

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

21 мая 2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Избранные задачи вычислительной геометрии**

Направление подготовки (специальности)  
01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Математическое моделирование и численные методы»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 24 апреля 2024 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2024 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Избранные задачи вычислительной геометрии» обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом, относится к фундаменту математического образования, содействует формированию мировоззрения математика-прикладника и способствует подготовке его к профессиональной деятельности.

Целью преподавания дисциплины является ознакомление слушателей с некоторыми задачами вычислительной геометрии, спецификой применяемых вычислительных методов и развитию навыков решения соответствующих задач с помощью компьютера.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-1</b> Способен проводить научные исследования и получать новые научные и прикладные результаты самостоятельно и в составе научного коллектива	<b>И-ПК-1.1</b> Имеет способность проводить собственные научные исследования	<b>Знать:</b> постановку некоторых типовых задач вычислительной геометрии <b>Уметь:</b> решать типовые задачи вычислительной геометрии в аналитическом и алгоритмическом видах <b>Владеть навыками:</b> применения различных компьютерных методов решения задач вычислительной геометрии
	<b>И-ПК-1.2</b> Имеет опыт самостоятельного получения новых научных и (или) прикладных результатов	<b>Знать:</b> постановку задач, которые полностью или частично не решены или могут быть решены более эффективно <b>Уметь:</b> разрабатывать эффективный план решения аналитических или прикладных задач, находить в нем ключевые моменты <b>Владеть навыками:</b> описания полученных результатов и их представления, формулировки плана дальнейших исследований

	<b>И-ПК-1.3</b> Имеет опыт получения новых научных и (или) прикладных результатов в составе творческого коллектива	<b>Уметь:</b> правильно распределять функции при работе в творческом коллективе, реализовать план собственных работ при решении вычислительных задач геометрии <b>Владеть:</b> основными навыками творческой работы в коллективе (на материале задач вычислительной геометрии)
--	---	---

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1.	Вводная лекция	2	1					2	устный опрос
2.	Геометрические методы теории аппроксимации	2	1	2				4	устный опрос
3.	Одномерные интерполяционные проекторы и их оценки	2	1	2			1	4	задания для самостоятельной работы, устный опрос
4.	Основные понятия геометрии конечномерных выпуклых тел	2	2	2			1	2	устный опрос
5.	Осевые диаметры выпуклого тела	2	3	2				4	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контр. работа, инд. задание
6.	Линейная интерполяция на n-мерном кубе	2	3	4			1	5	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контр. работа, инд. задание
7.	Коэффициент поглощения симплексом единичного куба	2	3	2			1	5	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контр. работа, инд. задание
8.	Эйлеровы числа	2	2	2				4	задания для самостоятельной работы, устный опрос, инд. задание
							0,3	5,7	зачет
	Всего		16	16			4	0,3	35,7

## Содержание разделов дисциплины:

### Тема 1. Вводная лекция.

Предмет, задачи и порядок преподавания дисциплины.

### Тема 2. Геометрические методы теории аппроксимации.

Норма линейного оператора. Линейные методы приближения. Проектор. Неравенство Лебега.

### Тема 3. Одномерные интерполяционные проекторы и их оценки.

Интерполяционная формула Лагранжа. Норма интерполяционного проектора. Равномерные узлы и узлы Чебышева. Оценки нормы проектора.

### Тема 4. Основные понятия геометрии конечномерных выпуклых тел.

Симплекс. Барицентрические координаты. Осевые диаметры выпуклых тел. Характеристики, связанные с гомотетией. Операции Штейнера и Радзишевски.

### Тема 5. Осевые диаметры выпуклого тела.

Определение и свойства. Теорема о вычислении осевых диаметрах симплекса. Равенство  $\alpha(S) = \sum_{i=1}^n 1/d_i(S)$ . Вычисление максимального в симплексе отрезка заданного направления. Геометрические следствия равенства  $\alpha(S) = \sum_{i=1}^n 1/d_i(S)$ . Гипотеза Лассака. Задача Банга.

### Тема 6. Линейная интерполяция на n-мерном кубе.

Норма интерполяционного проектора. Последовательность  $\theta_n$ . Точные значения  $\theta_1$ ,  $\theta_3$ . Геометрические свойства минимальных проекторов для  $n=2$  и  $n=3$ . Известные оценки для  $\theta_n$ . Оценка снизу через многочлены Лежандра. Открытые вопросы.

### Тема 7. Коэффициент поглощения симплексом единичного куба.

Величина  $\xi(S)$ , Числа  $\xi_n$ . Соотношение  $\xi_n \sim n$ . Неравенства, связывающие  $\|P\|$  и  $\xi(S)$ ,  $\theta_n$  и  $\xi_n$ . Оценка  $\|P\|$  через осевые диаметры соответствующего симплекса S.

### Тема 8. Эйлеровы числа.

Эквивалентные определения и свойства. Связь с мерами слоев и сечений n-мерного куба. Неравенства для эйлеровых чисел. Открытые вопросы.

## 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

#### **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются: для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader;
- система Wolfram Mathematica. (<https://www.wolframcloud.com/>);
- Network 15 Mathematica 11 Increment Standard Bundled List Price with Service;
- Network 15 Mathematica 11 Upgrade L3549-7407.

#### **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT» [http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU <http://elibrary.ru/>
- База научных статей Mathnet
- База Scopus
- База Web of Sciences

#### **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

##### **а) основная литература**

1. Невский М. В., Ухалов А. Ю. Избранные задачи анализа и вычислительной геометрии. Часть I: учебное пособие. - Ярославль: ЯрГУ, 2020. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20200201.pdf>
2. Невский М. В. Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции. - Ярославль, 2012. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20120230.pdf>
3. Иродова И. П. Алгоритмы теории приближения: учебно-методическое пособие. - Ярославль: ЯрГУ, 2019.

##### **б) дополнительная литература**

1. Невский М. В., Иродова И. П. Некоторые вопросы теории приближения функций. - Ярославль, 1999. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/19990230.pdf>

2. Иродова И. П. Линейные функционалы и операторы в курсе функционального анализа: учебное пособие. - Ярославль: ЯрГУ, 2010. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20100299.pdf>
3. Ухалов А. Ю. Практикум по Wolfram Mathematica: практикум. - Ярославль: ЯрГУ, 2020. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20200205.pdf>
4. Климов В. С., Ухалов А. Ю. Решение задач математического анализа с использованием систем компьютерной математики: учебное пособие. - Ярославль: ЯрГУ, 2014. <https://math.uniyar.ac.ru/uchebnyie-posobiya-i-metodicheskie-materialyi-kafedryi-matematicheskogo-analiza>
5. Невский М. В., Ухалов А. Ю. Избранные задачи анализа и вычислительной геометрии. Часть 2: учебное пособие. - Ярославль: ЯрГУ, 2022. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20140206.pdf>

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

### **Автор:**

зав. кафедрой математического анализа,  
доктор физ.-мат. наук, доцент

М.В. Невский

**Фонд оценочных средств**  
**для проведения текущего контроля успеваемости**  
**и промежуточной аттестации студентов по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,**  
**используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**Задания для самостоятельной работы** даются по материалу лекций, учебным пособиям [1], [4], [8], другим источникам, могут быть сформулированы на странице ЭУК в Moodle ЯрГУ. Эти задания специально не оцениваются, но их выполнение контролируется преподавателем.

**Контрольная работа**

1. Вычислите норму интерполяционного проектора при линейной интерполяции непрерывных функций на квадрате  $[0,1]^2$  с узлами интерполяции  $(0,0), (1/2,1), (1,1/2)$ .
2. Для симплекса  $S$  с вершинами в узлах проектора из предыдущей задачи найдите осевые диаметры, а также величины  $\alpha(S)$  и  $\xi(S)$ . Примените базисные многочлены Лагранжа симплекса  $S$ .
3. Вычислите норму интерполяционного проектора при линейной интерполяции непрерывных функций на кубе  $[0,1]^3$  с узлами интерполяции  $(0,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)$ .
4. Для симплекса  $S$  с вершинами в узлах проектора из предыдущей задачи найдите осевые диаметры, а также величины  $\alpha(S)$  и  $\xi(S)$ . Примените базисные многочлены Лагранжа симплекса  $S$ .

**Методика оценивания контрольной работы состоит в следующем.**

- Полное решение каждой задачи оценивается в 25 баллов.  
Оценка «неудовлетворительно» - набрано менее 25 баллов.  
Оценка «удовлетворительно» - набрано от 25 до 59 баллов;  
Оценка «хорошо» - набрано от 60 до 74 баллов;  
Оценка «отлично» - набрано 75 баллов и выше.

**Примеры индивидуальных заданий**

1. Составить и реализовать алгоритм вычисления нормы одномерного интерполяционного проектора по данным узлам. Вычислить нормы проектора по  $n$  равномерным узлам или узлам Чебышёва при  $n$  от 2 до 50.
2. Численно найти расположение  $n$  узлов на отрезке, соответствующее минимальной норме интерполяционного проектора ( $n=2, 3, 4, 5$ ).
3. Составить и реализовать алгоритм вычисления нормы линейного интерполяционного проектора по данным трем узлам на единичном квадрате  $[0,1]^2$ . Тестировать на примерах. Численно найти расположение узлов, соответствующее минимальной норме проектора.
4. Составить и реализовать алгоритм вычисления нормы линейного интерполяционного проектора по данным четырем узлам на единичном кубе  $[0,1]^3$ . Найти минимальную норму проектора с узлами в вершинах куба.
5. Составить и реализовать алгоритм вычисления осевых диаметров двумерного или трехмерного симплекса с данными вершинами. Тестировать на примерах.

6. Составить и реализовать алгоритм вычисления максимального в симплексе отрезка заданного направления. Тестировать на примерах.
7. Составить и реализовать на алгоритм вычисления величины  $\alpha(S)$ . Тестировать на примерах.
8. Составить и реализовать на алгоритм вычисления величины  $\xi(S)$ . Тестировать на примерах.
9. Составить и реализовать алгоритмы вычисления числовых характеристик, связанных с поглощением гомотетическим образом симплекса шара или других выпуклых множеств.
10. Составить и реализовать алгоритм вычисления центра гомотетии симплекса, поглощающего куб с минимальным положительным коэффициентом гомотетии.
11. Найти аффинное преобразование пространства  $R^n$  переводящее невырожденный симплекс  $S$  с вершинами  $x^{(j)}$  в невырожденный симплекс  $T$  с вершинами  $y^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ . Реализовать соответствующий алгоритм на компьютере. Для такого преобразования при  $n=2$  изобразить эллипс, который является образом единичного круга с центром в нуле.
12. Вычислить на компьютере эйлеровы числа, исследовать их асимптотику, оценить константы из неравенств для них.
13. Составить и реализовать на компьютере алгоритм применения к выпуклому телу операций Радзишевски и Штейнера (плоский вариант).

**Положительная оценка** за выполнение индивидуального задания ставится, если

- студент владеет соответствующим материалом,
- составил и реализовал алгоритм решения задачи на компьютере,
- продемонстрировал работу программы преподавателю,
- представил в оговоренный срок краткий отчет по заданию (в обычной форме и (или) в электронном виде ЭУК в Moodle ЯрГУ).

## 2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Зачет по дисциплине «Избранные задачи вычислительной геометрии» проводится в устной форме.

### Вопросы к зачёту

1. Норма линейного оператора, её вычисление.
2. Линейные методы приближения. Проектор. Неравенство Лебега. Примеры проекторов.
3. Норма одномерного интерполяционного проектора. Оценки для равномерных узлов и узлов Чебышёва.
4. Вычисление нормы линейного интерполяционного проектора на квадрате и на кубе.
5. Симплекс. Барицентрические координаты. Осевые диаметры выпуклых тел. Характеристики, связанные с гомотетией. Операции Штейнера и Радзишевски, их свойства.
6. Свойства осевых диаметров выпуклого тела. Теорема об осевых диаметрах симплекса. Равенство  $\alpha(S) = \sum 1/d_i(S)$ .
7. Вычисление максимального в симплексе отрезка заданного направления
8. Гипотеза Лассака. Задача Банга. Усиление гипотезы Лассака для симплекса.
9. Линейная интерполяция на  $n$ -мерном кубе. Последовательность  $\theta_n$ . Точные значения  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ . Геометрические свойства минимальных проекторов для  $n=2$  и  $n=3$ .
10. Точный порядок асимптотики  $\theta_n$ . Неравенства для проекторов, соответствующих симплексам максимального объема в кубе.
11. Величина  $\xi(S)$ , числа  $\xi_n$ . Соотношение  $\xi_n \approx n$ . Неравенства, связывающие  $\|P\|$  и  $\xi(S)$ ,  $\theta_n$  и  $\xi_n$ .



12. Оценка  $\|P\|$  через осевые диаметры соответствующего симплекса  $S$ .
13. Геометрические оценки при интерполяции с помощью более широких пространств многочленов.

Оценка «зачтено» ставится, если студент имеет положительную оценку за индивидуальное задание (см. выше) и по мнению преподавателя удовлетворительно владеет материалом дисциплины. Последнее обстоятельство выясняется в результате устного ответа на вопросы программы.

**Приложение №2**  
**к рабочей программе дисциплины**  
**«Избранные задачи вычислительной геометрии»**

**Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Кроме овладения материалом дисциплины, обучающимся следует обратить особое внимание на выполнение индивидуального задания. Положительная оценка за задание является главным условием успешной сдачи зачета. При выполнении задания приветствуются использование графических средств и достаточно широкий набор тестирующих примеров, где это возможно по условию задачи. При выполнении работы студент вправе применить те компьютерные технологии, которые считает необходимыми. Например, возможно применение компьютерной системы Wolfram Mathematica или какой-то другой аналогичной системы компьютерной математики. Еще лучше, если задание будет выполнено различными компьютерными способами. При написании отчета следует не только привести результаты вычислений, но и описать те математические и компьютерные методы, которые были использованы в работе. Задание лучше сдать заблаговременно, чтобы учесть возможные замечания преподавателя.