$

135. Зависимость между издержками производства y и объемом выпускаемой продукции x на некотором предприятии выражается функцией $y = 50x - 0,05x^3$. Определите средние и предельные издержки при объеме продукции 10 ед.

136. Выручка от продажи конфет составляет $p = 50 - 0,5x^2$, где x – объем проданной продукции (тыс. ед.). Найдите среднюю и предельную выручки, если продано а) 10 тыс. ед; б) 60 тыс. ед.

137. Себестоимость продукции y связана с объемом выпускаемой продукции x уравнением $y = 6 \ln(1 + 3x)$. Определите среднюю и предельную себестоимости продукции при объеме, равном 10 ед.

138. Производительность труда бригады описывается уравнением $y = -2,5t^2 + 15t + 100$, где $0 \leq t \leq 8$ – рабочее время, выраженное в часах. Вычислите скорость и темп изменения производительности труда при $t = 2$ и $t = 7$.

139. Функция потребления некоторой страны имеет вид: $C(x) = 13 + 0,25x + 0,37x^{\frac{4}{3}}$, где x – совокупный национальный доход (ден. ед.). Найдите: 1) предельную склонность к потреблению;

2) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 27 ден. ед.

140. Функция сбережения некоторой страны имеет вид $S(x) = 25 - 0,53x - 0,41x^{\frac{2}{3}}$, где x – совокупный национальный доход (ден. ед.). Найдите: 1) предельную склонность к потреблению; 2) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 27 ден. ед.

141. Зависимость между себестоимостью y (млн руб.) готовой продукции предприятия и объемом выпускаемых изделий x (тыс. шт.) выражается уравнением $y = \sqrt{x+4} - 2$. Найдите эластичность себестоимости продукции предприятия, выпускающего 12 тыс. изделий. Какие рекомендации можно дать руководителям предприятия об изменении величины объема выпускаемой продукции.

142. Зависимость между объемом выпуска готовой продукции y (млн руб.) и объемом производственных фондов x (млн руб.) выражается функцией $y = 0,6x - 4$. Найдите эластичность выпуска продукции для предприятия, имеющего фонды в размере 40 млн руб.

3.4. Интегральное исчисление функции одной переменной

3.4.1. Неопределенный интеграл, его основные свойства

В дифференциальном исчислении решается задача отыскания для данной функции $f(x)$ ее производной. Интегральное исчисление решает обратную задачу: найти функцию $F(x)$, зная ее производную $F'(x) = f(x)$.

Определение 1. Функция F называется *первообразной функцией* $y = f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка выполняется условие $F'(x) = f(x)$.

Пример. Дана функция $f(x) = x^2$. Первообразной для нее служит функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$, т. к. $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x)$.

Первообразной для нее является также и любая функция $F_1(x) = \frac{x^3}{3} + C$, где C – постоянная, ибо $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2 = f(x)$.

Теорема 1. Если функция $y = F(x)$ – первообразная функции $y = f(x)$ на заданном промежутке, то и любая функция $F(x) + C$ является первообразной этой функции.

Следствие. Если функция имеет первообразную, то она имеет бесконечно много первообразных. Любые две различные первообразные данной функции отличаются друг от друга на константу C .

Множество всех первообразных для функции $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$. График каждой первообразной называется *интегральной кривой*.

Определение 2. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на данном промежутке называется *неопределенным интегралом* от этой функции и обозначается символом $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \quad (1)$$

В записи $\int f(x)dx$ функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*; выражение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*; \int – *знак неопределенного интеграла*.

Нахождение неопределенного интеграла от функции $f(x)$ называется *интегрированием функции $f(x)$* . Операции интегрирования и дифференцирования – это взаимно обратные операции.

Графики всех функций, составляющих неопределенный интеграл, образуют семейство кривых $y = F(x) + C$, получающихся из какой-то одной кривой семейства параллельным переносом ее вдоль оси Oy .

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\int 0dx = C$.

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$, $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$, $\int dx = x + C$.

$$4. \int A f(x) dx = A \int f(x) dx.$$

$$5. \int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

Свойства 4 и 5 называются свойствами линейности.

6. Формула интегрирования остается справедливой, независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или какой-то функцией от нее: $\int f(u) du = F(u) + C$, независимо от того $u = x$ или $u = \phi(x)$. (инвариантность неопределенного интеграла).

3.4.2. Таблица основных неопределенных интегралов.

Методы интегрирования

$$1. \int k du = ku + C.$$

$$2. \int u du = \frac{u^2}{2} + C.$$

$$3. \int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C, \quad (a \neq -1).$$

$$4. \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$5. \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C.$$

$$6. \int u^{-1} du = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C.$$

$$7. \int e^u du = e^u + C.$$

$$8. \int \sin u du = -\cos u + C.$$

$$9. \int \cos u du = \sin u + C.$$

$$10. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$$

$$11. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$$

$$12. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C, \quad \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u + C.$$

$$13. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C, \quad \int \frac{du}{1 + u^2} = \operatorname{arctg} u + C.$$

Идея различных методов нахождения интегралов состоит в сведении искомого интеграла к табличному или сумме табличных. Можно выделить 3 основных метода интегрирования:

- 1) непосредственное интегрирование;
- 2) метод интегрирования по частям;
- 3) метод замены переменной.

1) *Непосредственное интегрирование* использует лишь преобразования подынтегральной функции и свойства неопределенного интеграла с целью сведения данного интеграла к вычислению интегралов табличных.

2) *Интегрирование по частям* осуществляется по формуле

$$\int u dv = uv - \int v du ; \quad (2)$$

где u и v — дифференцируемые функции. Этот метод применяют в случаях, когда:

а) подынтегральная функция представляет собой произведение тригонометрической или показательной функции на степенную (или многочлен); за u тогда принимается степенная функция (или многочлен);

б) подынтегральная функция представляет собой произведение обратной тригонометрической или логарифмической функции на степенную (или многочлен); за u тогда принимается обратная тригонометрическая функция или логарифм.

3) *Замена переменной* предполагает замену переменной x новой переменной по формуле $x = \varphi(t)$, после чего получается интеграл

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt . \quad (3)$$

Задачи

143. Убедиться, что функция $F(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$ является первообразной функции $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ на $(-\infty, \infty)$.

Решение. Для доказательства надо найти производную функции $F(x)$. $F'(x) = \left(2e^{\frac{x}{2}} \right)' = 2e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{x}{2} \right)' = 2e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = e^{\frac{x}{2}} = f(x)$. Так как $F'(x) = f(x)$, то $F(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$ является первообразной функции $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$.

144. Убедиться, пользуясь определением, что

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C .$$

Решение. Для доказательства найдем производную правой части равенства: $(x \sin x + \cos x + C)' = 1 \cdot \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$. Так как эта производная равна подынтегральной функции, то равенство справедливо.

145. Вычислить $\int \left(4\sqrt[3]{x} + \frac{5}{x^2} - 8x^3 \right) dx$.

Решение. При вычислении этого интеграла применим свойства 4, 5 и табличные интегралы 2, 3.

$$\begin{aligned} \int (4\sqrt[3]{x} + \frac{5}{x^2} - 8x^3) dx &= 4 \int x^{\frac{1}{3}} dx + 5 \int x^{-2} dx - 8 \int x^3 dx = \frac{4x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{5x^{-2+1}}{-2+1} - \frac{8x^{3+1}}{3+1} + C = \\ &= \frac{4x^{4/3}}{4/3} + \frac{5x^{-1}}{-1} - \frac{8x^4}{4} + C = 3\sqrt[3]{x^4} - \frac{5}{x} - 2x^4 + C. \end{aligned}$$

146. Вычислить $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^2} dx$.

Решение. Выполним в числителе возведение суммы в квадрат, а затем деление каждого слагаемого на знаменатель. Вычисление интеграла сведется к вычислению суммы трех табличных интегралов:

$$\begin{aligned} \int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^2} dx &= \int \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x^2} dx = \int \frac{dx}{x} + 2 \int x^{-\frac{3}{2}} dx + \int x^{-2} dx = \\ &= \ln |x| + \frac{2x^{-1/2}}{-1/2} - x^{-1} + C = \ln |x| - \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

147. Вычислить $\int \frac{dx}{4x^2+1}$.

Решение. Сведем подынтегральное выражение к табличному интегралу 13.

$$\int \frac{dx}{4x^2+1} = \int \frac{dx}{4\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2x) + C.$$

148. Вычислить $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

Решение. Подынтегральная функция представляет собой произведение логарифмической функции $\ln x$ на степенную $x^{-\frac{1}{2}}$, поэтому применим метод интегрирования по частям. Положим

$u = \ln x$, $dv = x^{-\frac{1}{2}} dx$. Тогда $du = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, $v = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + c$. Считают, что $c = 0$ и тогда, согласно формуле интегрирования по частям, $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} \ln x - \int 2x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx = 2x^{\frac{1}{2}} \ln x - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} \ln x - 4x^{\frac{1}{2}} + C$.

149. Вычислить $\int x \cos x dx$.

Решение. Применим метод интегрирования по частям (поясните почему).

Пусть $u = x$, $dv = \cos x dx$. Тогда $du = dx$, $v = \int \cos x dx = \sin x$. По формуле интегрирования по частям получим:

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

150. Вычислить $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$.

Решение. Применим метод замены переменной с тем, чтобы освободиться от радикалов. Пусть $t = \sqrt{x}$. Тогда $x = t^2$ и $dx = 2t dt$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx &= \int \frac{t}{t+1} 2t dt = 2 \int \frac{t^2}{t+1} dt = 2 \int \frac{(t^2-1)+1}{t+1} dt = 2 \int \left(\frac{t^2-1}{t+1} + \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= 2 \int \frac{t^2-1}{t+1} dt + 2 \int \frac{1}{t+1} dt = 2 \int (t-1) dt + 2 \int \frac{1}{t+1} dt = 2 \left(\frac{t^2}{2} - t \right) + 2 \ln(t+1) + C = \\ &= t^2 - 2t + 2 \ln(t+1) + C. \end{aligned}$$

Теперь вернемся к исходной переменной x ($t = \sqrt{x}$):

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx = x - 2\sqrt{x} + 2 \ln(\sqrt{x}+1) + C.$$

151. Вычислить $\int \sin^2 x \cos x dx$.

Так как $(\sin x)' = \cos x$, то применим замену $\sin x = t$. Тогда $\cos x dx = dt$ и $\int \sin^2 x \cos x dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C$. Переходя к исходной переменной, получим: $\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$.

Вычислите интегралы.

152. $\int \frac{dx}{x^3}$.

153. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$.

154. $\int \frac{3}{1+x^2} dx$.

155. $\int \frac{2}{\sin^2 2x} dx$.

156. $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{x} dx$.

157. $\int \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$.

158. $\int \frac{\sin \ln x}{x} dx.$

159. $\int e^{-\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

160. $\int x \sin x dx.$

161. $\int x^2 \cos x dx.$

162. $\int x^2 e^{2x} dx.$

163. $\int (2x+1)e^{(x^2+x)} dx.$

164. $\int (x+1) \ln x dx.$

165. $\int \frac{2x}{1+x^2} dx.$

166. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$

167. $\int \ln(x+1) dx$

3.4.3. Определенный интеграл

Определение 3. Определенным интегралом от непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ называется приращение какой-либо ее первообразной $F(x)$ на этом отрезке: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$

Эта формула носит название формулы Ньютона – Лейбница.

Для обозначения приращения первообразной применяют также запись

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Следует подчеркнуть, что, в отличие от неопределенного интеграла, представляющего собой совокупность функций, определенный интеграл есть конкретное число и это число не зависит от выбора первообразной, по которой оно считается.

Некоторые свойства определенного интеграла

1) $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$

2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx.$

3) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$

4) $\int_a^a f(x) dx = 0.$

5) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

Вычисление определенных интегралов основано на применении формулы Ньютона – Лейбница. Для отыскания первообразной для подынтегральной функции применяются те же методы, что и при вычислении неопределенных интегралов.

1. *Интегрирование по частям определенного интеграла* производится по формуле

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (4)$$

при условии, что функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на $[a, b]$.

2. Замена переменной в определенном интеграле использует формулу:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt; \quad (5)$$

здесь предполагается, что функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha, \beta]$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, а функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке $x = \varphi(t)$, где $t \in [\alpha, \beta]$.

Задачи

168. Вычислить $\int_1^2 3x^2 dx$.

Решение. Так как $\int 3x^2 dx = 3 \frac{x^3}{3} + C = x^3 + C$, то по формуле Ньютона – Лейбница $\int_1^2 3x^2 dx = x^3 \Big|_1^2 = 2^3 - 1^3 = 8 - 1 = 7$.

169. Вычислить $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$.

Решение. По формуле Ньютона – Лейбница и формуле 9 таблицы интегралов получаем: $\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$.

170. Вычислить $\int_0^{1/2} \frac{dx}{4x^2 + 1}$.

Решение. Искомый неопределенный интеграл вычислен в упражнении 147. Поэтому

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{4x^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{8}.$$

171. Вычислить $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx$.

Решение. Из формулы $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ следует, что

$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$. Тогда искомый интеграл вычисляется применением

свойств интеграла и формулы Ньютона–Лейбница.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx &= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int_0^{\pi/4} -1 dx + \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = -x \Big|_0^{\pi/4} + \operatorname{tg} x \Big|_0^{\pi/4} = \\ &= \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 \right) - \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = 1 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Вычислите определенные интегралы.

172. $\int_1^2 (x+1) dx$.

173. $\int_4^9 (2 + \sqrt{x}) dx$.

174. $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}$.

175. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x}$.

176. $\int_0^{\pi} \cos x dx$.

177. $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$.

178. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

179. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

180. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

181. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

182. $\int_0^1 2^x dx$.

183. $\int_0^{\ln 2} e^x dx$.

3.5. Некоторые приложения определенного интеграла

В данном параграфе рассмотрим некоторые задачи из сферы экономики и социологии, которые решаются с использованием интегралов. В этих задачах функция $y = f(x)$ описывает какие-то явления или процессы производства либо социальной сферы.

1. Пусть функция $y = f(x)$ описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени. Тогда объем $Q(t_1, t_2)$ продукции, произведенной за промежуток времени $[t_1, t_2]$, вычисляется по формуле:

$$Q(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \quad (6)$$

184. Изменение производительности производства с течением времени от начала внедрения нового технологического процесса задается функцией $z = 32 - 2^{-0,5t+5}$, где t – время в месяцах. Найти объем продукции, произведенной: а) за первый месяц, б) за третий месяц, в) за шестой месяц, считая от начала реконструкции производства.

Решение. По формуле (6):

$$Q(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} (32 - 2^{-0,5t+5}) dt = 32t \Big|_{t_1}^{t_2} - 2^5 \int_{t_1}^{t_2} 2^{-0,5t} dt = 32(t_2 - t_1) + \frac{64}{\ln 2} (2^{-0,5t_2} - 2^{-0,5t_1}).$$

$$\text{Тогда } Q(0,1) = 32(1-0) + \frac{64}{\ln 2} (2^{-0,5} - 2^0) \approx 4,95;$$

$$Q(3,2) = 32(3-2) + \frac{64}{\ln 2} (2^{-0,5 \cdot 3} - 2^{-0,5 \cdot 2}) = 32 + \frac{64}{\ln 2} (2^{-1,5} - 2^{-1}) \approx 18,48;$$

$$Q(5,6) = 32(6-5) + \frac{64}{\ln 2} (2^{-0,5 \cdot 6} - 2^{-0,5 \cdot 5}) = 32 + \frac{64}{\ln 2} (2^{-3} - 2^{-2,5}) \approx 27,22.$$

185. Определите объем выпуска продукции за первые пять часов работы при производительности $f(t) = 11,3e^{-0,417t}$, где t – время в часах.

186. При непрерывном производстве химического волокна производительность $f(t)$ (т/ч) растет с момента запуска 10 часов, а затем остается постоянной. Сколько волокна дает аппарат в первые сутки запуска, если $f(t) = e^{\frac{t}{5}} - 1$ при $t \in [0,10]$.

2. Пусть теперь функция $y = f(x)$ характеризует неравномерность распределения доходов среди населения, y – доля совокупного дохода, получаемого долей x беднейшего населения. График этой функции называется *кривой Лоренца* (рис. 27). Очевидно, что $0 \leq f(x) \leq x$ при $x \in [0,1]$, и неравномерность распределения доходов тем больше, чем больше площадь фигуры OAB (рис. 27). Поэтому в качестве меры указанной неравномерности используют так называемый *коэффициент Джини* k . Этот коэффициент равен отношению площади фигуры OAB к площади треугольника OAC .

187. По данным исследований о распределении доходов в одной из стран кривая Лоренца описывается уравнением $y = \frac{x}{3-2x}$, $x \in [0,1]$. Вычислить коэффициент Джини k .

Решение. По формуле вычисления площади фигуры, ограниченной линиями $y = x$ и $y = \frac{x}{3-2x}$, $x \in [0,1]$, получаем:

$$S_{OAB} = \int_0^1 \left(x - \frac{x}{3-2x} \right) dx = \int_0^1 x dx + \int_0^1 \frac{x-1,5+1,5}{2x-3} dx =$$

$$\frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{1}{2x-3} \right) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} x \Big|_0^1 + \frac{3}{4} \ln|2x-3| \Big|_0^1 = 1 - \frac{3}{4} \ln 3 \approx 0,176.$$

Тогда $k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = \frac{0,176}{0,5} = 0,352$.

188. Кривые Лоренца распределения дохода в некоторых странах могут быть заданы уравнениями:

а) $y = 0,85x^2 + 0,15x$; б) $y = 2^x - 1$; в) $y = 0,7x^3 + 0,3x^2$.

1) Какую часть дохода получают 10% наиболее низкооплачиваемого населения? Вычислить коэффициент Джини для этих стран.

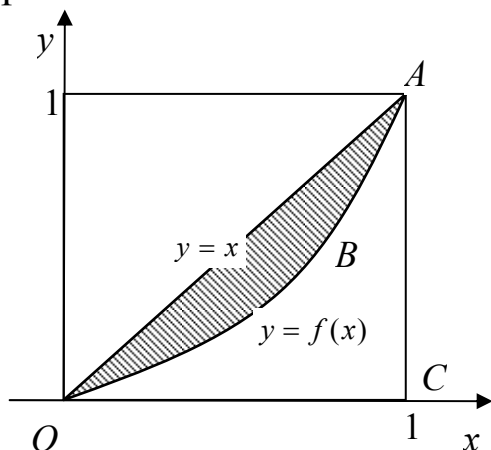


Рис. 27

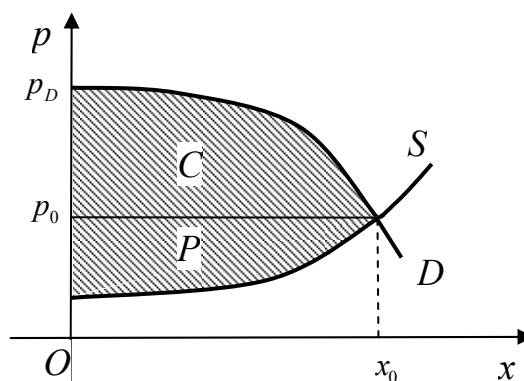


Рис. 28

3. Пусть $p = f(x)$ — функция спроса на некоторый товар (ее график — кривая D), $s = g(x)$ — функция предложения (ее график — кривая S), p — цена товара, x — величина спроса (предложения). Пусть далее $x = x_0$ — значение аргумента, при котором значения функций спроса f и предложения g совпадают. Точка (x_0, p_0) называется точкой рыночного равновесия. От реализации x_0 единиц товара по равновесной цене p_0 доход будет равен произведению $x_0 \cdot p_0$. Если предположить, что по мере удовлетворения спроса цена непрерывно снижается от максимальной $f(0)$ до равновесной x_0 , то доход составит $\int_0^{x_0} f(x) dx$.

Таким образом, если продавать товар по равновесной цене p_0 , то потребителями сберегается величина денежных средств, равная $C = \int_0^{x_0} f(x)dx - p_0 x_0$. Эта величина называется *выигрышем потребителя*. Аналогично, величина $P = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} f(x)dx$ называется *выигрышем поставщиков*.

Величины C и P численно равны площадям соответствующих криволинейных треугольников (рис. 28).

189. Законы спроса и предложения на рынке услуг имеют вид: $p = 186 - x^2$, $s = 20 + \frac{11}{6}x$. Найдите выигрыши потребителей и поставщиков в предположении рыночного равновесия.

Решение. Сначала найдем точку рыночного равновесия, для чего определим значение x , при котором $p = s$. При этом условии $186 - x^2 = 20 + \frac{11}{6}x$ или $6(186 - x^2) = 120 + 11x$. Отсюда получаем уравнение $6x^2 + 11x - 996 = 0$. Корни этого уравнения: $x_1 = -\frac{83}{6}$, $x_2 = 12$.

Так как величина спроса неотрицательна, то $x_0 = 12$, а, значит, $p_0 = 42$. Точка рыночного равновесия найдена: $(12, 42)$. Тогда

$$C = \int_0^{12} (186 - x^2)dx - 12 \cdot 42 = 186x \Big|_0^{12} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{12} - 504 = 1152,$$

$$P = 12 \cdot 42 - \int_0^{12} \left(20 + \frac{11}{6}x \right) dx = 504 - 20x \Big|_0^{12} - \frac{11}{6} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{12} = 132.$$

190. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = 134 - x^2$. Найдите выигрыш потребителей, если равновесная цена равна 70.

191. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = \frac{100}{x+15}$. Найдите выигрыш потребителей, если равновесное количество товара равно 10.

4. Некоторые вопросы алгебры

4.1. Матрицы и определители

Понятие матрицы является одним из основных понятий алгебры. Оно широко используется не только в различных разделах математики, но и при решении различных экономических задач, в том числе задач, связанных с теорией организации бизнеса, задач управленческого характера. В современных изданиях по экономике можно встретить такие понятия, как матричная карьера, матричная схема установки коэффициентов базового оклада, матричная схема формирования конкурентной карты рынка и т. д. В физике понятие матрицы применяют в электротехнике для описания электрических цепей (матрица инцидентности), для оценивания спектра сигналов, описания фильтрации сигналов. Используется понятие матрицы и при обработке различной статистической информации. Все это говорит о том, что понятие матрицы постепенно входит в словарь специалистов различных сфер деятельности.

4.1.1. Матрицы и операции над ними

Матрицей размером $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов. Обозначают матрицы заглавными буквами латинского алфавита:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элемент, стоящий в i -й строке и j -м столбце обозначают символом a_{ij} . Первый индекс указывает на номер строки, в которой находится элемент, а второй – на номер столбца, в котором стоит этот элемент. Элементы a_{ii} образуют *главную диагональ* матрицы и называются диагональными. Приведем примеры матриц:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов ($m = n$), называется *квадратной порядка m* .

Матрица, все элементы которой равны 0, называется **нулевой** и обозначается символом 0.

Матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, то есть квадратная матрица, все

недиагональные элементы которой равны 0, называется **диагональной**.

Диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны 1, называется **единичной** и обозначается символом E . Например, единичная матрица второго порядка имеет вид: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Будем также рассматривать **треугольные** матрицы, у которых элементы, стоящие ниже или выше главной диагонали (или побочной диагонали), равны нулю. Такой является, например, матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} — любые действительные числа.

Операции над матрицами

1. Сложение и вычитание можно производить над матрицами, имеющими одинаковые размеры. Пусть A и B — матрицы размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Суммой матриц одного размера называется матрица, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц-слагаемых:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы на число λ называется матрица, элементы которой равны произведению всех элементов заданной

матрицы на число λ :
$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число удовлетворяют всем тем свойствам, которые имеют место для операций над действительными числами.

Две матрицы называются **равными**, если они имеют одинаковые размеры и их элементы, стоящие на одинаковых местах, равны:

$$(A = B) \Leftrightarrow (\forall i)(\forall j)(a_{ij} = b_{ij}).$$

3. Умножение матрицы A на матрицу B не всегда возможно. Оно определяется только в том случае, если **число столбцов первой матрицы равно числу строк второй**.

Произведением матрицы $A_{m \times k}$ на матрицу $B_{k \times n}$ называется матрица $C_{m \times n} = A_{m \times k} \cdot B_{k \times n}$, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}.$$

Иначе,
$$c_{ij} = \sum_{s=1}^k a_{is}b_{sj}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

Следует заметить, что для умножения матриц свойство перестановочности не выполняется: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Действительно, если первое произведение существует, то при этом второе может и не существовать. Более того, существуют такие матрицы, которые можно перемножить в любом порядке, но при этом равенства произведений $A \cdot B$ и $B \cdot A$ не будет.

Единичная матрица E обладает свойством, аналогичным свойству числа 1 во множестве чисел. Если A – матрица размера $m \times n$, то справа ее можно умножить на единичную матрицу n -го порядка и при этом $A \cdot E = A$. В то же время матрицу A можно умножить на единичную матрицу и слева. Но в этом случае единичная матрица должна иметь порядок m : $E \cdot A = A$.

4. Транспонирование матрицы – это переход от матрицы A к матрице A^t , в которой строки и столбцы матрицы A поменялись

местами с сохранением порядка следования: $a_{ij}^t = a_{ji}$,
 $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

Например, для матрицы $A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ транспонированной
 будет матрица $A_{3 \times 2}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Матрица A^{-1} , обратная к квадратной A , – это матрица, удовлетворяющая условию $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E – единичная матрица.

Задачи

1. Указать, какие из следующих операций можно выполнить, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, а $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

- а) $A + B$; б) $A^T + B$; в) $A + B^T$; г) $A \cdot B$;
 д) $B \cdot A$; е) $A^T \cdot B$; ж) $A \cdot B^T$; з) $A^T \cdot B^T$.

Решение. б) Матрица A имеет размеры 3×2 , размеры транспонированной матрицы A^t равны 2×3 и совпадают с размерами матрицы B . Значит, операция $A^T + B$ выполнима и $A^t + B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

г) Матрица A имеет размеры 3×2 , а матрица B – размеры 2×3 . Так как число столбцов первого сомножителя A совпадает с числом строк второго сомножителя, то произведение $A \cdot B$ существует. Найдем это произведение – матрицу C размера 3×3 :

$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$. Согласно определению произведения матриц,

для получения элементов первой строки матрицы $C = A \cdot B$ рассмотрим первую строку матрицы A . Элемент c_{11} равен сумме произведений элементов первой строки матрицы A на соответствующие элементы первого столбца матрицы B :

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 10;$$

аналогично, $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5$

и $c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$.

Элементы второй строки матрицы C находятся как суммы произведений элементов второй строки матрицы A на соответствующие элементы первого, второго и третьего столбцов матрицы B :

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 5 \cdot 1 + 7 \cdot 3 = 26,$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 17,$$

$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0.$$

Элементы третьей строки матрицы C находятся умножением третьей строки матрицы A на соответствующие элементы первого, второго и третьего столбцов матрицы B :

$$c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = 2,$$

$$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 4,$$

$$c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0.$$

Все вычисления, производимые при умножении матриц, записывают следующим образом:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \\ 5 \cdot 1 + 7 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 & 5 \cdot 0 + 7 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 26 & 17 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Докажите, что операции сложения матриц и умножения матрицы на число удовлетворяют следующим свойствам:

$$1) A + B = B + A; \quad 2) (A + B) + C = A + (B + C);$$

$$3) A + 0 = 0 + A = A;$$

4) Для любой матрицы A существует матрица A' такая, что

$$A + A' = A' + A = 0.$$

Матрицу A' называют матрицей, противоположной A , и обозначают символом $(-A)$;

$$5) (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A); \quad 6) (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A;$$

$$7) \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B; \quad 8) 1 \cdot A = A.$$

3. Укажите, для каких пар матриц A и B существуют произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$:

$$а) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad б) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найдите произведение матриц:

$$а) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad в) \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \\ 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. На примерах квадратных матриц второго порядка проверьте выполнимость следующих свойств операции умножения матриц:

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,

2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$,

3) $(\lambda A) \cdot B = \lambda(A \cdot B)$.

6. Найдите матрицу 1) $3A + B'$, 2) $A \cdot B - 2A'$,

если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -6 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

7. Найдите значение многочлена

1) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, 2) $f(x) = -x^2 + 3x + 2$,

если переменной x является матрица:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, б) $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. (1б) Значение многочлена 1) при $x = B$ равно $f(B) = 3B^2 - 2B + 5$. Будем выполнять действия над матрицей B последовательно.

1. $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$;

2. $3B^2 = 3 \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}$;

3. $f(B) = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 5 = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 5 = \begin{pmatrix} 23 & -6 \\ -4 & 19 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & -6 \\ -4 & 24 \end{pmatrix}$.

Заметим, что число 5 обозначает здесь матрицу вида

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

8. На матрицах третьего порядка проверьте выполнимость следующих свойств операции транспонирования:

- 1) $(A')^t = A$; 2) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$;
 3) $(A + B)^t = A^t + B^t$; 4) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

9. Проверьте, являются ли взаимно обратными матрицы

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

10. Выясните, какие из приведенных ниже матриц имеют обратные:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

11. Найдите матрицы, обратные заданным:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Для нахождения обратной матрицы используют так называемые элементарные преобразования матрицы. К ним относятся: 1) умножение строки матрицы на отличное от 0 число, 2) сложение строк, 3) сложение строки с другой строкой, умноженной на отличное от 0 число, 4) перестановка строк.

Решение. Найдем матрицу, обратную матрице 4). Для этого припишем справа к этой матрице единичную матрицу 3-го порядка и, используя элементарные преобразования, преобразуем полученную матрицу так, чтобы на месте данной матрицы оказалась матрица единичная, тогда на месте приписанной единичной матрицы будет стоять матрица, обратная к данной.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & | & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 1/7 & 0 & 1/7 \\ 2 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 1/7 & 0 & 1/7 \\ 2 & 0 & 0 & | & 1/7 & 1 & 1/7 \\ -1 & 1 & 0 & | & -4/7 & 0 & 3/7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 1/7 & 0 & 1/7 \\ 1 & 0 & 0 & | & 1/14 & 1/2 & 1/14 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/14 & 1/2 & 1/14 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/7 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

Поясним, как осуществляется переход к каждой последующей матрице. Вторая матрица получится, если первую строку исходной матрицы сложить с последней ее строкой.

Третья матрица получается делением первой строки второй матрицы на число 7.

Чтобы получить четвертую матрицу, надо выполнить две операции над строками третьей: 1) ко второй строке прибавить первую, 2) первую строку третьей матрицы умножить на (-4) и сложить с третьей ее строкой.

Пятая матрица получится, если: 1) вторую строку разделить на 2; 2) вторую строку, деленную на 2, сложить с третьей.

Наконец переставляем строки так, чтобы на месте заданной матрицы стояла матрица единичная. Тогда обратной к данной матрице будет матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/14 & 1/2 & 1/14 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/7 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

12. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу:

а) $B^t \cdot A^t \cdot A \cdot B$; б) $A \cdot B \cdot B^t \cdot A^{-1}$; в) $B^t \cdot A \cdot B \cdot A^t$.

13. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей A , то есть матрицы X , для которых выполняется условие $A \cdot X = X \cdot A$:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

14. Найдите все матрицы второго порядка, квадрат которых равен нулевой матрице.

15. Найдите все матрицы второго порядка, квадрат которых равен единичной матрице.

4.1.2. Определители квадратных матриц

Определитель квадратной матрицы – это число, которое ставится в соответствие матрице. Обозначается определитель символом $|A|$. Правило, по которому вычисляется определитель, и служит определением этого понятия.

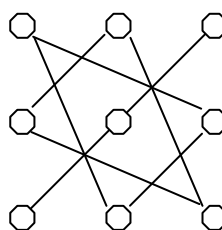
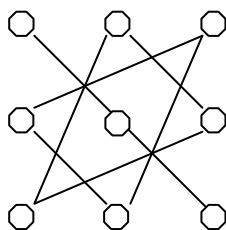
1. **Определителем квадратной матрицы второго порядка** называется число, которое вычисляется по следующему правилу:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. **Определителем квадратной матрицы третьего порядка** называется число, которое вычисляется по «правилу треугольников» (правилу Саррюса):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Для запоминания правила можно использовать схемы, которые показывают, какие произведения, стоящие в правой части, берутся со знаком «+» (левая схема), а какие – со знаком «–» (правая схема).



Чтобы дать определение определителя матрицы n -го порядка, введем некоторые новые понятия, касающиеся матрицы.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n -го порядка $A = (a_{ij})$ называется определитель матрицы, полученной из данной матрицы вычеркиванием i -й строки и j -го столбца (т. е. строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}).

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n -го порядка $A = (a_{ij})$ называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

3. **Определителем квадратной матрицы n -го порядка** называется число, которое равно сумме произведений элементов любой строки (или столбца) матрицы на их алгебраические дополнения:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad i - \text{номер строки}.$$

Сформулированное правило называется **правилом Лапласа** разложения определителя по элементам строки или столбца.

Из правила Лапласа следует, что определитель треугольной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

в частности матрицы диагональной, равен произведению ее диагональных элементов: $|A| = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$.

Некоторые свойства определителей

- 1) Определитель не меняется при транспонировании матриц.
- 2) Определитель меняет свой знак при перестановке любых двух строк (столбцов) матрицы.
- 3) Определитель равен нулю, если: а) все элементы какой-либо строки или столбца равны нулю, б) элементы любых двух строк (или столбцов) пропорциональны или равны.
- 4) Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.

Понятие определителя позволяет разбить множество всех квадратных матриц на два класса: *вырожденные* матрицы и матрицы *невырожденные*.

Квадратная матрица называется ***невырожденной***, если ее определитель не равен 0, в противном случае она называется ***вырожденной***.

Также понятие определителя позволяет сформулировать ***критерий существования обратной матрицы для заданной квадратной матрицы***: обратная матрица A^{-1} для заданной матрицы A существует тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная, то есть когда $|A| \neq 0$.

В этом случае существует еще одно правило отыскания A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}, \text{ где } \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \text{ — присоединенная матрица.}$$

Элементами присоединенной матрицы являются алгебраические дополнения элементов матрицы, транспонированной к матрице A .

Задачи

16. Вычислите определители:

$$\begin{aligned}
 &1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} a & -6 \\ -b & 4 \end{vmatrix}, \\
 &5) \begin{vmatrix} 5 & -6 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}, \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}, \quad 7) \begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}, \quad 8) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}, \\
 &9) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}, \quad 10) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}, \quad 11) \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

17. Вычислите определители 4-го порядка:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

18. Найдите обратную матрицу, используя понятие алгебраического дополнения:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \quad 4) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

19. Найдите обратную матрицу двумя способами:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

20. Решите уравнения:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0; \quad 2) \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad 3) \begin{vmatrix} x^2 & 16 & 9 \\ x & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

21. Решите уравнение $A \cdot X = B$:

1) если $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix}$; 2) если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$.

22. Решите уравнение $X \cdot A = B$, если:

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

4.2. Матричная алгебра в решении задач с экономическим содержанием

23. В некоторой отрасли имеется m заводов, выпускающих n видов продукции. Объем продукции каждого вида (в стоимостном выражении), производимой на этих заводах в 1-м квартале, определяется матрицей $A_{m \times n}$, а во втором квартале – матрицей $B_{m \times n}$: a_{ij} и b_{ij} – объемы продукции j -го типа, производимой на i -м заводе в 1 и 2-м кварталах соответственно. Найти:

а) объемы продукции каждого типа, выпускаемой на каждом из заводов;

б) прирост объемов производства во втором квартале по сравнению с первым по видам продукции и заводам;

в) стоимостное выражение выпущенной продукции за полгода (в долларах), если λ – курс доллара по отношению к рублю.

1) Решить задачу, если $m = 4$, $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2) Решите задачу, если $m = 3$, $n = 4$ и заданы матрицы помещенных выпусков продукции на каждом заводе:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. (1а) Объемы продукции за полугодие определяются суммой матриц A и B :

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix},$$

где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ – объем продукции j -го типа, произведенной за полугодие на i -м заводе.

б) Прирост объемов производства во втором квартале по сравнению с первым определяется разностью матриц:

$$D = B - A = \begin{pmatrix} 1-3 & -5 \\ 1 & 2-1 \\ 0 & 2-3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отрицательные элементы матрицы D показывают, что на заводе с номером i объем производства j -го продукта уменьшился, положительные – увеличился, нулевые – не изменился.

в) Произведение $\lambda C = \lambda(A + B)$ дает выражение стоимости объемов производства за квартал в долларах по каждому заводу и каждому виду продукции (матрицу выпишите самостоятельно).

24. Предприятие производит n видов продукции, объемы выпуска которых заданы матрицей $A_{1 \times n}$. Цена реализации единицы i -го вида продукции в j -м регионе задана матрицей $B_{n \times k}$, k – число регионов, в которых реализуется продукция предприятия. Найдите матрицу выручки по регионам и определите, с каким из них выгоднее сотрудничать.

Решите задачу, если:

$$1) \ n=3, \ k=4, \ A_{1 \times 3} = (100, 200, 100), \ B_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$2) \ n=4, \ k=3, \ A_{1 \times 4} = (10, 40, 10, 20), \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1) Выручка определяется матрицей

$$C = A \cdot B = (100 \ 200 \ 100) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (600 \ 1300 \ 700 \ 1300).$$

Здесь c_{1j} – выручка предприятия в j -м регионе. Полученная матрица показывает, что предприятию выгоднее продавать продукцию во втором и четвертом регионах.

25. Предприятие выпускает n видов продукции, используя m видов сырья. Нормы затрат i -го вида сырья на производство единицы продукции j -го типа заданы матрицей затрат $A_{m \times n}$. Количество продукции каждого типа, выпущенной предприятием за определенный промежуток времени, характеризует матрица – столбец $X_{n \times 1}$. Найдите матрицу V полных затрат сырья каждого вида на производство всей продукции за данный промежуток времени. Решите задачу, если:

1) Нормы расхода сырья представлены в таблице

	P_1	P_2	P_3
Сырье S_1	5	0	4
Сырье S_2	3	1	4

а количество выпущенной продукции описывает матрица

$$X = \begin{pmatrix} 150 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} 90 \\ 100 \\ 120 \end{pmatrix}; \quad 3) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 150 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1) Матрица A имеет вид $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Затраты V сы-

рья на выпуск всего объема продукции вычисляются как произведение матриц: $V = A \cdot X$. Таким образом,

$$V = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 750 + 320 \\ 450 + 120 + 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1070 \\ 890 \end{pmatrix}.$$

26. Предприятие производит мебель трех видов и продает ее в четырех регионах. Матрица $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ задает цену реализации единицы мебели i -го типа в j -м регионе. Определите выручку предприятия в каждом регионе, если реализация мебели за месяц (по видам) задана матрицей $A = \begin{pmatrix} 200 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}$.

4.3. Применение матриц в теории игр

Теория игр – это недавно возникшая область математики, изучающая задачи о выработке оптимальной стратегии в той или иной конфликтной ситуации. Ситуация считается конфликтной, если в ней участвуют противоборствующие стороны, например следователь и преступник, обвинитель и обвиняемый, группа захвата и задерживаемый. «Враждующие стороны» преследуют противоположные цели, и результат каждого мероприятия одной из сторон зависит от того, какие действия выберет «противник». Рассматриваемые в этой теории схемы охватывают как собственно игры, так и различные практические ситуации: рациональные производственные и экономические решения, вопросы военной тактики, вопросы выбора системы экспериментов.

Первые работы по теории игр были сделаны в 1909 г. немецким математиком Э. Цермело (1871–1953). Большой вклад в становление этой теории внес Джон фон Нейман в 1928 г.: он сформулировал основные идеи и результаты и доказал основную теорему теории игр. Значительное внимание задачам теории игр было уделено в годы Второй мировой войны и непосредственно после нее.

4.3.1. Матричные игры двух игроков

Рассмотрим конечные парные *игры с нулевой суммой*, то есть игры, в которых участвуют два игрока и выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. Условия игры еще и таковы, что и первый, и второй игроки имеют единственный ход из нескольких возможных, который является оптимальным, то есть их стратегии однозначно заданы. Такие стратегии называются *чистыми*.

Пусть игрок А располагает p чистыми стратегиями A_1, A_2, \dots, A_p , а игрок В – соответственно q чистыми стратегиями B_1, B_2, \dots, B_q . Первый игрок может выбрать любую стратегию A_i , в ответ на которую второй игрок может выбрать любую свою стратегию B_k . Сочетание этих стратегий (A_i, B_k) приводит к некоторому числовому результату («платежу»), который обозначим a_{ik} и будем называть «выигрышем» игрока А. *Игра с «нулевой суммой»* означает, что при этом «выигрыш» игрока В составит $(-a_{ik})$. Матрица $\Pi = (a_{ik})$ порядка $p \times q$ называется **платежной матрицей**, или **матрицей игры**.

Числа $\alpha_i = \min a_{ik}$ и $\beta_k = \max a_{ik}$ указывают минимально гарантированный выигрыш для игрока А, применяющего стратегию A_i , и минимально гарантированный проигрыш для игрока В, который использует стратегию B_k .

Величина

$$\alpha = \max \alpha_i = \max(\min a_{ik}) \quad (1)$$

называется **нижней ценой игры**, или **максимином**, а соответствующая ему стратегия (строка) – **максиминной**. Аналогично

$$\beta = \min \beta_k = \min(\max a_{ik}) \quad (2)$$

называется **верхней ценой игры** (минимаксным проигрышем игрока В) или **минимаксом**, а соответствующая ему стратегия игрока В – **минимаксной**. Всегда $\alpha \leq \beta$.

Принцип, согласно которому игроки выбирают эти стратегии, называется **принципом максимина** (для игрока А) или **минимакса** (для игрока В).

Если игрок А выбирает свою максиминную стратегию, то при любой стратегии, выбираемой игроком В, ему обеспечен выигрыш не менее, чем α . Аналогично для игрока В: при выборе им стратегии, при которой достигается $\beta = \min \beta_k$, ему обеспечивается проигрыш не более, чем β .

Если $\alpha = \beta$, то игра называется с **седловой точкой**, а общее значение α и β , которое обозначают символом v , – **ценой игры**.

В этом случае **оптимальным решением игры** для обоих игроков является выбор максиминной (для А) и минимаксной (для В) стратегий.

Задача 27. Игра заключается в том, что игрок А записывает числа 1 (стратегия A_1), или 2 (стратегия A_2), или 3 (стратегия A_3). Игрок В, в свою очередь, может записать числа 1 (стратегия B_1), 2 (стратегия B_2), 3 (стратегия B_3) или 4 (стратегия B_4). Если оба числа окажутся одинаковой четности, то А выигрывает сумму этих чисел, если разной четности, то В выигрывает сумму этих чисел. Составьте платежную матрицу, определите верхнюю и нижнюю цену игры и минимаксные стратегии.

Решение. Согласно условию, игрок А выигрывает сумму записанных чисел, если записанные числа будут одной четности. Заметим, что сумма чисел, записываемых игроками, соответствует сумме индексов стратегий. Поэтому игрок А выигрывает, когда сумма индексов стратегий четна (на пересечении стратегий в матрице игры записывается положительное четное число). Выигрыш второго игрока равен нечетной сумме индексов стратегий. Этот выигрыш записывается в матрицу со знаком «–». Таким образом, матрица игры имеет следующий вид:

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	2	–3	4	–5	–5
A_2	–3	4	–5	6	–5
A_3	4	–5	6	–7	–7
β_k	4	4	6	6	–5 / 4

Найдем минимально гарантированные выигрыши игрока А при каждой его стратегии: $\alpha_1 = \min\{2, -3, 4, -5\} = -5$, $\alpha_2 = \min\{-3, 4, -5, 6\} = -5$, $\alpha_3 = \min\{4, -5, 6, -7\} = -7$. Нижняя цена игры: $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = -5$. Теперь найдем минимально гарантированные проигрыши игрока В при каждой его стратегии: $\beta_1 = \max\{2, -3, 4\} = 4$, $\beta_2 = \max\{-3, 4, -5\} = 4$, $\beta_3 = \max\{4, -5, 6\} = 6$, $\beta_4 = \max\{-5, 6, -7\} = 6$. Верхняя цена игры: $\beta = \min \beta_k = 4$. Отсюда следует, что для игрока А *максиминными* стратегиями являются A_1 или A_2 . При этих стратегиях ему обеспечен «выигрыш» не менее –5 (то есть проигрыш не более 5). Для игрока В *минимаксными* стратегиями являются B_1 или B_2 ; они обеспечивают ему проигрыш не более 4.

Игра седловой точки не имеет.

Если игра не имеет седловой точки, то применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. В этом случае применяют смешанные стратегии.

Смешанной стратегией игрока А называется применение им своих чистых стратегий A_1, A_2, \dots, A_p с определенными частотами (вероятностями): $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_p$ (причем $\sum_{i=1}^p x_i = 1$). Такую стратегию записывают в виде вектора $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_p)$. Вектором $\vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_q)$ ($\sum_{i=1}^q y_i = 1$) определяется смешанная стратегия игрока В. Здесь y_k есть частота использования игроком В стратегии B_k . Чистые стратегии являются частным случаем смешанной стратегии, задаваемой единичным вектором.

Функцией выигрыша, или **платежной функцией** $f(\vec{X}, \vec{Y})$, игры с матрицей $\Pi = (a_{ik})$ при применении игроком А смешанной стратегии \vec{X} , а игроком В – смешанной стратегии \vec{Y} , называется средняя величина выигрыша игрока А (проигрыша игрока В), подсчитываемая по формуле

$$f(\vec{X}, \vec{Y}) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^q a_{ik} x_i y_k. \quad (3)$$

Формулу (3) можно записать в матричном виде:

$$f(\vec{X}, \vec{Y}) = X' \Pi Y, \quad (3')$$

где X и Y матрицы-столбцы координат векторов \vec{X} и \vec{Y} .

Стратегии \vec{X}^* и \vec{Y}^* называются **оптимальными**, если выполняются неравенства

$$f(\vec{X}, \vec{Y}^*) \leq f(\vec{X}^*, \vec{Y}^*) \leq f(\vec{X}^*, \vec{Y}), \quad (4)$$

т. е. если их применение обеспечивает игроку А средний выигрыш, не меньший, чем применение им любой другой стратегии \vec{X} , а игроку В – средний выигрыш, не больший, чем при применении им любой другой стратегии \vec{Y} .

Совокупность оптимальных стратегий (\vec{X}^*, \vec{Y}^*) называется **оптимальным решением**, или просто **решением игры**, а значение $f(\vec{X}^*, \vec{Y}^*)$ платежной функции – **ценой игры** v :

$$v = f(\vec{X}^*, \vec{Y}^*). \quad (5)$$

В теории игр важную роль играют следующие две теоремы.

Теорема 1 (Неймана). Всякая конечная матричная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях.

Теорема 2. Если один из двух игроков применяет свою оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене v игры, вне зависимости от того, какие смешанные стратегии, вошедшие в оптимальную стратегию (быть может, и чистые), применяет другой игрок.

4.3.2. Алгоритм решения матричной игры (исследования игры)

1. Исключить в матрице игры заведомо невыгодные стратегии.
2. Полученную упрощенную матрицу проверить на наличие в ней седловой точки. Если такая точка имеется, то определить решение и цену игры. Если седловой точки нет, то перейти к шагу 3.
3. Применить методы определения оптимальных смешанных стратегий. С некоторыми из них можно познакомиться, например, по учебникам [8] и [17].

Задачи

28. Записать платежную функцию для игры, задаваемой матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Определить цену игры, оптимальные стратегии и оптимальное решение.

Решение. Для записи функции выигрыша игры воспользуемся формулой (3'): $f(\bar{X}, \bar{Y}) = X'PY = (x_1 \ x_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$
 $2x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_1y_3 + 4x_2y_1 + 2x_2y_2 + 5x_2y_3$. Определим верхнюю и нижнюю цены игры.

1) $\alpha_1 = \min\{2, 1, 3\} = 1$, $\alpha_2 = \min\{4, 2, 5\} = 2$. Отсюда нижняя цена игры $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\} = 2$;

2) $\beta_1 = \max\{2, 4\} = 4$, $\beta_2 = \max\{1, 2\} = 2$, $\beta_3 = \max\{3, 5\} = 5$ и верхняя цена игры $\beta = 2$.

Таким образом, $\alpha = \beta = v = 2$, оптимальные стратегии $(\bar{X}^*, \bar{Y}^*) = (A_2, B_2)$. Для отыскания векторов \bar{X} и \bar{Y} составим системы уравнений:

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1, \end{cases} \text{ и } 2) \begin{cases} 4y_1 + 2y_2 + 5y_3 = 2, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

Решая эти системы, получим

$$\bar{X}^* = (0, 1), \bar{Y}^* = (0, 1, 0).$$

29. Рассчитайте величину платежа для игр, заданных матрицами:

$$1) \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,8 \\ 0,9 & 0,4 & 0,2 \\ 0,7 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix} \text{ и } 2) \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ если } X^t = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, Y^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

30. Два игрока А и В играют в следующую игру. Игрок А записывает одно из чисел 1, 2, 3, а игрок В – одно из чисел 1, 2. Если сумма записанных чисел четная, то это выигрыш А, а если нечетная, то его проигрыш. 1) Составьте матрицу игры; 2) найдите нижнюю цену игры; 3) выясните, есть ли седловая точка; 4) какое число или числа должен выбрать игрок А, чтобы обеспечить себе минимальный проигрыш?

31. Два игрока А и В независимо друг от друга выбирают красный или зеленый цвет бумаги. Если выбранные ими цвета совпадают, то выигрыш игрока А составляет 5. Если игрок А выбирает зеленый цвет, а игрок В красный, то проигрыш игрока А составляет 4, если же цвета выбраны наоборот, то его проигрыш равен 6. 1) Составьте платежную матрицу; 2) найдите нижнюю и верхнюю цены игры; 3) определите, есть ли седловая точка; 4) какой цвет должен выбрать игрок А, чтобы обеспечить себе минимальный проигрыш?

32. Исследовать игры, заданные следующими матрицами:

$$1) \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1) Стратегия A_4 невыгодна по сравнению со стратегией A_1 , поэтому ее можно исключить. В оставшейся матрице

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ можно исключить доминирующие стратегии } B_1 \text{ и } B_4.$$

После их исключения получим матрицу $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. В этой матрице

невыгодными оказались стратегии A_1 и A_3 . Их исключение приводит к матрице $A_2(6 \ 8)$. Итак, для игрока А осталась одна стратегия A_2 , а для игрока В более выгодной является стратегия B_2 , обеспечивающая ему проигрыш 6 вместо 8 при стратегии B_3 .

Окончательно получили решение игры в виде чистых стратегий A_2 и B_2 и цену игры $v=6$. Решение в виде чистых стратегий говорит о том, что исходная матрица имела седловую точку $\alpha = \beta = v = 6$.

2) Первая строка доминирует над 2-й и 3-й, так как все ее элементы соответственно не меньше элементов 2-й и 3-й строк. Поэтому стратегии A_2 и A_3 заведомо менее выгодны, чем A_1 , и могут быть исключены. В результате получится матрица $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$. В этой матрице 1, 4 и 5-й столбцы доминируют над

2-м. Так как столбцы характеризуют стратегии игрока В, который стремится уменьшить выигрыш игрока А, то эти стратегии заведомо невыгодны для В. После их исключения получится матрица $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, в которой нет доминирующих стратегий. В ней строки соответствуют стратегиям A_1 и A_4 , а столбцы – стратегиям B_2 и B_3 . Определим теперь нижнюю и верхнюю цены игры.

1) $\alpha_1 = \min\{6, 4\} = 4$, $\alpha_2 = \min\{2, 6\} = 2$, и отсюда $\alpha = \max\{4, 2\} = 4$ – нижняя цена игры; 2) $\beta_1 = \max\{6, 2\} = 6$, $\beta_2 = \max\{4, 6\} = 6$, и тогда $\beta = \min\{6, 6\} = 6$ – верхняя цена игры.

Так как $\alpha \neq \beta$, то игра не имеет седловой точки и ее решением будет смешанная стратегия.

33. Провести возможные упрощения матрицы А игры, если:

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix}; 2) A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}; 3) A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 & 0,1 & 0,9 \\ 0,5 & 0,5 & 0,7 & 0,4 \\ 0,4 & 0,7 & 0,3 & 1,0 \\ 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Решение следующих задач использует теорему 2.

34. Исследовать и решить игру, заданную матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Исследовать матричную игру – это значит выяснить, имеет ли она седловую точку, определяющую цену игры, и указать наиболее выгодные стратегии для каждого из игроков; если седловой точки нет, то выбрав смешанные стратегии, найти оптимальную стратегию игры и среднюю величину выигрыша для одного из игроков и соответственно проигрыша для другого игрока.

Решение. 1) Найдем верхнюю и нижнюю цены игры: $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1$ и, следовательно, $\alpha = 1$; аналогично, $\beta_1 = 3, \beta_2 = 2$ и $\beta = 2$.

2) Проверяем наличие седловой точки: $\alpha \neq \beta$, следовательно, седловой точки нет.

3) Будем искать оптимальную смешанную стратегию. Пусть для игрока А эта стратегия задается вектором $\bar{X} = (x_1^*, x_2^*)$ и цена игры равна v . Тогда на основании теоремы 2 при применении игроком В стратегии B_1 или B_2 игрок А получит средний выигрыш, равный цене игры v :

$$-1 \cdot x_1^* + 3x_2^* = v \text{ (при стратегии } B_1),$$

$$2x_1^* + x_2^* = v \text{ (при стратегии } B_2).$$

Кроме этих двух уравнений, имеем еще уравнение для частот:

$$x_1^* + x_2^* = 1.$$

Из этой системы из трех уравнений с тремя неизвестными найдем $x_1^* = \frac{2}{5}, x_2^* = \frac{3}{5}, v = \frac{7}{5}$.

Аналогичным образом находится оптимальная стратегия для игрока В: $y_1^* = \frac{1}{5}, y_2^* = \frac{4}{5}, v = \frac{7}{5}$. Таким образом, решением игры являются смешанные стратегии $X^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right), Y^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$, а цена игры

$v = \frac{7}{5}$. Полученный результат означает, что средняя величина вы-

игрыша игрока А и соответственно проигрыша игрока В равна $\frac{7}{5}$,

если игрок А применяет стратегию A_1 с частотой $\frac{2}{5}$, а стратегию

A_2 с частотой $\frac{3}{5}$, независимо от того, какие стратегии применяет игрок В; при этом для игрока В оптимальный результат достигается, если он будет применять стратегию B_1 с вероятностью $\frac{1}{5}$, а стратегию B_2 – с вероятностью $\frac{4}{5}$.

35. Решить игры, заданные матрицами:

$$1) \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad 4) \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

36. Группа террористов продвигается с запада на восток по одной из трех возможных дорог (1, 2, 3). Отряду ОМОНа поставлена боевая задача: выйти наперерез террористам, навязать им открытый бой и разгромить. ОМОН также имеет три маршрута движения (а, б, в). Пересечение путей движения определит место проведения боя, поэтому имеется 9 возможных участков столкновения. Все они располагаются на разных относительных высотах, которые приведены в следующей таблице

Маршруты движения	1	2	3
а	4,0 км	1,5 км	3,0 км
б	0,5 км	1,0 км	0,0 км
в	2,0 км	1,0 км	1,5 км

Отряду полиции выгоднее навязать открытый бой противнику на местности с наименьшей высотой. Террористы чувствуют себя уверенней в горах. Участки предполагаемой схватки имеют разные высоты. Необходимо определить, какой маршрут движения ОМОНа оптимален [8].

37. Задача оперуполномоченного – задержать подозреваемого, который может находиться в двух местах – А и В. Если оперативник направляется в то же место, где находится подозреваемый, то задерживает его. В этом случае его стратегия оценивается выигрышем +1. Если же оперативник выбирает место, противоположное тому, где находится подозреваемый, то подозреваемый скрывается от правоохранительных органов. Выигрыш оперативника составит при этом –1. Найти оптимальную стратегию действий оперативника и его выигрыш.

4.4. Системы линейных уравнений

Тема «Системы линейных уравнений» является одной из основополагающих в курсе высшей математики, который изучается почти на всех направлениях высшего образования. К решению систем линейных уравнений приводят многие задачи не только математических дисциплин, но и других областей знаний. Особенно это относится к моделированию экономических процессов и явлений. Некоторое представление о применении систем дает следующая схема.



4.4.1. Понятие системы линейных уравнений и её решения

Определение 1. Системой линейных уравнений с n переменными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1)$$

где $a_{i,j}, b_j \in \mathbb{R}$ – заданные числа. Числа a_{ij} называются коэффициентами системы, числа b_j – свободными членами, число m – это число уравнений в системе.

Коротко систему (1) можно записать в виде $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$,

$i = 1, 2, \dots, m$.

Для каждой системы линейных уравнений определены 2 матрицы:

а) основная A – матрица коэффициентов при переменных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и б) расширенная матрица $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$.

Примеры

$$1. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -4; \\ 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \text{ система из трех уравнений с че-}$$

тырьмя переменными.

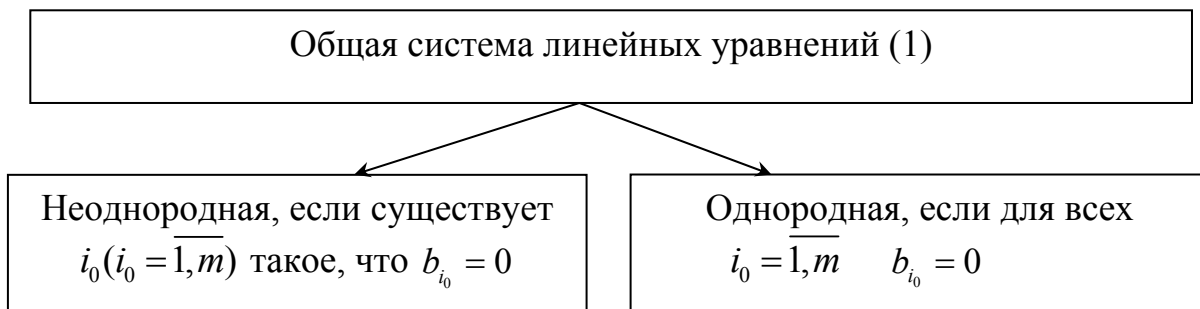
$$2. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 1; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -4; \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2 \end{cases} \text{ система из трех уравнений с тремя пере-}$$

менными.

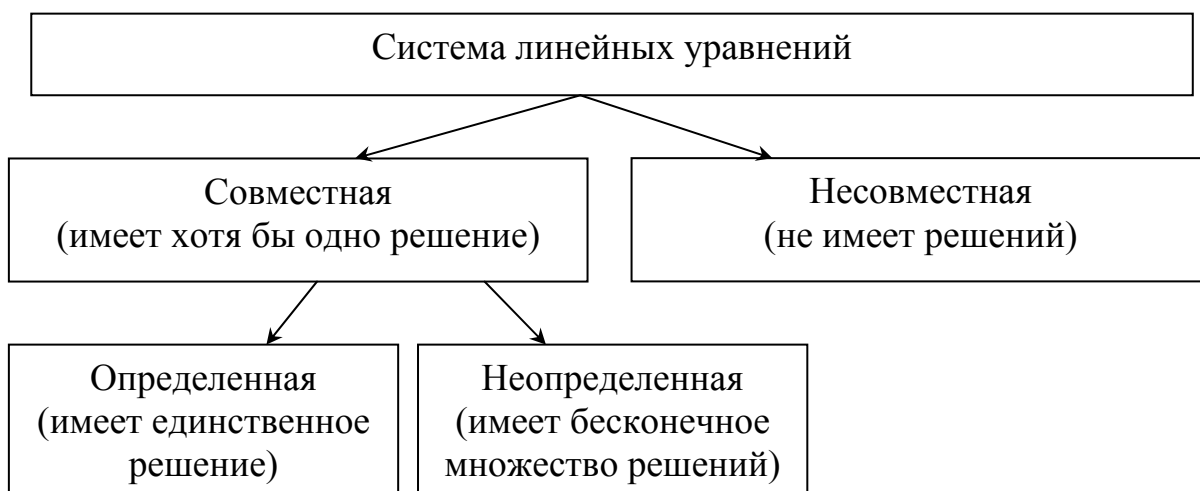
Определение 2. *Решением системы линейных уравнений называется упорядоченный набор чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, при подстановке которых в систему вместо переменных каждое из её уравнений обращается в верное числовое равенство (предикат обращается в истинное высказывание).*

Так, для первой из систем решением является набор чисел $(-2, 1, 0, -2)$, и этот набор есть не единственное ее решение. Попробуйте найти другие ее решения. Вторая система имеет единственное решение $\left(-\frac{42}{43}; \frac{115}{43}; -\frac{3}{43}\right)$.

4.4.2. Виды систем линейных уравнений



Классификация систем по множеству решений



Подчеркнем, что совместная система линейных уравнений может иметь или единственное решение, или бесконечно много решений. Никаких других вариантов решений быть не может.

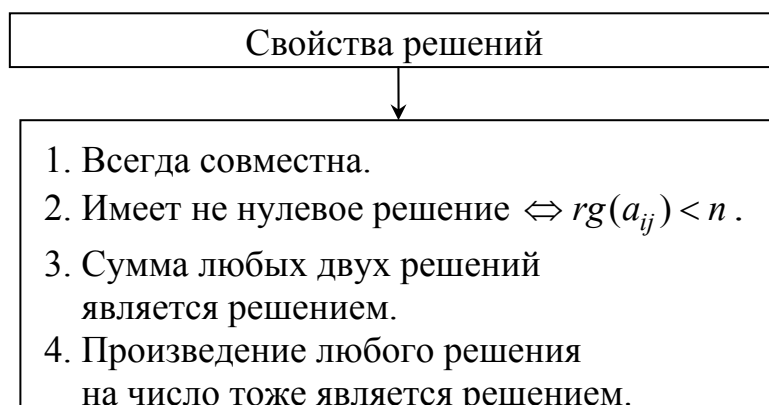
Примеры. 1) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 4y = 2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 3 \end{cases}$.

Здесь первая система совместна и имеет единственное решение, вторая система равносильна одному уравнению, она совместна и имеет бесконечно много решений, третья система решений не имеет: она несовместна. Чтобы это объяснить, вспомните школьную тему «Взаимное расположение прямых линий на плоскости».

Решить систему – это значит найти все её решения или доказать, что решений нет. Множество всех решений неопределенной системы линейных уравнений называется общим решением системы.

Однородная система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0, \quad i=\overline{1,m}$$



Теорема. Общее решение всякой неоднородной системы линейных уравнений есть сумма соответствующей ей однородной системы и какого-нибудь частного решения этой неоднородной системы.

4.4.3. Методы решения систем линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i=1,2,\dots,m$$

1. Метод Гаусса

Это метод последовательного исключения переменных с целью приведения системы к виду, при котором каждое уравнение содержит переменную, отсутствующую во всех остальных.

Этот метод впервые был описан К. Гауссом (1777–1855) в 1849 г.¹ Однако следует заметить, что прием решения системы из n линейных уравнений с n переменными, по существу совпадающий с методом Гаусса, был разработан в Древнем Китае ещё до нашей эры. Он изложен в восьмой книге анонимной древнекитайской «Математики в девяти книгах» и назван правилом «Фан-чэн». Своеобразие правила «Фан-чэн» составляет техника вычислений, проводившихся на специальной счетной доске².

В основе метода Гаусса лежат элементарные преобразования системы:

- 1) перестановка уравнений в системе;

¹ Математический энциклопедический словарь. М., 1986. С. 140.

² Хрестоматия по истории математики / под ред. А. П. Юшкевича. М.: Просвещение, 1976. С. 46.

- 2) удаление из системы уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$;
- 3) сложение уравнения с другим уравнением, умноженным на любое число $k \neq 0$.

Идея метода Гаусса состоит в том, чтобы, используя элементарные преобразования, привести систему к такому виду, при котором каждое ее уравнение содержит переменную, которой нет ни в каком из последующих уравнений или ни в каком другом уравнении. Матрицы системы после всех преобразований будут соответственно выглядеть следующим образом:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} & c_r \end{array} \right) \quad (\text{а}) \quad \text{или} \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} & c_r \end{array} \right) \quad (\text{б}).$$

Замечания

1. Здесь $r \leq m$, так как в процессе преобразований уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$ вычеркиваются.

2. Если в процессе преобразований системы появляется уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = c$, $c \neq 0$, то система решений не имеет.

Исследование и запись решения системы

В процессе приведения системы к видам (а) или (б) могут представиться следующие случаи:

1) Число уравнений в преобразованной системе равно числу переменных $r = n$. Тогда в случае (б) $\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = c_2, \\ \dots \\ x_n = c_n \end{cases}$ и система имеет единственное решение (c_1, c_2, \dots, c_n) .

2) Число уравнений в преобразованной системе меньше числа переменных: $r < n$.

$$\text{Тогда для случая (б)} \quad \begin{cases} x_1 + \dots + 0 + a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = c_1, \\ x_2 + \dots + 0 + a_{2r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \dots \\ x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = c_r. \end{cases}$$

и система имеет бесконечно много решений, которые записываются следующим образом:

[illegible]

Эти решения называются *общим решением системы*; общее решение записывают еще как множество:

$$\{c_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n), c_2 - (a_{2r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n), \dots, \\ c_r - (a_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n), x_{r+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Решение системы, которое получается из общего, если свободным переменным придать конкретные числовые значения, называется *частным решением* системы.

Итак, если положить, что $x_{r+1} = p_{r+1}, x_{r+2} = p_{r+2}, \dots, x_n = p_n$, то решение

$$(c_1 - (a_{1r+1}p_{r+1} + \dots + a_{1n}p_n), \\ c_2 - (a_{2r+1}p_{r+1} + \dots + a_{2n}p_n), \dots, c_r - (a_{rr+1}p_{r+1} + \dots + a_{rn}p_n))$$

является частным решением системы.

Вычисление коэффициентов системы, которая получается после исключения какой-то переменной из всех уравнений, кроме одного, можно производить по определенному правилу, которое получило название *правила Жордана – Гаусса*.

Правило Жордана – Гаусса исключения переменной из всех уравнений, кроме одного

Пусть в матрице коэффициентов системы коэффициент $a_{pq} \neq 0$. Тогда исключим переменную x_q из всех уравнений

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k + \dots + a_{iq}x_q + \dots + a_{in}x_n = b_i$, ($i \neq p$), кроме уравнения с номером p . Для этого уравнение с номером p разделим на $a_{pq} \neq 0$ и получим следующие коэффициенты в этой строке

$$a'_{pj} = \frac{a_{pj}}{a_{pq}}, j = \overline{1, n}, b'_p = \frac{b_p}{a_{pq}} \text{ .}$$

Другие коэффициенты находятся по формулам:

$$a'_{iq} = 0, \text{ если } i \neq p, \\ a'_{ik} = \frac{a_{ik} \cdot a_{pq} - a_{pk} \cdot a_{iq}}{a_{pa}}, i \neq p, k \neq q.$$

Расчет по последней формуле удобно производить, пользуясь мнемоническим «правилом прямоугольника», наглядно показанным на рисунке 1.

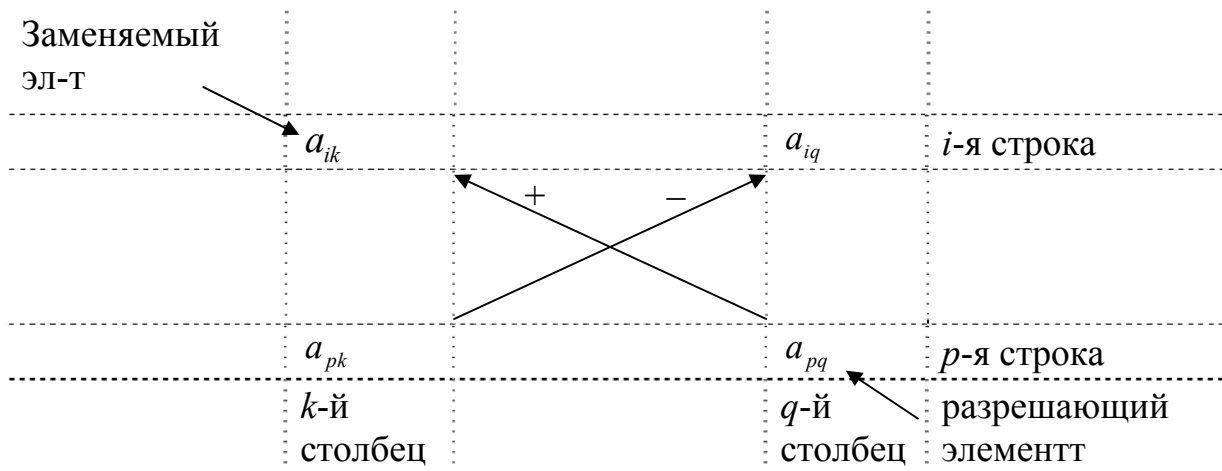


Рис. 1

Задачи

38. Решить систему методом Гаусса без применения правила Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 3. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы. Для вычислений удобнее, чтобы $a_{11}=1$. Поэтому поменяем местами первую и вторую строки, после чего получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Умножим элементы первой строки на (-2) и прибавим к соответствующим элементам второй строки; затем элементы первой строки умножим на (-3) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки. В результате под элементом a_{11} в первом столбце получится «ступенька» из нулей

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & -6 \end{array} \right).$$

Теперь умножим третью строку на -1 и поменяем местами ее со второй строкой:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \end{array} \right).$$

прибавим ее к третьей строке: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -18 & 36 \end{array} \right)$. Матрица системы

приведена к ступенчатому виду. Соответствующая ей система

имеет вид $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ x_2 - 3x_3 = 6, \\ -18x_3 = 36. \end{cases}$ Из последнего уравнения находим

$x_3 = -2$. Подставляя $x_3 = -2$ во второе уравнение, найдем x_2 : $x_2 = 0$.

Из первого уравнения вычисляем x_1 : $x_1 = 3 - 2x_2 + x_3 = 3 - 0 + (-2) = 1$.

Ответ: (1, 0, -2).

39. Решить систему методом Гаусса с применением правила

Жордана – Гаусса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 5x_1 + 9x_2 - 10x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 9 & -10 & -9 & 0 \end{array} \right).$$

Так как $a_{11} = 1$, то будем исключать переменную x_1 из всех уравнений, кроме первого. По правилу Жордана – Гаусса первая строка остается неизменной, в первом столбце все элементы, кроме $a_{11} = 1$, равны 0. Элементы второй строки a_{22} , a_{23} , a_{24} , b_2 считаются следующим образом:

$$a_{22} = -3 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 = -3 + 4 = 1, \quad a_{23} = 1 \cdot 1 - (-2)(-3) = 1 - 6 = -5,$$

$$a_{24} = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) = -1, \quad b_2 = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 1 = 5.$$

Аналогично находим элементы третьей строки:

$$a_{32} = 9 \cdot 1 - 5 \cdot 2 = -1, \quad a_{33} = -10 \cdot 1 - 5 \cdot (-3) = 5,$$

$$a_{34} = -9 \cdot 1 - 5 \cdot (-2) = 1, \quad b_3 = 0 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = -5.$$

Таким образом получаем матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -5 \end{array} \right).$$

В этой матрице $a_{22} = 1$. Поэтому исключим переменную x_2 из всех уравнений, кроме второго. Согласно правилу Жордана – Гаус-

са, вторая строка остается неизменной. Элементы второго столбца, за исключением элемента $a_{22}=1$, равны нулю, а все остальные элементы вычисляются по мнемоническому правилу (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} a_{13} &= -3 \cdot 1 - 2(-5) = 7, & a_{14} &= -2 \cdot 1 - 2(-1) = 0, & b_1 &= 1 \cdot 1 - 2 \cdot 5 = -9, \\ a_{33} &= 5 \cdot 1 - (-1) \cdot (-5) = 0, & a_{34} &= 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) = 0, & b_3 &= -5 \cdot 1 - (-1) \cdot 5 = 0. \end{aligned}$$

Теперь имеем матрицу
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Вычеркиваем нулевую строку и получаем матрицу системы, в которой x_1 содержится только в первом уравнении, а x_2 — только во втором:
$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 = -9, \\ x_2 - 5x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

Переменные x_3 и x_4 будут свободными, а x_1 и x_2 через них выражаются: $x_1 = -9 - 7x_3$, $x_2 = 5 + 5x_3 + x_4$. Общее решение системы имеет вид:

$$\{(-9 - 7x_3; 5 + 5x_3 + x_4; x_3; x_4) / x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

2. Правило Крамера

Применяется в случае, когда $m = n$ и $\det A \neq 0$. Решение находится по формулам
$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A},$$

где A_j — матрица, полученная из основной матрицы A заменой j -го столбца на столбец свободных членов.

Задача 40. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 3. \end{cases}$$

Решение. Определитель $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$, следовательно,

согласно правилу Крамера, система имеет единственное решение. Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ матриц, полученных из матрицы A заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -36.$$

Теперь по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{18} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{18} = 0, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-36}{18} = -2.$$

3. Матричный способ

При этом способе решения используется запись системы в виде матричного уравнения $A \cdot X = B$, где A – основная матрица системы,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – матрица-столбец переменных,}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ – матрица-столбец свободных членов.}$$

Если $\det A \neq 0$, то решение находится по формуле $X = A^{-1} \cdot B$. Поскольку решение системы сводится к нахождению обратной матрицы, то этот способ решения называют также *методом обратной матрицы*.

Задача 41. Решить систему
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 3. \end{cases}$$
 методом обратной

матрицы.

Решение. Выпишем основную матрицу A и матрицу-столбец

B для данной системы: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Матрица перемен-

ных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Тогда в матричной форме система имеет вид

$A \cdot X = B$. Определитель основной матрицы $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$,

поэтому обратная матрица A^{-1} существует: $A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -1 & -19 & 7 \end{pmatrix}$.

Теперь найдем X по формуле $X = A^{-1} \cdot B$.

$$\text{Итак, } X = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -1 & -19 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Задачи

Решите систему методом Гаусса.

$$42. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 5x_1 + 9x_2 - 10x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

$$43. \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ -5x_1 + 10x_2 - 7x_3 = 10. \end{cases}$$

$$44. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$$

$$45. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$$

$$46. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases}$$

$$47. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

$$48. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ -3x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 7x_4 = -5, \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

$$49. \begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

По правилу Крамера решить системы линейных уравнений.

$$50. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 3. \end{cases}$$

$$51. \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$$

$$52. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13, \\ 2x_1 + 7x_2 = 81. \end{cases}$$

$$53. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = -6, \\ 3x_1 + 4x_2 = 18. \end{cases}$$

$$54. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$$

$$55. \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases}$$

$$56. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

$$57. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Решить систему методом обратной матрицы.

$$58. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13, \\ 2x_1 + 7x_2 = 81. \end{cases}$$

$$59. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = -6, \\ 3x_1 + 4x_2 = 18. \end{cases}$$

$$60. \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

$$61. \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -6, \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 17. \end{cases}$$

$$62. \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$$

$$63. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 10. \end{cases}$$

4.4.4. Системы линейных уравнений в решении практических задач

64. Швейная фабрика в течение трех дней производила костюмы, плащи и куртки. Известны объемы выпуска продукции каждого вида за три дня и денежные затраты на производство за эти дни:

День	Объем выпуска продукции			Затраты (тыс. руб.)
	Костюмы	Плащи	Куртки	
Первый	50	10	30	176
Второй	35	25	20	168
Третий	40	20	30	184

Найдите себестоимость продукции каждого вида.

Решение. Пусть пошив одного костюма обходится в x руб., одного плаща — y руб., одной куртки — z руб. Тогда затраты на

производство в первый день составят $50x + 10y + 30z = 176000$ (руб.), во второй день они будут составлять $35x + 25y + 20z = 168000$ (руб.), а в третий день $40x + 20y + 30z = 184000$ (руб.). Таким образом, решение задачи свелось к решению системы из трех уравнений с тремя переменными: $50x + 10y + 30z = 176000$,

$$35x + 25y + 20z = 168000,$$

$$40x + 20y + 30z = 184000.$$

Эта система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} 5x + y + 3z = 17600, \\ 7x + 5y + 4z = 33600, \\ 4x + 2y + 3z = 18400. \end{cases}$$

Решая систему, получим, что себестоимость костюма $x = 1\,800$ руб., себестоимость плаща $y = 2\,600$ руб., себестоимость куртки $z = 2\,000$ руб.

65. Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 12 млн руб. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения на 70%, а второго – на 40%. В результате суммарная прибыль должна вырасти в 1,5 раза.

Какова величина прибыли каждого отделения: а) в минувшем году; б) в этом году?

66. Имеются два раствора серной кислоты в воде: первый – сорокапроцентный, второй – шестидесятипроцентный. Эти два раствора смешали, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили двадцатипроцентный раствор. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг восьмидесятипроцентного раствора, то получился бы семидесятипроцентный раствор. Сколько было сорокапроцентного и шестидесятипроцентного растворов?

67. В редакции журнала работают 5 машинисток. Работая вместе, первая, вторая и третья могут напечатать рукопись за 7,5 часа; первая, третья и пятая – за 5 часов, первая, третья и четвертая – за 6 часов, вторая, четвертая и пятая – за 4 часа. Смогут ли они все вместе выполнить заказ в течение 3,5 часов?

5. Элементы теории вероятностей

5.1. Случайные события и операции над ними

Различные определения вероятности случайного события

Случайными событиями называются такие события, которые в результате опыта могут произойти или не произойти. Случайные события обозначают большими латинскими буквами A, B, C, \dots, U, V .

Событие называется **достоверным**, если оно обязательно появляется в результате данного опыта, и **невозможным**, если оно не может появиться в условиях данного опыта. Примером достоверного события может, например, служить вынимание белого шара из ящика, в котором находятся лишь белые шары, а невозможного – выпадение цифры 7 при бросании игральной кости. Достоверное событие будем обозначать символом U , невозможное – символом O .

Если события A и B не могут произойти одновременно, то их называют **несовместными**, а если события A и B могут произойти одновременно, то они называются **совместными**.

События **равновозможны**, если ни одно из них не является более возможным по сравнению с другим, то есть не имеет больше шансов для появления.

События A_1, A_2, \dots, A_k образуют полную группу, если они попарно несовместны и их сумма является достоверным событием: $A_1 + A_2 + \dots + A_k = U$.

Вероятность события A определяется равенством

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n – общее число всех возможных элементарных исходов опыта, а m – число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A .

Под элементарными исходами опыта понимают события, которые появляются как результат опыта и удовлетворяют следующим свойствам: они несовместны, равновозможны и единственно возможны в данных условиях.

Приведенное определение вероятности случайного события носит название **классического**. Существуют еще два подхода к

понятию вероятности, которые приводят к определению статистической вероятности и геометрической вероятности. Рассмотрим сначала первый из них.

Пусть некоторый опыт повторяется n раз, при этом в m испытаниях наступает событие A . Отношение $\frac{m}{n}$, то есть числа испытаний (исходов), в которых наступило событие A , к общему числу произведенных испытаний (экспериментов) называют **относительной частотой события A в данной серии испытаний**. Относительную частоту события A называют еще **эмпирической вероятностью**.

При многократно повторяющихся опытах относительная частота имеет тенденцию стабилизироваться около некоторой постоянной величины. Иначе говоря, если число испытаний n неограниченно увеличивать, то меняется и число m испытаний, в которых наступает событие A , но отношение $\frac{m}{n}$ при этом приближается сколь угодно близко к некоторому числу $\frac{m_0}{n_0}$, которое и называется **статистической вероятностью события**.

Заметим, что *статистическую вероятность события* невозможно подсчитать заранее, не проводя эксперимента. Даже определение эмпирической вероятности требует действительного проведения опыта и повторения его достаточно много раз. При использовании классического определения не требуется, чтобы испытания практически осуществлялись.

В практике встречаются события, вычислить вероятности которых с помощью классического или статистического определений не удастся. Такие ситуации возникают в случаях, когда число различных исходов испытания бесконечно. Пусть, например, множество всех исходов есть множество точек отрезка b на прямой. Отрезок a составляет часть отрезка b . Наугад на отрезок b бросается точка, то есть она случайным образом на отрезке указывается. Предполагается при этом, что все исходы этого эксперимента равновозможны, т. е. все точки отрезка b равноправны. Тогда вероятность события A — «точка попадет на отрезок a » определяется равенством:

$$P(A) = \frac{\text{длина } a}{\text{длина } b}.$$

Данное отношение и выражает собой *геометрическое определение вероятности*.

Для фигур, расположенных в плоскости или в пространстве, вероятность попадания точки на меньшую фигуру, являющуюся частью большей, выражается отношением площадей (если фигуры расположены на плоскости) и объемов этих фигур (если они пространственные).

Подводя итог различным определениям вероятности, можно сформулировать требования, которым должно удовлетворять любое математическое определение вероятности. Во-первых, вероятностью должна быть величина, которую можно вычислить для любого случайного события, не производя опытов, а во-вторых, для нее должны выполняться следующие основные свойства.

Свойства вероятности

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ для любого события A .
2. Вероятность достоверного события равна 1;
3. Вероятность невозможного события равна 0.

Задачи

1. Для рассмотрения уголовного дела должен быть назначен один из пяти судей. Известно, что трое из них берут взятки. Какова вероятность того, что дело будет вести честный судья?

2. В урне имеется 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Из урны наугад вынимается один шар. Какова вероятность, того, что этот шар: а) белый; б) черный?

3. В программе экзамена по уголовному праву 40 билетов. Билеты с 1-го по 8-й и с 14-го по 18-й считаются «хорошими». Найти вероятность не вытащить «хороший билет».

4. Одновременно бросают две монеты. Найти вероятность того, что:

- а) герб выпадет два раза,
- б) монеты выпадут разными сторонами,
- в) герб не выпадет ни разу,
- г) выпадет хотя бы один герб?

5. В лотерее разыгрывается 1000 билетов. Из них в одном билете достается выигрыш в 5000 руб., в десяти – 1000 руб., в пятидесяти – 200 руб., в ста достается 50 руб. Остальные билеты без выигрыша. Некто покупает один билет. Найти вероятность выигрыша им не менее 200 руб.

6. При броске игральной кости вычислите вероятности следующих событий:

- а) «выпало 2 очка»,
- б) «выпало 8 очков»,
- в) «выпало четное число очков»,
- г) «выпало простое число очков»,
- д) «число выпавших очков кратно 3».

7. Дважды подбрасывается игральная кость. Какова вероятность того, что:

- а) при первом бросании выпала цифра 6,
- б) в первый раз выпала цифра 2, а во второй раз – 5,
- в) в сумме выпало 5 очков,
- г) оба раза выпало четное число очков?

8. Во время процедуры опознания на скамью посадили двух подозреваемых вместе с четырьмя другими лицами. Какова вероятность того, что на скамье между подозреваемыми оказалось:

- а) два человека, б) три человека.

9. Преступник знает, что шифр сейфа составлен из цифр 1, 2, 6, 7 и что цифры в нем не повторяются, но не знает, в каком порядке их набирать.

1) Какова вероятность того, что первые две цифры он набрал верно?

2) Какова вероятность, что преступник откроет сейф с первой попытки?

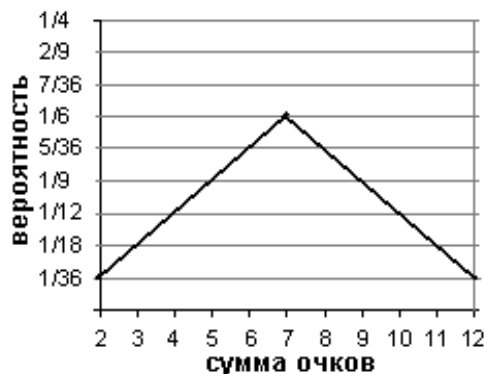
10. Один раз бросаются две игральные кости. Найдите вероятности следующих событий:

1) Сумма выпавших очков равна 2, 3, ..., 12. Полученные результаты изобразите на координатной плоскости точками, у которых абсцисса равна сумме очков, а ордината – вероятности этой суммы.

2) Разность выпавших очков равна 0, 1, 2, 3, 4, 5. Какие события окажутся наиболее (наименее) вероятными?

Решение.

Общее число возможных исходов при бросании двух игральных костей равно $6 \cdot 6 = 36$.



1) Пусть событие A – сумма выпавших очков равна 2, тогда $P(A) = \frac{1}{36}$. Событие B – сумма выпавших очков равна 3, тогда $P(B) = \frac{1}{18}$. Событие C – сумма очков равна 4, тогда $P(C) = \frac{1}{12}$. Событие D – сумма равна 5, тогда $P(D) = \frac{1}{9}$. Событие E – сумма очков равна 6, $P(E) = \frac{5}{36}$. Событие F – сумма выпавших очков равна 7, $P(F) = \frac{1}{6}$.

Событие G – сумма выпавших очков –8, $P(G) = \frac{5}{36}$.

Событие H – сумма очков – 9, $P(H) = \frac{1}{9}$.

Событие K – сумма очков равна 10, $P(K) = \frac{1}{12}$.

Событие L – сумма выпавших очков равна 11, $P(L) = \frac{1}{18}$.

Событие M – сумма выпавших очков равна 12, тогда $P(M) = \frac{1}{36}$.

2) Разность выпавших очков равна 0 в том и только том случае, если число очков, выпавших на одной кости, равно числу очков на другой. Исходов, благоприятствующих этому событию, всего шесть. $P(A) = \frac{1}{6}$.

Пусть A состоит в том, что разность между числами равна 1 (или –1). Перечислим исходы, благоприятствующие появлению события A :

(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (5, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 5).

Получаем $m = 10$. Тогда $P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

Событию B , состоящему в том, что разность между очками, выпавшими на двух костях, равна 2, благоприятны восемь исходов: (1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 6), (6, 4).

Таким образом,

$$P(B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

Разность между числами равна 3 для следующих пар:

(1, 4), (4, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 6), (6, 3).

Значит, $P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Разность между числами равна 4 для пар: (1, 5), (5, 1), (2, 6), (6, 2).

Значит, $P(D) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Разность между числами равна 5 для пар: (1, 6), (6, 1).

Значит, $P(E) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Ответ: 1) $\frac{1}{36}, \frac{1}{18}, \frac{1}{12}, \frac{1}{9}, \frac{5}{36}, \frac{1}{6}, \frac{5}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{36}$;

2) $\frac{1}{6}, \frac{5}{18}, \frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{18}$.

11. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь: а) одну окрашенную сторону, б) две окрашенные стороны, в) три окрашенные стороны.

Решение.

Всего кубиков $n = 1000$.

У куба 6 граней, на каждой из которых лежат 64 кубика с одной окрашенной стороной. Значит всего таких кубиков (следовательно, и благоприятных исходов) будет $64 \cdot 6 = 384$.

$$P(A) = \frac{384}{1000} = 0,384.$$

Куб имеет 12 ребер, на каждом из которых по 8 кубиков с двумя окрашенными сторонами. Поэтому $m = 12 \cdot 8 = 96$.

$$P(B) = \frac{96}{1000} = 0,096.$$

Куб имеет 8 вершин, следовательно, 8 кубиков будут иметь три окрашенные стороны. Таким образом, $m = 8$. $P(C) = \frac{8}{1000} = 0,008$.

Ответ: а) 0,384; б) 0,096; в) 0,008.

12. На электроламповом заводе относительная частота брака лампочек составила 0,004. Найти ожидаемое число годных лампочек в партии из 100 000 штук.

13. Каждому пассажиру поезда вручается страховой полис на 30 000 рублей при взимании с него 5 руб. Какова средняя при-

быль страховой компании от продажи 400 000 билетов, если несчастные случаи происходят в среднем с одним пассажиром из 100 000 человек? (Считать, что страховка выплачивается только в случае гибели пассажира).

Решение.

Относительная частота проезда пассажира без несчастного случая равна $1 - 0,00001 = 0,99999$. С такой частотой компания получает с пассажира 5 руб., с частотой 0,00001 она выплачивает за одного пассажира 29 995 руб. (так как 5 руб. она с пассажира изъяла). Следовательно, ее ожидаемая прибыль с продажи одного билета составляет $= 5 \cdot 0,99999 - 29\,995 \cdot 0,00001 = 4,99995 - 0,29995 = 4,7$ (руб). Тогда с продажи 400 000 билетов ожидаемая прибыль составит 1 880 000 руб.

14. В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих, и 25 красных шаров. Вынули один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар: 1) белый? 2) черный? 3) синий? 4) красный? 5) белый или черный? 6) синий или красный? 7) белый, или черный, или синий?

15. Имеются две концентрические окружности с радиусами 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наугад в большой круг, попадет в кольцо, образованное окружностями.

16. В окружность вписан квадрат. В круг, ограниченный этой окружностью, наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в квадрат?

17. В окружность вписан правильный треугольник. В круг, ограниченный этой окружностью, наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в область, ограниченную треугольником?

18. В квадрат со стороной a вписана окружность. Найдите вероятность того, что точка, наудачу поставленная в квадрат, попадет в круг, ограниченный окружностью.

19. Двое договорились о встрече на следующих условиях: каждый приходит в указанное место независимо друг от друга и наудачу в любой момент времени от 13.00 до 14.00. Придя, ожидает не более получаса, а уходит не позднее 14.00. Какова вероятность того, что они встретятся?

20. Противотанковые мины поставлены на прямой через 15 метров. Танк шириной 3 метра идет перпендикулярно этой прямой. Какова вероятность, что он подорвется?

5.2. Алгебра событий.

Вероятности суммы и произведения событий

Вычислять вероятности случайных событий по определению вероятности события бывает порой довольно затруднительно. Поэтому для вычисления вероятностей пользуются правилами, позволяющими по известным вероятностям одних событий вычислять вероятности других событий, получаемых из них с помощью некоторых операций. Дадим определения этим операциям.

Суммой событий A и B называется событие C , которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из данных событий. Обозначение суммы: $C = A + B$.

Произведением событий A и B называют событие C , состоящее в том, что происходят оба события A и B . Обозначение: $C = A \cdot B$.

Событием, противоположным событию A , называют событие \bar{A} , которое состоит в том, что A не происходит, то есть если A не происходит, то происходит \bar{A} .

Теперь укажем формулы, по которым можно вычислять вероятности определенных выше событий.

1. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$, если события A и B совместны;

2. $P(A + B) = P(A) + P(B)$, если события A и B несовместны.

События A и B называются **независимыми**, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. В противном случае события называются **зависимыми**.

Число, выражающее вероятность события A при условии, что произошло событие B , называется **условной вероятностью** события A относительно B и обозначается символом $P(A / B)$.

События A и B **независимы**, если $P(A / B) = P(A)$.

3. $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ для независимых событий;

4. $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A) = P(B) \cdot P(A / B)$ для зависимых событий.

5. Если события A_1, A_2, \dots, A_n независимы в совокупности (то есть для любого подмножества этих событий вероятность их произведения равна произведению вероятностей), то вероятность наступления хотя бы одного из этих событий вычисляется по формуле:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n).$$

Задачи

21. Монета подбрасывается три раза. Событие A_i – появление герба при i -м исходе. Представить с помощью операций сложения и умножения событий A_i и \bar{A}_i следующие события:

- а) A – все три раза выпадет герб,
- б) B – все три раза появится цифра,
- в) C – хотя бы один раз появится герб,
- г) D – в точности один раз появится цифра,
- д) E – не менее двух раз выпадет герб,
- е) F – герб выпадет не раньше третьего раза.

22. Бросили медную и серебряную монеты и рассмотрели события:

- A – герб выпал на медной монете,
- B – цифра выпала на медной монете,
- C – герб выпал на серебряной монете,
- D – цифра выпала на серебряной монете,
- M – выпал хотя бы один герб,
- F – выпала хотя бы одна цифра,
- G – выпал один герб и одна цифра,
- H – герб не выпал ни одного раза,
- K – выпало два герба.

Каким событиям из этого списка равны события:

- 1) $A + C$; 2) $A \cdot C$; 3) $M \cdot F$; 4) $G + M$;
- 5) $B + D$; 6) $B \cdot D$; 7) $M + K$.

23. По мишени производится три выстрела. Рассматриваются события A_k – «попадание при k -м выстреле», $k = 1, 2, 3$. Пользуясь операциями над событиями A_k , запишите формулы следующих событий:

- A – все три попадания,
- B – все три промаха,
- C – хотя бы одно попадание,
- D – хотя бы один промах,
- E – не менее двух попаданий,
- F – не более одного попадания,
- G – попадание в мишень не раньше третьего выстрела,
- H – ровно одно попадание,
- K – ровно два попадания.

24. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на три области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую – 0,35. Найдите вероятность того, что стрелок попадет в первую или во вторую область.

25. В мастерской работают три станка. За смену первый станок может потребовать наладки с вероятностью 0,15. Для второго станка эта вероятность равна 0,1, а для третьего станка – 0,12. Найдите вероятность того, что за смену хотя бы один станок потребует наладки, считая, что одновременно станки наладки потребовать не могут.

26. В цехе работает несколько станков. Вероятность того, что за смену потребует наладки ровно один станок, равна 0,2. Вероятность того, что за смену потребуют наладки ровно два станка, – 0,13, больше двух станков – 0,07. Какова вероятность того, что за смену придется проводить наладку станков?

27. Бросаются две игральных кости. Какова вероятность того, что выпала хотя бы одна шестерка?

28. В ходе задержания преступника было применено огнестрельное оружие. Вероятность попадания в жизненно важные органы равна 0,3, в остальные части тела – 0,2. Найдите вероятность того, что преступник ранен в результате одного выстрела.

29. Подбрасываются две монеты. Рассматриваются: событие A – появление цифры на первой монете, событие B – появление цифры на второй монете. Найдите вероятность события $C = A + B$.

30. Берется наудачу трехзначное число. Какова вероятность того, что хотя бы две его цифры совпадают?

31. Вероятность того, что студент Синицын сдаст экзамен по предмету A равна 0,9, а вероятность успешной сдачи экзамена по предмету B для него равна 0,7. Какова вероятность того, что он успешно сдаст оба экзамена?

32. В первом ящике 5 белых и 10 черных шаров. Во втором ящике 12 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность того, что 1) оба шара белые? 2) один из вынутых шаров черный, а другой белый?

33. По делу о краже в суде находятся три свидетеля. Вероятность того, что первый свидетель дает ложные показания, равна 0,3, для второго вероятность дачи ложных показаний равна 0,5, а для третьего – 0,4. Какова вероятность того, что а) все три свиде-

теля говорят правду? б) правду говорит в точности один из них?
в) по крайней мере, один из них говорит правду?

34. Подбрасывают три монеты. Найдите вероятность того, что герб выпадет на всех трех монетах.

35. Игральный кубик подброшен 3 раза. Найдите вероятность того, что все три раза выпадет два очка.

36. Электрическая цепь между точками М и N составлена по схеме, приведенной на рисунке. Выход из строя за время Т различных элементов цепи – независимые события. Вероятность выхода из строя элемента k равна 0,6, элемента l_1 равна 0,4, элемента l_2 – 0,7, l_3 – 0,9. Определите вероятность разрыва цепи за указанный промежуток времени.

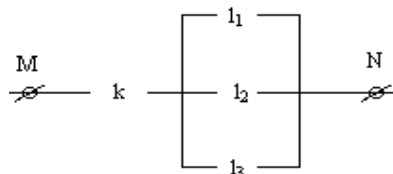


Рис.

Решение.

Обозначим через A событие, состоящее в выходе из строя элемента k, а через B – выход из строя всех трех элементов l_i ($i = 1, 2, 3$). Тогда искомая вероятность

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Так как $P(A) = 0,6$, а $P(B) = P(I_1) \cdot P(I_2) \cdot P(I_3) = 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,252$, то $P(A + B) = 0,6 + 0,252 - 0,6 \cdot 0,252 = 0,852 - 0,1512 = 0,7008$.

Ответ: 0,7008.

37. Студент изучает гражданское право, английский язык и уголовное право. Он оценивает, что вероятность получить «отлично» по этим курсам равна соответственно $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$. В предположении, что оценки студента по трем дисциплинам независимы, найдите вероятность того, что 1) он не получит ни одной «пятерки»; 2) получит «пятерку» только по гражданскому праву.

38. В копилке осталось шесть монет: четыре по 10 копеек и две по 50 копеек. Из нее извлекают последовательно одна за другой две монеты. Какова вероятность, что извлеченные монеты будут 1) одного достоинства? 2) разных достоинств?

39. Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Определите вероятность того, что в цель попадет хотя бы один стрелок.

Решение.

1-й способ. Пусть событие A состоит в том, что первый стрелок попадет в цель, B – что второй попадет в цель, C – в цель попадет третий, D – в цель попадет хотя бы один. Тогда $D = A + B + C$.

$$P(D) = P(A + B + C) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = \\ = 1 - (1 - 0,75) \cdot (1 - 0,8) \cdot (1 - 0,9) = 1 - 0,005 = 0,995.$$

2-й способ. Применим правило сложения вероятностей:

$$P(D) = P(A + B + C) =$$

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(B \cdot C) - P(A \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C).$$

$$P(D) = 0,75 + 0,8 + 0,9 - 0,6 - 0,675 - 0,72 + 0,54 = 0,995.$$

40. Для охраны организацией в офисе были установлены два сигнализатора, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что при незаконном проникновении в помещение сигнализатор сработает, равна 0,85 для первого сигнализатора и 0,92 для второго. Найдите вероятность того, что при незаконном проникновении сработает 1) только один сигнализатор; 2) хотя бы один сигнализатор.

41. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, вероятность того, что он сдаст второй экзамен, равна 0,6, третий – 0,7. Найдите вероятность того, что

- 1) он сдаст хотя бы один экзамен;
- 2) он сдаст только 2 экзамена;
- 3) он сдаст не более двух экзаменов;
- 4) он сдаст более двух экзаменов;
- 5) он сдаст только один экзамен.

42. Вероятности появления каждого из двух независимых событий A_1 и A_2 равны соответственно p_1 и p_2 . Найдите вероятность появления только одного из этих событий.

43. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,75, для третьего – 0,7. Какова вероятность:

- 1) хотя бы одного попадания,
- 2) ровно одного попадания,
- 3) ровно двух попаданий,
- 4) трех попаданий, если каждый сделал по одному выстрелу?
- 5) Какова вероятность того, что все промахнулись?

44. Трем студентам нужно решить по задаче в течение получаса. Вероятности того, что студенты выполнят свое задание в

срок, составляют соответственно $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{3}$. Какова вероятность того, что через полчаса все три студента решат свои задачи? Что задачи решат только двое студентов?

45. В первом ящике лежат a белых и b черных шаров. Во втором ящике – c белых и d черных шаров. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара черные?

46. Из 36 карт наугад выбирают две карты одну за другой, без возвращения в колоду первой вынутой карты. Какова вероятность того, что

- а) будут вынуты два туза?
- б) первой вынутой картой окажется дама крестей?
- в) не будет вынут ни один туз?
- г) будут вынуты шестерка и валет крестей?
- д) второй картой окажется туз пик?

Решите эту же задачу для случая, когда первая выбранная карта возвращается в колоду перед тем, как выбирается вторая карта.

47. В ящике имеются 7 белых, 8 черных и 5 красных шаров одного размера. Наугад вынимаются подряд два шара. Какова вероятность того, что: а) будут вынуты два черных шара? б) будут вынуты белый и черный шары? в) будут вынуты шары одного цвета? г) второй шар окажется белым? д) первый шар окажется красным?

48. Из карточек составлено слово «следователь». Из них выбирают наугад поочередно 4 карточки и приставляют одну к другой (в том порядке, в котором выбирали). Какова вероятность того, что получится слово: 1) «дело»; 2) «след»; 3) «сель»; 4) «тело»; 5) «свет»?

49. Определите вероятность того, что на вырванном наудачу листке нового календаря (365 дней) окажется: а) четное число, б) число 10, в) нечетное число?

50. Вероятность того, что подсудимого признают виновным по первой статье, равна 0,6, а по второй – 0,3. Найдите вероятность того, что подсудимого признают виновным хотя бы по одной статье; только по одной статье.

51. Бросили игральную кость. Найдите вероятность того, что выпало простое число очков, при условии, что число выпавших очков нечетно.

52. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимается один шар. Какова вероятность того, что он красный, если известно, что он не синий?

53. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимаются два шара. Какова вероятность того, что: 1) они зеленые, если известно, что при этом не вынут синий шар; 2) вынутые шары разноцветные, если известно, что не вынут синий шар?

54. Ведутся поиски четырех преступников. Каждый из них независимо от других может быть обнаружен в течение суток с вероятностью 0,5. Какова вероятность того, что в течение суток: а) будет обнаружен хотя бы один преступник? б) по крайней мере, два преступника? в) в точности два преступника? г) все четыре преступника?

55. В группе 10 студентов, среди которых 4 отличника. На занятии к доске вызывают 3 студентов. Найдите вероятность того, что среди них хотя бы один отличник.

56. Король Артур проводит рыцарский турнир, в котором порядок состязания определяется жребием. Среди восьми рыцарей, одинаково искушенных в ратном деле, двое близнецов. Какова вероятность, что они встретятся в турнире?

5.3. Полная группа событий. Формула полной вероятности

Напомним, что события A_1, A_2, \dots, A_k образуют полную группу, если они попарно несовместны и их сумма является достоверным событием:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_k = U.$$

Пусть события H_1, H_2, \dots, H_n образуют полную группу и событие A наступает только после наступления одного из этих событий, а какого именно, неизвестно. Тогда вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A/H_n).$$

Эта формула называется **формулой полной вероятности**, а события, H_1, H_2, \dots, H_n , после одного из которых наступает событие A , – *гипотезами*.

Из формулы полной вероятности легко найти вероятность $P(H_i / A)$ для любого i ($i = \overline{1, n}$) :

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(A)},$$

где $P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A / H_n)$.

Эту формулу называют **формулой Байеса**.

Ее применяют при решении практических задач, связанных с вероятностной оценкой гипотез после проведения эксперимента, так как она позволяет найти вероятность каждой гипотезы при условии, что событие произошло.

Задачи

57. Поступающие в магазин часы изготавливаются на трех заводах. Первый завод производит 40% продукции, второй – 45%, третий – 15%. В продукции первого завода 80% часов спешат, второго завода 70% часов спешат, третьего – 90% часов спешат. Какова вероятность того, что купленные наудачу часы спешат?

58. Детали на сборку поступают с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,3% брака, второй – 0,2%, третий – 0,4%. Найдите вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 1000 деталей, со второго – 2000, с третьего – 2500.

59. По самолету производятся три выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,5, при втором – 0,6, при третьем – 0,8. При одном попадании самолет сбивается с вероятностью 0,3, при двух – с вероятностью 0,6, а при трех самолет сбивается наверняка. Какова вероятность сбить самолет?

60. Два станка производят детали, поступающие на общий конвейер. Вероятность получения стандартной детали на первом станке равна 0,9, на втором – 0,85. Производительность второго станка вдвое больше производительности первого. Определите вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь стандартная.

61. Рабочий обслуживает три станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, для второго – 0,03, для третьего – 0,04. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в три раза больше производительности второго, а третьего в два раза меньше, чем второго. Определите вероятность того, что взятая наудачу из ящика деталь будет бракованной.

62. В белом ящике лежат 12 красных и 6 синих шаров, одинаковых на ощупь. В желтом ящике лежат 15 красных и 10 синих одинаковых на ощупь шаров. Бросается игральная кость. Если число выпавших очков кратно трем, то наудачу вынимают шар из белого ящика. Если число выпавших очков не кратно трем, то наудачу вынимают шар из желтого ящика. Какова вероятность вынуть красный шар?

63. Старшая дочь моет посуду раз в неделю. Вероятность того, что она разобьет тарелку, составляет 5%. Младшая дочь моет посуду во все остальные дни. Вероятность того, что она разобьет тарелку, равна 20%. Какова вероятность того, что в среду во время мытья посуды будет разбита тарелка? Какова вероятность, что эту тарелку разбила младшая дочь?

64. Фирма продает батарейки, изготовленные на двух заводах. Первый завод поставляет на фирму 60% батареек, второй – 40%. Вероятность брака на первом заводе составляет 3%, на втором – 4%. Найдите вероятность того, что купленная на фирме батарейка окажется без брака. Найдите вероятность того, что эта батарейка изготовлена на первом заводе.

65. В двух пакетах находятся по 20 конфет одинаковой формы. В первом пакете 5 конфет с темной начинкой, а остальные – со светлой. Во втором – 8 конфет с темной начинкой, а остальные – со светлой. Из наудачу выбранного пакета берут одну конфету. Какова вероятность, что взята конфета с темной начинкой?

66. В магазине половина всех товаров произведена на первой фабрике, $\frac{1}{3}$ всех товаров – на второй, $\frac{1}{6}$ всех товаров – на третьей. Вероятность брака на первой фабрике составляет 0,04, на второй – 0,01, на третьей – 0,04. Куплено одно изделие. Какова вероятность, что оно бракованное? Какова вероятность, что купленное бракованное изделие изготовлено на третьей фабрике?

67. Первая секретарь-машинистка набрала 200 страниц текста и в 5% из них сделала ошибки. Вторая машинистка набрала 300 страниц и в 3% из них сделала ошибки. Наудачу для проверки выбрана одна страница текста. С какой вероятностью она содержит ошибки?

68. В первой урне 5 белых и 15 черных шаров, а во второй урне – 4 белых и 8 черных шаров. Из первой урны во вторую переложили один шар. Затем из второй урны вынули один шар. С какой вероятностью этот шар окажется белым? черным?

69. В первой урне 20 шаров, среди которых 5 шаров – белые. Во второй урне 10 шаров, из них 3 белых. Из каждой урны взяли наудачу по одному шару, а затем из этих двух шаров выбрали наудачу один шар. С какой вероятностью он окажется белым?

70. На экзамене студенту предлагается выбрать наугад один из 20 экзаменационных билетов. Он может ответить на «отлично» на 8 билетов с вероятностью 0,9, еще на 10 билетов – с вероятностью 0,6 и на 2 билета – с вероятностью 0,2. Найдите вероятность того, что студент, выбрав билет, ответит на него на «отлично».

71. В ящик, содержащий 2 шара, опускают белый шар, после чего из него наудачу берут шар. Найдите вероятность того, что извлеченный шар белый, если все предположения о первоначальном составе шаров по цвету равновозможны.

72. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием А, 30% больных с заболеванием Б, 20% – с заболеванием С. Вероятность полного излечения болезни А равна 0,7. Для болезней Б и С эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, выписан здоровым. Найдите вероятность того, что он страдал заболеванием А.

73. Преподаватель шутки ради предложил студенту распределить по двум урнам 2 белых и 1 черный шар. Преподаватель выбирает наугад урну и вынимает из нее 1 шар. Если шар будет белый, то студент получает зачет по теории вероятностей. Каким образом студенту следует распределить шары по урнам, чтобы иметь наибольший шанс получить зачет?

74. Имеются три колоды по 36 карт и две колоды по 52 карты. Наудачу выбирается колода, а из нее карта. 1) Какова вероятность того, что взят туз? 2) Взятая карта оказалась дамой. Какова вероятность того, что она взята из колоды в 36 карт?

5.4. Случайные величины

5.4.1. Понятие случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины

Понятие случайной величины является одним из важнейших понятий теории вероятностей.

Под *случайной величиной* понимается переменная, которая в результате испытания в зависимости от случая может принимать

то или иное значение из возможного множества своих значений, но, какое именно, заранее неизвестно. Приведем примеры случайных величин:

- 1) число детей, родившихся в Ярославле в течение суток;
- 2) число бракованных электрических ламп в данной партии;
- 3) число выпадений герба при трехкратном бросании монеты;
- 4) число преступлений в г. Ярославле за IV квартал 2009 г.;
- 5) диаметр болванки с учетом допустимых погрешностей;
- 6) время безотказной работы некоторого устройства;
- 7) величина отклонения точки падения снаряда от центра цели.

Случайная величина называется **дискретной**, если множество ее значений конечное или бесконечное, но счетное.

Непрерывная случайная величина – это величина, значения которой заполняют некоторый интервал (конечный или бесконечный) числовой прямой. Случайные величины примеров 1–4 являются дискретными случайными величинами с конечным множеством значений. Случайные величины 5–7 являются примерами непрерывных случайных величин.

Законом распределения случайной величины называется соответствие, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

Дискретные случайные величины

Закон распределения *дискретной случайной величины* X может быть задан в виде таблицы, аналитически, то есть формулой, и графически. Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величины X является таблица

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

В первой строке таблицы записаны все возможные значения дискретной случайной величины, расположенные в порядке возрастания, а во второй – вероятности, с которыми они принимаются. Такая таблица называется **рядом распределения** дискретной случайной величины.

События $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$, состоящие в том, что в результате опыта случайная величина X принимает соответственно

значения x_1, x_2, \dots, x_n , являются несовместными и единственно возможными, то есть образуют полную группу событий. Следовательно, сумма их вероятностей равна 1.

Таким образом, для любой дискретной случайной величины имеет место следующее соотношение:

$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Ряд распределения можно изобразить графически. Для этого в прямоугольной декартовой системе координат строят точки $M_1(x_1; p_1), M_2(x_2; p_2), \dots, M_n(x_n; p_n)$ и соединяют их отрезками прямых. Полученная ломаная называется **многоугольником**, или **полигоном распределения вероятностей** (рис. 1).

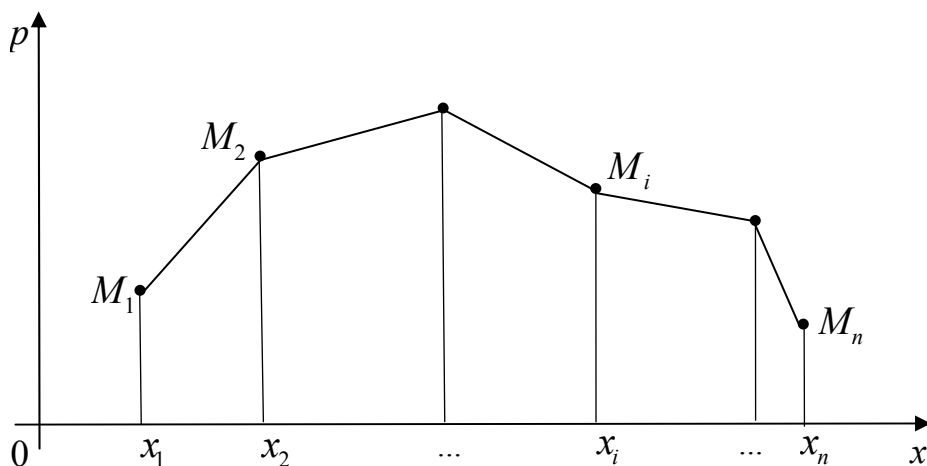


Рис. 1

Задача 75. Составить закон распределения числа выпадений герба при трехкратном бросании монеты. Построить полигон распределения.

Решение.

Дискретная случайная величина X (число выпадений герба при бросании монеты трижды) может иметь следующие возможные значения: $x_1 = 0$ (герб не выпал ни разу, все три раза выпала цифра), $x_2 = 1$ (один раз выпал герб и 2 раза – цифра), $x_3 = 2$ (2 раза выпал герб и 1 раз – цифра), $x_4 = 3$ (герб выпал все три раза). Подсчитаем теперь вероятности этих четырех событий. Заметим, что вероятность выпадения герба при бросании монеты равна $p = \frac{1}{2}$, вероятность выпадения цифры $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. Тогда:

$$1) P(X = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8};$$

$$2) P(X=1) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8};$$

$$3) P(X=2) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8};$$

$$4) P(X=3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Контроль: } \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1.$$

Теперь напомним искомый ряд распределения

X	0	1	2	3
P	1/8	3/8	3/8	1/8

Полигон распределения постройте самостоятельно.

Замечание. Закон распределения рассмотренной случайной величины носит название *биномиального*.

Биномиальным называют закон распределения дискретной случайной величины X — числа появления события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p . Вероятность события $X = k$ (числа k появлений события в n испытаниях) вычисляется по формуле $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Эта формула называется формулой Бернулли.

Задача 76. В офисе работают 10 сотрудников, из них трое подозреваются в подделке документов. Сотрудниками полиции наудачу вызваны на беседу двое сотрудников. Составить закон распределения числа сотрудников, не подозреваемых в подлоге документов среди вызванных на собеседование.

Решение. Случайная величина X (число сотрудников среди вызванных на собеседование, не подозреваемых в подлоге документов) имеет следующие возможные значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Вероятности принять эти значения найдем по формуле

$$P(X=k) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

Здесь $N=10$ — число сотрудников, работающих в офисе, $n=7$ — число сотрудников, не подозреваемых в совершении подлога, $m=2$ — число сотрудников, приглашенных на собеседование, k — число сотрудников среди приглашенных на беседу, которые вне всяких подозрений. Итак, $P(X=0) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$,

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 \cdot C_7^1}{C_{10}^2} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}, \quad P(X=2) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}.$$

Контроль: $\frac{1}{15} + \frac{7}{15} + \frac{7}{15} = 1$. Составим искомый закон распределения:

X	0	1	2
P	1/15	7/15	7/15

Замечание. Рассмотренный в этой задаче закон называют *гипергеометрическим*.

5.4.2. Числовые характеристики дискретной случайной величины

1. Математическое ожидание

Закон распределения дискретной случайной величины дает исчерпывающую информацию о ней, так как позволяет вычислить вероятности любых событий, которые связаны со случайной величиной. Однако ряд распределения бывает трудно обозримым и поэтому не всегда удобным для практического анализа.

Приведем один *пример*. Пусть даны ряды распределения случайных величин — числа очков, выбиваемых первым и вторым стрелком, если каждый сделал 10 выстрелов. Необходимо выяснить, какой из этих двух стрелков стреляет лучше. Рассматривая ряды и полигоны распределения заданных случайных величин, ответить на этот вопрос непросто из-за обилия числовых значений. В то же время очевидно, что лучше стреляет тот, кто в *среднем* выбивает большее число очков. Таким средним значением случайной величины является ее математическое ожидание.

Определение. *Математическим ожиданием* (или средним значением) $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(C) = C.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(kX) = kM(X).$$

3. Математическое ожидание алгебраической суммы конечного числа случайных величин равно такой же сумме их математических ожиданий:

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

4. Математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

2. Дисперсия случайной величины

Математическое ожидание не всегда дает возможность увидеть различие в поведении случайных величин. Второй важной характеристикой случайной величины является степень отклонения (разброса) случайной величины от ее математического ожидания (от ожидаемого среднего значения) – *дисперсия случайной величины*.

Определение. *Дисперсией* $D(X)$ дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее среднего значения:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Нетрудно доказать, что дисперсия может быть найдена также по формуле

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Решая практические задачи, удобнее применять именно эту формулу.

Свойства дисперсии

1. $D(C) = 0$,
2. $D(kX) = k^2 D(X)$,
3. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, а это не всегда удобно. Поэтому, наряду с дисперсией, для характеристики разброса значений случайной величины относительно ее математического ожидания используют также величину

$\sqrt{D(X)}$. Она называется *средним квадратическим отклонением* случайной величины:

$$\delta_X = \sqrt{D(X)}.$$

Обратим внимание на то, что сама величина X – случайная, а ее числовые характеристики являются величинами *неслучайными, постоянными*.

Их значение состоит в том, что они в сжатой форме выражают наиболее существенные свойства случайной величины.

5.4.3. Непрерывные случайные величины

Так как непрерывная случайная величина принимает все значения из некоторого числового промежутка, то перечислить эти значения невозможно. Поэтому для непрерывной случайной величины нельзя построить ряд распределения и для ее задания используют более общий способ – *функцию распределения*.

Определение. *Функцией распределения* случайной величины X называется функция $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности того, что случайная величина X принимает значение, меньшее x :

$$F(x) = P(X < x).$$

Функция распределения является одной из форм закона распределения и может быть определена как для дискретной, так и для непрерывной случайной величины. Геометрически функция распределения – это вероятность того, что случайная величина принимает значения, которые на числовой прямой лежат левее точки x .

Пример.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0; \\ x, & \text{если } x \in (0,1); \\ 1, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$
 (рис. 2).

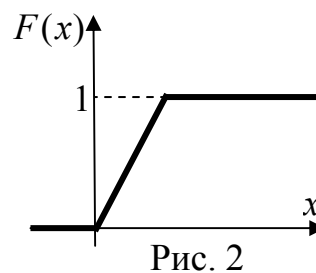


Рис. 2

Свойства функции распределения

1. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.
2. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0,1]$: $0 \leq F(x) \leq 1$.
3. $F(x)$ – неубывающая функция, т. е. если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$.

4. Вероятность того, что случайная величина примет значение в интервале (x_1, x_2) равна $F(x_2) - F(x_1)$:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Наряду с функцией распределения, для задания случайной величины используют также функцию, которая называется *плотностью распределения*.

Определение. *Плотностью распределения вероятностей* непрерывной случайной величины называется такая неотрицательная функция $p(t)$, определенная на всей числовой оси, что для всех x :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx.$$

Из этого определения следует, что, зная плотность распределения, можно найти функцию распределения $F(x)$. И наоборот, по известной функции распределения можно восстановить плотность распределения:

$$p(x) = F'(x).$$

Приведем примеры наиболее известных и применяемых распределений случайных величин.

1. *Равномерно распределенная случайная величина*

Определение. Случайная величина X называется *равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$* , если ее плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$p(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in (-\infty, a); \\ \frac{1}{b-a}, & \text{если } t \in [a, b]; \\ 0, & \text{если } t \in (b, +\infty). \end{cases}$$

График плотности распределения вероятностей равномерно распределенной случайной величины приведен на рис. 3.

Математическое ожидание такой случайной величины вычисляется по формуле

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \text{ а дисперсия — по формуле}$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

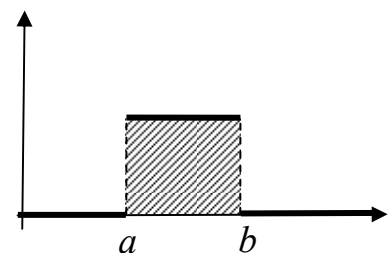


Рис. 3

Равномерный закон распределения используется для анализа ошибок округления при проведении числовых расчетов, в ряде задач массового обслуживания, при статистическом моделировании наблюдений.

Задача. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир приходит на станцию в случайный момент времени. Найдите вероятность того, что ждать поезда пассажиру придется не больше полминуты. Найдите также математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение времени ожидания поезда.

Решение. Случайная величина X – время ожидания поезда на временном интервале $[0, 2]$ (в минутах), имеет равномерный закон распределения: $p(t) = \frac{1}{2}$ (см. рис. 3). Поэтому вероятность того, что

пассажиру придется ждать не более полминуты, равна $\frac{1}{4}$ от равной 1 площади прямоугольника, т. е. $P(X \leq 0,5) = \int_0^{0,5} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^{0,5} = \frac{1}{4}$.

$$M(X) = \frac{0+2}{2} = 1 (\text{мин}), \quad D(X) = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3}, \quad \sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0,58 (\text{мин}).$$

2. Показательное распределение случайной величины

Определение. Случайная величина X называется распределенной по показательному закону, если ее плотность распределения имеет вид:

$$p(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t \leq 0. \end{cases}$$

График плотности распределения этой случайной величины приведен на рис. 4.

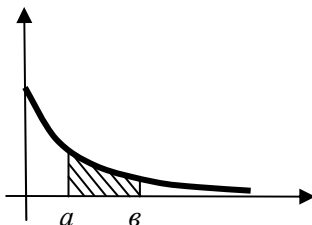


Рис. 4

Для случайной величины, распределенной по этому закону, основные характеристики вычисляются по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{\lambda}.$$

3. Случайная величина, распределенная по нормальному закону

Определение. Случайная величина X называется распределенной по нормальному закону, если ее плотность распределения имеет вид:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где m и σ – параметры нормального распределения: параметр m является математическим ожиданием случайной величины, а параметр σ – ее средним квадратическим отклонением. График этой функции представлен на рис. 5.

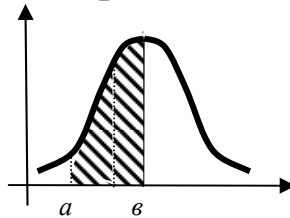


Рис. 5

Нормальное распределение называют также *Гауссовским*. Это – наиболее часто встречающийся в практике закон распределения вероятностей. О значении этого закона говорит следующая теорема, которая носит название *центральной предельной теоремы*:

Теорема. Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

На всех рисунках площадь заштрихованной фигуры равна вероятности попадания значений рассматриваемой случайной величины на указанный отрезок (a, b) .

Задачи

77. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,2. Составить ряд распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

78. Охотник дважды стреляет по цели. Вероятность попадания стрелка при одном выстреле равна 0,7. Составить ряд распре-

деления числа попаданий стрелка в цель и построить многоугольник полученного распределения.

79. Два стрелка независимо друг от друга производят по одному выстрелу по цели. Вероятность попадания в цель первого стрелка равна 0,8, а второго – 0,7. Составьте ряд распределения числа попаданий в цель.

80. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

X	0	2	3
P	0,3		0,5

81. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

X	0	2	3
P	0,4	0,3	

82. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин из задач 76 – 78.

83. Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

X	1	3	4	6
P	0,2	0,3	0,2	0,3

Найдите функцию распределения $F(x)$ и постройте ее график.

84. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \sin x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{если } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найдите плотность распределения и постройте ее график.

85. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-2, 3]$. Запишите выражение для функции распределения этой случайной величины.

86. Время горения красного сигнала светофора 20 сек. Автомобиль остановился на перекрестке на красный свет. Найдите вероятность того, что он уедет с перекрестка позднее, чем через 15 сек.

87. Рейсовый автобус движется по маршруту строго по расписанию с интервалом 10 мин. Найдите вероятность того, что случайно подошедший к остановке пассажир будет ожидать автобуса менее 2 мин.

88. Рейсовый автобус движется по маршруту строго по расписанию с интервалом 12 мин. Найдите вероятность того, что случайно подошедший к остановке пассажир будет ожидать автобуса менее 3 мин. Найдите также математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени ожидания автобуса.

6. Элементы математической статистики

Математическая статистика – это наука, занимающаяся получением, описанием и обработкой опытных данных или наблюдений с целью изучения закономерностей массовых явлений.

6.1. Вариационные ряды и их графическая интерпретация

В практике статистических наблюдений различают два вида наблюдений: *сплошное*, когда изучаются все объекты (элементы), и *выборочное*, когда изучается часть объектов. Вся изучаемая совокупность объектов называется **«генеральной совокупностью»**. Простейший пример генеральной совокупности – материалы переписи населения той или иной страны, в которых имеются сведения о всех ее гражданах. Понятие генеральной совокупности аналогично понятию всей совокупности значений случайной величины.

Как правило, для обработки наблюдений или опыта удастся использовать только часть генеральной совокупности – так называемую **«выборочную совокупность»**, или **«выборку»**.

Сущность выборочного метода в статистике состоит в том, чтобы по свойствам выборки сделать вывод о свойствах всей генеральной совокупности.

На начальном этапе данные выборки заносятся в таблицу, где записываются номера и результаты измерений или опросов. Различные значения случайной величины, наблюдаемые в результате эксперимента, называются *вариантами (обозначаются через x)*. В таблице варианты располагаются в порядке их возрастания.

Пример. Генеральная совокупность – N ящиков с приборами; выборочная совокупность – $n = 10$ выбранных для контроля ящиков.

Подсчитывается число пострадавших при транспортировке ящиков деталей. Результаты подсчета представлены в таблице:

№ ящ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кол. д.	0	1	4	1	2	3	1	5	0	2

Если количество пострадавших деталей – это изучаемая случайная величина X , то полученные данные о ней можно представить в виде «статистического ряда распределения»:

X	0	1	2	3	4	5
w_i	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1

Здесь, как для любой дискретной случайной величины, перечислены все возможные значения, принимаемые величиной X , но вместо вероятностей этих значений во второй строке записаны их *относительные частоты* $w_i = \frac{n_i}{n}$. Например, пострадавших деталей нет только в двух ящиках (в первом и девятом) из десяти, поэтому $n_1 = 2$ и $n = 10$. Заметим, что вместо относительных частот можно использовать также число n_i , которое показывает, сколько раз данная варианта встречается в выборке; это число называют *частотой* варианты.

*Расположенный в порядке возрастания (или убывания) ряд вариант с соответствующими им частотами или относительными частотами называется **вариационным рядом**.*

Возможен и другой способ описания статистических данных. Пусть мы опять имеем «статистический ряд», но достаточно длинный. Чтобы сделать результаты опыта более обозримыми, весь диапазон наблюдаемых значений величины X разобьем на разряды (интервалы) и подсчитаем частоту попадания значений X в соответствующий интервал. Рассмотрим опять наш пример.

Интервал значений X	$0 \leq X < 2$	$2 \leq X < 3$	$3 \leq X < 5$	$5 \leq X < 6$
Частота попаданий в интервал	5 (0,5)	2 (0,2)	2 (0,2)	1 (0,1)

Примечание: в скобках указаны относительные частоты.

При составлении вариационного ряда по интервалам следует иметь в виду, что число интервалов m следует брать не очень большим, чтобы после группировки ряд не был ни громоздким, ни очень малым, дабы не потерять особенности распределения признака. Все интервалы желательно выбирать одинаковой длины, при этом начало интервала включается в него, а конец – нет. Согласно *формуле Стерджеса*, рекомендуемое число интервалов

$m = 1 + 3,322 \lg n$, а величина (ширина) интервала $k = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,322 \lg n}$, где

$x_{\max} - x_{\min}$ — разность между наибольшим и наименьшим значениями признака.

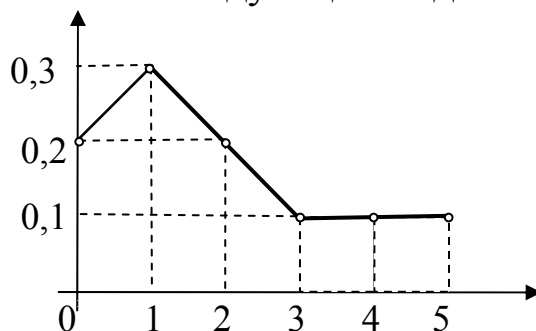
При изучении вариационных рядов наряду с понятием частоты используется понятие *накопленной частоты* (обозначение $n_i^{\text{нак}}$). Накопленная частота показывает, сколько наблюдалось вариантов со значением признака, меньшим x . Отношение накопленной частоты $n_i^{\text{нак}}$ к общему числу наблюдений n называют **относительной накопленной частотой** $w_i^{\text{нак}}$.

Накопленные частоты для каждого интервала находятся последовательным суммированием частот всех предшествующих интервалов, включая данный.

Для графического изображения вариационных рядов используются два вида графиков: полигон частот или относительных частот и гистограмма.

Полигон частот (относительных частот) представляет собой ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_i, n_i) (или координатами $(x_i, \frac{n_i}{n})$), где x_i — значения исследуемой случайной величины.

Для рассмотренного выше вариационного ряда полигон относительных частот имеет следующий вид:



Полигон частот является аналогом многоугольника распределения дискретной случайной величины.

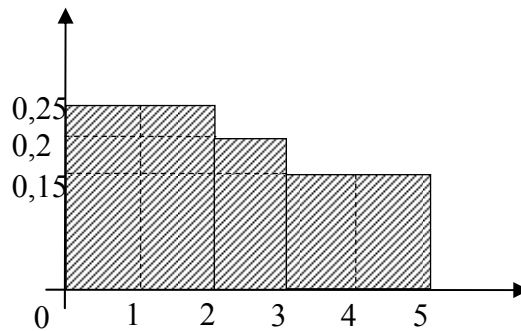
Гистограммы служат только для изображения интервальных вариационных рядов.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат интервалы $k_i = x_{i+1} - x_i$ значений признака, а высоты равны отноше-

ям $\frac{n_i}{k_i}$ (то есть определяются количеством значений измеряемой величины, попадающих в соответствующий интервал). Площадь i -го прямоугольника равна n_i – сумме частот вариантов, попавших в i -й интервал.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат интервалы $k_i = x_{i+1} - x_i$ значений признака, а высоты равны отношениям $\frac{w_i}{k_i}$. Площадь i -го прямоугольника равна w_i – относительной частоте вариантов, попавших в i -й интервал.

Гистограмма нашего интервального вариационного ряда изображена ниже.



Если соединить середины верхних оснований прямоугольников отрезками, то получится полигон того же распределения.

Еще одним важным понятием служит понятие **эмпирической функции распределения**.

Эмпирической функцией распределения $F_n(x)$ называется относительная частота того, что признак (случайная величина X) примет значение, меньшее заданного x , то есть

$$F_n(x) = w(X < x) = w_x^{\text{нак}}.$$

Согласно этому определению, для данного x эмпирическая функция распределения представляет накопленную относительную частоту $w_x^{\text{нак}} = n_x^{\text{нак}} / n$:

$$F_n(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n}.$$

6.2. Количественные характеристики вариационного ряда

1. **Средняя арифметическая** вычисляется по формуле

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_i}{n},$$

где x_i – варианты ряда, n_i – соответствующие им частоты или середины отрезков интервалов интервального вариационного ряда, m – число неповторяющихся вариантов или число интервалов,

$$n = \sum_{i=1}^m n_i.$$

Для несгруппированного ряда все частоты $n_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), а

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ есть «невзвешенная» средняя арифметическая.

2. **Средняя геометрическая** $\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}}$.

Эти средние величины называют *аналитическими*. В статистическом анализе используются также *структурные*, или *порядковые*, средние. Из них наиболее широко используются медиана и мода.

3. **Медиана** (Me) – это варианта (значение величины, признака), приходящаяся на середину ранжированного ряда наблюдений.

Для дискретного вариационного ряда с нечетным числом членов медиана равна срединной variante, а для ряда с четным числом членов – полусумме двух срединных вариантов.

Достоинство медианы как меры центральной тенденции заключается в том, что на нее не влияет изменение крайних членов вариационного ряда. Медиана предпочтительнее средней арифметической для ряда, у которого крайние варианты по сравнению с остальными оказались чрезмерно большими или малыми.

4. **Мода** (Mo) вариационного ряда – это варианта, которой соответствует наибольшая частота.

Особенность моды как меры центральной тенденции состоит в том, что она не изменяется при изменении крайних членов ряда, т. е. обладает определенной устойчивостью к вариации признака.

Средние величины, рассмотренные выше, не отражают изменчивости (вариации) значений признака.

К показателям вариации относятся следующие характеристики.

5. **Вариационный размах** (R) – разность между наибольшей и наименьшей вариантами ряда:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

6. **Среднее линейное отклонение** – это средняя арифметическая абсолютных величин отклонений вариант от их средней арифметической:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^m |x_i - \bar{x}| n_i}{n}.$$

7. **Дисперсия** (s^2) вариационного ряда – это средняя арифметическая квадратов отклонений вариант от их средней арифметической:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n}.$$

Дисперсию s^2 часто называют эмпирической (или выборочной), подчеркивая, что она находится по опытным или статистическим данным.

8. **Среднее квадратическое отклонение** (s) – это арифметическое значение корня квадратного из дисперсии:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n}}.$$

Вычисление средней арифметической \bar{x} и дисперсии s^2 можно упростить, если использовать не первоначальные варианты x_i

($i = 1, 2, \dots, n$), а новые (обозначим их через u_i): $u_i = \frac{x_i - c}{k}$.

В последней формуле c и k – специально подобранные постоянные.

Средняя арифметическая вариационного ряда u , состоящего из вариант $u_i = \frac{x_i - c}{k}$, согласно свойствам средней арифметической, вычисляется по формуле:

$$\bar{u} = \left(\frac{\bar{x} - c}{k} \right) = \frac{\bar{x} - c}{k}.$$

Обозначим дисперсию этого ряда символом s_u^2 . Тогда из свойств дисперсии случайной величины следует, что $s_u^2 = s_{\frac{x-c}{k}}^2 = \frac{s_{x-c}^2}{k^2} = \frac{s_x^2}{k^2}$. Здесь случайная величина u связана со случайной величиной x формулой $u = \frac{x-c}{k}$. Отсюда $\bar{x} = \bar{u}k + c$ и $s_x^2 = k^2 s_u^2$.

Заменяя в этих формулах \bar{u} и s_u^2 их выражениями через варианты u_i и упрощая полученные при этом формулы, будем иметь

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - c) n_i + c$$

и

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - c)^2 n_i - (\bar{x} - c)^2.$$

В этих формулах в качестве постоянной k берут ширину интервала по x , а в качестве c – середину срединного интервала. Если срединных интервалов два (при четном числе интервалов), то в качестве c следует взять середину одного из этих интервалов, например, имеющего большую частоту.

Задачи

1. Постройте полигон частот для данных вариационных рядов:

а)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

 ;

б)

x_i	15	20	25	30	35
n_i	10	15	30	20	25

 .

2. Постройте полигон относительных частот:

а)

x_i	2	4	5	7	10
ω_i	0,2	0,1	0,1	0,2	0,4

 ;

б)

x_i	1	4	5	8	9
ω_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,2

 .

3. Постройте гистограмму частот и относительных частот по данному распределению выборки:

а)

Номер интервала	Частичный интервал $[x_i, x_{i+1}]$	Сумма частот вариант интервала	Плотность частоты $n_i / (x_{i+1} - x_i)$
1	[2, 7]	5	
2	[7, 12]	10	
3	[12, 17]	25	
4	[17, 22]	6	
5	[22, 27]	4	

б)

Номер интервала	Частичный интервал $[x_i, x_{i+1}]$	Сумма частот вариант интервала	Плотность частоты $n_i / (x_{i+1} - x_i)$
1	[3, 5]	4	
2	[5, 7]	6	
3	[7, 9]	20	
4	[9, 11]	40	
5	[11, 13]	20	
6	[13, 15]	4	
7	[15, 17]	6	

в)

Интервал	$1 \leq X < 5$	$5 \leq X < 9$	$9 \leq X < 13$	$13 \leq X < 17$	$17 \leq X < 20$
$\sum n_i$	10	20	50	12	8

4. Найдите выборочные средние для данных распределений выборки:

а)

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

 ;

б)

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

 .

5. Найдите выборочную среднюю и выборочную дисперсию для данных выборки:

x_i	1	2	5	8	9
n_i	3	4	6	4	3

6. Дано распределение 50 рабочих механического цеха по тарифному разряду:

Тарифный разряд	1	2	3	4	5	6	Σ
Частота (кол-во рабочих)	2	3	6	8	22	9	50

а) постройте полигон распределения рабочих по тарифному разряду;

б) найдите медиану и моду данного распределения рабочих.

в) найдите выборочную среднюю и выборочную дисперсию для данных выборки.

7. По заданным выборкам решите следующие подзадачи:

а) составьте вариационный ряд;

б) вычислите относительные частоты (частости) и накопленные частости;

в) постройте полигон и гистограмму вариационного ряда;

- г) составьте эмпирическую функцию распределения;
 д) постройте график эмпирической функции распределения;
 е) найдите числовые характеристики вариационного ряда:
 – среднее арифметическое,
 – дисперсию,
 – среднеквадратическое (стандартное) отклонение,
 – моду,
 – медиану.

7.1.

2	4	2	4	3	3	3	2	0	6	1	2	3	2	2	4	3	3	5	1
0	2	4	3	2	2	3	3	1	3	3	3	1	1	2	3	1	4	3	1
7	4	3	4	2	3	2	3	3	1	4	3	1	4	5	3	4	2	4	5
3	6	4	1	3	2	4	1	3	1	0	0	4	6	4	7	4	1	3	

$n = 79$. Начало первого интервала – 0. Длина интервалов – 1.

7.2.

0	4	2	0	5	1	1	3	0	2	2	4	3	2	3	3	0	4	5	1
3	1	5	2	0	2	2	3	2	2	2	6	2	1	3	1	3	1	5	4
5	5	3	2	2	0	2	1	1	3	2	3	5	3	5	2	5	2	1	1
2	3	4	3	2	3	2	4	2											

$n = 69$. Начало первого интервала – 0. Длина интервалов – 1.

7.3.

3	7	4	6	1	4	2	4	6	5	3	2	9	0	5	6	7	7	3	1
5	5	4	2	6	2	1	5	3	3	1	5	6	4	4	3	4	1	5	5
3	4	3	7	4	5	6	7	5	2	4	6	6	7	7	3	5	4	4	3
5	5	7	6	6	1														

$n = 66$. Начало первого интервала – 0. Длина интервалов – 1.

6.3. Понятие оценки параметров. Точечная оценка

Математическая теория выборочного метода основана на анализе случайной выборки. Введем некоторые обозначения:

x_i – значения признака (случайной величины X);

N и n – объемы генеральной и выборочной совокупностей;

N_i и n_i – число элементов генеральной и выборочной совокупностей со значением признака x_i ;

M и m – число элементов генеральной и выборочной совокупностей, обладающих данным признаком.

Средние арифметические распределения признака в генеральной и выборочной совокупностях называются соответствен-

но генеральной и выборочной средними, а дисперсии этих распределений – генеральной и выборочной дисперсиями.

Отношения $\frac{M}{N}$ и $\frac{m}{n}$ называются соответственно *генеральной и выборочной долями*.

Все формулы сведем в таблицу

Наименование характеристики	Генеральная совокупность	Выборка
Средняя	$\bar{x}_0 = \frac{\sum_{i=1}^M x_i N_i}{N}$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_i}{n}$
Дисперсия	$D_G = \frac{\sum_{i=1}^M (x_i - \bar{x}_0)^2 N_i}{N}$	$D_B = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n}$
Доля	$p = \frac{M}{N}$	$w = \frac{m}{n}$

Генеральные совокупности характеризуются некоторыми постоянными числовыми характеристиками – параметрами. Например, это параметр λ в распределении Пуассона или параметры a или σ^2 для нормального распределения и т. д. Задачей выборочного метода является оценка параметров (характеристик) генеральной совокупности по данным выборки.

Обозначим неизвестный параметр распределения, то есть числовую характеристику генеральной совокупности X , через θ .

Для вычисления параметра θ использовать генеральную совокупность не представляется возможным. Поэтому о параметре θ судят по выборке, состоящей из вариантов x_1, x_2, \dots, x_n . Эти варианты можно рассматривать как частные значения n независимых случайных величин X_1, \dots, X_n , каждая из которых имеет тот же закон распределения, что сама случайная величина X .

Статистической оценкой θ^* неизвестного параметра θ теоретического распределения называют всякую функцию $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ от результатов наблюдений над случайными величинами X_1, \dots, X_n .

Поскольку X_1, \dots, X_n –случайные величины, то и оценка θ^* (в отличие от параметра θ – величины неслучайной) является слу-

чайной величиной, зависящей от закона распределения случайной величины X и числа n .

В качестве оценки параметра θ можно выбрать неединственную функцию. Например, если параметр θ является математическим ожиданием случайной величины X , т. е. генеральной средней, то в качестве его оценки θ^* по выборке можно взять: среднюю арифметическую результатов наблюдений – выборочную среднюю, или моду, или медиану и т. д.

Точечной называют статистическую оценку, которая определяется одним числом $\theta^* = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_1, x_2, \dots, x_n – некоторая выборка из генеральной совокупности.

Точечная оценка θ^ параметра θ называется несмещенной*, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки: $M(\theta^*) = \theta$.

Смещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру: $M(\theta^*) \neq \theta$.

Несмещенной оценкой генеральной средней (математического ожидания) служит выборочная средняя:

$$\bar{x}_s = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_i}{n},$$

где x_i – варианта выборки, n_i – частота варианты x_i , $n = \sum_{i=1}^m n_i$ – объем выборки.

Смещенной оценкой генеральной дисперсии служит выборочная дисперсия:

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n}.$$

Эта оценка является смещенной, так как можно доказать, что

$$M(D_B) = \frac{n-1}{n} D_{\Gamma}.$$

Для вычисления выборочной дисперсии более удобна следующая формула:

$$D_B(X) = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 n_i}{n} - \left[\frac{\sum_{i=1}^m x_i n_i}{n} \right]^2.$$

Если варианты x_i – большие числа, то для упрощения вычислений целесообразно перейти к условным вариантам $u_i = x_i - C$. В качестве C выгодно взять число, близкое к выборочной средней, но так как выборочная средняя неизвестна, то число C выбирают наугад, стараясь получить маленькие значения для вариантов u_i . Тогда

$$\bar{x} = C + \frac{\sum_{i=1}^m u_i n_i}{n}.$$

Так как при замене $u_i = x_i - C$ дисперсия не изменится, то

$$D_B(X) = D_B(U) = \bar{u}^2 - (\bar{u})^2 = \frac{\sum_{i=1}^m u_i^2 n_i}{n} - \left[\frac{\sum_{i=1}^m u_i n_i}{n} \right]^2.$$

Если первоначальные варианты x_i являются десятичными дробями с k десятичными знаками после запятой, то переходят к условным вариантам $u_i = Cx_i$, где $C = 10^k$. При этом дисперсия увеличивается в C^2 раз. Поэтому

$$D_B(X) = \frac{D_B(U)}{C^2}.$$

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}_s)^2 n_i}{n-1}.$$

Более удобна формула

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 n_i - \frac{(\sum_{i=1}^m x_i n_i)^2}{n}}{n-1}.$$

В условных вариантах она имеет вид

$$s_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^m u_i^2 n_i - \frac{(\sum_{i=1}^m u_i n_i)^2}{n}}{n-1},$$

причем если $u_i = x_i - C$, то $s_X^2 = s_U^2$, а если $u_i = Cx_i$, то $s^2 = s_U^2 / C^2$.

8. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$:

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Найдите несмещенную оценку генеральной средней.

Решение. Несмещенной оценкой генеральной средней служит выборочная средняя:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_i}{n}.$$

Поэтому $\bar{x} = \frac{16 \cdot 2 + 12 \cdot 5 + 8 \cdot 7 + 14 \cdot 10}{50} = 5,76 = 16.$

9. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 60$:

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Найдите несмещенную оценку генеральной средней.

10. Найти выборочную среднюю по данному распределению выборки объема $n = 10$:

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

Решение. Первоначальные варианты – большие числа, поэтому перейдем к условным вариантам. Пусть $C = 1270$, тогда $u_i = x_i - 1270$. В результате получим:

u_i	-20	0	10
n_i	2	5	3

Найдем искомую выборочную среднюю:

$$\bar{x} = C + \frac{\sum_{i=1}^m u_i n_i}{n} = 1270 + \frac{2 \cdot (-20) + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 10}{10} = 1270 - 1 = 1269.$$

11. Найдите выборочную среднюю по данному распределению выборки объема $n = 20$:

x_i	1560	2600	2620	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

12. По выборке объема $n = 41$ найдена смещенная оценка $D_B = 3$ генеральной дисперсии. Найдите несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

Решение. Несмещенная оценка равна исправленной дисперсии D_B :

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{41}{40} \cdot 3 = 3,075.$$

13. По выборке объема $n=51$ найдена смещенная оценка $D_B=5$ генеральной дисперсии. Найдите несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

14. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором получены следующие результаты (в мм): 92, 94, 103, 105, 106. Найдите: а) выборочную среднюю длину стержня; б) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

Решение. а) Выборочная средняя

$$\bar{x} = C + \frac{\sum_{i=1}^m u_i n_i}{n} = 92 + \frac{(0+2+11+13+14)}{5} = 92 + 8 = 100.$$

б) Выборочная дисперсия

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}{5} = \frac{(92-100)^2 + (94-100)^2 + (103-100)^2 + (105-100)^2 + (106-100)^2}{5} = 34.$$

Исправленная дисперсия

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{5}{4} \cdot 34 = 42,5.$$

15. В итоге четырех измерений некоторой физической величины одним прибором получены следующие результаты (в мм): 8, 9, 11, 12. Найдите: а) выборочную среднюю результатов измерений; б) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

16. Ниже приведены результаты измерения роста (в см) случайно отобранных 100 студентов.

Рост	154–158	158–162	162–166	166–170	170–174	174–178	178–182
Число студентов	10	14	26	28	12	8	2

Найдите выборочную среднюю и выборочную дисперсию роста обследованных студентов.

Указание. Найдите середины интервалов и примите их в качестве вариантов.

17. Найдите выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n=10$:

x_i	0,01	0,04	0,08
n_i	5	3	2

Решение. Чтобы избежать действий с дробями, перейдем к условным вариантам $u_i = 100x_i$. Получим распределение

u_i	1	4	8
n_i	5	3	2

Найдем выборочную дисперсию условных вариантов:

$$D_B(U) = \frac{\sum_{i=1}^m u_i^2 n_i}{n} - \left[\frac{\sum_{i=1}^m u_i n_i}{n} \right]^2 = \frac{1 \cdot 5 + 16 \cdot 3 + 64 \cdot 2}{10} - \left[\frac{1 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 2}{10} \right]^2 = \frac{181}{10} - \left(\frac{33}{10} \right)^2 = 7,21.$$

$$D_B(X) = \frac{D_B(U)}{C_2} = \frac{7,21}{10^4} = 0,000721.$$

6.4. Интервальные оценки. Доверительный интервал

Точечная оценка θ^* параметров θ генеральной совокупности является лишь приближенным значением неизвестного параметра и для выборки малого объема может существенно отличаться от него. Чтобы иметь представление о точности и надежности оценки θ^* параметра θ используют интервальную оценку параметра.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр.

Доверительным называют интервал $(\theta^{*1}, \theta^{*2})$, который с заданной вероятностью (надежностью) γ покрывает заданный параметр. Вероятность γ называется **доверительной вероятностью**, уровнем доверия или надежностью оценки.

Величина доверительного интервала зависит от объема выборки (уменьшается с ростом n) и от значения доверительной вероятности γ (увеличивается с приближением γ к единице).

Часто интервал выбирают симметричным относительно параметра θ , т.е. выбирают интервал $(\theta - \Delta, \theta + \Delta)$.

Отклонение Δ оценки θ^* от оцениваемого параметра θ называется точностью оценки: $|\theta - \theta^*| \leq \Delta$.

Любую точность можно получить с определенной вероятностью (надежностью):

$$P(|\theta - \theta^*| \leq \Delta) = \gamma.$$

Это условие означает, что интервал $[\theta^* - \Delta, \theta^* + \Delta]$ покрывает значение параметра θ с заданной *доверительной вероятностью* γ . Точность оценки Δ фактически определяет *длину доверительного интервала* (2Δ).

Построение доверительного интервала для генеральной средней и генеральной доли по большим выборкам основано на следующей теореме.

Теорема. Вероятность того, что отклонение выборочной средней (или доли) от генеральной средней (или доли) (по абсолютной величине) не превзойдет число $\Delta > 0$, равна:

$$P(|\bar{x} - \bar{x}_0| \leq \Delta) = \Phi(t) = \gamma,$$

где $t = \frac{\Delta}{\sigma_{\bar{x}}}$;

$$P(|w - p| \leq \Delta) = \Phi(t) = \gamma,$$

где $t = \frac{\Delta}{\sigma_w}$, $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ – функция Лапласа.

Для вычисления значений этой функции для положительных значений t ($0 \leq t \leq 5$) составлена таблица (Приложение 1); для значений $t > 5$ полагают $\Phi(t) = 0,5$. Для отрицательных значений t используют ту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Доверительный интервал для среднего значения a нормального распределения при известном σ

Интервальной оценкой с надежностью γ математического ожидания a нормально распределенного признака X по выборочной средней \bar{x}_B является доверительный интервал

$$\bar{x}_B - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq a \leq \bar{x}_B + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $t \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \Delta$ – точность оценки, n – объем выборки, t – значение

аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

Доверительный интервал для среднего значения a нормального распределения при неизвестном σ (и объеме выборки $n \leq 30$)

Интервальной оценкой с надежностью γ математического ожидания a нормально распределенного признака X в этом случае служит интервал

$$\bar{x}_B - t_\gamma \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right) \leq a \leq \bar{x}_B + t_\gamma \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right),$$

где s – «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение ($s^2 = \frac{n}{n-1} D_B$); t_γ находится по заданным n и γ по таблице (Приложение 2).

Доверительный интервал для дисперсии σ^2 нормального распределения

Интервальной оценкой (с надежностью γ) *среднего квадратического отклонения σ нормально распределенного признака X* по «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению s служит доверительный интервал

$$\begin{aligned} s(1-q) < \sigma < s(1+q) \text{ при } q < 1, \\ 0 < \sigma < s(1+q) \text{ при } q > 1, \end{aligned}$$

где q находят по таблице (Приложение 3) по значениям n и γ .

Определение объема выборки

Для определения объема выборки n необходимо задать надежность (доверительную вероятность) оценки γ и точность (предельную ошибку выборки) Δ .

Для повторной выборки *при оценке генеральной средней с надежностью γ* искомый объем выборки вычисляется по формуле

$$n = \frac{t^2 \sigma^2}{\Delta^2},$$

где $\Phi(t) = \gamma$, $\Phi(t)$ – функция Лапласа.

Если найден объем повторной выборки n , то объем соответствующей бесповторной выборки находится по формуле $n' = \frac{nN}{n+N}$.

Задачи

18. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$, выборочная средняя $\bar{x}_B = 14$, а объем выборки $n = 25$.

Решение. Требуется найти доверительный интервал

$$\bar{x}_B - t_\gamma \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \leq a \leq \bar{x}_B + t_\gamma \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

Все величины, кроме t_γ , известны. Найдем t_γ из соотношения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475$. По таблице значений функции Лапласа (Приложение 1) находим $t = t_\gamma = 1,96$. Подставив значения $t_\gamma = 1,96$, $\sigma = 5$, $\bar{x}_B = 14$, $n = 25$ в формулу, получим искомый доверительный интервал $12,04 < a < 15,96$.

19. а) Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 4$, выборочная средняя $\bar{x}_B = 10,2$, а объем выборки $n = 16$.

б) Та же задача при условии, что $\sigma = 5$, $\bar{x}_B = 16,8$, $n = 25$.

20. Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы оказалась равной 1000 часов. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для средней продолжительности a горения лампы всей партии, если среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы $\sigma = 40$ часов. Предполагается, что продолжительность горения ламп распределена нормально.

21. Станок-автомат штампует валики. По выборке объема $n = 100$ вычислена выборочная средняя диаметров изготовленных валиков. Найдите с надежностью 0,95 точность Δ , с которой выборочная средняя оценивает математическое ожидание диаметров изготавливаемых валиков, зная, что их среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$. Предполагается, что диаметры валиков распределены нормально.

22. Найти минимальный объем выборки, при котором точность оценки математического ожидания a генеральной сово-

купности по выборочной средней равна $\Delta = 0,3$ с надежностью 0,975. Среднее квадратическое отклонение нормально распределенной генеральной совокупности $\sigma = 1,2$.

Решение. Воспользуемся формулой, определяющей точность оценки ожидаемого математического ожидания генеральной совокупности по выборочной средней: $\Delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$. Отсюда $n = \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{\Delta^2}$.

По условию, $\gamma = 0,975$. Поэтому $\Phi(t) = \frac{0,975}{2} = 0,4875$. По таблице значений функции Лапласа найдем $t = 2,24$. Подставив значения $t = 2,24$, $\sigma = 1,2$, $\Delta = 0,3$ в формулу для вычисления $n = \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{\Delta^2}$, получим $n = 81$.

23. Найдите минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,925 точность оценки математического ожидания a нормально распределенной генеральной совокупности по выборочной средней равна 0,2. Среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности $\sigma = 1,5$.

24. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 10$:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

Решение. Выборочную среднюю и «исправленное» среднее квадратическое отклонение найдем по формулам:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_i}{n}, \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m n_i (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}.$$

Подставив в эти формулы данные задачи, получим $\bar{x} = 2$, $s = 2,4$.

Найдем t_γ , пользуясь таблицей для вычисления t_γ по значениям $\gamma = 0,95$ и $n = 10$. Итак, $t_\gamma = 2,26$. Найдем искомый доверительный интервал:

$$\bar{x}_B - t_\gamma \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right) \leq a \leq \bar{x}_B + t_\gamma \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right).$$

Подставляя $\bar{x} = 2$, $s = 2,4$, $t_\gamma = 2,26$, $n = 10$ в эту формулу, получим искомый интервал $0,3 < a < 3,7$, покрывающий неизвестное математическое ожидание с надежностью 0,95.

25. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 12$:

x_i	-0,5	-0,4	-0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

26. По данным девяти независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x} = 30,1$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 6$. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью $\gamma = 0,99$. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

Решение. Истинное значение измеряемой величины равно ее математическому ожиданию a . Поэтому задача сводится к оценке математического ожидания (при неизвестном σ) при помощи доверительного интервала $\bar{x}_B - t_\gamma \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right) \leq a \leq \bar{x}_B + t_\gamma \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right)$.

Все величины, кроме t_γ , известны. Найдем t_γ , пользуясь таблицей для вычисления t_γ по значениям $\gamma = 0,95$ и $n = 9$: $t_\gamma = 2,36$. Подставив $\bar{x} = 30,1$, $t_\gamma = 2,36$, $s = 6$, $n = 9$ в формулу для интервала, получим искомый интервал: $25,38 < a < 34,82$.

27. По данным шестнадцати независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x} = 42,8$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 8$. Оцените истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью $\gamma = 0,999$. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

28. По данным выборки объема $n = 16$ из генеральной совокупности найдены «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 1$ нормально распределенного количественного признака.

Найдите доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью $\gamma = 0,95$.

Решение. Задача сводится к отысканию доверительного интервала $s(1-q) < \sigma < s(1+q)$ (если $q < 1$) или $0 < \sigma < s(1+q)$ (если $q > 1$).

По данным $\gamma = 0,95$ и $n = 16$ по таблице значений q найдем $q = 0,44$. Так как $q < 1$, то, подставив $s = 1$ и $q = 0,44$ в первую из указанных формул, получим искомый доверительный интервал $0,56 < \sigma < 1,44$.

29. По данным выборки объема n из генеральной совокупности нормально распределенного количественного признака найдены «исправленное» среднее квадратическое отклонение s . Найдите доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,999, если:
а) $n = 10$, $s = 5,1$; б) $n = 50$, $s = 14$.

6.5. Применение метода наименьших квадратов для обработки результатов наблюдений

Метод наименьших квадратов относится к числу очень распространенных методов обработки наблюдений. Он применяется при решении многих практических задач в биологии, физике, психологии, социологии, лингвистике.

Пусть в процессе эксперимента получена зависимость между значениями двух зависимых случайных величин X, Y : $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Как правило, такая зависимость дается в виде таблицы:

X	x_1	x_2	x_3	\dots	x_m	\dots	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	\dots	y_m	\dots	y_n

Предполагается, что между значениями x и y этих величин существует функциональная зависимость определенного вида. Требуется найти функцию $y = f(x)$ заданного вида, которая наилучшим образом была бы согласована с опытными данными. Считается, что наилучшей будет та функция $y = f(x)$, для которой сумма квадратов отклонений значений \tilde{y}_i , вычисленных по фор-

муле $\widetilde{y}_i = f(x_i)$, от соответствующих опытных значений y_i в точках x_i принимает минимальное значение.

Иначе говоря, надо найти функцию $y = f(x)$, для которой обращается в минимум сумма $S = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - y_i]^2$.

Чаще всего в качестве функции $y = f(x)$ выбирают линейную или квадратичную.

1. Пусть функцией, «сглаживающей» экспериментальную зависимость между переменными x и y , является линейная функция $y = ax + b$.

Тогда $S = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$, а параметры a и b определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} a \sum_{k=1}^n x_k + nb = \sum_{k=1}^n y_k, \\ a \sum_{k=1}^n x_k^2 + b \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k y_k. \end{cases} \quad (1)$$

Для вычисления коэффициентов $\sum_{k=1}^n x_k^2$, $\sum_{k=1}^n x_k$, $\sum_{k=1}^n x_k y_k$, $\sum_{k=1}^n y_k$ системы удобно составить вспомогательную таблицу.

2. Если в качестве функции, отражающей экспериментальную зависимость между переменными x и y , выбрать квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$, то система уравнений для определения параметров a , b , c будет иметь вид:

$$\begin{cases} a \sum_{k=1}^n x_k^2 + b \sum_{k=1}^n x_k + nc = \sum_{k=1}^n y_k, \\ a \sum_{k=1}^n x_k^3 + b \sum_{k=1}^n x_k^2 + c \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \\ a \sum_{k=1}^n x_k^4 + b \sum_{k=1}^n x_k^3 + c \sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 y_k. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим конкретные задачи на применение метода наименьших квадратов.

Задачи

30. Предполагается, что стационарное распределение температуры в теплоизолированном тонком стержне описывается линейной функцией $y = ax + b$. Определить константы a , b , имея таблицу измеренных температур в соответствующих точках стержня:

x	0	2	6	8	10	14	16	20
y	32	29,2	23,3	19,9	17,2	11,3	7,8	2

Решение. Составим таблицу для определения коэффициентов

$\sum_{k=1}^n x_k^2$, $\sum_{k=1}^n x_k$, $\sum_{k=1}^n x_k y_k$, $\sum_{k=1}^n y_k$ системы (1):

k	x_k	x_k^2	y_k	$x_k y_k$
1	0	0	32	0
2	2	4	29,2	58,4
3	6	36	23,3	139,8
4	8	64	19,9	159,2
5	10	100	17,2	172
6	14	196	11,3	158,2
7	16	256	7,8	124,8
8	20	400	2,0	40
Σ	76	1056	142,7	852,4

Система (1) имеет вид:
$$\begin{cases} 76a + 8b = 142,7, \\ 1056a + 76b = 852,4. \end{cases}$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим следующие значения параметров a , b : $a = -1,5$, $b = 32,5$. Таким образом, искомая линейная функция имеет вид $y = -1,5x + 32,5$.

31. В электрической цепи в течение 10 секунд измеряется напряжение U с интервалом в 1 секунду. Результаты приведены в таблице:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U	12	11	10	9	9	8	8	7	7	6

Известно, что зависимость между параметрами U и t линейная, т. е. $U = kt + b$.

Найдите такие значения параметров k и b , при которых функция $U = kt + b$ достаточно точно отражает результаты эксперимента.

32. В таблице приведены результаты измерения силы звука самолета (она обозначена U и измеряется в децибелах (дБ)) на различных расстояниях от точки взлета (расстояние обозначается через S и измеряется в км):

S	1	2,5	3	5,5	7	8,5	10	15	20	30
U	115	108	102	98	93	89	87	72	65	60

Используя метод наименьших квадратов, подберите линейную функцию, которая описывает зависимость U от S . Найдите:

а) на каком расстоянии от точки взлета звук становится смертельно опасным для человека (свыше 120 децибел);

б) на каком расстоянии от аэродрома можно строить жилые помещения (менее 75 децибел), детские учреждения и больницы (менее 50).

33. Имеются следующие данные о величине пробега автомобиля X (тыс. км) и Y – расходе масла (л/тыс. км):

x_i	50	70	90	110	130
y_i	0,2	0,5	0,8	1,1	1,3

Полагая, что между переменными X и Y существует линейная зависимость $y = ax + b$, найдите методом наименьших квадратов эмпирическую формулу этой зависимости.

34. Имеются следующие данные о расходах на рекламу X (тыс. усл. ед.) и сбыте продукции Y (тыс. ед.):

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,6	4,0	7,4	12,0	18,0

Предполагая, что между переменными X и Y существует квадратичная зависимость $y = ax^2 + bx + c$, найдите методом наименьших квадратов эмпирическую формулу этой зависимости.

35. Имеются следующие данные о переменных X и Y , где X – цена на товар (усл. ед.), а Y – уровень продаж (тыс. ед.):

x_i	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
y_i	200	160	120	90	80

Предполагая, что между переменными X и Y существует линейная зависимость $y = ax + b$, найдите методом наименьших квадратов эмпирическую формулу этой зависимости.

36. Задача 35 при условии, что X – мощность двигателя (л. с.), а Y – средний срок его эксплуатации:

x_i	30	40	50	60	70
y_i	18	20	21	24	80

7. Аксиоматический метод.

Общие вопросы

Аксиоматический метод – это способ построения научной теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые аксиомами теории, а все остальные предложения теории получаются как логические следствия аксиом. В математике аксиоматический метод впервые встречается в работах древнегреческих геометров. Блестящим, остававшимся единственным вплоть до XIX в. образцом применения аксиоматического метода была геометрическая система, известная под названием «Начала» Евклида.

Суть аксиоматического построения науки, в том числе и геометрии, заключается в следующем.

1) Дается перечень основных понятий (основных объектов) и основных отношений между ними.

2) Указывается набор аксиом – предложений, принимаемых без доказательства, которые описывают свойства основных понятий и отношений между ними.

3) Строится цепочка утверждений (теорем), каждое из которых доказывается с использованием лишь аксиом и ранее доказанных теорем.

4) Вводятся новые понятия, определяемые через уже известные понятия.

*Предложение, устанавливающее смысл нового термина, раскрывающее содержание нового понятия через известные уже понятия, называется **определением**.*

Итак, при аксиоматическом построении какой-либо теории весь материал этой теории (например, геометрической) расчленяется на ряд точно сформулированных предложений, которые носят название *аксиом, теорем и определений*.

Сущность **доказательства** заключается в том, что данное утверждение *путем логических умозаключений выводится* как логическое следствие других предложений, справедливость которых считается уже установленной.

Понятно, что процесс сведения новых предложений к ранее доказанным утверждениям не может быть бесконечным: он неизбежно приводит к предложениям, которые нельзя логически

обосновать ссылкой на другие предложения. Именно такие предложения принимаются без доказательства, считаются основой логического вывода всех прочих предложений и называются *аксиомами*.

Также следует заметить, что каждый раз, когда вводится новый термин, обозначающий новое понятие, необходимо разъяснить точный смысл этого термина, раскрыть содержание вновь вводимого понятия через знакомые уже понятия.

При помощи определения новое понятие сводится к ранее известным, более простым или более общим понятиям. Процесс сведения одних понятий к другим, ранее определенным, в конце концов неизбежно ведет к понятиям, которые уже не могут быть без ошибки сведены к другим понятиям.

Понятия, принимаемые в теории без определений, называются основными, или первоначальными, все прочие – производными.

Всякая система аксиом, которая претендует быть основанием какой-либо научной теории, должна удовлетворять определенным требованиям. Она должна быть **1) непротиворечивой (или совместной); 2) независимой или минимальной; 3) полной.**

Определение 1. Система аксиом называется *непротиворечивой*, если из нее не могут быть выведены какие-либо два взаимно исключающие друг друга утверждения.

Доказательство непротиворечивости системы аксиом сводится к доказательству существования хотя бы одной модели (интерпретации) этой системы.

Модель, или интерпретация системы аксиом – это совокупность таких объектов и отношений между ними, для которых выполняются все сформулированные аксиомы. Для построения модели, как правило, выбираются объекты и отношения, для которых противоречия считаются невозможными.

Определение 2. Система аксиом называется *независимой*, если каждая ее аксиома не зависит от остальных ее аксиом, т. е. не может быть получена как логическое следствие остальных.

Чтобы доказать, что некоторая аксиома *A* не является логическим следствием остальных аксиом системы, надо найти такую интерпретацию, в которой реализуются все аксиомы данной системы, кроме аксиомы *A*.

Определение 3. Непротиворечивая система аксиом называется *полной*, если она не может быть пополнена никаким новым предложением относительно понятий данной теории, которое бы не следовало из имеющихся аксиом и им не противоречило.

Чтобы доказать полноту системы аксиом, надо доказать, что между всеми ее интерпретациями можно установить взаимно однозначное соответствие (то есть изоморфизм).

Существуют разные наборы аксиом для построения *евклидовой геометрии*. Одна из наиболее известных аксиоматик евклидовой геометрии – это система аксиом Гильберта, которая содержит 5 групп аксиом:

- I. Аксиомы *принадлежности* или аксиомы *соединения*;
- II. Аксиомы *порядка*;
- III. Аксиомы *конгруэнтности*;
- IV. Аксиомы *непрерывности*;
- V. Аксиома *параллельности*.

Основные понятия в этой аксиоматике: 1) *точки*, 2) *прямые*, 3) *плоскости*;

Основные отношения между неопределяемыми объектами выражаются словами:

- 1) «*принадлежать*» или «*лежать на*», «*проходить через*»;
- 2) «*лежать между*» (для точек);
- 3) «*конгруэнтный*» или «*равный*»;
- 4) «*непрерывность*»;
- 5) «*параллельность*».

Рассмотрим аксиомы первой группы, которые связывают между собой основные понятия: точки, прямые и плоскости.

Аксиомы принадлежности (связи)

I₁. Для любых двух точек *A* и *B* существует прямая *a*, проходящая через каждую из этих двух точек.

I₂. Для любых двух точек *A* и *B* существует не более одной прямой, проходящей через каждую из этих двух точек.

I₃. На всякой прямой существуют, по крайней мере, две точки. Существуют, по крайней мере, три точки, не лежащие на одной прямой.

I₄. Для любых трех точек *A*, *B*, *C*, не лежащих на одной и той же прямой, существует плоскость *α*, проходящая через каждую из этих трех точек. Каждой плоскости принадлежит, по меньшей мере, одна точка.

I₅. Для любых трех точек A, B, C , не лежащих на одной и той же прямой, существует не более одной плоскости α , проходящей через каждую из этих трех точек.

I₆. Если две точки A и B прямой a лежат в плоскости α , то и каждая точка этой прямой a лежит в плоскости α .

I₇. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют, по крайней мере, еще одну общую точку.

I₈. Существуют, по меньшей мере, четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.

Задачи

Опираясь на аксиомы первой группы, докажите следующие предложения.

1. Две прямые, лежащие в одной плоскости, имеют либо одну общую точку, либо не имеют общих точек.

2. Две различные плоскости либо не имеют общих точек, либо пересекаются по прямой.

3. Плоскость и не лежащая на ней прямая либо не имеют общих точек, либо имеют одну общую точку.

4. Через прямую и не лежащую на ней точку, так же как и через две прямые, имеющие общую точку, всегда можно провести плоскость и притом только одну.

5. Докажите непротиворечивость аксиом системы, состоящей из первых трех аксиом первой группы.

Вторая группа аксиом: аксиомы порядка

II₁. Если точка B лежит между точками A и C (рис. 1), то A, B, C – три различные точки прямой, и точка B лежит также между точками C и A .

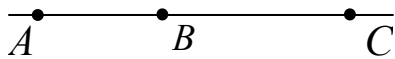


Рис. 1



Рис. 2

II₂. Для любых двух точек A и C , существует, по крайней мере одна точка B (рис. 2) на прямой (AC) такая, что точка C лежит между точками A и B .

II₃. Среди любых трех точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

Чтобы сформулировать следующую аксиому, введем понятие отрезка.

Определение 4. Отрезком называется система, состоящая из двух точек A и B . Точки A и B называются концами отрезка. Точки, лежащие между A и B , называются точками отрезка или внутренними его точками, остальные точки прямой (AB) называются внешними по отношению к отрезку.

Обозначают отрезок символом $[AB]$.

II₄ (Аксиома Паша). Пусть A, B, C – три точки, не лежащие на одной прямой, и a – прямая в плоскости (ABC) , не проходящая ни через одну из точек A, B, C . Тогда если прямая a проходит через одну из точек отрезка $[AB]$, то она проходит также или через одну из точек отрезка $[AC]$, или через одну из точек отрезка $[BC]$.

Задачи

6. Докажите, что каковы бы ни были две точки A и C , существует, по крайней мере, одна точка B на прямой (AC) , лежащая между A и C .

7. Докажите, что среди любых трех точек одной прямой одна и только одна точка лежит между двумя другими.

8. Докажите, что если $B \in [AC]$ и $C \in [BD]$, то B и C лежат на $[AD]$.

9. Докажите, что между любыми двумя точками прямой существует бесконечное множество других ее точек.

Особую роль в развитии аксиоматического метода сыграла пятая группа аксиом, состоящая из одной аксиомы, называемой аксиомой параллельности и выражающей отличие евклидовой геометрии от геометрии Лобачевского.

Аксиома параллельности евклидовой геометрии

V. Пусть a – произвольная прямая и A – точка, не лежащая на ней. Тогда в плоскости, определяемой прямой a и точкой A , существует не более одной прямой, которая проходит через точку A и не пересекает прямую a (**аксиома Плейфера**).

Следует заметить, что геометрию, построенную на аксиомах групп I–IV, называют *абсолютной геометрией*. Эту геометрию составляют все предложения школьного курса геометрии, которые доказываются без помощи аксиомы параллельности.

На основе **аксиом всех пяти групп** изучаются свойства параллельных прямых по Евклиду, доказываются теоремы о сумме углов треугольника и выпуклого многоугольника, изучаются свойства параллелограммов и трапеций, строится теория подобия и т. д. Также аксиомы групп I–V позволяют обосновать тригонометрию, изучаемую в средней школе, и координатный метод в геометрии. В частности, теорема Пифагора, для доказательства которой необходимо использовать аксиому V, позволяет вывести формулу для вычисления расстояния между двумя точками по координатам этих точек и решать большое число задач аналитической геометрии.

Первая неевклидова геометрия была построена русским математиком, профессором Казанского университета Николаем Ивановичем Лобачевским.

Н. И. Лобачевский родился 2 декабря 1792 г. в Нижнем Новгороде. С 1802 по 1807 г. учился в Казанской гимназии, с 1807 по 1811 г. состоял студентом незадолго до того основанного Казанского университета, с 1814 г. – адъюнкт, с 1816 г. – профессор того же университета, с 1827 по 1846 г. – его ректор. С 1846 по 1855 г. – помощник попечителя Казанского учебного округа. Скончался Н. И. Лобачевский 24 февраля 1856 г.

В течение первых лет преподавательской деятельности в Казанском университете Н. И. Лобачевский настойчиво пытался доказать V постулат Евклида: «Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, в сумме меньшие двух прямых углов, то эти две прямые пересекаются с той стороны, где сумма углов меньше двух прямых». (Заметим, что это предложение равносильно аксиоме параллельности.) Неудача этих попыток привела его к выводу, что V постулат Евклида нельзя вывести из остальных аксиом. Лобачевский отвергает этот постулат и заменяет его следующим утверждением.

V* (аксиома Лобачевского). Пусть даны прямая a и точка A , не лежащая на ней. Тогда в плоскости, проходящей через прямую a и точку A , существует не менее двух прямых, проходящих через точку A и не пересекающих прямую a .

Используя эту аксиому и аксиомы абсолютной геометрии, то есть все остальные аксиомы геометрии, кроме аксиомы параллельности евклидовой геометрии, Лобачевский чисто логически

строит новую геометрию, которую называет «воображаемой» (позднее ее стали называть *геометрией Лобачевского*).

Укажем некоторые факты геометрии Лобачевского. Не надо удивляться, что эти предложения противоречат известным теоремам Евклида. Ведь геометрия Лобачевского отражает свойства поверхности, отличной от евклидовой плоскости. Поверхность, на которой выполняется созданная Лобачевским геометрия, самому ему была неизвестна, она открыта только после его смерти.

Теорема 1. Во всяком треугольнике сумма внутренних углов меньше $2d$.

Теорема 2. Во всяком выпуклом четырехугольнике сумма внутренних углов меньше $4d$.

Теорема 3. Сумма углов треугольника непостоянна, т. е. не одна и та же для всех треугольников.

Теорема 4. Если три угла одного треугольника соответственно равны (конгруэнтны) трем углам другого треугольника, то эти треугольники равны (4-й признак равенства треугольников).

Теорема 5. Через каждую точку A , не лежащую на прямой a , в плоскости, определяемой этой прямой и точкой, можно провести в точности две прямые, параллельные данной прямой a .

Теорема 6. На плоскости существуют треугольники, около которых нельзя описать окружность.

Теорема 7. Внутри любого острого угла существуют точки, через которые нельзя провести прямую, одновременно пересекающую обе стороны этого угла.

Теорема 8. Расстояние от точек одной из параллельных прямых до другой в одну сторону неограниченно убывает, а в другую сторону неограниченно растет.

Результаты Лобачевского оказались настолько необычными для умов, воспитанных на идеях геометрии Евклида, что не были поняты большинством из его современников.

Примерно в одно время с Н. И. Лобачевским (первая половина XIX в.) к открытию неевклидовой геометрии подошли немецкий математик К. Гаусс и венгерский ученый Я. Бойяи.

Задачи

10. Есть ли в реальном мире точки, прямые, плоскости?

11. В чем отличие аксиом от теорем?

12. Почему аксиомы не доказываются?

13. Существуют ли для одной и той же теории разные наборы аксиом?

14. Можно ли вместо одних основных неопределяемых понятий взять другие?

15. В чем отличие в аксиоматических построениях геометрии Евклида и геометрии Лобачевского?

16. Что называется моделью аксиоматической теории?

17. Взяв в качестве точек вершины треугольной пирамиды, сформулируйте несколько возможных аксиом евклидовой геометрии треугольной пирамиды.

18. Постройте какую-нибудь модель следующей системы аксиом.

Даны объекты первого и второго рода и отношение «объект 1-го рода принадлежит объекту 2-го рода», удовлетворяющие следующим аксиомам:

- 1) существуют, по крайней мере, 3 объекта 1-го рода;
- 2) каждому объекту 2-го рода принадлежат в точности два объекта 1-го рода.

19. Задача «Города и маршруты». Некоторая организация продает путевки путешествий по городам. В схему путешествий, по которым составляются маршруты, входят $n+1$ городов. Принципы составления маршрутов таковы:

- 1) для любых двух городов существует единственный маршрут, через них проходящий;
- 2) каждые два маршрута имеют общий город.

Возможно ли и при каких n построение такой схемы путешествий?

20. Добавьте к принципам составления схемы путешествий задачи 19 еще один: 3) не должно быть такого маршрута, который бы проходил через все города, кроме одного.

При таком добавлении: а) составьте схему путешествий для $n+1=7$; б) докажите, что для схемы путешествий, удовлетворяющей трем сформулированным выше принципам, справедливы следующие утверждения:

- 1) Если какой-нибудь маршрут содержит $q+1$ город, то и всякий маршрут содержит $q+1$ город;
- 2) каждый город входит в $q+1$ маршрут;

3) существуют 4 города, никакие 3 из которых не принадлежат одному маршруту.

В предложениях 2 и 3 предполагается, что выполнено утверждение 1.

21. Группа, состоящая из $n+1$ ученика, участвует в дежурствах. График дежурств составлен по следующим правилам:

1) любые два ученика должны участвовать в единственном общем дежурстве;

2) в любых двух дежурствах есть общий ученик;

3) нет дежурств, в которых принимает участие n учеников.

Составьте график дежурств для группы из $n+1=7$ учеников.

Вывод из задач 19–21. Задачи 19–21 представляют собой модели одной абстрактной аксиоматической системы (обозначим ее символом I).

Если *основные объекты* этой системы назвать *точками и прямыми*, а *основное отношение* между ними – *отношением инцидентности* или *принадлежности*, то эту систему аксиом составляют следующие предложения:

I_1 . Для любых двух различных точек A и B существует единственная прямая a , им инцидентная (принадлежащая каждой из этих двух точек).

I_2 . Для любых двух различных прямых существует точка, им инцидентная.

I_3 . Существует, по крайней мере, одна прямая. Не существует прямой, инцидентной всем точкам за исключением одной.

22. Докажите, что из этой системы аксиом вытекают следующие предложения – теоремы:

1) любые две различные прямые имеют одну и только одну общую точку;

2) существуют такие 4 точки, что всевозможные пары из них определяют 6 различных прямых;

3) существуют 4 различные прямые, из которых никакие 3 не имеют общей точки;

4) всякая прямая имеет, по меньшей мере, 3 точки; всякая точка принадлежит, по меньшей мере, трем прямым.

8. Применение математического моделирования к решению некоторых практических задач

Модель в широком смысле слова – это любой образ (мысленный или условный: изображение, описание, схема, чертеж, график, план, карта и т. п.) какого-либо объекта, процесса или явления, который используется в качестве его «заместителя», «представителя».

Математическая модель – это приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математического языка и математической символики.

Процесс математического моделирования, который сводит исследование реальных явлений к математическим задачам, занимает ведущее место среди других методов исследования, особенно с появлением компьютеров. Он позволяет проектировать новые технические средства, работающие в оптимальных режимах, решать сложные задачи науки и техники, проектировать новые явления. Это – мощный метод познания реальности, метод прогнозирования и управления, позволяющий проникнуть в сущность изучаемых процессов и явлений.

В настоящее время математическое моделирование столь широко применяется в различных областях человеческой деятельности, что многие математики считают, что современную математику надо в первую очередь понимать как теорию математических моделей.

Процесс математического моделирования можно разбить на четыре этапа.

Первый этап – формулировка проблемы (задачи) и исследование свойств объекта моделирования. Этот этап завершается записью в математических терминах сформулированных качественных представлений об изучаемом объекте или явлении.

Второй этап – исследование математических задач, которые получены на первом этапе. Здесь основным вопросом является решение прямой задачи. На этом этапе важную роль приобретают математический аппарат и вычислительная техника. Следует заметить, что одна и та же математическая модель может описывать свойства далеких друг от друга по своему конкретному со-

держанию реальных ситуаций. Примером может служить рассмотренная ниже *основная задача линейного программирования*. Это дает возможность исследовать возникающие таким образом математические задачи как самостоятельный объект, отвлекаясь от явлений, которые к ним привели.

Третий этап – выяснение того, насколько согласуется полученный математический результат со свойствами изучаемого реального объекта, процесса или явления.

Четвертый этап – корректировка (модернизация) модели в зависимости от глубины изучения моделируемых объектов.

Простейшие задачи на построение математических моделей встречаются уже в школьной математике, например при решении текстовых задач, построении чертежей в геометрии, эскизов графиков функций, использовании графов для решения вероятностных задач. Некоторые математические модели нами уже рассмотрены в предыдущих главах:

- использование кругов Эйлера (1.2.1);
- применение алгебры высказываний к исследованию функционирования контактных схем и их упрощению (2.2.3);
- решение практических задач с помощью составления логических уравнений и исследования формул логики на истинность (2.2.1);
- применение производных и интегралов к решению задач из сферы экономики и социологии (п. 3.3.3 и п. 3.4);
- матричная алгебра в экономике (4.2) и матричные модели в теории игр (4.3.);
- модели аксиоматических теорий (глава 7 задачи 19–22).

В данной главе рассматриваются математические модели широко известных практических задач.

8.1. Задача линейного программирования

Задачей линейного программирования называют задачу отыскания оптимума (максимума или минимума) заданной линейной функции от нескольких переменных, если ее аргументы удовлетворяют системе линейных уравнений или неравенств. Математическая формулировка этой задачи выглядит следующим образом.

[illegible]

Решение $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ системы ограничений, при котором функция цели z достигает своего наибольшего (наименьшего) значения, называется *оптимальным*.

[illegible]

245

Из условия задачи ясно, что $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

Прибыль от реализации продукции выражается функцией $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$.

Требуется найти такие неотрицательные значения переменных x_1, x_2, \dots, x_n , при которых функция $z = \sum_{j=1}^n c_jx_j$ достигает наибольшего значения.

Заметим, что если использовать все имеющиеся запасы ресурсов, то неравенства в системе ограничений обращаются в равенства.

Задачи

1. Для изготовления изделий № 1 и № 2 склад может отпустить металла не более 80 кг, причем на одно изделие № 1 расходуется 2 кг, а на изделие № 2 – 1 кг металла. Требуется спланировать производство так, чтобы была обеспечена наибольшая прибыль, если изделий № 1 требуется изготовить не более 30 шт., а изделий № 2 – не более 40 шт., причем одно изделие № 1 стоит 5 руб., а № 2 – 3 руб.

Решение. Составим математическую модель задачи. В качестве переменных здесь выступает план выпуска изделий. Пусть спланировано выпустить изделий № 1 x_1 шт., а изделий № 2 – x_2 шт. По условию задачи $0 \leq x_1 \leq 30, 0 \leq x_2 \leq 40$. На изготовление всех изделий металла потребуется $2x_1 + x_2$ кг. По условию запасы металла составляют 80 кг, поэтому должно выполняться условие $2x_1 + x_2 \leq 80$. Прибыль от реализации всех изготовленных изделий составит $z = 5x_1 + 3x_2$ рублей. Итак, получена математическая модель этой конкретной задачи.

Найти такие решения системы
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 80, \\ 0 \leq x_1 \leq 30, \\ 0 \leq x_2 \leq 40, \end{cases}$$
 при которых

функция $z = 5x_1 + 3x_2$ принимает наибольшее значение. Для решения задачи используем графический метод. Для этого на координатной плоскости (x_1, x_2) изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют заданной системе неравенств (рис. 1). Решением системы является заштрихованный пятиугольник. В каждой точке плоскости (x_1, x_2) функция $z = 5x_1 + 3x_2$ принимает

конкретное значение z_0 . Множество точек, для которых $5x_1 + 3x_2 = z_0$, есть прямая линия, проходящая перпендикулярно вектору $\vec{n}(5,3)$. Рассмотрим прямую $5x_1 + 3x_2 = 0$. Если эту прямую передвигать параллельно самой себе в направлении нормального вектора $\vec{n}(5,3)$, то значения функции z будут возрастать.

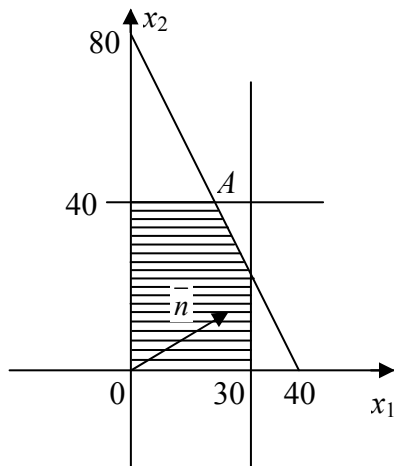


Рис. 1

Вершина, в которой прямая при движении в направлении вектора $\vec{n}(5,3)$ впервые встретится с многоугольником решений, будет точкой, в которой функция цели принимает наименьшее значение. Последняя общая вершина движущейся прямой и многоугольника (точка выхода) – точкой, в которой функция цели принимает наибольшее значение. В нашей задаче искомой точкой будет точка $A(20, 40)$. В ней $z = 220$.

Таким образом, чтобы получить максимальную прибыль предприятие должно выпустить 20 изделий первого типа и 40 изделий второго типа. Прибыль при этом составит 220 рублей.

2. Производственная мощность цеха сборки составляет 120 изделий типа A и 360 изделий типа B в сутки. Технический контроль пропускает в сутки 200 изделий того или другого типа (безразлично). Изделия типа A вчетверо дороже изделий типа B . Требуется спланировать выпуск готовой продукции так, чтобы предприятию была обеспечена максимальная прибыль от этого цеха.

Решение. Пусть по плану надо выпустить x_1 изделий типа A и x_2 изделий типа B . По условию $x_1 + x_2 = 200$ и $0 \leq x_1 \leq 120$, $0 \leq x_2 \leq 360$. Получили систему ограничений. Пусть цена реализации одного изделия типа B составляет 1 ден. ед. Тогда для изделия типа A она составляет 4 ден. ед. Прибыль от реализации всех изготовленных по плану изделий составит в итоге $z = 4x_1 + x_2$ ден. ед. Требуется, чтобы значение z было максимальным. Получили задачу линейного программирования. Решите ее графически самостоятельно.

3. Составить математическую модель следующей задачи.

Найти оптимальное распределение двух видов механизмов, имеющих в количествах $a_1 = 45$, $a_2 = 20$ между тремя участками

работ, потребности которых соответственно равны $b_1 = 10$, $b_2 = 20$, $b_3 = 30$ при следующей матрице производительности каждого из механизмов на соответствующем участке работы: $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

4. Для изготовления изделий № 1 и № 2 имеется 100 кг металла. На изготовление изделия № 1 расходуется 2 кг, а на изделие № 2 – 4 кг металла. Составить план производства, обеспечивающий наибольшую выручку от продажи изделий, если отпускная стоимость одного изделия № 1 составляет 3 руб., а изделия № 2 – 2 руб., причем требуется изготовить изделий № 1 не более 40 шт., а изделий № 2 – не более 20 шт.

5. Производственная мощность завода позволяет производить за месяц 200 электродвигателей типа A и 600 электродвигателей типа B . Определите, сколько электродвигателей каждого типа должен производить завод для достижения максимальной прибыли, если: 1) двигатели обоих типов имеют одинаковую цену; 2) цена на двигатель типа A в три раза больше цены двигателя типа B ; 3) цены на двигатели типов A и B относятся как 9:2.

6. Автомобильный завод выпускает автомобили типов A и B . Производственные мощности отдельных цехов или отделов приведены в следующей таблице.

Наименование цехов или участков		Количество машин за год	
		Типа A	Типа B
1	Подготовка производства автомобилей	125	110
2	Кузовной	80	320
3	Производство шасси	110	110
4	Производство двигателей	240	120
5	Сборочный	160	80
6	Участок испытаний	280	70

Определите наиболее рентабельную производственную программу в следующих случаях: 1) прибыли от выпуска одной машины типов A и B соответственно равны 200 000 и 600 000 рублей; 2) выпуск одной машины A приносит прибыль в 2 раза меньшую, чем выпуск одной машины B ; 3) в задаче 1) производственная программа ограничена сверху условиями: машин типа A не более 50, а машин типа B не более 60.

7. Из города A в город B ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. В таблице указаны наличный парк вагонов разных типов, из которых ежедневно можно комплектовать данные составы, и количество пассажиров, вмещающихся в каждый из вагонов.

Поезда	Вагоны				
	багажный	почтовый	плацкарта	купейный	мягкий
Скорый	1	1	5	6	3
Пассажирский	1	–	8	4	1
Число пассажиров	–	–	58	40	32
Парк вагонов	12	8	81	70	26

Определите оптимальное число скорых и пассажирских поездов, при которых число перевозимых пассажиров достигает максимума.

8. Решите задачу 7, если пропускная способность дороги не позволяет в день пройти более, чем 6 пассажирским поездам.

2. Задачи о смесях

9. При составлении суточного рациона кормления скота можно использовать свежее сено (не более 50 кг) и силос (не более 85 кг). Рацион должен обладать определенной питательностью (число кормовых единиц не менее 30) и содержать следующие питательные вещества: белок (не менее 1 кг), кальций (не менее 100 г) и фосфор (не менее 80 г). В таблице приведены данные о содержании указанных компонентов в 1 кг каждого продукта питания и себестоимости (руб./кг) этих продуктов:

Компоненты	Количество кормовых единиц	Белок г/кг	Кальций г/кг	Фосфор г/кг	Себестоимость руб./кг
Корма					
Сено свежее	0,5	40	1,25	2	1,2
Силос	0,5	10	2,5	1	0,8

Определите оптимальный рацион из условия его минимальной стоимости.

10. Составьте математическую модель следующей задачи.

Животноводческая ферма составляет рацион кормления коров на зиму. Имеются два научно разработанных рациона A и B и произвольный рацион C следующих составов:

Рацион A	Не менее 40% кукурузного силоса, не более 40% кормовых трав
Рацион B	Не менее 30% кукурузного силоса, не более 50% кормовых трав
Рацион C	Корм без ограничения

Исходя из заготовок кормов, установлены следующие предельные нормы расхода каждого продукта: кукурузного силоса – 200 ц, кормовых трав – 300 ц. Какое количество каждого из рационов должна составить ферма, чтобы получить максимальную прибыль, если при рационе A она составляет 1000 руб./ц, при рационе B – 1200 руб./ц, а при рационе C – 500 руб./ц?

11. Для кормления подопытного животного ему необходимо давать ежедневно не менее 15 ед. химического вещества A_1 (витамина или некоторой соли) и 15 ед. химического вещества A_2 . Не имея возможности давать эти вещества в чистом виде, можно приобретать вещество B_1 по 10 руб. или вещество B_2 по 30 руб. за 1 кг. Каждый килограмм B_1 содержит 1 ед. вещества A_1 и 5 ед. вещества A_2 , а килограмм B_2 содержит 5 ед. вещества A_1 и 1 ед. вещества A_2 . Определите оптимальное содержание веществ B_1 и B_2 в ежедневном рационе.

3. Задачи о раскрое

12. Для изготовления брусьев двух размеров – 0,6 м и 1 м – в соотношении 2:1 на распил поступают бревна длиной в 2 м. Определить план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов.

13. Составьте математическую модель следующей задачи.

Произвести распил 5-метровых бревен на брусья размерами 1,5; 2,4 и 3,2 м в отношении 2:3:5 так, чтобы минимизировать общую величину отходов.

14. Составьте математическую модель следующей задачи.

Полуфабрикаты поступают на предприятие в виде листов фанеры. Всего имеется две партии материала, причем первая партия содержит 400 листов, а вторая – 250 листов фанеры. Из поступающих листов фанеры необходимо изготовить комплекты,

включающие 4 детали 1-го типа, 3 детали 2-го типа и 2 детали 3-го типа. Лист фанеры каждой партии может раскраиваться разными способами.

Количество деталей каждого типа, которое получается при раскрое одного листа соответствующей партии по тому или иному способу раскроя, представлено в следующей таблице.

Детали	Первая партия				Вторая партия		
	Способ распила	1	2	3	Способ распила	1	2
1	1	0	6	9	1	6	5
2	2	4	3	4	2	5	4
3	3	10	16	0	3	8	0

Требуется раскроить материал так, чтобы обеспечить изготовление максимального числа комплектов.

8.2. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Пусть x_i – объемы валового продукта i -й отрасли, y_i – объемы конечного продукта этой отрасли, то есть объемы продукта, идущие на потребление вне производства. Если обозначить через x_{ij} объем продукции i -й отрасли, потребляемый j -й отраслью в процессе производства ($i = 1, 2, \dots, n$), то должны выполняться следующие соотношения

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Уравнения (1) называются соотношениями баланса.

Соотношения баланса можно записать в несколько другом виде, если ввести в рассмотрение коэффициенты прямых затрат

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

которые показывают затраты продукции i -й отрасли на производство единицы продукции j -й отрасли.

В этом случае они будут выглядеть так

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

Уравнения (3) можно записать в матричной форме

$$X = A \cdot X + Y, \quad (4)$$

или

$$(E - A)X = Y, \quad (5)$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Здесь X – вектор валового выпуска, A – матрица коэффициентов прямых затрат, Y – вектор конечного продукта.

Основная задача межотраслевого баланса заключается в том, чтобы найти такой вектор валового выпуска X , который при заданной матрице A коэффициентов прямых затрат обеспечивает вектор конечного продукта.

Из матричного уравнения (5) вектор X находится по формуле

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y.$$

Матрица $S = (E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат*.

Ее элементы s_{ij} показывают величину валового выпуска продукции i -й отрасли, необходимой для обеспечения выпуска единицы конечного продукта j -й отрасли.

Заметим, что конечный продукт в каждой отрасли производства называют также *чистой продукцией*. *Чистая продукция* – это разность между валовой продукцией этой отрасли и затратами продукции всех отраслей на производство этой отрасли.

Задачи

15. Производство состоит из двух отраслей. Известна матрица коэффициентов прямых затрат и вектор конечной продукции этого производства на плановый период (в усл. ден. ед.):

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

Найдите а) плановые объемы валовой продукции отраслей и межотраслевые поставки; б) Приращение вектора ΔX для увеличения выпуска конечной продукции на вектор $\Delta Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Решение. а) выпишем матрицу

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 1 - 0,1 & -0,5 \\ -0,3 & 1 - 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,5 \\ -0,3 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица полных затрат

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{100}{57} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{80}{57} & \frac{50}{57} \\ \frac{30}{57} & \frac{90}{57} \end{pmatrix}.$$

Вектор валового продукта X найдем по формуле $X = (E - A)^{-1} \cdot Y$:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{80}{57} & \frac{50}{57} \\ \frac{30}{57} & \frac{90}{57} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

Межотраслевые поставки x_{ij} находятся по формулам $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$.

Поэтому $x_{11} = 0,1 \cdot 1000 = 100$, $x_{12} = 0,5 \cdot 1000 = 500$, $x_{21} = 0,3 \cdot 1000 = 300$, $x_{22} = 0,2 \cdot 1000 = 200$.

б) Вектор конечного продукта после увеличения на $\Delta Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$ будет равен $Y = \begin{pmatrix} 500 \\ 550 \end{pmatrix}$. Для этого вектора вектор валового выпуска будет равен $X = \begin{pmatrix} \frac{80}{57} & \frac{50}{57} \\ \frac{30}{57} & \frac{90}{57} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 550 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1184 \\ 1132 \end{pmatrix}$. Таким образом, производство валового продукта по отраслям должно вырасти на 184 и 132 ед.

16. В таблице приведены коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей на плановый период (в усл. ден. ед.).

Отрасль		Потребление		Конечный продукт
		Промышленность	Сельское хозяйство	
Производство	Промышленность	0,3	0,25	300
	Сельское хозяйство	0,15	0,12	100

Найдите:

а) плановые объемы валовой продукции отраслей, межотраслевые поставки, чистую продукцию отраслей;

б) необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление продукции сельского хозяйства увеличится на 20%, а промышленности – на 10%.

17. Работа системы, состоящей из двух отраслей, в течение некоторого периода характеризуется следующими данными (усл. ден. ед.).

Отрасль	Потребление		Чистая продукция
	I	II	
I	100	160	240
II	275	40	85

Вычислите матрицу прямых затрат.

18. Имеются данные о работе системы из двух отраслей в прошлом периоде и план выпуска конечной продукции Y_1 в будущем периоде.

Отрасль	Потребление		Чистая продукция	План Y_1
	I	II		
I	80	120	300	350
II	70	30	200	300

Найдите матрицы прямых и полных затрат, а также выпуск валовой продукции в плановом периоде, обеспечивающий выпуск конечного продукта Y_1 .

19. Дана матрица коэффициентов $S = \begin{pmatrix} 1,125 & 0,125 \\ 0,125 & 1,125 \end{pmatrix}$ полных затрат и вектор конечного продукта $Y = \begin{pmatrix} 80 \\ 80 \end{pmatrix}$. Найдите вектор валового выпуска и матрицу прямых затрат.

8.3. Линейная модель обмена (модель международной торговли)

Линейная модель обмена позволяет найти национальные доходы стран (или их соотношение) для сбалансированной торговли.

Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор национальных доходов стран S_1, S_2, \dots, S_n , а $A_{n \times n} = (a_{ij})$ – структурная матрица торговли; элемент a_{ij} этой матрицы равен доле национального дохода, которую страна S_j тратит на покупку товаров у страны S_i , причем $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$.

Для сбалансированной торговли необходимо найти такой равновесный вектор национальных доходов \vec{x} , чтобы $A \cdot X = X$; здесь X – матрица-столбец координат вектора \vec{x} .

Уравнение $A \cdot X = X$ равносильно матричному уравнению $(A - E) \cdot X = 0$, которое представляет собой матричную запись однородной системы линейных уравнений с основной матрицей $A - E$.

Задачи

20. Найдите соотношение национальных доходов трех стран для сбалансированной торговли, если задана структурная матрица A торговли:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,5 & 0,7 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}; \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & 1/3 \\ 0,5 & 0,5 & 1/3 \\ 0,5 & 0,25 & 1/3 \end{pmatrix}, \text{ в) } A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,8 \\ 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Решение. а) Решим систему уравнений } \left(\begin{array}{ccc|c} -0,7 & 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,4 & -0,5 & 0,7 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & -0,9 & 0 \end{array} \right)$$

методом Гаусса. Решением является вектор $\vec{x} = (2c, 3c, c)$, где c принимает любое значение. Результат означает, что сбалансированность торговли трех стран достигается при условии, что их национальные доходы соотносятся как 2:3:1.

21. Найдите равновесный вектор национальных доходов в модели международной торговли для заданной структурной матрицы A , если известно, что суммарный доход этих стран равен 402 усл. ден. ед.:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,5 & 0,7 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}; \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,5 \\ 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}; \text{ в) } A = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/10 & 1/10 \\ 1/10 & 2/5 & 3/10 \\ 1/2 & 3/10 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

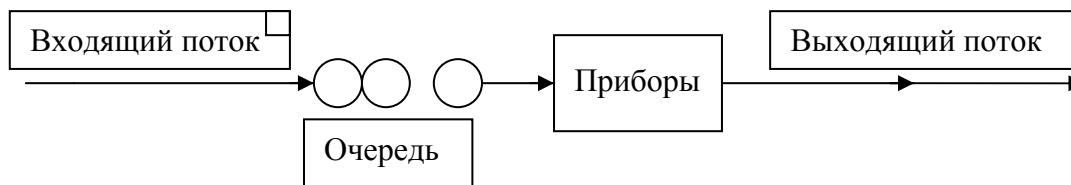
8.4. Модель задачи из теории массового обслуживания

Теория массового обслуживания – раздел прикладной математики, в котором изучаются свойства систем массового обслуживания (СМО) с целью повышения эффективности их работы.

Система массового обслуживания – это совокупность взаимосвязанных объектов (приборов), предназначенная для обслуживания заявок (требований), поступающих в систему в случайные моменты времени. При этом не только моменты поступления заявок в систему, но и длительность обслуживания каждой заявки представляют собой случайные величины.

Наиболее распространенными примерами таких систем являются билетные кассы, системы связи, АЗС, сервисные центры, ремонтные мастерские, аудиторские фирмы, телефонные станции, банки, службы скорой помощи и такси, компьютерные сети и т. д.

Условно СМО можно изобразить в виде следующей схемы.



Входящий поток – это поток требований, поступающих в систему, а *выходящий поток* – покидающих систему.

Входящий поток называют *простейшим*, если выполняются следующие три свойства:

- 1) в каждый момент времени в систему не может поступить более одной заявки,
- 2) вероятность числа заявок, поступающих за данный промежуток времени, зависит только от длины этого промежутка и не зависит от места его расположения на оси времени,
- 3) вероятность числа заявок, поступающих в систему за данный промежуток времени, не зависит от числа заявок поступивших в нее в предыдущие промежутки времени.

Состоянием СМО в данный момент называют общее число требований (заявок), находящихся в системе в этот момент. Тогда система может иметь следующие состояния:

- E_0 – в системе нет заявок,

- E_1 – в системе 1 заявка,
- E_2 – в системе 2 заявки и т. д.

Таким образом, символ $E_k(t)$ обозначает событие, состоящее в том, что в системе в момент t есть k заявок. Пусть $p_k(t)$ – вероятность того, что в момент t система находится в состоянии $E_k(t)$.

Про систему говорят, что она функционирует в стационарном режиме, и если вероятность p_k ее пребывания в состоянии E_k есть величина, зависящая только от числа k и не зависящая от момента рассмотрения функционирования системы и длительности нахождения системы в состоянии E_k .

Рассмотрим систему, которая функционирует в стационарном режиме и имеет простейший поток со средней *интенсивностью*, равной λ (*интенсивность потока* – это среднее число заявок, поступающих в систему в единицу времени). Пусть в системе имеется один прибор, который в единицу времени в среднем обслуживает μ заявок (μ – средняя производительность прибора).

Если нет никаких дополнительных ограничений на длину очереди (или количество заявок в системе), то *система* называется *системой без потерь* (без ограничений) и в ней может находиться любое число заявок. Оказывается, что для такой системы имеют место следующие формулы:

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot p_0, \quad k > 0, \quad (6)$$

и

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}. \quad (7)$$

Поясним, как получается значение для p_0 . Поскольку СМО является системой без ограничений, то случайная величина E_k принимает бесконечно много значений и, следовательно, имеется бесконечно много значений вероятностей p_k , сумма которых равна 1: $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. В силу формулы для вычисления p_k , будем иметь

$$p_0 + \frac{\lambda}{\mu} p_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 + \dots = 1.$$

Отсюда $p_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right) = 1$, и так как сумма $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$ является

суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\frac{\lambda}{\mu}$ и таким же знаменателем, то p_0 находится из

$$\text{уравнения } p_0 \left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \right) = 1, \text{ и } p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}.$$

Отношение $\frac{\lambda}{\mu}$ обозначают символом ρ $\left(\frac{\lambda}{\mu} = \rho\right)$ и называют

коэффициентом использования системы. С введением этого коэффициента вероятности p_0 и p_k можно вычислять по формулам $p_0 = 1 - \rho$; $p_k = (1 - \rho) \rho^k$ ($k \geq 0$).

Указанные формулы позволяют составить закон распределения случайной величины E_k и найти основные характеристики системы.

Рассмотрим конкретные задачи.

Задачи

22. Пусть СМО функционирует в стационарном режиме, имеет один прибор со средней производительностью $\mu = 3$, при этом поток заявок, поступающих на обслуживание, считается пуассоновским, а его средняя интенсивность $\lambda = 2$ заявкам в минуту. Требуется определить: а) вероятность того, что в очереди будет более двух заявок; б) вероятность того, что в очереди ровно m заявок; в) вероятность того, что заявке не придется ждать своего обслуживания.

Решение. а) В очереди больше двух заявок тогда, когда в системе больше трех заявок (в этом случае наименьшее число заявок в системе образуется из двух заявок в очереди и одной заявки на приборе). Следовательно, искомая вероятность равна сумме вероятностей возможных состояний системы начиная с p_4 :

$$\sum_{k=4}^{\infty} p_k = (1 - \rho) \sum_{k=4}^{\infty} \rho^k.$$

Так как для функционирования (без «затоваривания») системы необходимо условие $\rho < 1$, то сумма $\sum_{k=4}^{\infty} \rho^k$ является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом ρ^4 и знаменателем ρ . Тогда $\sum_{k=4}^{\infty} p_k = (1-\rho) \frac{\rho^4}{1-\rho} = \rho^4$, и так как $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}$, то $p_{k \geq 4} = \frac{16}{81}$.

б) В очереди ровно m заявок тогда, когда в системе находятся $m+1$ заявка. Вероятность такого события $p_{m+1} = (1-\rho) \rho^{m+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}$.

в) Заявке не придется ждать в том случае, когда система пуста – в ней нет ни одной заявки. Следовательно, ответом является вероятность p_0 : $p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

23. Пусть система функционирует в режиме задачи 22, причем $\lambda = 1, \mu = 3$. Найдите вероятность того, что а) в очереди будет не более двух заявок; б) в очереди будет ровно 3 заявки; в) заявке не придется ждать.

Рассмотрим теперь СМО, которая функционирует в том же режиме, что и в предыдущих задачах, но с ограничениями (с потерями). Пусть число заявок в очереди не может быть более двух. Это означает, что в системе не может находиться более трех заявок и каждая четвертая заявка, приходящая в систему, получает отказ (теряется). В этом случае для вычисления вероятностей событий E_k при $k = 1, 2, 3$ также применяется формула (6), но вероятность p_0 находится иначе. В этом случае

$p_0 + \frac{\lambda}{\mu} p_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 = 1$ и, следовательно, $p_0 = \frac{1}{S_4}$, где S_4 – сумма четырех членов геометрической прогрессии, у которой первый член равен 1, а знаменатель $q = \frac{\lambda}{\mu}$.

24. Пусть СМО функционирует в стационарном режиме, имеет один прибор со средней производительностью $\mu = 3$, при этом поток заявок, поступающих на обслуживание, считается пуассоновским и его средняя интенсивность $\lambda = 2$ заявкам в минуту. Также предполагается, что очередь на обслуживание не может

превышать двух заявок. Требуется определить: а) вероятность того, что приходящая заявка получит отказ; б) среднее число заявок в очереди; в) среднее время ожидания.

Решение. Так как в очереди не может быть более двух заявок, то самое большее число заявок в системе – 3 (это число равно числу приборов + максимальное число заявок в очереди). Согласно основному свойству стационарного режима работы СМО,

$$p_1 = \frac{2}{3} p_0, p_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 p_0 = \frac{4}{9} p_0, p_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 p_0 = \frac{8}{27} p_0 \text{ и}$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = p_0 + \frac{2}{3} p_0 + \frac{4}{9} p_0 + \frac{8}{27} p_0 = 1.$$

Отсюда найдем, что $p_0 = \frac{27}{65}$. Теперь можно составить закон распределения случайной величины E_k ($k = 0, 1, 2, 3$):

E_k	0	1	2	3
p_k	$\frac{27}{65}$	$\frac{18}{65}$	$\frac{12}{65}$	$\frac{8}{65}$

а) Приходящая заявка получит отказ, если в системе 3 заявки, то есть если прибор занят и 2 заявки в очереди. Таким образом, вероятность этого события равна $p_3 = \frac{8}{65}$.

б) Среднее число заявок в очереди равно математическому ожиданию случайной величины:

$$N = M(E_k) = 0 \cdot \frac{27}{65} + 1 \cdot \frac{18}{65} + 2 \cdot \frac{12}{65} + 3 \cdot \frac{8}{65} = 1 \frac{1}{65}.$$

в) Среднее время пребывания заявки в системе вычисляется по формуле Литтла: $T = \frac{N}{\lambda}$. В нашей задаче $T = \frac{66}{130} \approx 0,51$ (мин).

Ответы

Глава 1

2. а) Элементы данного множества – натуральные числа, меньшие 8, т. е. имеем множество $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 8\}$;

б) Элементы данного множества образуют первые 6 членов арифметической прогрессии, у которой первый член и разность равны 4, иначе говоря, речь идет о множестве $\{x_n \mid x_{n+1} = x_n + 4, x_1 = 4, n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$;

в) $\{x_n \mid x_n = n^2, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$;

г) $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, x^2 = -2\}$;

д) $\{x \mid x = (-1)^n(|x_{n-1}| + 3), \text{ где } x_1 = -5, n \leq 5\}$;

е) $\{x \mid x - \text{простое}, x \leq 19\}$.

6. а) По степени общественной опасности во множестве А всех правонарушений выделяются два подмножества: В – множество преступлений и С – множество проступков; $A = B \cup C$. В свою очередь, $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$, где C_1 – множество гражданско-правовых, C_2 – множество конституциональных, C_3 – множество административных, C_4 – множество дисциплинарных проступков.

б) по сферам общественной жизни $A = D \cup E \cup F \cup T$, где D – множество правонарушений в экономике, E – множество правонарушений в политике, F – множество правонарушений в социально-бытовой сфере, T – множество правонарушений в культурной (общественной) сфере.

7. а) $A \cup B = (1, 8)$, $A \cap B = \emptyset$; б) $A \cup B = (-3, 8)$, $A \cap B = [5, 6]$.

8. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$, $A \cap B = \{4, 9\}$,

$A \setminus B = \{1, 2, 6\}$, $B \setminus A = \{3, 5, 8\}$.

9. 1) $A \cup B \cup C \cup D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

2) $A \cap B \cap C \cap D = \{3, 4\}$,

3) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

4) $(A \cup B) \cap (C \cup D) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

10. Решение.

A – множество отцов (отец и дед мальчика), $|A| = 2$,

B – множество сыновей (мальчик и его отец), $|B| = 2$,

C – состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A или множеству B . $C = A \cup B$, $|C| = 3$, так как отец мальчика принадлежит множествам A и B .

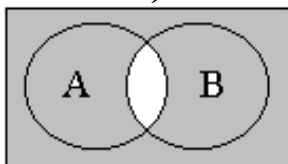
11. 1) $A \cup B = N$, 2) $A \cap B = \emptyset$, 3) $A \setminus B = A$.

12. $A \cap B = \{x \mid x \in N, x \text{ делится на } 6\}$,

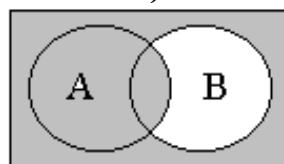
$B \cap C = \{x \mid x \in N, x \text{ делится на } 15\}$,

$A \cap B \cap C = \{x \mid x \in N, x \text{ делится на } 30\}$.

13. г)

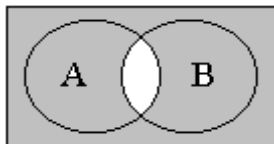


д)



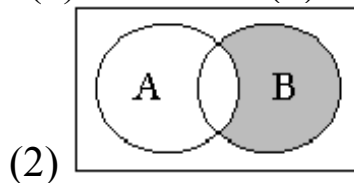
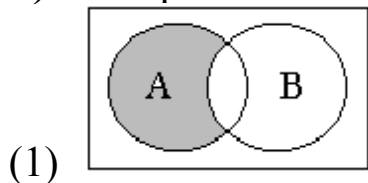
е) Этот пример аналогичен предыдущему;

ж) Объединение множеств \bar{A} (*), \bar{B} (**) (см. п. в)) будет таким:

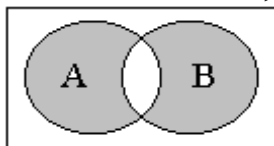


з) Воспользуемся законом де Моргана: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. Значит, ответ будет такой же, как и в задаче в).

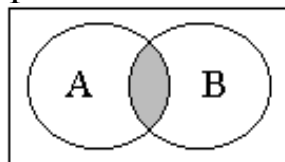
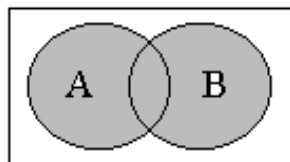
и) Изобразим множества $A \setminus B$ (1) и $B \setminus A$ (2):



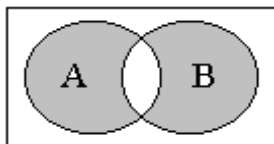
Их объединением будет множество, представленное ниже:



к) Покажем объединение и пересечение множеств A и B :



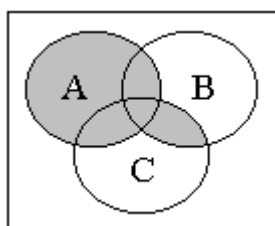
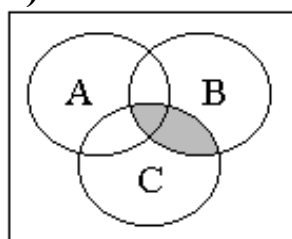
Их разностью будет множество:



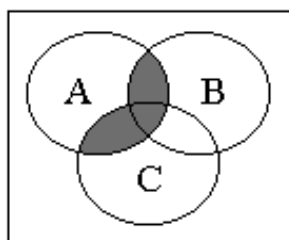
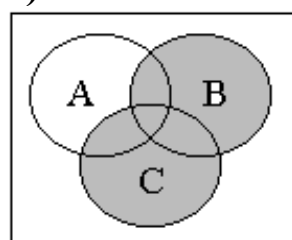
14. а) Решение.

Сначала изобразим множества, находящиеся в скобках, а затем требуемое множество.

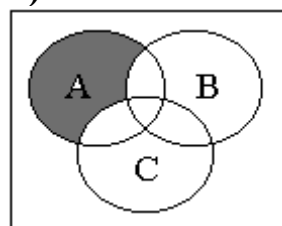
а)



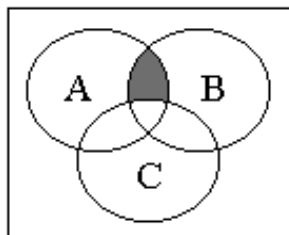
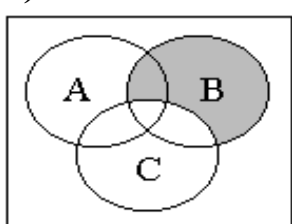
б)



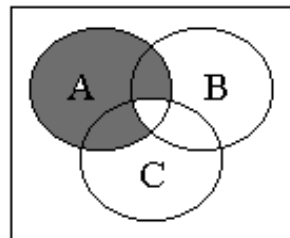
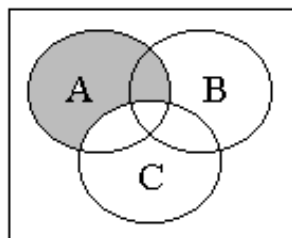
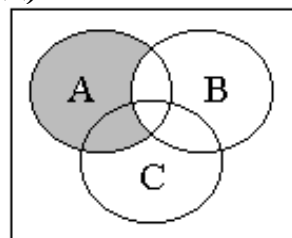
в)



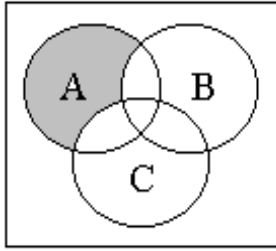
г)



д)



e)



17. Каждое из данных множеств может быть задано неоднозначно: несколько формул могут выражать одно и тоже множество.

- 1) $\overline{A \cup B \cup C}$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, $\overline{A \cap B \cap C}$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ и т. д.
- 2) $((A \setminus B) \setminus C) \cup A \cap B \cap C$; $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup A \cap B \cap C$ и т. д.
- 3) Возможные ответы: $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cup A \cap C \cup B \cap C)$;
 $((A \setminus B) \setminus C) \cup ((C \setminus B) \setminus A) \cup ((B \setminus A) \setminus C)$.
- 4) $((C \cup B) \setminus A) \setminus (B \cap C) \cup A \cap B \cap C$.
- 5) $((A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)) \cup (B \setminus ((A \cap B) \cup (B \cap C)))$;
 $((A \cap C) \setminus B) \cup (B \setminus (A \cup C))$.

6) Элементы этого множества принадлежат ровно двум из множеств A, B, C. Возможны варианты:

$$(A \cap (B \setminus C)) \cup (A \cap (C \setminus B)) \cup (B \cap (C \setminus A));$$

$$((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B) \cup ((B \cap C) \setminus A);$$

$$((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C).$$

18.

- 1) $A \cap (A \cup B) = (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B) = A \cup (B \cap \emptyset) = A \cup \emptyset = A$.
- 2) $(P \cap Q) \cup (\overline{Q} \cap P) = P$.
- 3) $(A \cap B \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup ((B \cap C \cap \overline{C}) =$
 $= (A \cap (B \cap \overline{B})) \cup (A \cap B) \cup (B \cap (C \cap \overline{C})) =$
 $= (A \cap \emptyset) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \emptyset) = \emptyset \cup (A \cap B) \cup \emptyset = A \cap B$.
- 4) $(A \cap B) \cup ((A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) = B$.

22. 1) $B \subset A$; 2) $A = B$; 3) $A \subset B$; 4) $A = B$;
 5) $A \in B$; 6) $B \in A, B \subset A$; 7) $B \subset A$; 8) $B \subset A$.

25. а) 2, б) 35, в) 50. 26. 2, 30. 27. 20, 13, 20, 14. 28. 11, 1, 3.
 29. 3, 3. 30. 10. 31. 30. 32. 10. 33. 3, 9.
 39. 26. 40. 435. 41. 1. 42. 15. 44. а) 50%, б) 10%.
 45. а) 18, б) 12, в) 5. 49. 20. 50. 25; 20. 51. 147.
 52. 60, 36. 53. 20. 54. 3^6 . 55. 9, 20. 56. 2^9 .
 57. 3^7 . 58. 900. 59. 4536. 60. 9!. 61. 42.

$$\begin{array}{llll}
 62. 13800. & 63. 81. & 64. 54. & 65. 6^{10}. \\
 67. 9, 9, 8. & 68. 1024, 992, 4032. & 69. 768. & 70. 294. \\
 72. 3^m. & 73. 336. & 74. 55440. & 75. 2 \cdot (5!)^2. \\
 77. 1) \frac{8!}{3!}, 2) \frac{11!}{4}. & 78. 1) 1560, 2) 96. & & 79. C_{17}^{12} - C_{15}^{10} = 3 \cdot 185.
 \end{array}$$

$$80. \frac{30!}{(10!)^3}, \frac{30!}{(3!)^{10}}. \quad 81. \frac{(32!) \cdot (3!)}{(16!)^2}. \quad 82. 37512. \quad 83. \text{a) } 4, \text{ б) } 36.$$

$$84. \frac{12!}{(4!)^3}. \quad 85. 1) 60, 2) 24. \quad 86. C_{32}^8. \quad 87. \frac{32!}{(12!)^2 \cdot 8!}.$$

$$88. C_{49}^6; C_6^3 \cdot C_{43}^3; C_6^4 \cdot C_{43}^2; C_6^5 \cdot C_{43}^1; C_6^6. \quad 89. 7054320. \quad 90. 1560.$$

$$91. 28800. \quad 92. C_8^4 \cdot C_{10}^5 \cdot C_9^3. \quad 93. 9 \cdot 9!. \quad 94. 4080.$$

$$96. 303600. \quad 97. 78. \quad 98. 10. \quad 99. 4^7.$$

$$118. \frac{18!}{36 \cdot (5!)(6!)(7!)}. \quad 119. 10. \quad 120. C_6^2 + 6. \quad 121. \frac{10!}{2^5 \cdot 5!} = 945.$$

$$122. \text{a) } (-1 \frac{5}{6}); \text{ б) } 1; \text{ в) } 36 \frac{1}{6}.$$

$$123. \text{a) } 0, (428571); \text{ б) } 0,035; \text{ в) } 0,0304; \text{ г) } 0, (571428); \text{ д) } \frac{10}{11} = 0, (90).$$

$$124. \mathbb{Q}; \mathbb{R}; [-1; 6]; [-\frac{8}{11}, 9]; [0, +\infty). \quad 125. \frac{3}{8}; 7; -1.$$

$$126. 1) (0; 8]; 2) (-4; 11); 3) (0; 9); 4) (-4; 2) \cup (0; 11); 5) \emptyset.$$

$$127. A \cap B = \{15t+2 \mid t \in \mathbb{N}\}, \quad A \cap C = \{-6t-1 \mid t \in \mathbb{N}\},$$

$$A \cap B \cap C = \{30t-13 \mid t \in \mathbb{N}\},$$

$$A \cap B \cup C = \{15t+2 \mid t \in \mathbb{N}\} \cup \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$128. \frac{2}{9}; \frac{23}{99}; 1\frac{7}{9}; 3\frac{567}{990} = 3\frac{63}{110}; \frac{35}{90} = \frac{7}{18}; 5\frac{239}{900}.$$

$$129. 1) \frac{5}{9}; 2) \frac{59}{99}; 3) \frac{247}{990}; 4) 7; 5) 4; 6) 3.$$

$$139. 13 = 1101_2 = 16_7 = 15_8; \quad 50 = 110010_2 = 101_7 = 62_8.$$

$$140. 10110110_2 = 182; \quad 10101011_2 = 171.$$

$$141. 441_7 = 225; \quad 24621_7 = 6483. \quad 143. 1) 114023_6; 3) 49204_{12}.$$

$$145. \text{А и В, Д и Е.} \quad 146. \text{Все.}$$

$$148. \text{а), б) – континуум.}$$

$$150. \text{Используйте метод, которым решена предыдущая задача.}$$

$$153. x = (b - a)t + a.$$

155. а) Каждой точке окружности поставим в соответствие численное значение угла, образованного радиус-вектором этой точки с некоторым фиксированным радиусом.

б) Искомая биекция является композицией трех отображений: 1) отображения, построенного в задаче а), 2) линейного отображения промежутка $[0, 2\pi)$ на промежуток $[0, 1)$ и 3) отображения промежутка $[0, 1)$ на отрезок $[0, 1]$, которое строится так же, как отображение задачи 154.

- | | | |
|--|---------------------------------|--------------------------|
| 158. 53,2%. | 159. $\approx 32,8$. | 160. 232. |
| 161. 14474901. | 162. 37186. | 168. 81%. |
| 171. 30. | 173. $33\frac{1}{3}\%$. | 174. 900%. |
| 175. 90. | 176. 300. | 177. 230 млн руб. |
| 178. 5084,21р. | 179. 3%. | 182. 874,18. |
| 183. $S(t) = S(0)\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$, $t = 1, 2, 3, \dots$ | | 184. 4. |
| 186. 25%. | 188. 21%. | |
| 189. а) увеличится на 50 %; б) уменьшится на 4%. | | |
| 190. Увеличится на 38,24 %. | 191. Уменьшится на 1%. | |
| 192. 7%. | 193. 10%. | 194. 10%. |
| 195. 25%. | 196. 25%. | 197. 9 800 руб. |
| 198. 576. | 199. 40 л. | 200. 38,5%. |
| 201. 49,6%. | 203. 50%. | 204. 25%. |
| 205. 30%. | 206. 40%. | 207. 25%. |
| 208. 20%. | 209. 25%. | 212. 8,75%. |
| 213. 17 100, 11 400 руб. | | |
| 214. 2 млн 400 тыс. руб. и 3 млн 600 тыс. руб. | | |

Глава 2

2. 1) Федоров не юрист.

2) Федоров – следователь. 3) Федоров – юрист, но не следователь.

4) Если Федоров – юрист, то он следователь прокуратуры.

5) Чтобы Федоров был юристом, достаточно, чтобы он был следователем прокуратуры.

6) Из того, что Федоров не юрист, следует, что он не является следователем прокуратуры.

7) Если Федоров не следователь, то он не юрист.

8) Федоров не юрист, или он следователь прокуратуры.

9) Неверно, что Федоров юрист и не работает следователем прокуратуры.

4. 1. $s \Rightarrow (v \Rightarrow \bar{d})$; 2. $\overline{v \Rightarrow (s \Rightarrow \bar{d})}$; 3. $\bar{v} \wedge \bar{d} \Rightarrow c$;
 4. $\bar{v} \Rightarrow (d \Rightarrow p)$; 5. $(p \wedge v \Rightarrow \bar{d}) \wedge d \Rightarrow \bar{v}$; 6. $\overline{p \Rightarrow (d \Leftrightarrow \bar{v})}$;
 7. $(s \Rightarrow \bar{d}) \Rightarrow (p \wedge \bar{v} \Rightarrow d)$ 8. $v \wedge d$; 9. $(d \Rightarrow p \wedge \bar{v}) \wedge \bar{d} \Rightarrow s \vee p \wedge v$;
 10. $s \wedge \bar{v} \Rightarrow (\bar{v} \Rightarrow \bar{d})$.

8. $(a \Rightarrow \bar{b}) \vee (\bar{a} \Rightarrow b)$.

12. а истинно, в ложно, с ложно.

13. а истинно, в ложно, с истинно.

14. 1) [b]. 2) Импликация истинна. 3) Импликация истинна.
 4) Ничего определенного. 5) Импликация истинна. 6) Импликация ложна.

15. *Решение.* В истинной импликации заключение ложно, следовательно, посылка ложна, т. е. «это, конечно, Сова»;

17.

5)

a	b	c	$a \wedge b$	$a \wedge b \vee c$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
0	0	0	0	0

6)

a	b	c	\bar{b}	$a \vee \bar{b}$	$(a \vee \bar{b}) \wedge c$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0

7)

a	b	c	$a \wedge b$	$\overline{a \wedge b}$	$\overline{a \wedge b} \wedge c$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0

8)

a	b	c	\bar{a}	$b \vee c$	$\overline{b \vee c}$	$\overline{a \vee b \vee c}$
1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1

22.

б) $((\bar{a} \vee \bar{b}) \Rightarrow a) \vee \overline{a \Rightarrow b} \equiv$

$\equiv ((a \wedge b) \vee a) \vee a \wedge \bar{b} \equiv ((a \vee a) \wedge (a \vee b)) \vee a \wedge \bar{b} \equiv$

$\equiv a \wedge (a \vee b) \vee a \wedge \bar{b} \equiv a \wedge (a \vee b \vee \bar{b}) \equiv a.$

в) $a \wedge b \vee ((a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee b)) \equiv a \wedge b \vee (b \vee (\bar{a} \wedge a)) \equiv$

$\equiv a \wedge b \vee b \equiv a \wedge b \vee b \wedge 1 \equiv b \wedge (a \vee 1) \equiv b \wedge 1 \equiv b.$

26. Один из способов решения следующий.

Составляем таблицу значений данной функции и находим соответствующую СДНФ. Полученную формулу упрощаем и получаем:

- а) \bar{x} ; б) $x \wedge y$; в) $x \vee y$;
 г) $x \Rightarrow y$; д) $y \Rightarrow \bar{x}$; е) $(x \vee y) \wedge z$.

28. Решение. 1) Для того чтобы доказать что данный аргумент правильный, нужно доказать, что формула $(a \Rightarrow b) \wedge a \Rightarrow b$ является тождественно истинной: $(a \Rightarrow b) \wedge a \Rightarrow b \equiv (\overline{a \vee b}) \wedge a \vee b \equiv (a \wedge \bar{b}) \vee \bar{a} \vee b \equiv (a \vee \bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee b) \equiv (1 \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee 1) \equiv 1$;

2) $(a \Rightarrow b) \wedge \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \equiv \overline{a \vee b} \vee b \vee \bar{a} \equiv (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \vee b) \equiv 1$;

б) Докажем, что $(a \Rightarrow b) \wedge b \Rightarrow b \equiv 1$: $(a \Rightarrow b) \wedge b \Rightarrow b \equiv \overline{a \vee b} \vee \bar{b} \vee b \equiv 1$;

7) $(a \Rightarrow b) \wedge \bar{a} \Rightarrow \bar{a} \equiv \overline{a \vee b} \vee a \vee \bar{a} \equiv 1$.

31. Решение. Введем обозначения простых предложений, из которых состоит рассуждение: а – «куплены астры», г – «куплены георгины», s – «цветы светлые», k – «цветы красные». Тогда логическая схема рассуждения имеет вид: $\frac{(a \vee g) \wedge s \wedge k, (s \wedge a \Rightarrow \bar{k})}{g}$.

Проверим, будет ли тавтологией соответствующая импликация: $(a \vee g) \wedge s \wedge k \wedge (s \wedge a \Rightarrow \bar{k}) \Rightarrow g$.

$$\begin{aligned} (a \vee g) \wedge s \wedge k \wedge (s \wedge a \Rightarrow \bar{k}) \Rightarrow g &\equiv \overline{(a \vee g) \wedge s \wedge k \wedge (s \wedge a \Rightarrow \bar{k})} \vee g \equiv \\ &\equiv (\overline{a \vee g}) \vee \bar{s} \vee \bar{k} \vee \overline{s \wedge a \Rightarrow \bar{k}} \vee g \equiv \bar{a} \wedge \bar{g} \vee \bar{s} \vee \bar{k} \vee s \wedge a \wedge k \vee g \equiv \\ &\equiv \bar{a} \vee g \vee \bar{s} \vee \bar{k} \vee a \wedge s \wedge k \equiv 1. \end{aligned}$$

Аргумент правильный.

35. Пусть l – «Луи виновен», f – «Франсуа виновен», e – «Этьен виновен». Запишем высказывания бродяг на языке алгебры высказываний.

Луи: $((f \Rightarrow e) \Rightarrow l) \wedge \bar{l}$.

Франсуа: $(\bar{l} \Rightarrow (\bar{e} \Rightarrow f)) \wedge (e \Leftrightarrow l) \wedge (e \Rightarrow \bar{f})$.

Этьен: $e \wedge \bar{f} \wedge \bar{l} \vee \bar{e} \wedge f \wedge l$.

Нам известно, что Этьен всегда лжет, а Луи и Франсуа всегда говорят правду. Значит, $((f \Rightarrow e) \Rightarrow l) \wedge \bar{l} = 1$. Преобразуем левую часть: $((f \Rightarrow e) \Rightarrow l) \wedge \bar{l} \equiv ((\bar{f} \vee e \vee l) \wedge \bar{l}) \equiv (f \wedge \bar{e} \vee l) \wedge \bar{l} \equiv f \wedge \bar{e} \wedge \bar{l}$. Тогда $f \wedge \bar{e} \wedge \bar{l} = 1$.

Таким образом, $f = 1$, $e = 0$, $l = 0$, т. е. Франсуа виновен, а Этьен и Луи не виновны. Проверим, удовлетворяют ли эти значения истинности переменных другим двум условиям: $(\bar{l} \Rightarrow (\bar{e} \Rightarrow f)) \wedge (e \Leftrightarrow l) \wedge (e \Rightarrow \bar{f}) = 1$ и $e \wedge \bar{f} \wedge \bar{l} \vee \bar{e} \wedge f \wedge l = 0$. Подстановка найденных значений $f = 1$, $e = 0$, $l = 0$ в последние уравнения убеждает, что решение задачи найдено: Франсуа виновен, а Этьен и Луи не виновны.

36. Пусть символы a , b , c , d обозначают, соответственно, высказывания: a – «А участвовал», b – «В участвовал», c – «С участвовал», d – «D участвовал». Тогда предложения 1) – 4) запишутся в виде импликаций:

$$a \Rightarrow b, \quad b \Rightarrow c \vee \bar{a}, \quad \bar{d} \Rightarrow a \wedge \bar{c}, \quad d \Rightarrow a.$$

Так как каждая из импликаций истинна, то и их конъюнкция тоже истинна:

$$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c \vee \bar{a}) \wedge (\bar{d} \Rightarrow a \wedge \bar{c}) \wedge (d \Rightarrow a) = 1.$$

Преобразуем левую часть тождества, освобождаясь от импликаций:

$(\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{b} \vee c \vee \bar{a}) \wedge (d \vee a \wedge \bar{c}) \wedge (\bar{d} \vee a) = 1$. К третьей скобке применим дистрибутивный закон и переставим два последних сомножителя:

$$(\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{b} \vee c \vee \bar{a}) \wedge ((d \vee a) \wedge (\bar{d} \vee a)) \wedge (d \vee \bar{c}) = 1.$$

Преобразуем формулу $(d \vee a) \wedge (\bar{d} \vee a)$, используя свойства логических операций: $(d \vee a) \wedge (\bar{d} \vee a) \equiv (d \wedge \bar{d}) \vee a \equiv 0 \vee a \equiv a$. Тогда наше тождество запишется следующим образом:

$$(\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{b} \vee c \vee \bar{a}) \wedge a \wedge (d \vee \bar{c}) \equiv 1.$$

Отсюда следует, что $a = 1$ и, следовательно, тождество примет вид: $b \wedge (\bar{b} \vee c) \wedge (d \vee \bar{c}) = 1$.

Значит, $b = 1$, $\bar{b} = 0$, и $c \wedge (d \vee \bar{c}) = 1$. Отсюда $c = 1$ и, следовательно, $d = 1$.

Ответ: участвовали все.

37. Преступник – Валет.

38. Если Г говорит правду, то и В говорит правду, но по условию задачи правду сказал один и только один из подозреваемых. Значит, Г лжет, следовательно, лжет и В. Пусть a – «А виновен», e – «Е виновен». Тогда высказывание В можно записать таким образом: $a \vee e$. Оно ложно, следовательно, его отрицание будет истинно: $\overline{a \vee e} = 1$. Применим закон де Моргана: $\overline{a \vee e} \equiv \bar{a} \wedge \bar{e}$. Значит,

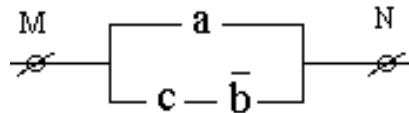
А и Е не виновны и Е говорит правду, а остальные лгут. Таким образом, преступление совершил Б.

65. а) $a \& b$, б) $a \vee b$, в) a , г) \bar{a} , д) 1, е) в этой КС никогда не будет проходить ток. Ей соответствует формула 0.

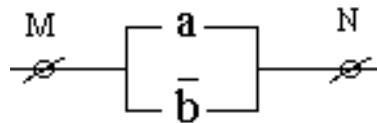
69. Для каждой контактной схемы необходимо составить соответствующую структурную формулу и упростить ее, используя свойства логических операций. Затем составить контактную схему, соответствующую новой формуле.

а) Структурная формула схемы имеет вид $(a \wedge b) \vee ((c \vee a) \wedge \bar{b})$. Упростим ее: $(a \wedge b) \vee ((c \vee a) \wedge \bar{b}) \equiv (a \wedge b) \vee ((c \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{b})) \equiv (a \wedge (b \vee \bar{b})) \vee (c \wedge \bar{b}) \equiv a \vee (c \wedge \bar{b})$

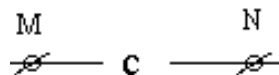
Контактная схема упрощенной формулы имеет вид



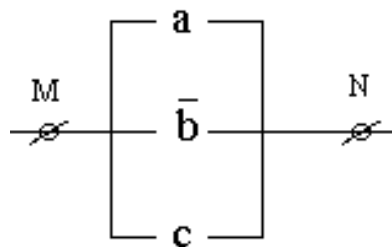
б) $(a \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})) \vee (a \wedge \bar{b}) \equiv a \vee ((a \vee \bar{a}) \wedge \bar{b}) \equiv a \vee \bar{b}$



в) $(b \wedge c) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c) \equiv (b \wedge c) \vee (a \vee \bar{a}) \wedge (\bar{b} \wedge c) \equiv (b \wedge c) \vee (\bar{b} \wedge c) \equiv (b \vee \bar{b}) \wedge c \equiv c$



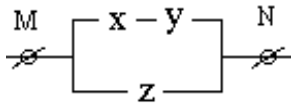
г) $a \vee ((a \vee \bar{b}) \wedge (b \vee c)) \vee \bar{b} \vee c \equiv a \vee (a \vee \bar{b} \vee \bar{b} \vee c) \wedge (b \vee \bar{c} \vee \bar{b} \vee c) \equiv a \vee a \vee \bar{b} \vee c \equiv a \vee \bar{b} \vee c$.



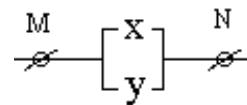
70. а) $((x \vee z) \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \equiv ((x \vee z) \wedge y) \vee z \wedge (x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge \bar{y}) \equiv ((x \vee z) \wedge y) \vee z \wedge \bar{y} \equiv x \wedge y \vee z \wedge y \vee z \wedge \bar{y} \equiv x \wedge y \vee z$;

$$\text{б)} x \wedge (x \wedge \bar{y} \vee y) \vee x \wedge y \wedge z \vee ((\bar{z} \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y) \wedge (z \vee y)) \equiv x \vee y$$

а)



б)



71. Указание. Сначала постройте формулу алгебры высказываний, а затем соответствующую контактную схему.

72. Сначала постройте таблицу, задающую функцию, которая соответствует ситуации, описанной в задаче, затем найдите формулу, задающую эту функцию, а по ней – соответствующую схему.

$$\text{82. а)} (\exists x)(P(x) \wedge S(x)); \quad \text{б)} (\forall x)(P(x) \wedge R(x, 2) \Rightarrow \bar{S}(x));$$

$$\text{в)} \overline{(\exists x)Q(x) \wedge R(x, 0)} \equiv (\forall x)(\overline{Q(x)} \vee \overline{R(x, 0)});$$

$$\text{г)} \overline{(\exists x)(P(x) \wedge S(x) \wedge R(x, 2))} \equiv (\forall x)(\overline{P(x)} \vee \overline{S(x)} \vee \overline{R(x, 2)});$$

84. а) 5 – простое число; **б)** 2 – число простое и четное; **в)** если число x делится на 2, то оно четное; **г)** существует четное число, которое делится на 6; **д)** существует число, являющееся нечетным и простым; **е)** Всякое число, не являющееся четным, не делится на 2; **ж)** если число делится на четное число, то оно само является четным; **з)** для всякого простого числа существует четное число, которое на него делится; **и)** не для любых нечетного числа x и простого числа y , x не делится на y .

86. а) $(\exists x)(P(x) \wedge S(x))$, $\overline{(\exists x)(P(x) \wedge S(x))} \equiv (\forall x)(\overline{P(x)} \vee \overline{S(x)})$. Каждое число не является простым или наибольшим;

б) Обозначим через F множество преступлений и рассмотрим предикаты: $S(x) = \{x \in F \mid x - \text{вымогательство}\}$, $P(x) = \{x \in F \mid x \text{ влечет лишение свободы}\}$. Тогда $\overline{(\forall x)(S(x) \Rightarrow P(x))} \equiv (\exists x)(S(x) \wedge \overline{P(x)})$. Существуют вымогательства, которые не влекут лишения свободы;

в) $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(\exists z)Q(x, y, z))$; $(\forall x)(\overline{P(x)} \vee (\exists y)(\forall z)\overline{Q(x, y, z)})$. Всякий поезд или не идет из Москвы в Ярославль, или в нем существует вагон, в котором все места заняты;

г) $S(x) = \{x \text{ совершил преступление}\}$, $P(x) = \{x \text{ подвергнут справедливому наказанию}\}$ $\overline{(\forall x)(S(x) \Rightarrow P(x))} \equiv (\exists x)(S(x) \wedge \overline{P(x)})$. Существуют люди, совершившие преступления, но не подвергшиеся справедливому наказанию.

д) $(\forall x)P(x) \Rightarrow \bar{S}(x)$, где $P(x)$ означает $\{x \text{ невиновен}\}$, $S(x)$ означает $\{x \text{ привлечен к уголовной ответственности}\}$.

87. а) Пусть $P(x) = \{x - \text{подлежит обязательному медицинскому страхованию}\}$, тогда данное высказывание запишется сле-

дующим образом: $(\forall x)P(x)$. $\overline{(\forall x)P(x)} \equiv (\exists x)\overline{P(x)}$. Существуют работники, не подлежащие обязательному медицинскому страхованию.

б) $S(x) = \{\text{человек } x \text{ свободен}\}$, $T(x, y) = \{x \text{ и } y \text{ равны в своих правах}\}$, $P(x, y) = \{x \text{ и } y \text{ равны в своих достоинствах}\}$, $(\forall x)(\forall y)(S(x) \wedge S(y) \Rightarrow T(x, y) \wedge P(x, y))$; $(\exists x)(\exists y)(S(x) \wedge S(y) \wedge (\overline{T(x, y)} \vee \overline{P(x, y)}))$. Некоторые люди рождаются свободными, но не равными в своих достоинствах или не равными в своих правах.

д) Пусть X – множество различных утверждений. На нем заданы предикаты: $P(x) = \{\text{утверждение } x \text{ есть приговор}\}$, $Q(x) = \{x \text{ – обоснованное утверждение}\}$. Тогда высказывание можно записать в виде $\overline{(\exists x)(P(x) \wedge \overline{Q(x)})} \equiv (\forall x)(\overline{P(x)} \vee Q(x))$. Отрицание постройте самостоятельно.

е) $P(x, y) = \{x \text{ прочитал } y\}$; $(\exists y)(\forall x)(P(x, y))$; $\overline{(\exists x)(\forall x)(P(x, y))} \equiv (\forall y)(\exists x)(\overline{P(x, y)})$. Для любой книги найдется человек, который ее не прочитал.

ж) $P(x) = \{x \text{ осужден за совершение преступления}\}$; $Q(x) = \{x \text{ освобожден по амнистии}\}$; $\overline{(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))} \equiv (\exists x)(P(x) \wedge \overline{Q(x)})$. Некоторые люди, осужденные за совершение преступлений, не освобождаются по амнистии. Отрицание постройте самостоятельно.

з) Пусть D – множество образцов производственного оборудования.

$P(x) = \{x \in D \mid x \text{ отвечает требованиям охраны труда}\}$; $S(x) = \{x \in D \mid x \text{ передан в серийное производство}\}$; $(\forall x)(\overline{P(x)} \Rightarrow \overline{S(x)})$; $\overline{(\forall x)(\overline{P(x)} \Rightarrow \overline{S(x)})} \equiv (\exists x)(\overline{P(x)} \wedge S(x))$. Существует образец производственного оборудования, который не отвечает требованиям охраны труда и в то же время он передан в серийное производство.

88. а) $(\exists x)(\Phi(x)) \wedge (\forall x_1)(\forall x_2)(\Phi(x_1) \wedge \Phi(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$;

б) $(\exists x_1)(\exists x_2)(\Phi(x_1) \wedge \Phi(x_2) \wedge (x_1 \neq x_2))$;

в) $(\forall x_1)(\forall x_2) (\forall x_3) (\Phi(x_1) \wedge \Phi(x_2) \wedge \Phi(x_3)) \Rightarrow (x_1 = x_2) \vee (x_2 = x_3) \vee (x_1 = x_3)$;

г) $(\exists x_1)(\exists x_2)((\Phi(x_1) \wedge \Phi(x_2) \wedge (x_1 \neq x_2)) \wedge (\forall x_1)(\forall x_2) (\forall x_3) (\Phi(x_1) \wedge \Phi(x_2) \wedge \Phi(x_3)) \Rightarrow (x_1 = x_2) \vee (x_2 = x_3) \vee (x_1 = x_3))$.

90. 1) а) $T_p \cap T_q \neq \emptyset$, **б)** $T_p \subset T_q$, **в)** $T_q \subset T_p$, **г)** $T_p \cap T_q = \emptyset$;

2) а) $T_p \subset T_q$, **б)** $T_p = T_q$ или $T_q = \emptyset$.

Глава 3

1. $(-\infty, -2) \cup [2, 6) \cup 6, +\infty)$. 2. $(-10, 2) \cup (2, +\infty)$. 3. $[0, 3)$.
 4. $[-4, -3) \cup (-3, -2) \cup (-2, +\infty)$. 5. $[2, 5)$. 6. $x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$. 7. $[-1, 1]$. 8. $[-1, 0]$.
 9. $[-2, 2]$. 10. $[0, +\infty)$. 11. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. 12. $[-10, 10]$. 13. $(0, 2]$. 14. $(0, 2]$.
 15. $[1, +\infty)$. 32. 2π . 33. $2\pi/3$. 34. π . 40. 1) $f(x) = 3x, g(x) = \cos x$;
 3) $f(x) = \cos x, g(x) = \sqrt{x}$. 41. 5) $y = 4 + \sqrt{x}$; 7) $y = \frac{1-2x}{1+x}$. 42. 9. 43. $\frac{3}{4}$.
 44. ∞ . 45. 0. 46. -1. 47. $-\infty$. 48. $-\infty$. 49. 0. 50. $\frac{7}{2}$. 51. $\frac{1}{3}$. 52. $\frac{1}{4}$. 53. 1.
 54. ∞ . 55. $-\frac{1}{3}$. 56. $\frac{3}{8}$. 57. $28\sqrt{7}$. 58. 0,5. 59. -6. 60. 0. 61. -1. 62. -1.
 63. $\frac{4}{3}$. 64. ∞ . 65. $\frac{3}{10}$. 66. e^{10} . 67. e^{-14} . 68. $e^{3,75}$. 76. $1 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - x^2 - \frac{2}{x^3}$.
 77. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{3}{x^4}$. 78. $5x(2\sin x + x\cos x)$. 79. $\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\sin x$.
 80. $\frac{\operatorname{tg} x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x} + e^x \cos x - e^x \sin x$. 82. $\frac{-4x^2 + 6x + 6}{(3-4x)^2}$. 83. $\frac{-5(2x^2 + 2x - 3)}{(x^2 - 3x)^2}$.
 86. $\frac{e^x(\sin x + x\sin x - x\cos x)}{\sin^2 x}$. 87. π . 88. 8. 90. $20x\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)^9$. 92. 3.
 94. $-\frac{\operatorname{ctg}(2-x)}{e^x} + \frac{1}{e^x \sin^2 x}$. 96. $\frac{3\cos 3x + 2xe^{x^2}}{2\sqrt{\sin 3x + e^{x^2}}}$. 98. $3(\sin^2 x)(\cos x) + \cos x^3(3x^2)$.
 99. $\frac{-3x^2 \cos \sqrt{1-2x^3}}{\sqrt{1-2x^3}}$. 104. $3\cos 3x \cdot e^{\sin 3x}$. 106. $\frac{2^{\sqrt{x+1}} \ln 2}{2\sqrt{x+1}}$. 109. $\frac{1}{x^5 \sqrt{(\ln x + 1)^4}}$.
 112. $\frac{1}{\sin x \cdot \cos x} - \frac{\sin \ln x}{x}$. 118. $\frac{x \ln x + \sin x(1 - x \ln x \ln 5)}{2x \cdot 5^x \cdot \cos^2 \frac{x}{2}}$. 120. $\frac{1}{3x^3 \sqrt{(1 + \ln x)^2}} - \frac{2 \operatorname{tg} 2x}{\ln 10}$.
 124. $1 - \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 125. $\frac{3x^2 \operatorname{ar} \operatorname{ctg} 2x}{\sqrt{1-x^6}} + \frac{2 \arcsin x^3}{1+4x^2}$. 128. $-\frac{2 \arccos x \cdot e^{\arccos^2 x}}{\sqrt{1-x^2}}$.
 135. 45, 35. 137. 2,06; 0,58.
 138. $y'(2) = 5, T_y(2) = 0,042; y'(7) = -20, T_y(7) = -0,242$.
 139. 1) $C'(27) = 1,73$; 2) $S'(27) = 1 - 1,73 = -0,73$.
 140. $S'(27) \approx -0,62, C'(27) \approx 1,62$.
 141. Эластичность $E_x(y) = \frac{x}{y} y'(x)$: $E_{12}(2) = \frac{12}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} = 0,75$.
 142. 1,2. 152. $\frac{-1}{2x^2} + C$. 153. $\frac{5}{4} \sqrt[5]{x^4} + C$. 154. $3 \operatorname{arctg} x + C$.

- 155.** $-ctg 2x + C$. **156.** $x + 8\sqrt{x} + 4\ln|x| + C$. **157.** $-2\sqrt{2-x} + C$.
158. $-\cos \ln x + C$. **159.** $-2e^{-\sqrt{x}} + C$. **160.** $-x \cos x + \sin x + C$.
161. $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$. **162.** $\frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}x e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$.
163. $e^{x^2+x} + C$. **164.** $\left(\frac{x^2}{2} + x\right) \ln x - \frac{1}{4}x^2 - x + C$. **165.** $\ln(x^2 + 1) + C$.
166. $\frac{1}{\cos x} + C$. **167.** $x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C$. **172.** 2,5. **173.** $22\frac{2}{3}$.
174. $\frac{3}{4}$. **175.** 1. **176.** 0. **177.** 1. **178.** 1. **179.** 1. **180.** $\frac{\pi}{4}$. **181.** $\frac{\pi}{6}$.
182. $\frac{1}{\ln 2}$. **183.** 1. **185.** 23,4. **186.** 110,48 т.
188. а) 0, 0,235; 0,283; б) 0,073; 0,114; в) 0,0037; 0,45.
190. $341\frac{1}{3}$. **191.** $100 \ln \frac{5}{3} - 40 \approx 112,8$.

Глава 4

- 4. а)** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 10 & 22 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
6. 1) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 10 \\ 5 & -9 & -2 \\ 2 & -11 & 12 \end{pmatrix}$; **2)** $\begin{pmatrix} -5 & -38 & 12 \\ -13 & -49 & -4 \\ -19 & -57 & -12 \end{pmatrix}$.
7. 1а) $\begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$; **2а)** $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 9 & -17 & -1 \\ 10 & -19 & 0 \end{pmatrix}$; **2б)** $\begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.
11. 1) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; **2)** $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; **3)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$;
13. а) $X = \begin{pmatrix} -a+b & \frac{2}{3}a \\ a & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}$; **в)** $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$.
14. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a^2 + bc = 0$.
15. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a^2 + bc = 1$.
16. 1) 10; **2)** -1; **3)** -38; **4)** $4a - 6b$; **5)** 49; **6)** 27; **7)** -1487600;
8) 1; **9)** 8; **10)** $x^2 - x$; **11)** $-x^2 + 5x - 6$.

17. 1) 72; 2) 48; 3) 1; 4) 600.

18. 1) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ -7 & 7 & 7 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

19. 1) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 7 & -4 & 1 \\ 15 & -9 & 3 \end{pmatrix}$.

20. 1) $x_1=0, x_2=1$; 2) $x_1=2, x_2=3$; 3) $x_1=3, x_2=4$.

21. 1) $\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. 22. 1) $X = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ 20 & -15 \end{pmatrix}$.

23. 2a) $\begin{pmatrix} 5 & 12 & 6 & 5 \\ 10 & 9 & 7 & 6 \\ 13 & 13 & 12 & 9 \end{pmatrix}$; 2б) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

24. Выручка предприятия по трем регионам представляется матрицей $\begin{pmatrix} 250 & 180 & 150 \end{pmatrix}$.

25. 2) $V = \begin{pmatrix} 1040 \\ 820 \\ 900 \\ 650 \end{pmatrix}$; 3) $V = \begin{pmatrix} 600 \\ 1200 \\ 750 \end{pmatrix}$. 26. $\begin{pmatrix} 680 & 2040 & 540 & 1020 \end{pmatrix}$.

29. 1) $\frac{71}{120}$; 2) 4.

30. 1) Платежная матрица имеет вид $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$; 2) нижняя це-

на игры $\alpha = \max \alpha_i = \max(\min a_{ik}) = -3$; 3) седловой точки нет; 4) чтобы обеспечить себе минимальный проигрыш, игрок А должен выбрать стратегию A_1 или A_2 , то есть записать числа 1 или 2.

31. 1) Платежная матрица имеет вид $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$; 2) нижняя це-

на игры $\alpha = \max \alpha_i = \max(\min a_{ik}) = -4$, верхняя цена $\beta = \min \beta_k = \min(\max a_{ik}) = 5$; 3) седловой точки нет; 4) чтобы обеспечить себе минимальный проигрыш, игрок А должен выбрать стратегию A_1 , то есть зеленый цвет.

32. 3) $\alpha = -1, \beta = 1$; седловой точки нет.

33. 1) исключаются последовательно $B_2, B_3, B_4, A_1, A_3, B_5$ и A_2 ; $\alpha = \beta = \nu = 4$ и $\bar{X}^* = (0, 0, 0, 1), \bar{Y}^* = (1, 0, 0, 0)$; **2)** исключаются последовательно A_1, B_4, B_3, A_3 ; $\Pi = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; **3)** $\Pi = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,7 & 0,4 \\ 0,4 & 0,3 & 1,0 \end{pmatrix}$.

35. 1) $X^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), Y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \nu = 1$; **2)** $X^* = (1, 0), Y^* = (1, 0), \nu = 2$;

3) $X^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), Y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \nu = \frac{3}{2}$; **4)** $X^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), Y^* = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right), \nu = \frac{7}{4}$.

36. Пересечение маршрутов б) и 2.

37. Седловой точки нет. $X^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), Y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

42. $\{(-7x_3 - 9; 5x_3 + x_4 + 5; x_3; x_4) / x_3, x_4 \in R\}$.

43. $\left\{\left(\frac{1}{5}x_3 + 2; \frac{4}{5}x_3 + 2; x_3\right) / x_3 \in R\right\}$. **44.** $(1, 2, -2)$. **45.** Решений нет.

46. $(1, 2, 1)$. **47.** Решений нет.

48. $\{(5x_3 - x_4 + 1; -\frac{3}{2}x_3 - 2x_4 + 1; x_3; x_4) / x_3, x_4 \in R\}$.

49. $\left\{\left(\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{12}x_4 - \frac{7}{12}; x_2; -\frac{5}{6}x_4 + \frac{1}{6}; x_4\right) / x_2, x_4 \in R\right\}$. **50.** $(1, 0, -2)$.

51. $(-3, 2, 1)$. **52.** $(16, 7)$. **53.** $(2, 3)$. **54.** $(-1, 1, -2)$. **55.** $(2, -1, 1)$.

56. $(3, 1, 1)$. **57.** $(1, 2, -2)$. **58.** $(16, 7)$. **59.** $(2, 3)$. **60.** $(1, 3, 5)$.

61. $(9, 0, 8)$. **62.** $(5, -2, 4)$. **63.** $(2, -3, 1)$. **65.** а) прибыль в минувшем году 1-го отд. 4 млн руб., 2-го отд. — 8 млн руб.; б) прибыль в этом году 1-го отд. — 6,8 млн руб., 2-го отд. — 11, 2 млн руб. **66.** 1 кг сорокапроцентного и 2 кг шестидесятипроцентного раствора. **67.** Смогут. Работая вместе, они выполняют заказ за 3 часа.

Глава 5

1. $\frac{2}{5}$. **2. а)** $\frac{3}{10}$; **б)** $\frac{7}{10}$. **3.** $\frac{27}{40}$. **4. а)** $\frac{1}{4}$; **б)** $\frac{1}{2}$; **в)** $\frac{1}{4}$; **г)** $\frac{3}{4}$. **5.** 0,061.

6. а) $\frac{1}{6}$; **б)** 0; **в)** $\frac{1}{2}$; **г)** $\frac{1}{2}$; **д)** $\frac{1}{3}$; **7. а)** $\frac{1}{6}$; **б)** $\frac{1}{36}$; **в)** $\frac{1}{9}$; **г)** $\frac{1}{4}$.

9. 1) $\frac{1}{12}$; **2)** $\frac{1}{24}$. **12.** 99600. **14. 1)** $\frac{1}{7}$; **2)** $\frac{3}{14}$; **3)** $\frac{2}{7}$; **4)** $\frac{5}{14}$; **5)** $\frac{5}{14}$;

6) $\frac{9}{14}$; **7)** $\frac{9}{14}$. **15.** $3/4$. **16.** $2/\pi$. **17.** $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. **18.** $\pi/4$.

19. Решение. Обозначим через А событие «друзья встретились», а через x и y — моменты прихода соответственно первого и второго из них. По условию x и y расположены между часами

13.00 и 14.00, то есть они могут меняться в течение часа. Значит, можно считать, что $0 < x < 1$ и $0 < y < 1$. Друзья встретятся, если время прихода одного из них отличается от времени прихода другого не более, чем на 30 минут, то есть если $|x - y| \leq 1/2$.

Теперь для решения задачи необходимо изобразить на координатной плоскости область, определяемую неравенством $|x - y| \leq 1/2$, и найти отношение площади полученной фигуры к площади квадрата, внутри которого она лежит.

Квадрат задается неравенствами $0 < x < 1$ и $0 < y < 1$, и поэтому его площадь $S = 1$. Площадь фигуры, лежащей внутри квадрата и определяемой условием $-\frac{1}{2} \leq x - y \leq \frac{1}{2}$, равна $S' = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Таким образом, искомая вероятность $p = \frac{S'}{S} = \frac{3}{4} : 1 = \frac{3}{4}$.

20. 0,2. **21. а)** $A_1 A_2 A_3$; **б)** $\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}$; **в)** $A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3 + A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$; **г)** $\overline{A_1} A_2 A_3 + A_1 \overline{A_2} A_3 + A_1 A_2 \overline{A_3}$; **д)** $\overline{A_1} A_2 A_3 + A_1 \overline{A_2} A_3 + A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 A_2 A_3$; **е)** $\overline{A_1} \overline{A_2} A_3$.

24. 0,8. **25.** $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,15 + 0,1 + 0,12 = 0,37$. **26.** 0,4. **27.** $P(A + B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$. **28.** 0,5.

29. $P(A + B) = \frac{3}{4}$.

30. Пусть A обозначает событие «У выбранного наудачу числа хотя бы две цифры совпадают». Тогда \overline{A} – это событие «у выбранного наудачу числа все цифры различны». Так как $A + \overline{A}$ – достоверное событие, то $P(A + \overline{A}) = 1$; с другой стороны, $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$ и, следовательно, $P(A) = 1 - P(\overline{A})$. Всего трехзначных чисел 900 (999–99), количество трехзначных чисел, у которых все цифры различны, равно $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$. Тогда $P(\overline{A}) = \frac{648}{900} = 0,72$, и $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,72 = 0,28$.

31. $P(AB) = P(A)P(B) = 0,63$.

32. 1) $\frac{1}{4}$, 2) $\frac{7}{12}$. **34.** $\frac{1}{8}$. **35.** $\frac{1}{216}$. **37.** 1) $P(\overline{A} \overline{B} \overline{C}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

2) $P(A \overline{B} \overline{C}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. **38.** $\frac{7}{15}, \frac{8}{15}$. **40.** 0,206; 0,988.

41. 1) 0,988; 2) 0,456; 3) 0,61; 4) 0,378; 5) 0,154.

42. $P(A) = P(A_1 \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} A_2)$. События A_1 и A_2 независимы, поэтому $P(A) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2)$ и, следовательно, $P(A) = p_1 \cdot (1 - p_2) + (1 - p_1) \cdot p_2$.

44. $\frac{1}{25}, \frac{4}{15}$. **45.** $\frac{bd}{(a+b)(c+d)}$. **48.** 1) $\frac{1}{1980}$; 2) $\frac{1}{1980}$. **50.** 0,72; 0,54.

51. $\frac{1}{3}$. **57.** 0,77. **58.** $\approx 0,003\%$. **59.** 0,594. **60.** 0,8667. **61.** 0,024. **62.** $\frac{28}{45}$.

65. 0,325. **66.** 0,03. **67.** 0,038. **68.** 17/52. **72.** 5/11. **80.** $M(X) = 1,9$; $D(X) = 1,69$. **81.** $M(X) = 1,5$; $D(X) = 1,65$.

83.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1, \\ 0,2, & \text{если } 1 < x \leq 3, \\ 0,5, & \text{если } 3 < x \leq 4, \\ 0,7, & \text{если } 4 < x \leq 6, \\ 1, & \text{если } x > 6. \end{cases}$$

84.
$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \cos x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

85.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -2, \\ \frac{1}{5}x, & \text{если } -2 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

86. 0,25.

87. 0,2.

88. 6 мин, 12 мин², $2\sqrt{3}$ мин.

Глава 6

9. 4. **11.** 2521. **13.** 5,1. **15.** $\overline{X}_B = 10$; $P_B = 2,5$; $\delta^2 = \frac{10}{3}$.

19 а) $7,63 < a < 12,77$. **б)** $14,23 < a < 19,37$.

20. 992, $16 < a < 1007,84$. **21.** $\Delta = t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{100}} = 0,392$.

23. $n = 179$. **25.** $-0,04 < a < 0,88$. **27.** $34,66 < a < 50,94$.

29. а) $0 < \sigma < 14,28$, **б)** $7,99 < \sigma < 20,02$. **31.** $u = -0,612t + 12,066$.

33. $y = 0,014x - 0,48$. **34.** $y = 0,3x^2 + 0,48x + 5,06$. **35.** $y = -31x + 285$.

36. $y = 0,18x + 12,6$.

Глава 8

2. (120,80), $z_{\max} = 560$. **4.** $x_1 = 40$; $x_2 = 5$; $z_{\max} = 130$.

5. 1) $x_A = 0$, $x_B = 600$; **2)** $x_A = 200 - 200t$, $x_B = 600t$; **3)** $x_A = 200$, $x_B = 0$.

6. 1) $x_A = 60$, $x_B = 50$; **2)** $x_A = 60 - 20t$, $x_B = 50 + 10t$, где $0 \leq t \leq 1$;

3) $x_A = 50$, $x_B = 55$. **7.** 5 скорых и 7 пассажирских.

8. 6 скорых и 6 пассажирских. **9.** Сена 20 кг, а силоса 40 кг.

11. 2,5 кг вещества B_1 и 2,5 кг вещества B_2 .

16. $x_1 \approx 1199$; $x_2 \approx 477$; $x_{11} = 359,7$; $x_{12} = 119,25$; $x_{21} = 179,85$; $x_{22} = 57,24$; чистая продукция по промышленности составляет 659,45 усл. ден. ед., по сельскому хозяйству – 300,51 усл. ден. ед.; **б)** выпуск в промышленности нужно увеличить до 1329 усл. ден. ед., в сельском хозяйстве – до 554 усл. ден. ед.

17. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,55 & 0,1 \end{pmatrix}$. **18.** $A = \begin{pmatrix} 0,16 & 0,4 \\ 0,14 & 0,1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1,29 & 0,57 \\ 0,2 & 1,2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 622,5 \\ 430 \end{pmatrix}$.

19. $X = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$. **20. б)** 2:4:3; **в)** 15:11:9.

21. а) 134 усл. ед, 201 усл. ед, 67 усл. ед;
б) 198 усл. ед, 114 усл. ед, 90 усл. ед.
в) 90 усл. ед., 114 усл. ед, 198 усл. ед.

Литература

1. Рассолов, М. М. Элементы высшей математики для юристов / М. М. Рассолов, С. Г. Чубукова, В. Д. Элькин. – М.: Юристъ, 1999.
2. Тихомиров, Н. Б. Математика: учебный курс для юристов / Н. Б. Тихомиров, А. М. Шелехов. – М.: Юрайт, 1999. – 223 с.
3. Турецкий, В. Я. Математика и информатика / В. Я. Турецкий. – М.: ИНФРА-М, 2000.
4. Математика и информатика: учебник для студентов гуманитарных факультетов педагогических вузов / под ред. В. Д. Будаева, Н. Л. Стефановой, – СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2001. – 391 с.
5. Грес, П. В. Математика для гуманитариев: учеб. пособие / П. В. Грес. – М.: Логос, 2004. – 160 с.
6. Козлов, В. Н. Математика и информатика / В. Н. Козлов. – СПб.: Питер, 2004. – 266 с.
7. Ведерников, В. А. Элементы высшей математики: учеб. пособие для студентов юридического факультета / В. А. Ведерников, М. М. Сорокина. – Брянск, 1999.
8. Арбузов, П. В. и др. Высшая математика для юристов: учеб. пособие / П. В. Арбузов и др. – Ростов-н/Д.: Феникс, 2007. – 443 с.
9. Никольская, И. Л. Знакомство с математической логикой / И. Л. Никольская. – М.: Моск. психол.-социал. ин-т: Флинта, 1998. – 128 с.
10. Виленкин, Н. Я. Рассказы о множествах / Н. Я. Виленкин. – М.: Наука, 1969.
11. Журецкий, В. Я. Математика и информатика / В. Я. Журецкий. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 560 с.
12. Ляпин, Е. С. Сборник задач по элементарной алгебре / Е. С. Ляпин, И. В. Баранова, З. Г. Борчугова. – М.: Просвещение, 1973.

13. Столл, Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / Р. Р. Столл. – М.: Просвещение, 1968.
14. Лавров, И. Я. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И. Я. Лавров, Л. Л. Максимова. – М.: Наука, 1975. – 240 с.
15. Столяр, А. А. Элементарное введение в математическую логику: пособие для учителей / А. А. Столяр. – М.: Просвещение, 1965. – 263 с.
16. Гиндикин, С. Г. Алгебра логики в задачах / С. Г. Гиндикин. – М.: Наука, 1972. – 288 с.
17. Калихман, И. Л. Сборник задач по математическому программированию / И. Л. Калихман. – М., 1975. – С. 174–185.
18. Гнеденко, Б. В. Математика и математическое образование в современном мире / Б. В. Гнеденко. – М.: Просвещение, 1985.
19. Фадеев, Д. К. Элементы высшей математики для школьников / Д. К. Фадеев, М. С. Никулин, И. Ф. Соколовский. – М.: Наука, 1987.
20. Виленкин, Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин. – М.: Наука, 1969. – 328 с.
21. Гнеденко, Б. В. Элементарное введение в теорию вероятностей / Б. В. Гнеденко, А. Я. Хинчин. – М.: Наука, 1964.
22. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1972.
23. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2004. – 405 с.
24. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1, 2, 3 / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – М.: Высшая школа, 1971.
25. Афанасьев, В. В. Теория вероятностей в вопросах и задачах: учеб. пособие / В. В. Афанасьев. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ им. К. Д. Ушинского, 2004. – 250 с.

26. Сборник задач по математике для ВТУЗов / под ред. А. В. Ефимова. – М.: Наука, 1990. – Т. 3: Теория вероятностей и математическая статистика.

27. Кузнецова, В. А. Сборник задач по математике для студентов юридического факультета / В. А. Кузнецова, Л. Б. Медведева. – Ярославль: ЯрГУ, 2005. – 140 с.

28. Успенский, В. А. Математика для гуманитариев: философия преподавания / В. А. Успенский // Математика в высшем образовании: научно-методический журнал. – Н. Новгород, 2005. – № 3. – С. 91–104.

Приложения

Приложение 1

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499999

Приложение 2

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

$\gamma \backslash n$	0,95	0,99	0,999	$\gamma \backslash n$	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Приложение 3

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

$\gamma \backslash n$	0,95	0,99	0,999	$\gamma \backslash n$	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Тематические тесты по дисциплине

Тема 1. Множества и операции над ними

Вариант 1

1. Продолжите следующие определения: а) Множество считается определенным или заданным, если про каждый объект можно сказать,; в) Множества A и B равны, если

2. Верно ли, что пустое множество является подмножеством любого множества?

3. Среди следующих утверждений укажите верные:

а) $3 \in \{2, 3, 8, 0\}$, б) $4 \subset \{2, 4, 3, 8\}$; в) $\{4\} \subset \{2, 4, 3, 8\}$; г) $\{4\} \in \{2, 4, 3, 8\}$.

4. Сколько всего различных подмножеств имеет множество $A = \{9, 4, 1\}$?

5. Выпишите все подмножества множества $A = \{9, 4, 1\}$.

6. Впишите пропущенные слова в следующем определении: «Пересечением двух множеств называется, состоящее из тех и только тех элементов, которые».

7. Впишите пропущенные слова в следующем определении: «Разностью множеств A и B называется, состоящее из тех и только тех элементов, которые».

8. Продолжите утверждения:

а) $A \cap B = A$ тогда и только тогда, когда

б) $A \setminus B \subset \dots$;

в) $A \setminus B = B \setminus A$ тогда и только тогда, когда

9. Пусть $A = \{3, 4, 5, 7, 9\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} / -1 \leq x \leq 7\}$. Найдите множества $A \cup B, A \setminus B$.

10. В группе физиков 24 студента. Каждый из них занимается либо футболом, либо хоккеем, а 5 студентов – и футболом, и хоккеем. Сколько студентов занимается футболом, если хоккеем занимается половина студентов этой группы?

11. Изобразите на диаграмме Эйлера – Венна множество $A \cup B \cap C$.

Вариант 2

1. Продолжите следующие определения: а) Множество A является подмножеством множества B , если ...;
в) Множества A и B равны, если
2. Универсальное множество – это множество, ...
3. Среди следующих утверждений укажите верные:
а) $8 \in \{2, 3, 8, 0\}$, б) $3 \subset \{2, 4, 3, 8\}$; в) $\{3\} \subset \{2, 4, 3, 8\}$; г) $\{3\} \in \{2, 4, 3, 8\}$.
4. Сколько всего различных подмножеств имеет множество $A = \{1, -4, 7, 5\}$?
5. Выпишите все двухэлементные подмножества множества $A = \{1, -4, 7, 5\}$.
6. Впишите пропущенные слова в следующем определении: «Объединением двух множеств называется, состоящее из тех и только тех элементов, которые».
7. Впишите пропущенные слова в следующем определении: «Дополнением множества A до универсального называется, состоящее из тех элементов множества, которые ».
8. Продолжите утверждения:
а) $A \cup B = A$ тогда и только тогда, когда ;
б) $B \setminus A \subset \dots$;
в) $A \cup U = \dots$.
9. Пусть $A = \{3, 4, 5, 7, 9\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} / -1 \leq x \leq 7\}$. Найдите множества $A \cap B, B \setminus A$.
10. В СИЗО находится 20 человек. Из них 10 задержаны по статье А, 12 – по статье В и 7 – по статье С. Известно также, что по статьям А и В в СИЗО находятся 8 человек, по статьям А и С – 3 человека, по статьям В и С – 4 человека, а 2 человека задержаны по всем трем статьям. Сколько человек задержаны ровно по двум статьям?
11. Изобразите на диаграмме Эйлера – Венна множество $A \cap B \cup C$.

Тема 2. Числовые множества. Проценты

Вариант 1

1. Среди заданных чисел укажите иррациональные числа:

$$\frac{1}{2}; 0,(3); \sqrt{2}; \pi; \sqrt{5}-1; 0,1234567891011.$$

2. Выполните действия:

$$1) \frac{1}{3} - \frac{2}{3} : \frac{1}{6} = \dots; \quad 2) (0,(5) + 1,2(41)) : 3 = \dots$$

3. Могут ли в семеричной системе счисления быть числа, записанные в виде: а) 576, б) 1238, в) 235, г) 1029? Если такие числа есть, то записать их в десятичной системе счисления.

4. Чему равна сумма $1001_2 + 111_2$ в двоичной системе?

5. В каких системах счисления возможны равенства:

$$1) 12 + 13 = 30; \quad 2) 17 + 38 = 54?$$

6. Продолжите определение: «Процент – это».

7. После повышения на 20% зарплата стала составлять 8020 рублей. Какой была зарплата до повышения?

8. За день в городе произошло 36 преступлений, 6 из которых – преступления дорожно-транспортные. Какой процент преступлений не связан с ДТП?

9. Продолжите определение: «Рациональное число – это число,».

10. Укажите, в каких числовых множествах выполняется действие вычитания.

Вариант 2

1. Среди заданных чисел укажите рациональные:

$$0,8; 0,1(13); \sqrt{3}; e; 0,(1)+0,(8); \pi + 1.$$

2. Выполните действия:

$$1) \frac{1}{5} - \frac{3}{5} : 0,4 = \dots; \quad 2) 0,(3) + 1,5(63) : 3 = \dots$$

3. Могут ли в пятеричной системе счисления быть числа, записанные в виде: а) 576, б) 1234, в) 235, г) 1029? Если такие числа есть, то записать их в десятичной системе счисления.

4. Чему равна сумма $100_2 + 1101_2$ в двоичной системе?

5. В каких системах счисления возможны равенства:

$$1) 89 + 69 = 103; \quad 2) 2 + 4 = 10?$$

6. 5% от 13 равны
7. Объем промышленной продукции увеличился в 9 раз. На сколько процентов произошло увеличение?
8. Товар с перевозкой обошелся в 149 800 рублей. Расходы на перевозку составили 7% от стоимости самого товара. Сколько рублей стоила перевозка товара?
9. Продолжите определение: «Иррациональное число – это число, ... »
10. Укажите, в каких числовых множествах выполняется действие деления.

Тема 3. Элементы математической логики

Вариант 1

1. Укажите номера предложений, которые являются высказываниями:
- 1) Луна вращается вокруг Земли; 2) Прекрасная погода!
 - 3) Число 5 удовлетворяет неравенству $2x^2 - 3 \geq 10$;
 - 4) Рациональное число z меньше 4.
2. Заполните таблицу истинности

[a]	[b]	[a ∧ b]	[a]	[b]	[a ⇔ b]
И	И		И	И	
И	Л		И	Л	
Л	И		Л	И	
Л	Л		Л	Л	

3. Каким формулам равносильны следующие формулы:
 $A \wedge 0, A \Rightarrow 1, C \vee 1$?
4. Две формулы называются равносильными, если ...
5. Определите значение истинности высказывания A , если следующие высказывания истинны:
- 1) $A \wedge (2 \times 2 \leq 5)$; 2) Если A , то 4 – нечетное число.
6. Определите значение истинности высказывания A , если следующие высказывания ложны:
- 1) $A \vee (2 \times 2 \geq 7)$; 2) A тогда и только тогда, когда $2^2 = 4$.
7. Запишите формулы следующих высказываний: 1) Для того чтобы число делилось на 5, необходимо, чтобы оно оканчивалось на 0 или 5; 2) Судебное следствие признается неполным, когда по

делу не установлены с достаточной полнотой данные о личности обвиняемого.

8. Вставьте пропущенные слова в определение: «Аргумент называется правильным, если из ... следует ... ».

Вариант 2

1. Укажите номера предложений, которые являются высказываниями:

- 1) Хищение не является преступлением;
- 2) Действительное число x не превосходит трех;
- 3) Вы идете сегодня в театр?
- 4) Не все приговоры суда являются обвинительными.

2. Заполните таблицу истинности

[a]	[b]	[a ∨ b]	[a]	[b]	$a \Rightarrow b$
И	И		И	И	
И	Л		И	Л	
Л	И		Л	И	
Л	Л		Л	Л	

3. Каким формулам равносильны следующие формулы:
 $A \wedge 1, A \Rightarrow 0, C \vee 0$?

4. Формула называется тождественно истинной, если она ...

5. Определите значение истинности высказывания A , если следующие высказывания истинны:

- 1) $A \vee (3 \times 3 \geq 5)$; 2) A тогда и только тогда, когда $2^2 = 5$.

6. Определите значение истинности высказывания A , если следующие высказывания ложны:

- 1) $A \wedge (2 \times 2 \leq 4)$; 2) Если A , то 6 – нечетное число.

7. Запишите формулы следующих высказываний:

1) Для того чтобы число делилось на 3, достаточно, чтобы его сумма цифр делилась на 3;

2) Студент только тогда будет получать стипендию, когда сдаст все экзамены на «хорошо» и «отлично».

8. Вставьте пропущенные слова в утверждение: «Аргумент является правильным, если импликация ... является формулой алгебры высказываний».

Тема 4. Предикаты

Вариант 1

1. Вставьте пропущенные слова в определение: «Предикат – это утверждение с ... , которое обращается в ... , при ... переменных ».

2. Завершите определение: «Область определения предиката от одной переменной – это множество ... » .

3. Среди следующих утверждений найдите предикаты:

1) $x \leq 8$;

2) Граждане А и В проходят подозреваемыми по одному и тому же делу;

3) Не всякий человек имеет высшее образование;

4) $A \vee B = C$;

5) Некоторые юристы являются адвокатами.

4. Укажите область истинности предиката $A(x): -1 \leq x \leq 5$ на множестве: а) натуральных чисел, б) целых чисел, в) рациональных чисел.

5. На кругах Эйлера – Венна изобразите область истинности предиката $A(x) \wedge B(x)$.

6. Установите соответствие между высказываниями и их символической записью.

Высказывания:

1) Каждое рациональное число является действительным;

2) Некоторые рациональные числа являются действительным;

3) Ни одно рациональное число не является действительным;

4) Некоторые рациональные числа не являются действительными.

Символическая запись этих высказываний:

а) $(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$; б) $(\forall x)(Q(x) \Rightarrow R(x))$;

в) $(\exists x)(Q(x) \wedge \overline{R(x)})$; г) $(\forall x)(Q(x) \Rightarrow \overline{R(x)})$.

7. Среди следующих высказываний найдите пары высказываний, которые являются отрицаниями друг друга:

1) Все студенты нашей группы сдали зачет по математике;

2) Некоторые студенты нашей группы сдали зачет по математике;

3) Ни один студент нашей группы не сдал зачет по математике;

4) Некоторые студенты нашей группы не сдали зачет по математике.

Вариант 2

1. Вставьте пропущенные слова в утверждение: «Предикат – это функция, отображающая множество ... во множество ...».

2. Завершите определение: «Область истинности предиката от одной переменной – это множество ... ».

3. Среди следующих утверждений найдите предикаты:

1) $x^2 + y^2 = 1$ – уравнение окружности;

2) $x^2 + 5x + 6 = 0$;

3) Некоторые студенты не только учатся, но и работают;

4) Друзья А и В имеют одно и то же хобби;

5) $A \wedge B = C$.

4. Укажите область истинности предиката $A(x) : (x+2)(x^2-3)(2x+6)(4x-1) = 0$ на множестве:

а) натуральных чисел, б) целых чисел,

в) рациональных чисел, г) действительных чисел.

5. На кругах Эйлера – Венна изобразите область истинности предиката $A(x) \vee B(x)$.

6. Установите соответствие между высказываниями и их символической записью.

Высказывания:

1) Все студенты нашей группы сдали зачет по математике;

2) Некоторые студенты нашей группы сдали зачет по математике;

3) Ни один студент нашей группы не сдал зачет по математике;

4) Некоторые студенты нашей группы не сдали зачет по математике.

Символическая запись этих высказываний:

а) $(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$; б) $(\forall x)(Q(x) \Rightarrow R(x))$;

в) $(\exists x)(Q(x) \wedge \overline{R(x)})$; г) $(\forall x)(Q(x) \Rightarrow \overline{R(x)})$.

7. Среди следующих высказываний найдите пары высказываний, которые являются отрицаниями друг друга:

1) Каждое натуральное число является действительным;

2) Некоторые натуральные числа являются действительными;

3) Ни одно натуральное число не является действительным;

4) Некоторые натуральные числа не являются действительными.

Тема 5. Элементы комбинаторики и теории вероятностей

Вариант 1

1. Согласно классической схеме, вероятностью случайного события называется
2. Завершите определение: «Случайные события A и B называются независимыми, если ...».
3. Напишите формулы для вычисления вероятности суммы двух а) несовместных событий, б) совместных событий.
4. Произведением двух случайных событий называется ... , состоящее в том, что ...
5. Запишите простейшие свойства вероятности случайного события.
6. По мишени производится три выстрела. Рассматриваются события A_i – попадание при i -м выстреле ($i = 1, 2, 3$). Пользуясь операциями над событиями A_i , запишите формулы следующих событий: 1) ровно одно попадание, 2) хотя бы одно попадание.
7. В мешке имеется 6 шаров: 2 синих и 4 красных. Из него наудачу берут 3 шара. Найдите вероятность того, что среди взятых шаров один будет синим.
8. Случайная величина – это величина,
9. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

X	0	2	3
P	0,3		0,5

10. Какая характеристика случайной величины характеризует степень отклонения случайной величины от ее математического ожидания?

Вариант 2

1. Согласно статистическому подходу, вероятностью случайного события называется
2. Завершите определение: «Случайные события A и B называются несовместными, если ...».
3. Напишите формулы для вычисления вероятности произведения двух а) независимых событий, б) зависимых событий.

4. Суммой двух случайных событий называется ... , состоящее в том, что ...

5. Может ли вероятность случайного события быть равной а) двум; б) -1 ; в) $0,5$?

6. По мишени производится три выстрела. Рассматриваются события A_i – попадание при i -м выстреле ($i = 1, 2, 3$). Пользуясь операциями над событиями A_i , запишите формулы следующих событий: 1) попадание в мишень не раньше третьего выстрела, 2) хотя бы один промах.

7. В читальном зале есть 12 учебников по теории вероятностей, среди которых 4 новых. Наудачу берут 3 учебника. Какова вероятность, что среди них 2 новых?

8. Непрерывная случайная величина – это случайная величина, которая

9. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

X	0	2	3
P	0,4	0,3	

10. Средним квадратическим отклонением случайной величины называется величина $\sigma = \dots$.

Оглавление

Введение. Зачем нужна математика студентам гуманитарных направлений?	3
1. Элементы теории множеств	8
1.1. Множества и операции над ними	8
1.2. Конечные множества	16
1.3. Числа и операции над ними. Системы счисления	34
1.4. Взаимно однозначные и биективные соответствия. Равномощные множества	46
1.5. Задачи на проценты	51
2. Элементы математической логики	59
2.1. Формулы алгебры высказываний. Высказывания и операции над ними	59
2.2. Некоторые приложения алгебры высказываний	70
2.3. Предикаты	90
3. Элементы математического анализа	101
3.1. Функции. Элементарные функции	101
3.2. Предел функции	113
3.3. Производная и некоторые ее применения	123
3.4. Интегральное исчисление функции одной переменной	133
3.5. Некоторые приложения определенного интеграла	141
4. Некоторые вопросы алгебры	145
4.1. Матрицы и определители	145
4.2. Матричная алгебра в решении задач с экономическим содержанием	156
4.3. Применение матриц в теории игр	159
4.4. Системы линейных уравнений	168

5. Элементы теории вероятностей.....	181
5.1. Случайные события и операции над ними	181
5.2. Алгебра событий. Вероятности суммы и произведения событий	188
5.3. Полная группа событий. Формула полной вероятности	194
5.4. Случайные величины	197
6. Элементы математической статистики.....	209
6.1. Вариационные ряды и их графическая интерпретация...	209
6.2. Количественные характеристики вариационного ряда...	213
6.3. Понятие оценки параметров. Точечная оценка.....	217
6.4. Интервальные оценки. Доверительный интервал.....	223
6.5. Применение метода наименьших квадратов для обработки результатов наблюдений	229
7. Аксиоматический метод. Общие вопросы.....	234
8. Применение математического моделирования к решению некоторых практических задач.....	243
8.1. Задача линейного программирования.....	244
8.2. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики.....	252
8.3. Линейная модель обмена (модель международной торговли).....	255
8.4. Модель задачи из теории массового обслуживания.....	257
Ответы.....	262
Литература.....	281
Приложения.....	284

Учебное издание

Кузнецова Валентина Анатольевна
Медведева Людмила Борисовна

Математика
для студентов
гуманитарных направлений

Учебное пособие

Редактор, корректор М. В. Никулина
Верстка И. Н. Иванова

Подписано в печать 23.07.12. Формат 60×84 1/16.
Бум. офсетная. Гарнитура «Times New Roman».
Усл. печ. л. 17,43. Уч.-изд. л. 13,79.
Тираж 100 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.

Отпечатано
ООО «Ремдер» ЛР ИД № 06151 от 26.10.2001.
г. Ярославль, пр. Октября, 94, оф. 37
тел. (4852) 73-35-03, 58-03-48, факс 58-03-49.

