

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов

МЕТОД КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Учебное пособие

*Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальностям Математика и
Прикладная математика и информатика*

ЯРОСЛАВЛЬ 2011

УДК 517.925+517.928

ББК 3 965.6я 73

Г 55

Рекомендовано

*Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2010 / 2011 учебного года*

Рецензенты:

Соболев В. А., доктор физико-математических наук, профессор;
кафедра прикладной математики и вычислительной техники
Ярославского государственного технического университета

Глызин, С. Д. Метод квазинормальных форм: учебное пособие /
С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов; Яросл. гос. ун-т. им. П. Г. Демидова. –
Г 55 Ярославль: ЯрГУ, 2011. – 104 с.
ISBN 978-5-8397-0803-7

Изложена теория квазинормальных форм в приложении к краевым задачам параболического и гиперболического типов и дифференциальным уравнениям с большим запаздыванием. Приводится эффективный алгоритм построения квазинормальной формы и вычисления ее коэффициентов.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальностям 010100 Математика и 010200.65 Прикладная математика и информатика, дисциплина «Численные методы анализа динамических систем» (блок ДС), очной формы обучения.

Рис. 4. Библиогр.: 64 назв.

УДК 517.925+517.928

ББК 3 965.6я 73

ISBN 978-5-8397-0803-7

© Ярославский
государственный университет
им. П. Г. Демидова, 2011

Оглавление

Введение	4
1. Квазинормальные формы систем параболического типа	7
1.1. Алгоритмическая часть	7
1.2. Основной результат	12
1.3. Пример уравнения Хатчинсона	22
2. Метод квазинормальных форм в задачах гиперболического типа	33
2.1. Высокомодовая буферность в $RCLG$ -линии	33
2.2. Явление буферности в $RCLG$ -линии с малыми искажениями	39
2.3. Автоколебания в системе Витта при резонансном спектре собственных частот	44
2.4. Заключительные замечания	51
3. Метод квазинормальных форм для систем с запаздыванием	59
3.1. Постановка проблемы	59
3.2. Основной результат	62
3.3. Доказательство теоремы 3.1	73
3.4. Заключение	94
Литература	98

Введение

В конце 19 — начале 20 века А. Пуанкаре поставил задачу качественного анализа дифференциальных уравнений. Успехи современных математических теорий, касающихся исследования поведения нелинейных динамических систем, так или иначе связаны с решением именно этой задачи. В ряду инструментов, разработанных для качественного анализа систем нелинейных дифференциальных уравнений, важное место занимает метод нормальных форм. Идея метода была высказана Пуанкаре в его диссертации и состояла в нахождении такого класса автономных динамических систем, которые можно было бы с помощью специальных замен свести к линейным. На этом пути было введено понятие резонансности собственных чисел матрицы линейной части системы и доказано, что в случае отсутствия таких резонансов сведение возможно. Позднее А. Дюлак выполнил обобщение этого результата на резонансный случай и показал, что в этой ситуации простейшим видом преобразованной системы является выражение, содержащее в правой части, наряду с линейными слагаемыми, еще и не уничтожаемые заменами резонансные члены. Такую систему называют нормальной формой, и ее построение позволяет успешно проанализировать локальную динамику изучаемой системы.

Однако по-настоящему действенным метод нормальных форм стал после работ, принадлежащих Н.М. Крылову, Н.Н. Боголюбову и Ю.А. Митропольскому [2, 43, 48], в которых разрабатывались асимптотические методы нелинейных колебаний. Нормализация динамической системы на устойчивом интегральном многообразии позволяет выделить систему малой размерности, отвечающую за локальные свойства исходной системы. В настоящее время методу нормальных форм посвящено большое число различных исследований, отметим здесь лишь [3, 4, 9, 57, 58, 64].

Сказанное делает актуальной разработку по возможности более экономного алгоритма построения нормальной формы. Заметим, что наиболее интересные выводы о качественном поведении получаются при изменении параметров динамической системы в окрестности критических значений, в

этом случае величина надкритичности служит естественным малым параметром, по которому удобно строить асимптотические формулы устойчивых решений изучаемой задачи. В то же время нормальная форма строится именно при критических значениях параметров, поэтому впоследствии возникает задача такого масштабирования возмущенной нормальной формы, чтобы полученная система могла быть удобно проанализирована, например, численными методами. В пособии [7] предлагается алгоритм, в ходе выполнения которого укороченная нормальная форма возникает из условий разрешимости для одного из слагаемых нормирующей замены, при этом она уже оказывается подходящим образом масштабированной по входящим переменным.

В большом числе математических моделей, пространство состояний которых бесконечномерно, естественным образом возникает ситуация, когда в задаче об устойчивости решений такой модели имеет место бесконечномерное вырождение. Такая ситуация возможна в краевых задачах параболического и гиперболического типов, а также в уравнениях с большим запаздыванием.

Отметим, что в случае конечномерного вырождения даже в ситуации уравнений с распределенными параметрами может быть обосновано применение классических методов нелинейного анализа — теоремы о центральном многообразии и метода нормальных форм, которые приводят к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Естественное предположить, что при бесконечномерном вырождении, пользуясь аналогичными алгоритмами, можно получить бесконечномерные системы уравнений, а затем привести их к некоторым краевым задачам, устойчивые или дихотомичные режимы которых имеют соответствием режимы исходной системы той же устойчивости.

Возникает закономерный вопрос о том, можно ли получить некоторые простейшие нелинейные краевые задачи в результате процесса некой «формальной нормализации». Начиная с Г. Хакена, этому вопросу уделяли большое внимание [54], причем обычно *a priori* считалось, что решения исходной динамической системы зависят от «быстрых» и «медленных» переменных, а сама система рассматривалась в окрестности точки какой-нибудь бифуркации. Далее проводилось усреднение по быстрым переменным, в результате которого получалось модельное уравнение, зависящее только от медленных переменных. Таким способом были выведены, например, уравнение Гинзбурга–Ландау

$$\xi_t = \kappa_0 \xi_{xx} + \kappa_1 \xi - \kappa_2 |\xi|^2 \xi, \quad (1)$$

где $\xi(t, x)$ — комплекснозначная скалярная функция, а $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2$ — комплексные постоянные, удовлетворяющие условию $\operatorname{Re}(\varkappa_j) > 0$, $j = 0, 1, 2$ (см. [61, 62]), а также уравнение Курамото–Сивашинского [63], имеющее вид

$$u_t + uu_x + au_{xx} + \beta u_{xxx} = 0, \quad (2)$$

где $\beta > 0$, а знак параметра a произволен.

Строгий математический вывод уравнения (1) из исходной параболической системы с малыми коэффициентами диффузии предпринят в работах [37–39]. По отношению к этому уравнению Ю.С. Колесовым был предложен термин «квазинормальная форма», а сам метод, использованный в указанных работах, получил название метода квазинормальных форм. С помощью этого метода впоследствии удалось дать строгий математический вывод и уравнения (2) (см. [25]).

Суммируя все сказанное, приходим к выводу, что объектом метода квазинормальных форм в принципе может стать любая система с малым параметром ε , в задаче об устойчивости нулевого положения равновесия которой при $\varepsilon = 0$ реализуется бесконечномерное вырождение. Сам же метод разбивается на два этапа. На первом из них к исходной системе применяется процедура формальной нормализации, результатом которой оказывается некая модельная система (квазинормальная форма). Эта система уже не содержит малого параметра и может представлять собой как уравнение в частных производных, так и счетную систему обыкновенных уравнений. Типичные примеры такого рода представлены в главе 2 и 3.

Второй этап метода квазинормальных форм — получение серии строгих результатов о соответствии между специальными стационарными режимами квазинормальной формы и исходной системы (как правило, речь идет о циклах или торах).

Материал пособия разбит на три главы, в первой из которых излагается формализм метода квазинормальных форм в применении к простейшему случаю бесконечномерного вырождения — задаче реакция–диффузия с диффузионным членом, стремящимся к нулю. Во второй главе метод квазинормальных форм применяется к задачам гиперболического типа, рассмотрено несколько содержательных примеров из радиофизических приложений. В третьей главе обсуждается уравнение с большим запаздыванием, рассматривается задача сведения этого уравнения к краевой задаче параболического типа. Изложение ведется на примере радиофизической системы с большим запаздыванием, которое реализуется за счет длинной линии в цепи обратной связи.

Глава 1.

Квазинормальные формы систем параболического типа

В первой главе пособия, написанной с использованием результатов работ [5, 39, 40, 42], содержится изложение алгоритмической части метода квазинормальных форм в простейшем случае сингулярно возмущенных краевых задач параболического типа, рассмотрены несколько содержательных примеров.

1.1. Алгоритмическая часть

Для описания алгоритмической части метода квазинормальных форм изложим сначала методику построения обычной нормальной формы на устойчивом интегральном многообразии в случае конечномерного вырождения (см., например, [7]). Уточним сначала постановку задачи и условия, накладываемые на модельную систему. Пусть задана система

$$\dot{u} = (A_0 + \varepsilon A_1)u + F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + \dots, \quad (1.1)$$

обыкновенных дифференциальных уравнений в \mathbb{R}^n с малым параметром $\varepsilon > 0$, удовлетворяющая следующим стандартным бифуркационным ограничениям:

1) матрица A_0 имеет на мнимой оси m пар простых собственных значений $\pm i\omega_s$, $\omega_s > 0$, $s = 1, \dots, m$ (остальные ее точки спектра предполагаем лежащими в комплексной полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$);

2) для частот ω_s выполняются условия нерезонансности

$$\omega_s \neq n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \dots + n_m\omega_m, \quad s = 1, \dots, m, \quad (1.2)$$

где (n_1, \dots, n_m) — произвольный целочисленный вектор, удовлетворяющий неравенствам

$$2 \leq |n_1| + |n_2| + \dots + |n_m| \leq 3; \quad (1.3)$$

3) $F_2(u, u)$, $F_3(u, u, u)$, ... — квадратичная, кубическая и т. д. формы.

При сделанных допущениях автоколебания системы (1.1), бифурцирующие из ее нулевого состояния равновесия при $\varepsilon > 0$, будем искать в виде формального ряда по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$u = \sqrt{\varepsilon}u_0(t, \tau) + \varepsilon u_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2}u_2(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (1.4)$$

где

$$u_0 = \sum_{s=1}^m [\xi_s a_s \exp(i\omega_s t) + \bar{\xi}_s \bar{a}_s \exp(-i\omega_s t)]. \quad (1.5)$$

Здесь a_s , $s = 1, \dots, m$ — собственные векторы матрицы A_0 , отвечающие ее собственным значениям $i\omega_s$ и нормированные условиями $(a_s, b_s) = 1$, $(\bar{a}_s, b_s) = 0$, $s = 1, \dots, m$, где $A_0^* b_s = -i\omega_s b_s$, а $(*, *)$ — евклидово скалярное произведение в \mathbb{C}^n ; $\xi_s = \xi_s(\tau)$ — пока произвольные (подлежащие определению) комплексные амплитуды; все функции u_k , $k \geq 1$, — тригонометрические полиномы переменных $\omega_1 t, \dots, \omega_m t$.

Подставляя соотношения (1.4), (1.5) в уравнение (1.1) и приравнявая слева и справа коэффициенты при ε , для отыскания x_1 получаем линейную неоднородную систему

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - A_0 u_1 = g_1(t, \tau), \quad (1.6)$$

где

$$g_1 = \sum_{s,k=1}^m \left[F_2(a_s, a_k) \xi_s \xi_k \exp(i(\omega_s + \omega_k)t) + F_2(a_s, \bar{a}_k) \xi_s \bar{\xi}_k \exp(i(\omega_s - \omega_k)t) + \right. \\ \left. + F_2(\bar{a}_s, a_k) \bar{\xi}_s \xi_k \exp(i(\omega_k - \omega_s)t) + F_2(\bar{a}_s, \bar{a}_k) \bar{\xi}_s \bar{\xi}_k \exp(-i(\omega_s + \omega_k)t) \right],$$

а переменная τ рассматривается как параметр. Из уравнения (1.6) функция x_1 однозначно определяется в том же виде, что и неоднородность g_1 , т. е. в виде суммы нулевых и вторых гармоник переменных $\omega_1 t, \dots, \omega_m t$. Подчеркнем, что возможность такого определения обеспечивает группа условий нерезонансности (1.2), отвечающая случаю $|n_1| + \dots + |n_m| = 2$.

Приравняем затем коэффициенты при степени $\varepsilon^{3/2}$. В результате для u_2 приходим к аналогичному (1.6) уравнению, но с неоднородностью g_2 , являющейся суммой первых и третьих гармоник. В таком же виде ищем и $u_2(t, \tau)$. Однако здесь возникает новый момент: для амплитуд функции u_2 при первых гармониках получаются вырожденные линейные неоднородные алгебраические уравнения, а условия их разрешимости задаются равенствами

$$(g_{2,s}(\tau), b_s) \equiv 0, \quad s = 1, \dots, m, \quad (1.7)$$

где $g_{2,s}$ — коэффициенты неоднородности g_2 при $\exp i\omega_s t$. Эти условия приводят, в свою очередь, к системе вида

$$\frac{d\xi_s}{d\tau} = \left[(A_1 a_s, b_s) + \sum_{k=1}^m d_{sk} |\xi_k|^2 \right] \xi_s, \quad s = 1, \dots, m, \quad (1.8)$$

для нахождения неизвестных амплитуд ξ_s (при этом $\bar{\xi}_s$ удовлетворяют комплексно сопряженным уравнениям).

И наконец, остается добавить, что если в качестве фигурирующих в (1.5) функций $\xi_s = \xi_s(\tau)$, $s = 1, \dots, m$, выбрано произвольное решение системы (1.8), то полностью определяются все три выписанных в (1.4) слагаемых. Действительно, однозначную разрешимость линейных неоднородных алгебраических уравнений для коэффициентов функции u_2 при третьих гармониках обеспечивают оставшиеся условия нерезонансности из (1.2), (1.3), отвечающие случаю $|n_1| + \dots + |n_m| = 3$.

Несколько отступая от общепринятой терминологии, систему (1.8) назовем нормальной формой исходного уравнения (1.1). Подобное название оправдано тем, что именно она отвечает за бифуркации циклов и торов этого уравнения. Для того чтобы сформулировать здесь строгий результат, перейдем от (1.8) к вспомогательной системе для $\eta_s = |\xi_s|^2$:

$$\frac{d\eta_s}{d\tau} = \left[\alpha_s + \sum_{k=1}^m \alpha_{sk} \eta_k \right] \eta_s, \quad s = 1, \dots, m, \quad (1.9)$$

где $\alpha_s = 2\operatorname{Re}(A_1 a_s, b_s)$, $\alpha_{sk} = 2\operatorname{Re} d_{sk}$. Предположим, что система (1.9) имеет некоторое состояние равновесия

$$\eta_{s_j} = \rho_j > 0, \quad j = 1, \dots, p; \quad \eta_s = 0 \text{ при } s \neq s_j, \quad (1.10)$$

где $p \leq m$, $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_p \leq m$ — произвольно фиксированные натуральные числа. Тогда нормальная форма (1.8) имеет, очевидно, p -

мерный автомодельный тор вида

$$\xi_{s_j}(\tau) = \sqrt{\rho_j} \exp(i\psi_j\tau), \quad j = 1, \dots, p; \quad \xi_s = 0 \text{ при } s \neq s_j, \quad (1.11)$$

где

$$\psi_j = \operatorname{Im}(A_1 a_{s_j}, b_{s_j}) + \sum_{k=1}^p \rho_k \operatorname{Im} d_{s_j s_k}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Подставляя, далее, компоненты этого тора в первые три слагаемых ряда (1.4), получим приближенный (с точностью до ε^2 по невязке) инвариантный тор исходной системы (1.1). Тем самым возникает вопрос о существовании и устойчивости соответствующего ему точного инвариантного тора. Ответ на него дает следующее утверждение (см. [7]).

Теорема 1.1. Пусть система (1.8) имеет p -мерный автомодельный тор вида (1.11), экспоненциально орбитально устойчивый или дихотомичный. Тогда по любому натуральному l можно указать такое достаточно малое $\varepsilon_l > 0$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_l$ исходная система (1.1) имеет p -мерный инвариантный тор той же устойчивости, задающийся равенствами

$$u = \sqrt{\varepsilon} \sum_{j=1}^p \sqrt{\rho_j} [a_{s_j} \exp(i\varphi_j) + \bar{a}_{s_j} \exp(-i\varphi_j)] + \varepsilon u_*(\varphi, \varepsilon), \quad (1.12)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \varepsilon \psi + \varepsilon^{3/2} \psi_*(\varphi, \varepsilon).$$

Здесь $\varphi = \operatorname{colon}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$, $\psi = \operatorname{colon}(\psi_1, \dots, \psi_p)$, $\omega = \operatorname{colon}(\omega_{s_1}, \dots, \omega_{s_p})$, а 2π -периодические по φ функции u_* , ψ_* и их всевозможные частные производные по φ до порядка l включительно ограничены равномерно по ε , φ в метрике \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^p соответственно.

В дополнение к сформулированной теореме заметим, что проверка устойчивости автомодельного тора (1.11) сводится, очевидно, к исследованию устойчивости соответствующего ему состояния равновесия (1.10) в системе (1.8), поэтому количество и устойчивость инвариантных торов вида (1.12) у исходного уравнения (1.1) определяется по состояниям равновесия вспомогательной системы (1.9) в конусе векторов с неотрицательными координатами. Прделанные выше построения имеют прозрачный геометрический смысл. В самом деле, при сформулированных ограничениях у системы (1.1) в некоторой достаточно малой окрестности нуля существует $2m$ -мерное экспоненциально орбитально устойчивое центральное многообразие, а система (1.8) в силу своего вывода является укороченной (с

точностью до слагаемых порядка ε) нормальной формой на данном многообразии. Таким образом, теорема 1.1 — это стандартное утверждение о соответствии между грубыми стационарными режимами исходной системы (1.1) и ее укороченной нормальной формы.

Рассмотрим теперь задачу (1.1), учитывая зависимость величины u не только от t , но и от пространственной переменной x . Предположим, что функция $u(t, x)$ удовлетворяет условиям краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \Delta u + (A_0 + \varepsilon A_1)u + F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (1.13)$$

часто называемой уравнением типа «реакция-диффузия». Здесь $u \in \mathbb{R}^n$, D — матрица, все собственные значения которой лежат справа от мнимой оси; относительно матрицы A_0 и функций $F_2(u, u)$, $F_3(u, u, u)$ будем предполагать выполненными условия пунктов 1)-3), приведенные выше; будем считать, что пространственная переменная x принадлежит ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^m$ $m \geq 1$ с границей $\partial \Omega$ класса $C^{2+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$; ν полагаем направлением внешней нормали к границе $\partial \Omega$.

Сформулируем еще одно ограничение (в [37] оно названо условием отсутствия *взрывной диффузионной неустойчивости*) на параметры уравнения (1.13). Считаем, что при всех $z > 0$ собственные значения матрицы $A_0 - zD$ лежат в левой открытой комплексной полуплоскости, причем при малых z близкие к $\pm i\omega_0$ ее собственные значения общим образом отходят от мнимой оси.

Пусть, как и ранее,

$$A_0 a_s = i\omega_0 a_s, \quad A_0^* b_s = -i\omega_0 b_s, \quad (a_s, b_s) = 1, \quad s = 1, \dots, m. \quad (1.14)$$

Тогда последнее из предполагаемых выше ограничений эквивалентно неравенствам

$$\operatorname{Re}(D a_s, b_s) > 0, \quad s = 1, \dots, m. \quad (1.15)$$

Отметим, что при нарушении условия отсутствия взрывной диффузионной неустойчивости перестает быть локальной проблема построения устойчивых автоколебаний краевой задачи (1.13): на высоких модах (собственных функциях оператора Лапласа с номерами порядка ε^{-1}) экспоненциально растут (с показателем экспоненты порядка единицы) решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \Delta u + A_0 u, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (1.16)$$

Предложенный выше алгоритм нормализации может быть формально применен и к задаче (1.13). По аналогии с (1.1) стационарные режимы краевой задачи (1.13) ищем в виде

$$u(t, \tau, x) = \sqrt{\varepsilon} u_0(t, \tau, x) + \varepsilon u_1(t, \tau, x) + \varepsilon^{3/2} u_2(t, \tau, x) + \dots, \quad (1.17)$$

аналогичном (1.4). Здесь $\tau = \varepsilon t$ — как и ранее, медленное время, а

$$u_0(t, \tau, x) = \sum_{s=1}^m [\xi_s(\tau, x) a_s \exp(i\omega_s t) + \bar{\xi}_s(\tau, x) \bar{a}_s \exp(-i\omega_s t)]. \quad (1.18)$$

Подставляя (1.17), (1.18) в (1.13) и действуя в точности, как и в случае системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1), приходим к краевой задаче

$$\frac{d\xi_s}{d\tau} = (Da_s, b_s)\Delta\xi_s + \left[(A_1 a_s, b_s) + \sum_{k=1}^m d_{sk} |\xi_k|^2 \right] \xi_s, \quad \frac{\partial \xi_s}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (1.19)$$

$s = 1, \dots, m.$

Полученную краевую задачу будем называть *квазинормальной формой* краевой задачи (1.13). В следующем пункте сформулируем основной результат, касающийся соответствия между решениями квазинормальной формы и исходной краевой задачи (1.13).

1.2. Основной результат

1.2.1. Формулировка основной теоремы. Сформулируем и докажем основной результат в несколько более простом случае, нежели описанный выше. Будем считать, что у матрицы A_0 на мнимой оси находится только одна пара $\pm i\omega_0$, а все остальные собственные числа лежат в левой комплексной полуплоскости, тогда в качестве квазинормальной формы краевой задачи (1.13) выступает не система (1.19), а одно уравнение параболического типа

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = (Da, b)\Delta\xi + (A_1 a, b)\xi + d\xi|\xi|^2, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0. \quad (1.20)$$

В правой части (1.20) d — первая ляпуновская величина обыкновенного уравнения (1.1). Ее значение определяется нелинейностью (1.1) и может быть представлено (см., например, [7]) в виде

$$d = (F_2(a, w_0) + F_2(w_0, a) + F_2(\bar{a}, w_1) + F_2(w_1, \bar{a}) + \\ + F_3(a, a, \bar{a}) + F_3(a, \bar{a}, a) + F_3(\bar{a}, a, a), b), \quad (1.21)$$

где $w_0 = -A_0^{-1}(F_2(\bar{a}, a) + F_2(a, \bar{a}))$, $w_1 = (2i\omega E - A_0)^{-1}F_2(a, a)$.

Напомним, что краевая задача (1.20) дополняется краевой задачей для $\bar{\xi}$ с комплексно-сопряженными коэффициентами.

Нам потребуется следующее определение.

Определение 1.1. Автомоделным циклом краевой задачи (1.20) назовем ее периодическое решение вида

$$\xi(\tau, x) = \xi_0(x) \exp(i\alpha_0\tau), \quad (1.22)$$

где $\xi_0(x)$ — комплекснозначная функция, а $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ — некоторая константа.

Теорема 1.2. Пусть квазинормальная форма (1.20) имеет грубый автомоделный цикл $\xi(\tau, x) = \xi_0(x) \exp(i\alpha_0\tau)$. Пусть выполнено сформулированное выше условие отсутствия взрывной диффузионной неустойчивости. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ краевая задача (1.13) имеет грубый цикл с тем же свойством устойчивости, асимптотика которого на промежутке времени порядка ε^{-1} с точностью до величин порядка $\varepsilon^{3/2}$ в метрике $C^{2+\alpha}$ получается путем учета (1.22) в выражениях (1.17), (1.18).

1.2.2. Общие свойства системы в вариациях на автомоделном цикле. Линеаризуя квазинормальную форму (1.20) на ее автомоделном цикле (1.22), приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= (Da, b)\Delta\eta_1 + (A_1a, b)\eta_1 + d[2|\xi_0(\tau, x)|^2\eta_1 + \xi_0^2(\tau, x)\eta_2], \\ \dot{\eta}_2 &= (D\bar{a}, \bar{b})\Delta\eta_2 + (A_1\bar{a}, \bar{b})\eta_2 + \bar{d}[\bar{\xi}_0^2(\tau, x)\eta_1 + 2|\xi_0(\tau, x)|^2\eta_2], \end{aligned} \quad (1.23)$$

дополненной условиями непроницаемости на границе $\partial\Omega$ области Ω . Выполняя в (1.23) замены

$$\eta_1 \rightarrow \eta_1 \exp(i\alpha_0\tau), \quad \eta_2 \rightarrow \eta_2 \exp(-i\alpha_0\tau),$$

получаем постоянную по τ систему

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= (Da, b)\Delta\eta_1 + d_1(x)\eta_1 + d_2(x)\eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= (D\bar{a}, \bar{b})\Delta\eta_2 + \bar{d}_2(x)\eta_1 + \bar{d}_1(x)\eta_2, \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\text{где} \quad d_1(x) = (A_1a, b) - i\alpha_0 + 2d|\xi_0|^2, \quad d_2(x) = d\xi_0^2(x). \quad (1.25)$$

Положим

$$L_0 = \begin{pmatrix} (Da, b) & 0 \\ 0 & (D\bar{a}, \bar{b}) \end{pmatrix} \Delta + \Lambda_0(x), \quad (1.26)$$

где элементами первой строки матрицы Λ_0 являются функции (1.25), а второй — функции $\bar{d}_2(x)$, $\bar{d}_1(x)$. По построению оператор L_0 , эллиптичность которого обеспечивает неравенство (1.15), аннулируется на вектор-функции с координатами $i\xi_0(x)$, $-i\bar{\xi}_0(x)$.

Напомним, что автомодельный цикл (1.22) квазинормальной формы (1.20) называется грубым, если не равны нулю действительные части ненулевых точек спектра оператора (1.26), а нулевое собственное число является простым. При этом, если у него имеются собственные значения с положительными действительными частями, цикл называется дихотомичным, в противном случае — орбитально экспоненциально устойчивым.

Чтобы объяснить фундаментальность свойств системы (1.24) для доказательства теоремы, сначала разберемся со свойствами обыкновенной части уравнения в вариациях исходной краевой задачи на его приближенном периодическом по τ решении.

1.2.3. Разделение критических и некритических переменных в обыкновенной части, линеаризованной на приближенном цикле краевой задачи. Обозначим через $u(\tau, x, \varepsilon)$ приближенное периодическое решение краевой задачи (1.20), о котором идет речь в формулировке теоремы. В линеаризованной на нем краевой задаче удобно выполнить нормировку времени

$$\left(1 + \varepsilon \frac{\alpha_0}{\omega_0}\right) \tau \rightarrow t, \quad (1.27)$$

чтобы избежать зависимости периода от ε . Отметим, что в линеаризованной краевой задаче достаточно оставить слагаемые порядка $\varepsilon^{1/2}$ и ε .

Важное место в анализе линеаризованной краевой задачи занимает выявление свойств ее обыкновенной части

$$\frac{dh}{dt} = A(t, x, \varepsilon)h, \quad (1.28)$$

где

$$A(t, x, \varepsilon) = A_0 + \varepsilon^{1/2}A_1(t, x) + \varepsilon A_2(t, x). \quad (1.29)$$

Отметим, что по построению $2\pi/\omega_0$ -периодические по t матрицы A_1 и A_2 гладко зависят от переменной x , которая пока считается параметром.

Выполним в системе (1.28) замену

$$h \rightarrow h \exp(-\gamma_0 t), \quad (1.30)$$

где положительная постоянная γ_0 выбрана так, что матрицы A_0 и $A_0 + \gamma_0 I$ имеют одинаковое количество собственных значений с отрицательными действительными частями. Из (1.29) следует, что при любых $x \in \bar{\Omega}$ и при достаточно малых значениях ε для уравнения в \mathbb{R}^n

$$\frac{dh}{dt} = [\gamma_0 I + A(t, x, \varepsilon)]h \quad (1.31)$$

имеет место экспоненциальная дихотомия решений. Именно, оно имеет двумерное подпространство экспоненциально растущих решений и $(n-2)$ -мерное подпространство экспоненциально затухающих. Через $P_-(t, x, \varepsilon)$ и $P_+(t, x, \varepsilon)$, где $P_- + P_+ = I$, обозначим связанные с этим понятием $2\pi/\omega_0$ -периодические по t проекторы в \mathbb{R}^n . Напомним, что решения с начальными условиями из $P_-(t_0, x, \varepsilon)\mathbb{R}^n$, задаваемыми в момент времени t_0 , при $t > t_0$ принадлежат $P_-(t, x, \varepsilon)\mathbb{R}^n$ и экспоненциально растут при $t \rightarrow \infty$, а решения с начальными условиями из $P_+(t_0, x, \varepsilon)\mathbb{R}^n$ экспоненциально затухают. Подчеркнем, что эти проекторы гладко зависят от t , x и $\varepsilon^{1/2}$.

Из способа выбора постоянной γ_0 в замене (1.30) следует, что для интересующего нас уравнения (1.28) проекторы P_- и P_+ выполняют несколько иную роль: решения с начальными условиями из $P_+\mathbb{R}^n$ по-прежнему экспоненциально затухают, а в силу (1.29) стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ характеристические показатели решений с начальными условиями из двумерного подпространства $P_-\mathbb{R}^n$.

Введем критические и некритические переменные

$$h^1 = P_-(t_0, x, \varepsilon)h, \quad h^2 = P_+(t_0, x, \varepsilon)h. \quad (1.32)$$

В силу равенств [49]

$$\frac{dP_{\pm}}{dt}u = A(t, x, \varepsilon)P_{\pm}(t, x, \varepsilon)u - P_{\pm}(t, x, \varepsilon)A(t, x, \varepsilon)u \quad (1.33)$$

уравнение (1.28) в переменных (1.32) записывается в виде системы

$$\frac{dh^1}{dt} = A(t, x, \varepsilon)h^1, \quad \frac{dh^2}{dt} = A(t, x, \varepsilon)h^2, \quad (1.34)$$

в которой разделены критические и некритические переменные. В системе (1.34) выделим главные по порядку слагаемые правых частей. Для этого применим к уравнению (1.28) стандартный алгоритм выделения критических переменных. Рассмотрим $2\pi/\omega_0$ -периодическую матрицу размерности $2 \times n$

$$V_0(t) = [a \exp(i\omega_0 t), \bar{a} \exp(-i\omega_0 t)] \quad (1.35)$$

и найдем матричное решение уравнения (1.28) в виде

$$V(t, x, \varepsilon) \exp [(\varepsilon \Lambda_0(x) + \varepsilon^2 \Lambda_1(x) + \dots)t], \quad (1.36)$$

где $\Lambda_0(x), \Lambda_1(x), \dots$ — подлежащие определению двумерные квадратные матрицы, а

$$V(t, x, \varepsilon) = V_0(t) + \varepsilon^{1/2} V_1(t, x) + \varepsilon V_2(t, x) + \dots \quad (1.37)$$

Отметим, что элементы матриц V_1, V_2, \dots предполагаются тригонометрическими по t . Подставляя (1.36) в уравнение (1.28) и приравнявая коэффициенты при степенях $\varepsilon^{1/2}$, в силу (1.35) и свойств матрицы A_1 из (1.29) приходим к линейному уравнению, разрешимому в классе тригонометрических функций. Из способа же составления квазинормальной формы вытекает, что уравнение относительно V_2 разрешимо в этом классе в том и только том случае, если матрица Λ_0 совпадает с фигурирующей в правой части выражения (1.26) матрицей. Уравнение же для нахождения V_3 снова получим разрешимым в классе тригонометрических функций.

Пусть матрица-строка V вычислена с точностью до ε^2 . В статье [49] отмечено, что подсчитанную часть этой матрицы можно так возмутить слагаемыми порядка ε^2 , что ее столбцы будут доставлять комплексно-сопряженный $2\pi/\omega_0$ -периодический по t базис в $P_- \mathbb{R}^n$

$$v(t, x, \varepsilon), \quad \bar{v}(t, x, \varepsilon) \quad (1.38)$$

с гладкой зависимостью от t, x , и $\varepsilon^{1/2}$.

Применяя аналогичные рассуждения к присоединенному к (1.28) уравнению, можно построить биортогональные к (1.38) комплексно-сопряженные $2\pi/\omega_0$ -периодические по t векторы

$$w(t, x, \varepsilon), \quad \bar{w}(t, x, \varepsilon), \quad (1.39)$$

служащие базисными в аналогичном $P_- \mathbb{R}^n$ двумерном подпространстве \mathbb{R}^n присоединенного уравнения.

Итак, получено аналитическое описание проектора P_- : согласно (1.38) и (1.39) имеем

$$\begin{aligned} P_-(t, x, \varepsilon)h &= zv(t, x, \varepsilon) + \bar{z}\bar{v}(t, x, \varepsilon) \\ z &= (h, w), \quad \bar{z} = (\bar{h}, \bar{w}). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Фиксируем произвольно полный набор линейно независимых векторов a_1, \dots, a_{n-2} из корневого подпространства матрицы A_0 , отвечающего

ее собственным значениям с отрицательными действительными частями. Затем в уравнении (1.28) при помощи равенства

$$h = zv + \bar{z}\bar{v} + z_1 P_+ a_1 + \cdots + z_{n-2} P_+ a_{n-2} \quad (1.41)$$

перейдем к комплексно-сопряженным переменным z, \bar{z} и вещественным переменным z_1, \dots, z_{n-2} . Приходим к более детализированной реализации системы (1.34)

$$\begin{aligned} \frac{dh^1}{dt} &= \varepsilon \Lambda_0(x) h^1 + \varepsilon^2 \Lambda_1(x, \varepsilon) h^1, \\ \frac{dh^2}{dt} &= B_0 h^2 + \varepsilon^{1/2} B_1(t, x, \varepsilon) h^2. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Здесь B_0 — матрица линейного оператора A_0 , записанного в матричном виде с использованием базиса a_1, \dots, a_{n-2} , действующего в упоминавшемся выше корневом подпространстве, $2\pi/\omega_0$ -периодические по t матрицы Λ_1 и B_1 гладко зависят от t, x , и $\varepsilon^{1/2}$, а за прежними по смыслу переменными обозначения сохранены. Основное преимущество, которое имеет (1.42) по сравнению с (1.34), состоит в том, что в ней выделены главные по порядку слагаемые относительного малого параметра ε . Дополнительно отметим, что в соответствии с (1.40) при $\varepsilon = 0$ имеем

$$P_-^0 h = (h, b) a \exp(i\omega_0 t) + \text{к.с.}, \quad (1.43)$$

где для вектора b выполнено еще одно условие $(a, b) = 0$.

Подводя итог проделанным построениям, сформулируем утверждение.

Лемма 1.1. *Если в уравнении (1.28) выполнить замену (1.41), приходим к системе (1.42) с разделенными критическими и некритическими переменными.*

1.2.4. Галеркинские аппроксимации в проблеме частичного разделения критических и некритических переменных при учете диффузии. В линеаризованном на приближенном цикле уравнении

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \varepsilon D \Delta h + A(t, x, \varepsilon) h \quad (1.44)$$

выполним замену (1.41). Согласно лемме 1.1, получаем систему

$$\frac{\partial h^1}{\partial t} = \varepsilon D_{11}(t) \Delta h^1 + \varepsilon D_{12}(t) \Delta h^2 + \Lambda_0(x) h^1, \quad (1.45)$$

$$\frac{\partial h^2}{\partial t} = \varepsilon D_{21}(t) \Delta h^1 + \varepsilon D_{22}(t) \Delta h^2 + B h^2, \quad (1.46)$$

а матричные коэффициенты диффузии соответственно равны:

$$\begin{aligned}
 D_{11}(t) &= \begin{pmatrix} (Da, b) & (D\bar{a}, b) \exp(-2i\omega_0 t) \\ (Da, \bar{b}) \exp(2i\omega_0 t) & (D\bar{a}, \bar{b}) \end{pmatrix}, \\
 D_{12}(t) &= \begin{pmatrix} (Da_1, b) \exp(-i\omega_0 t) & \dots & (Da_{n-2}, b) \exp(-i\omega_0 t) \\ (Da_1, \bar{b}) \exp(i\omega_0 t) & \dots & (Da_{n-2}, \bar{b}) \exp(i\omega_0 t) \end{pmatrix}, \\
 D_{21}(t) &= \begin{pmatrix} (Da, b_1) \exp(i\omega_0 t) & (Da, b_1) \exp(-i\omega_0 t) \\ \dots & \dots \\ (Da, b_{n-2}) \exp(i\omega_0 t) & (D\bar{a}, b_{n-2}) \exp(-i\omega_0 t) \end{pmatrix}, \\
 D_{22}(t) &= \begin{pmatrix} (Da_1, b_1) & \dots & (Da_{n-2}, b_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (Da_1, b_{n-2}) & \dots & (Da_{n-2}, b_{n-2}) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

При составлении системы (1.45), (1.46), во-первых, учтены только слагаемые порядка $\varepsilon^{1/2}$ и ε . Во-вторых, векторы b_1, \dots, b_{n-2} , фигурирующие в записи матричных коэффициентов диффузии, выбраны из корневого подпространства матрицы A_0^* , отвечающего ее собственным значениям с отрицательными действительными частями, так, что образуют с a_1, \dots, a_{n-2} биортогональную систему.

Отметим, что в системе (1.45), (1.46) критические и некритические переменные h^1 и h^2 не разделены, однако для нас будет достаточно того, что удастся добиться их частичного разделения. Реализация этой идеи связана с галеркинскими аппроксимациями переменных h^1 и h^2 .

Обозначим через $m_0 = m_0(\varepsilon)$ наибольшее из таких целых m , что

$$m \leq M\varepsilon^{-1/2}, \quad (1.47)$$

где положительной постоянной величиной M распорядимся ниже.

Каждую из переменных h^1 и h^2 системы (1.45), (1.46) расщепим на две. Через h_Γ^1 обозначим проекцию h^1 на первые m_0 собственных функций оператора Лапласа при граничных условиях непроницаемости. Обозначение h_{oc}^1 используем для той части h^1 , которая ортогональна (в смысле скалярного произведения в L_2) всем указанным выше собственным функциям. Аналогичный смысл придадим обозначениям h_Γ^2 , h_{oc}^2 .

Лемма 1.2. *После выполнения некоторых стандартных замен во введенных переменных система (1.45), (1.46) с точностью до слагаемых*

высшего порядка малости по ε допускает следующее представление:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_\Gamma^1}{\partial t} &= \varepsilon D_{11}(t) \Delta_\Gamma h_\Gamma^1 + \varepsilon D_{12}(t) \Delta_\Gamma h_\Gamma^2 + \varepsilon \Lambda_{11} h_\Gamma^1 + \varepsilon \Lambda_{12} h_{oc}^1, \\
\frac{\partial h_\Gamma^2}{\partial t} &= \varepsilon D_{22}(t) \Delta_\Gamma h_\Gamma^2 + B_0 h_\Gamma^2 + \varepsilon^{1/2} B_{11} h_\Gamma^1 + \varepsilon^{1/2} B_{12} h_{oc}^2, \\
\frac{\partial h_{oc}^1}{\partial t} &= \varepsilon D_{11}(t) \Delta h_{oc}^1 + \varepsilon D_{12}(t) \Delta h_{oc}^2 + \varepsilon \Lambda_{21} h_\Gamma^1 + \varepsilon \Lambda_{22} h_{oc}^1, \\
\frac{\partial h_{oc}^2}{\partial t} &= \varepsilon D_{21}(t) \Delta h_{oc}^1 + \varepsilon D_{22}(t) \Delta h_{oc}^2 + B_0 h_{oc}^2 + \varepsilon^{1/2} B_{21} h_\Gamma^2 + \varepsilon^{1/2} B_{22} h_{oc}^2.
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Доказательство носит технический характер, поясним лишь использованные обозначения. Во-первых, в двух первых уравнениях (1.48) h_Γ^1, h_{oc}^1 отождествлены с векторами размерности $2m_0$ и $(n-2)m_0$ соответственно. Однако при этом для простоты сохранены обозначения матричных коэффициентов диффузии, подразумевая, что на самом деле они имеют блочно-диагональный вид. Во-вторых, Δ_Γ — диагональная матрица с упоминавшимися младшими собственными значениями оператора Лапласа.

Отметим отличие уравнений (1.48) от (1.45), (1.46).

Во-первых, в (1.48) теперь имеем

$$D_{11}(t) = \begin{pmatrix} (Da, b) & 0 \\ 0 & (D\bar{a}, \bar{b}). \end{pmatrix},$$

Во-вторых, во втором уравнении (1.48) отсутствует слагаемое $\varepsilon D_{21}(t) \Delta_\Gamma h_\Gamma^1$.

Оба эти факта связаны с тем, что попутно нами выполнены стандартные замены, обеспечивающие усреднение соответствующих матриц. Например, во втором уравнении (1.48) была выполнена замена

$$h_\Gamma^2 \rightarrow h_\Gamma^2 + \varepsilon \int_0^t D_{21}(s) ds \cdot \Delta_\Gamma h_\Gamma^1,$$

позволяющая устранить матрицу $D_{21}(t)$. Однако матрицу $D_{12}(t)$ в первом уравнении (1.48) таким образом усреднить не удастся: мешает фигурирующая в (1.48) матрица B_0 .

Для завершения доказательства остается отбросить высшие порядки малости по ε , возникающие в результате проведения усредняющих замен.

□

1.2.5. Регулярность дифференциального оператора, связанного с уравнением в вариациях. В этом пункте считаем, что в линеаризованной на приближенном цикле краевой задаче выполнена замена

$$h \rightarrow h \exp(-\varepsilon \gamma_0 t), \quad (1.49)$$

где положительная постоянная γ_0 выбрана так, что по сравнению с L_0 у оператора $L_0 + \gamma_0 I$ увеличивается ровно на единицу количество собственных значений с положительными действительными частями.

Для сокращения записи ниже используем обозначение $\| * \|$, подразумевая, что

$$\|f(t, x)\| = \sup_{-\infty < t < \infty} \sqrt{\int_{\Omega} (f(t, x), f(t, x)) dx}, \quad (1.50)$$

где f — некоторая непрерывная и ограниченная по t функция, если ее рассматривать как абстрактную функцию со значениями в векторном варианте L_2 . В случае, когда она от x не зависит, считаем, что в правой части выражения (1.50) используется евклидова длина вектора.

Лемма 1.3. Пусть в уравнениях (1.48) выполнены замены, индуцированные заменой (1.49). Пусть к их правым частям добавлены соответственно произвольные гладкие функции

$$f_{\Gamma}^1(t), \quad f_{\Gamma}^2(t), \quad f_{oc}^1(t, x), \quad f_{oc}^2(t, x)$$

с конечными нормами (1.50). Тогда получившаяся неоднородная краевая задача имеет единственное ограниченное по t в метрике (1.50) решение h с компонентами

$$h_{\Gamma}^1(t), \quad h_{\Gamma}^2(t), \quad h_{oc}^1(t, x), \quad h_{oc}^2(t, x),$$

причем найдется такая универсальная положительная постоянная ν , что

$$\|h\| \leq \frac{\nu}{\varepsilon} \|f\|, \quad (1.51)$$

где компоненты f описаны выше.

Доказательство начнем с напоминания о том, что при достаточно подробной галеркинской аппроксимации оператора (1.26) дифференциальное выражение (1.48), в котором учтена замена (1.49) и выделены слагаемые,

содержащие только h_Γ^1 , порождает регулярный дифференциальный оператор, причем норма обратного оператора по порядку равна ε^{-1} [40]. Отсюда и из (1.47) следует, что

$$\|h_\Gamma^1\| \leq \nu(\|h_\Gamma^2\| + \|h_{oc}^1\|) + \frac{\nu}{\varepsilon}\|f_\Gamma^1\|, \quad (1.52)$$

где (как и в формулировке леммы) ν — некоторая универсальная положительная постоянная. В силу (1.47) коэффициенты второго уравнения системы (1.48) близки к постоянным, а, значит,

$$\|h_\Gamma^2\| \leq \nu\varepsilon^{1/2}\|h_{oc}^2\| + \nu\|f_\Gamma^2\|, \quad (1.53)$$

В третьем и четвертом уравнениях (1.48) выполним замену

$$h_{oc}^1 \rightarrow \begin{pmatrix} \exp(-i\omega_0 t) & 0 \\ 0 & \exp(i\omega_0 t) \end{pmatrix} h_{oc}^1,$$

снимающую вращение, т. е. возвратимся к постоянному матричному коэффициенту диффузии перед переменной h_{oc}^1 в третьем уравнении (1.48). Попутно h_{oc}^1 и h_{oc}^2 объединим в общую вектор-функцию h_{oc} (аналогичный смысл имеет вектор-функция f_{oc}). В итоге из условия отсутствия взрывной диффузионной неустойчивости и способа выбора m_0 вытекает, что при подходящем увеличении M

$$\|h_{oc}\| \leq \frac{\nu\varepsilon^{1/2}}{M}\|h_\Gamma^1\| + \frac{\nu}{M}\|h_\Gamma^2\| + \frac{\nu}{M\varepsilon^{1/2}}\|f_{oc}\|. \quad (1.54)$$

В случае необходимости снова увеличивая постоянную M , из неравенств (1.52)–(1.54) выводим суммирующую оценку (1.51). Доказательство леммы завершено. \square

В статье [40] отмечено, что допущение об отсутствии взрывной диффузионной неустойчивости позволяет применить технику повышения гладкости ограниченных на всей временной оси решений линейных параболических уравнений (см., например, [52]). Сочетая ее с классическими свойствами параболических систем, заключаем, что неравенство (1.51) влечет много более сильную оценку шаудеровского типа

$$\|h\|_{C^{2+\alpha, \alpha/2}} \leq \frac{\nu}{\varepsilon}\|h\|_{C^{\alpha, \alpha/2}}, \quad (1.55)$$

где по t соответствующая метрика работает на всей временной оси.

Из (1.55), в частности, следует, что не играют роли слагаемые, которыми пренебрегали ранее. Из этой оценки также вытекает, что доказательство теоремы завершается по изложенному в [40] или [51] способу.

Следует отметить, что в периодическом случае может быть применен более простой подход, развитый в [5].

1.3. Пример уравнения Хатчинсона

1.3.1. Постановка задачи и формулировка основного результата. В качестве примера построения квазинормальной формы рассмотрим уравнение Хатчинсона с диффузией.

Уравнение Хатчинсона было предложено в [60]

$$\dot{N} = r \left[1 - \frac{N(t-h)}{k} \right] N, \quad (1.56)$$

и является базовым для ряда задач популяционной динамики. Здесь функция $N(t)$ — численность популяции, а положительные параметры r , h и k характеризуют мальтузианский коэффициент линейного роста, возраст половозрелости и средний размер популяции, который еще называют емкостью среды обитания.

Учет миграционного фактора и неоднородного распределения популяции по ареалу обитания приводит к краевой задаче [37]

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \Delta N + r \left[1 - \frac{N(t-h, x)}{k} \right] N, \quad \frac{\partial N}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (1.57)$$

где $N(t, x)$ — уже плотность популяции в точке x в момент времени t . Как и в предыдущем пункте, считаем, что пространственная переменная x принадлежит ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^m$ $m \geq 1$ с границей $\partial \Omega$ класса $C^{2+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$; ν полагаем направлением внешней нормали к границе $\partial \Omega$. В случае однородного ареала обитания и миграционного фактора настолько большого, что происходит полное перемешивание, краевая задача (1.57) сводится к уравнению (1.56).

Уравнение (1.56) имеет два состояния равновесия $N = 0$ и $N = k$, первое из которых при $r > 0$ неустойчиво, а второе — устойчиво при $0 < rh < \pi/2$ и неустойчиво при $rh > \pi/2$. При $rh = \pi/2$ происходит бифуркация Андронова–Хопфа, в результате которой от состояния равновесия $N = k$ ответвляется орбитально асимптотически устойчивый цикл.

Выберем параметры задачи близкими к критическим, а коэффициент диффузии малым и покажем, что к полученной краевой задаче применимы построения пункта 1.1.

Выполним в (1.57) упрощающие замены $N = k(1 + n)$, $t \rightarrow th$ и будем считать, что $rh = \pi/2 + \varepsilon$, где ε — малый положительный параметр, величину Dh обозначим εD , тогда (1.57) преобразуется к виду

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \varepsilon D \Delta n - (\pi/2 + \varepsilon)n(t-1, x)(1+n), \quad \frac{\partial n}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0. \quad (1.58)$$

Для того чтобы применить метод квазинормальных форм к задаче (1.58), построим сначала обычную нормальную форму для уравнения

$$\dot{n} = -(\pi/2 + \varepsilon)n(t-1)(1+n), \quad (1.59)$$

не зависящего от пространственной переменной.

Линеаризованная в нуле задача (1.59)

$$\dot{n} = -(\pi/2 + \varepsilon)n(t-1) \quad (1.60)$$

имеет характеристический квазимногочлен вида

$$P(\lambda) \equiv \lambda + (\pi/2 + \varepsilon)e^{-\lambda}, \quad (1.61)$$

корни которого, за исключением одной пары $\pm i\pi/2$, лежат в левой комплексной полуплоскости.

Выполняя в (1.59) нормирующую замену

$$n(t, \tau) = \sqrt{\varepsilon} (z(\tau) \exp(i\pi t/2) + \bar{z}(\tau) \exp(-i\pi t/2)) + \varepsilon n_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} n_2(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (1.62)$$

получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\varepsilon} i \frac{\pi}{2} (z(\tau) e^{i\pi t/2} - \bar{z}(\tau) e^{-i\pi t/2}) + \varepsilon (\dot{n}_1 + \varepsilon n'_1) + \varepsilon^{3/2} (z' e^{i\pi t/2} + \bar{z}' e^{-i\pi t/2}) + \\ & + \varepsilon^{3/2} (\dot{n}_2 + \varepsilon n'_2) = -\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \left[\sqrt{\varepsilon} (z(\tau - \varepsilon) e^{i\pi(t-1)/2} + \bar{z}(\tau - \varepsilon) e^{-i\pi(t-1)/2}) + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon n_1(t-1, \tau - \varepsilon) + \varepsilon^{3/2} n_2(t-1, \tau - \varepsilon) \right] \times \\ & \quad \times \left(1 + \sqrt{\varepsilon} (z(\tau) e^{i\pi t/2} + \bar{z}(\tau) e^{-i\pi t/2}) + \varepsilon n_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} n_2(t, \tau) \right), \quad (1.63) \end{aligned}$$

где штрихом обозначена производная по τ . Приравнивая в (1.63) коэффициенты при одинаковых степенях ε , найдем нормальную форму уравнения (1.59). Отметим, что

$$z(\tau - \varepsilon) = z(\tau - \varepsilon) - \varepsilon z(\tau) + \dots$$

При ε имеем уравнение

$$\dot{n}_1 = -\frac{\pi}{2}n_1(t-1) + i\frac{\pi}{2}(z^2e^{i\pi t} - \bar{z}^2e^{-i\pi t}), \quad (1.64)$$

решение которого имеет вид

$$n_1(t) = \frac{2-i}{5}z^2e^{i\pi t} + \frac{2+i}{5}\bar{z}^2e^{-i\pi t}. \quad (1.65)$$

При $\varepsilon^{3/2}$ получаем уравнение

$$\begin{aligned} z'e^{i\pi t/2} + \bar{z}'e^{-i\pi t/2} + \dot{n}_2 = & -\frac{\pi}{2}n_2(t-1) - \frac{\pi}{2}\left[(ze^{i\pi(t-1)/2} + \bar{z}e^{-i\pi(t-1)/2})n_1 + \right. \\ & + (ze^{i\pi t/2} + \bar{z}e^{-i\pi t/2})n_1(t-1) - (z'e^{i\pi t/2} + \bar{z}'e^{-i\pi t/2})] - \\ & \left. - (ze^{i\pi t/2} + \bar{z}e^{-i\pi t/2}), \right. \end{aligned} \quad (1.66)$$

из условий разрешимости которого и выходит нормальная форма

$$\left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)z' = iz + \frac{(1-3i)\pi}{10}|z|^2z. \quad (1.67)$$

Переходя к полярным координатам $z = \rho e^{i\varphi}$, для амплитудной и фазовой переменных получаем

$$\rho' = \frac{2\pi}{4+\pi^2}\rho - \frac{3\pi-2}{20}\rho^3, \quad (1.68)$$

$$\varphi' = \frac{4}{4+\pi^2} - \frac{\pi+6}{20}\rho^2. \quad (1.69)$$

Асимптотически устойчивое состояние равновесия уравнения (1.68)

$$\rho^* = \sqrt{\frac{40\pi}{(3\pi-2)(\pi^2+4)}} \quad (1.70)$$

позволяет, после подстановки в формулу (1.62), получить асимптотику орбитально асимптотически устойчивого цикла уравнения (1.59).

Вернемся к краевой задаче (1.58), формальное применение алгоритма метода квазинормальных форм приводит в данном случае к аналогичной (1.20) краевой задаче

$$\left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)\frac{\partial z}{\partial \tau} = \varepsilon D\Delta z + iz + \frac{(1 - 3i)\pi}{10}|z|^2 z, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.71)$$

Она, как и уравнение (1.20), дополняется комплексно-сопряженной краевой задачей. На основе теоремы 1.2 можно доказать утверждение о соответствии и для краевых задач (1.58), (1.71).

Теорема 1.3. Пусть квазинормальная форма (1.71) имеет грубый авто-модельный цикл

$$z_*(\tau, x) = z_0(x) \exp(i\alpha_0 \tau). \quad (1.72)$$

Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ краевая задача (1.58) имеет грубый цикл с тем же свойством устойчивости, асимптотика которого на промежутке времени порядка ε^{-1} с точностью до величин порядка $\varepsilon^{3/2}$ получается путем подстановки вместо z функции $z_*(\tau, x)$ в выражение (1.62).

Для доказательства данного утверждения необходимо обосновать применимость общих рассуждений теоремы 1.3 в случае рассматриваемого уравнения с запаздыванием.

1.3.2. Лемма об отсутствии взрывной диффузионной неустойчивости. В первую очередь необходимо доказать отсутствие в данной ситуации взрывной диффузионной неустойчивости. Для этого рассмотрим линеаризованную в нуле краевую задачу (1.58)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \varepsilon D\Delta n - (\pi/2 + \varepsilon)n(t - 1, x), \quad \frac{\partial n}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.73)$$

Раскладывая решение задачи (1.73) по собственным функциям оператора Лапласа с условиями непроницаемости на границе, получаем для каждой из мод следующее дифференциально-разностное уравнение:

$$\frac{du}{dt} = -z_* u + (\pi/2 + \varepsilon)u(t - 1), \quad (1.74)$$

где параметр $z_* > 0$ пропорционален соответствующему собственному числу. Обозначим через

$$Q_0(\lambda) \equiv \lambda + z_* + \frac{\pi}{2}e^{-\lambda}, \quad (1.75)$$

характеристический квазиполином уравнения (1.74) с опущенным малым параметром ε . Для квазиполинома (1.75) выполнено следующее утверждение.

Лемма 1.4. *Корни квазиполинома (1.75) расположены в открытой левой комплексной полуплоскости, причем обращающиеся в $\pm i\pi/2$ при $z_* = 0$ его корни $\lambda(z_*)$ и $\bar{\lambda}(z_*)$ при возрастании z_* общим образом уходят от мнимой оси.*

Доказательство. Пусть сначала z_* мало. Дифференцируя по z_* тождество $Q_0(\lambda(z_*)) \equiv 0$ и полагая $z_* = 0$, убеждаемся, что

$$\operatorname{Re} \lambda'(0) = -\frac{4}{\pi^2 + 4} < 0, \quad (1.76)$$

т. е. выполнено аналогичное (1.15) неравенство. Итак, при малых z_* корни квазиполинома (1.75) находятся в левой открытой комплексной полуплоскости. Допустим, найдется такое $\omega_* > 0$, что $Q_0(i\omega_*) = 0$ при некотором положительном z_* . Из этого комплексного равенства следуют два вещественных соотношения

$$\omega_* = \frac{\pi}{2} \sin \omega_*, \quad z_* = -\frac{\pi}{2} \cos \omega_*. \quad (1.77)$$

В силу первого из них $\omega_* = \pi/2$. Отсюда и из второго равенства (1.77) вытекает, что $z_* = 0$. Доказательство завершено. \square

1.3.3. Разделение критических и некритических переменных в обыкновенной части линеаризованной на приближенном периодическом решении краевой задачи. Обоснование основного предложения проведем, модифицируя развитую в предыдущем параграфе технику. В частности, как и там, начнем с анализа свойств обыкновенной части линеаризованной на приближенном периодическом решении краевой задачи, в которой при $\omega_0 = \pi/2$ проведем нормировку времени (1.27), а затем оставим только существенные слагаемые.

Опишем процедуру разделения критических и некритических переменных дифференциально-разностного уравнения

$$\frac{dh}{dt} = a_1(t, x, \varepsilon)h(t - \delta) + a_2(t, x, \varepsilon)h, \quad (1.78)$$

где по построению

$$a_1 = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon^{1/2}a_{11}(t, x) + \varepsilon a_{12}(t, x), \quad (1.79)$$

$$a_2 = \varepsilon^{1/2} a_{21}(t, x) + \varepsilon a_{22}(t, x), \quad \delta = \frac{\pi}{\pi + 2\varepsilon\alpha_0}. \quad (1.80)$$

Фигурирующие в (1.79), (1.80) 4-периодические по t функции гладко зависят от переменных. В дальнейшем удобно считать, что $\alpha_0 \geq 0$, а значит, $\delta \leq 1$. В этом случае в качестве фазового пространства уравнения (1.78) можно взять уже упоминавшееся ранее пространство $C[-1, 0]$ непрерывных на отрезке $-1 \leq s \leq 0$ функций. Если же $\alpha_0 < 0$, то в качестве фазового пространства можно взять, скажем, $C[-3/2, 0]$. Согласно (1.79), (1.80) 4-периодические по t коэффициенты уравнения (1.78) близки к постоянным. Поэтому в соответствии с построенной в [36] теорией фазовое пространство $C[-1, 0]$ расщепляется в прямую сумму двух подпространств, одно из которых двумерно. Кроме того, характеристические показатели решений с начальными условиями из конечномерного подпространства стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, а решения с начальными условиями из его дополняющего бесконечномерного подпространства при $t \rightarrow \infty$ затухают по экспоненциальному закону с некоторым не зависящим от ε показателем экспоненты. Для дальнейшего важно, что указанная дихотомия решений осуществляется при помощи 4-периодических по t проекторов $P_-(t, x, \varepsilon)$ и $P_+(t, x, \varepsilon)$, гладко зависящих от $t, x, \varepsilon^{1/2}$. При этом в двумерном подпространстве $P_-C[-1, 0]$ имеется 4-периодический по t базис с гладкой зависимостью от t, x и $\varepsilon^{1/2}$.

Перечисленными свойствами, но при $t \rightarrow -\infty$, обладает присоединенное к (1.78) дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = -a_1(t + \delta, x, \varepsilon)y(t + \delta) - a_2(t, x, \varepsilon)h, \quad (1.81)$$

фазовым пространством которого является $C(0, 1)$.

Напомним, что на каждой паре фазовых траекторий уравнений (1.78) и (1.81) постоянна величина

$$\langle h, y \rangle = h(t)y(t) + \int_{-\delta}^0 a_1(t + s + \delta, x, \varepsilon)h(t + s)y(t + s + \delta) ds. \quad (1.82)$$

Пусть $P_-^*(t, x, \varepsilon)$ и $P_+^*(t, x, \varepsilon)$ — проекторы, связанные с упомянутой дихотомией решений уравнения (1.81). Ниже будет использовано то, что в соответствии с изложенной в [36] теорией в двумерном подпространстве $P_-^*C[-1, 0]$ конструируется такой 4-периодический по t базис с гладкой зависимостью от переменных t, x и $\varepsilon^{1/2}$, который образует с отмеченным выше базисом из $P_-C[-1, 0]$ биортогональную систему в смысле скалярного произведения (1.82). Данное обстоятельство, в частности, позволяет

выписать явную формулу для проектора P_- , которая структурно подобна равенствам (1.40).

В предыдущем параграфе важную роль сыграли формулы (1.33). Для уравнений с запаздыванием, что показано в [36], аналогичные по смыслу формулы устроены более сложно. Чтобы их привести, удобно сначала уравнение (1.78) записать компактнее:

$$\frac{dh}{dt} = l(t, h(t+s)), \quad (1.83)$$

где $l(t, *)$ — линейный функционал в $C[-1, 0]$, явный вид которого представлен в (1.78). Здесь для простоты записи его зависимость от параметров x и ε не подчеркнута. Как оказывается, на каждой непрерывно дифференцируемой функции $h(s)$ справедливо равенство

$$\frac{dP_-}{dt}h(s) = l(t+s, P_-h(s)) - P_-h'(s) + P_-E_0(s)[h'(0) - l(t, h(s))], \quad (1.84)$$

где штрихом обозначена производная по s , а кусочно непрерывная функция $E_0(s)$ равна единице при $s = 0$ и нулю при $s < 0$. Отметим, что проектор P_- допускает такое расширение, при котором его можно применять к кусочно непрерывным функциям. Так как $P_- + P_+ = I$, из равенства (1.84) выводим, что

$$\begin{aligned} \frac{dP_+}{dt}h(s) = & l(t+s, P_+h(s)) - P_+h'(s) + h'(s) - l(t+s, h(s)) - \\ & - E_0(s)[h'(0) - l(t, h(s))] + P_+E_0(s)[h'(0) - l(t, h(s))], \end{aligned} \quad (1.85)$$

Обозначим через

$$v(t, s, x, \varepsilon), \quad \bar{v}(t, s, x, \varepsilon) \quad (1.86)$$

базисные элементы в $P_-C[-1, 0]$, конструируемые по описанному в предыдущем параграфе правилу, а обозначения

$$w(t, s, x, \varepsilon), \quad \bar{w}(t, s, x, \varepsilon) \quad (1.87)$$

используем для базисных функций в $P_-^*C[0, 1]$. Считаем также, что функции (1.86) и (1.87) образуют биортогональный базис в смысле упоминавшегося ранее скалярного произведения. Напомним, кроме того, что 4-периодические по t функции (1.86) и (1.87) гладко зависят от $\varepsilon^{1/2}$ и остальных переменных.

Через h^1 обозначим вектор с комплексно-сопряженными координатами z и \bar{z} , которые вычисляются по аналогичным (1.40) формулам с привлечением функций (1.86), (1.87) и скалярного произведения (1.82). Обозначим через h^2 элементы подпространства $P_+C[-1, 0]$.

Лемма 1.5. *В переменных h^1 , h^2 дифференциально-разностное уравнение (63) записывается в виде эквивалентной системы*

$$\frac{dh^1}{dt} = \varepsilon \Lambda_0(x) h^1 + \varepsilon^2 \Lambda_1(x, \varepsilon) h^1, \quad (1.88)$$

$$\frac{dh^2}{dt} = l(t, h^2(t + s)), \quad (1.89)$$

Доказательство прямо вытекает из равенств (1.84) и (1.85), хотя промежуточные выкладки не относятся к числу тривиальных.

Отметим двойную нагрузку обозначения h^2 в (1.89): в правой части $h^2 = h^2(t + s)$, т.е. является элементом $P_+C[-1, 0]$, а в левой части $h^2 = h^2(t)$ — функция времени. Структурно система (1.88), (1.89) подобна системе (1.42). Однако фигурирующая в (1.88) зависящая от x двумерная матрица Λ_0 связана, естественно, с уравнением (1.71).

Итак, нами описан способ разделения критических и некритических переменных в обыкновенной части линеаризованной на приближенном цикле краевой задачи. Его изложение было достаточно конспективно, так как он уже был описан в предыдущем параграфе, правда, в более простом случае. Детальное же изложение данного способа действий содержится в [36].

1.3.4. Явный вид проекторов при $\varepsilon = 0$. Ниже потребуются знать явный вид проектора $P_-^0(t)$, в который переходит проектор $P_-(t, x, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$.

Лемма 1.6. *Справедлива формула*

$$P_-^0 h = l_1(h) \exp [i\pi(t + s)/2] + l_2(h) \exp [-i\pi(t + s)/2], \quad (1.90)$$

где функционалы l_1 и l_2 комплексно сопряжены:

$$l_1(h) = \frac{h(0) \exp(-i\pi t/2)}{P'_0(i\pi/2)} - \frac{\pi}{2P'_0(i\pi/2)} \int_{-1}^0 h(s) \exp [-i\pi(t + s + 1)/2] ds,$$

$$l_2(h) = \frac{h(0) \exp(i\pi t/2)}{\bar{P}'_0(i\pi/2)} - \frac{\pi}{2\bar{P}'_0(i\pi/2)} \int_{-1}^0 h(s) \exp [i\pi(t + s + 1)/2] ds.$$

Доказательство следует из рассуждений предыдущего пункта. Отметим, что в соответствии с леммой 1.6

$$P_-^0 E_0(s) = \frac{\exp(i\pi s/2)}{P'_0(i\pi/2)} + \frac{\exp(-i\pi s/2)}{\bar{P}'_0(i\pi/2)} \quad (1.91)$$

$$l_1(P_-^0 E_0) = \frac{\exp(-i\pi t/2)}{P'_0(i\pi/2)}, \quad l_2(P_-^0 E_0) = \frac{\exp(i\pi t/2)}{\bar{P}'_0(i\pi/2)}. \quad (1.92)$$

1.3.5. Критические и некритические переменные линеаризованной на приближенном периодическом решении краевой задачи. Нами все подготовлено, чтобы обратиться к указанной линейной краевой задаче, в которой условимся удерживать только существенные слагаемые. Последнее означает, что она состоит из уравнения (1.78), к правой части которого добавлено диффузионное слагаемое $\varepsilon D \Delta h$, а на границе $\partial\Omega$, области Ω поставлены условия непроницаемости. По описанному выше правилу перейдем в задаче к переменным h^1 и h^2 . При этом будем, как и в предыдущем параграфе, в диффузионных слагаемых получающейся системы сохранять только главные по ε порядки.

При выводе уравнения относительно h^1 воспользуемся формулой (1.84) и равенствами (1.92). Прямой выкладкой получаем уравнение

$$\frac{\partial h^1}{\partial t} = \varepsilon D_{11}(t) \Delta h^1 + \varepsilon D_{12}(t) \Delta h^2 + \varepsilon \Lambda_0 h^1, \quad (1.93)$$

совпадающее по форме записи с уравнением (1.45), (1.46). Однако теперь в силу (1.92) имеем в (1.93)

$$D_{11}(t) = D \begin{pmatrix} \frac{1}{P'_0(i\pi/2)} & \frac{\exp(-i\pi t)}{\bar{P}'_0(i\pi/2)} \\ \frac{\exp(i\pi t)}{P'_0(i\pi/2)} & \frac{1}{\bar{P}'_0(i\pi/2)} \end{pmatrix}, \quad D_{12}(t) = D \begin{pmatrix} \frac{\exp(-i\pi t/2)}{P'_0(i\pi/2)} \\ \frac{\exp(i\pi t/2)}{\bar{P}'_0(i\pi/2)} \end{pmatrix}.$$

Действуя аналогичным образом, но опираясь на формулу (1.85), приходим к заключению, что

$$\frac{\partial h^2}{\partial t} = \varepsilon D_{21}(t) \Delta h^1 + \varepsilon D_{22}(t) \Delta h^2 - \frac{\pi}{2} h^2(t - \delta) + \varepsilon^{1/2} l_g(t, h^2(t + s), x, \varepsilon), \quad (1.94)$$

где явный вид функционала l_g не играет роли, а в силу равенства $P_+^0 = I - P_-^0$ и формулы (1.91) получим

$$D_{21}(t) = D \frac{\pi^2 - 4}{\pi^2 + 4} (\exp(i\pi t/2) \exp(-i\pi t/2)), \quad D_{22}(t) = D \frac{\pi^2 - 4}{\pi^2 + 4}.$$

Подчеркнем, что при выводе уравнений (1.93) и (1.94) переменная h^1 была интерпретирована как вектор-столбец с компонентами z и \bar{z} .

Итак, система в вариациях на приближенном цикле преобразовалась к виду (1.93), (1.94), а последние уравнения в общем плане подобны уравнениям (1.45), (1.46).

1.3.6. Завершающий этап доказательства основного результата.

На первый взгляд представляется, что для завершения доказательства остается воспользоваться изложенной в конце предыдущего параграфа техникой. Однако такому способу действий препятствуют два обстоятельства.

Первое из них таково. В предыдущем параграфе, обыгрывая конечномерность фазового пространства обыкновенной части, при помощи замены (1.41) мы добились, что составной частью уравнения (1.46) является уравнение

$$\frac{dh^2}{dt} = B_0 h^2,$$

где все собственные значения B_0 имеют отрицательные действительные части, что было использовано при доказательстве леммы 1.3 (см. вывод оценки (1.53)). В случае аналогичного ему уравнения (1.94) таковой главной частью можно попытаться считать дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{dh^2}{dt} = -\frac{\pi}{2} h^2(t - \delta). \quad (1.95)$$

Однако решения последнего с начальными условиями из $P_+(t_0, x, \varepsilon)C[-1, 0]$, задаваемыми в момент времени t_0 , не обладают свойством экспоненциального затухания с некоторым универсальным положительным показателем экспоненты.

Второе затруднение связано с тем, что по построению нетривиальным образом зависит от x проектор $P_-(t_0, x, \varepsilon)$, а значит, возникает дополнительная сложность при использовании галеркинских аппроксимаций. Покажем, что отмеченные две трудности взаимосвязаны, а их преодоление носит технический характер.

Выберем произвольно такую положительную 4-периодическую гладкую функцию $\gamma_{\text{вс}}(t)$ (единственное ограничение — она должна быть отделенной от нуля), что для дифференциально-разностного уравнения

$$\frac{dh^2}{dt} = -\frac{\pi}{2} h^2(t - \delta) + \varepsilon \gamma_{\text{вс}}(t) h^2 \quad (1.96)$$

имеет место экспоненциальная дихотомия решений, осуществляемая при помощи проекторов $P_-^{\text{bc}}(t, \varepsilon)$ и $P_+^{\text{bc}}(t, \varepsilon)$. Для дальнейшего существенно, что в соответствии с результатами из [36] проектор $P_-^{\text{bc}}(t, \varepsilon)$ по норме лишь на величину порядка ε отличается от $P_-^0(t)$. Важно также то, что решения уравнения (1.96) с начальными условиями из $P_+^{\text{bc}}(t, \varepsilon)C[-1, 0]$ при возрастании t затухают по экспоненциальному закону, причем показатель экспоненты можно считать не зависящим от ε .

В силу изложенного в [36] справедливо равенство

$$P_-(t, x, \varepsilon) = P_-^{\text{bc}}(t, \varepsilon) + \varepsilon^{1/2}Q(t, x, \varepsilon), \quad (1.97)$$

где норма гладкого по совокупности переменных линейного оператора Q ограничена сверху некоторой постоянной (это же справедливо и для его производных по t и x). Так как $P_-(t, x, \varepsilon)h^2 = 0$, то согласно (1.97)

$$P_-^{\text{bc}}(t, \varepsilon)h^2 + \varepsilon^{1/2}Q(t, x, \varepsilon)h^2 = 0. \quad (1.98)$$

Применяя к (1.98) проектор $P_-^{\text{bc}}(t, \varepsilon)$, получаем

$$P_-^{\text{bc}}(t, \varepsilon)h^2 + \varepsilon^{1/2}P_-^{\text{bc}}(t, \varepsilon)Q(t, x, \varepsilon)h^2 = 0. \quad (1.99)$$

В уравнении (1.94) выполним гладкую ляпуновскую замену

$$h_{\text{bc}}^2 = h^2 + \varepsilon^{1/2}Q(t, x, \varepsilon)h^2.$$

Так как в силу (1.99)

$$P_-^{\text{bc}}(t, \varepsilon)h_{\text{bc}}^2 = 0,$$

то новая переменная h_{bc}^2 в нужном смысле ортогональна двум уже не зависящим от x функциям.

В уравнении, в которое трансформировалось уравнение (1.94), нижний индекс у переменной h_{bc}^2 опустим. Затем, добавляя и вычитая $\varepsilon\gamma(t)h^2$, выделим два слагаемых, которые формируют правую часть уравнения (1.96). Приходим к заключению, что составной частью уравнения (1.94) становится уравнение (1.96), решения которого с начальными условиями из $P_+^{\text{bc}}(t_0, \varepsilon)C[-1, 0]$, а именно такие начальные условия мы и должны рассматривать, экспоненциально затухают с не зависящим от ε показателем экспоненты. Поэтому видоизмененная указанным способом система (1.93), (1.94) по своим общим свойствам идентична системе (1.45), (1.46). Теперь уже можно воспользоваться развитой в предыдущем параграфе техникой. Доказательство предложения завершено. \square

Глава 2.

Метод квазинормальных форм в задачах гиперболического типа

В данной главе, написанной в основном по работам [17, 27–29], на содержательных примерах представлены особенности применения метода квазинормальных форм в задачах гиперболического типа. Использование данного метода в математических моделях автогенераторов с отрезком длинной линии в цепи обратной связи позволяет обосновать ряд результатов о высокомодовых аттракторах и буферности в задачах радиопизики.

2.1. Высокомодовая буферность в $RCLG$ -линии

Рассмотрим автогенератор, блок-схема которого показана на рис. 2.1. Будем считать, что его электрические параметры — индуктивность L , емкость C , активное сопротивление R и проводимость G — равномерно распределены на отрезке $0 \leq x \leq 1$, а в точке $x = 0$ сосредоточена вспомогательная емкость C_0 . Относительно нелинейного элемента (в простейшем случае — классической лампы) предполагаем, что ток I через него зависит от приложенного напряжения U так, как изображено на рис. 2.2. Опираясь на методику работы [33], можно показать (см. [28]), что в случае идеального усилителя, а также при дополнительных предположениях о малости суммарных потерь $\varepsilon = R\sqrt{C/L} + G\sqrt{L/C}$ и подаваемой в линию энергии, математической моделью данного генератора служит краевая задача

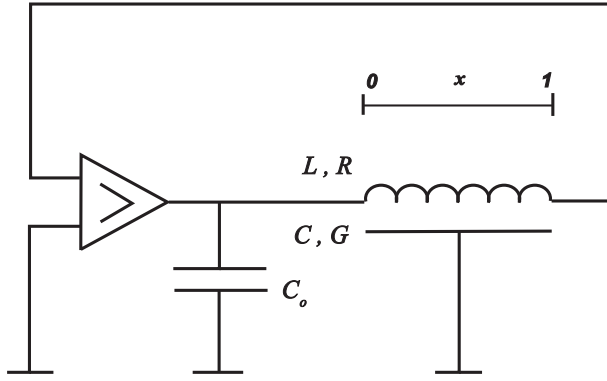


Рис. 2.1.

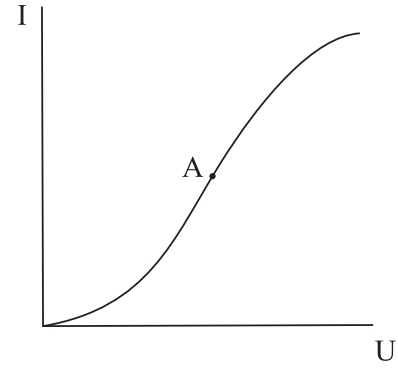


Рис. 2.2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad \alpha \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=0} + u \Big|_{x=0} + \varepsilon F(u|_{x=1}) = 0. \quad (2.1)$$

Здесь u — нормированная переменная составляющая напряжения в линии; $\alpha > 0$ — нормированная емкость на конце $x = 0$; $F(z) = \beta z - z^3$, $\beta > 0$ — аппроксимация нелинейной характеристики в окрестности рабочей точки A (см. рис. 2.2). Считаем также, что параметры α , β имеют порядок единицы.

В качестве фазового пространства краевой задачи (2.1) возьмем $(u, \frac{\partial u}{\partial t}) \in W_2^1(0, 1) \times L_2(0, 1)$ и заметим, что однозначная разрешимость отвечающей (2.1) смешанной задачи с начальными условиями из указанного пространства устанавливается стандартно (см. [28]): фигурирующее в (2.1) линейное уравнение интегрируется по характеристикам, а результат подставляется в граничные условия. В итоге проблема сводится к анализу некоторой системы интегро-дифференциальных уравнений.

Обращаем внимание, что получающаяся из (2.1) при $\varepsilon = 0$ линейная краевая задача обладает выраженными резонансными свойствами: ее характеристическое уравнение $(\alpha\lambda + 1) \operatorname{ch} \lambda = 0$ имеет один вещественный корень $\lambda = -1/\alpha$ и группу чисто мнимых резонансных корней $\lambda = \pm i\omega_n$, $\omega_n = \frac{\pi}{2}(2n - 1)$, $n = 1, 2, \dots$, которым отвечают периодические решения

$$\exp(\pm i\omega_n t) \cos \omega_n(x - 1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

В подобной ситуации построение автоколебаний с помощью одночастотного метода заведомо невозможно. Поэтому ниже для их построения вос-

пользуемся методом бесконечномерной нормализации, смыкающимся в алгоритмическом плане с методом квазинормальных форм [41], [40].

В данном случае, обыгрывая существование у краевой задачи (2.1) при $\varepsilon = 0$ периодических решений (2.2), ее автоколебания при $\varepsilon > 0$ будем искать в виде

$$u = u_0(t, s, x) + \varepsilon u_1(t, s, x) + \dots, \quad (2.3)$$

где $s = \varepsilon t$,

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [z_n(s) \exp(i\omega_n t) + \bar{z}_n(s) \exp(-i\omega_n t)] \cos \omega_n(x-1), \quad (2.4)$$

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x, s) \exp(i\omega_n t) + \bar{A}_n(x, s) \exp(-i\omega_n t), \quad (2.5)$$

а комплексные “амплитуды” z_n таковы, что сходится ряд с общим членом $\omega_n^2 |z_n|^2$ (в этом случае $u_0 \in W_2^1$ по переменной x). Подставляя затем (2.3)–(2.5) в (2.1) и приравнивая коэффициенты при ε , для фигурирующих в (2.5) функций A_n получаем краевые задачи (переменную s рассматриваем как параметр)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_n}{dx^2} + \omega_n^2 A_n &= i\omega_n \cdot \left(2 \frac{dz_n}{ds} + z_n \right) \cos \omega_n(x-1), \\ \frac{dA_n}{dx} \Big|_{x=1} &= 0, \quad A_n \Big|_{x=0} = -f_n / (1 + i\alpha\omega_n), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь f_n — коэффициент при $\exp(i\omega_n y)$ ряда Фурье функции $\beta v - v^3$, где

$$v(s, y) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(s) \exp(i\omega_n y) + \bar{z}_n(s) \exp(-i\omega_n y). \quad (2.7)$$

Условия разрешимости задач (2.6) приводят к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_n}{ds} + \frac{1}{2} z_n = i(-1)^{n-1} f_n / (1 + i\alpha\omega_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

для определения неизвестных амплитуд z_n . Привлекая, далее, функцию (2.7), убеждаемся, что полученная система “сворачивается” в краевую задачу

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{2} v \right] + \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{2} v + \beta v(s, y-1) - v^3(s, y-1) &= 0, \\ v(s, y+2) &\equiv -v(s, y), \end{aligned} \quad (2.9)$$

которую следует рассматривать в фазовом пространстве W_2^1 антипериодических с периодом 2 функций $v(y)$.

Строгий смысл описанным построениям придан в работе [28]. А именно, в [28] показано, что у краевой задачи (2.1) существует бесконечномерное (коразмерности 1) экспоненциально орбитально устойчивое инвариантное многообразие, движения на котором с точностью до слагаемых порядка ε^2 и ε соответственно задаются построенными выше отрезком ряда (2.3) и системой (2.8). При этом попутно в [28] установлено следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть краевая задача (2.9) имеет цикл $v = v_0(\xi)$, $\xi = \sigma_0 s + y$, $\sigma_0 = \text{const}$, экспоненциально орбитально устойчивый или дихотомичный. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ в исходной краевой задаче (2.1) ему отвечает цикл той же устойчивости с асимптотикой (2.3)–(2.5). При этом в формулах (2.4), (2.5) следует положить

$$z_n(s) = v_n^0 \exp(i\omega_n \sigma_0 s), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где v_0 , \bar{v}_n^0 — коэффициенты Фурье функции $v_0(\xi)$ по системе $\exp(\pm i\omega_n \xi)$, $n \geq 1$.

Сформулированная теорема сводит интересующую нас проблему исследования автоколебаний краевой задачи (2.1) к аналогичному вопросу для ее нормальной формы (2.9). Поэтому для удобства последующего анализа, выполняя в краевой задаче (2.9) подходящие нормировки переменных и параметров и заменяя s на t , y на x , приведем ее к виду

$$\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \right) + \frac{\partial v}{\partial t} + v + \beta v \left(t, x - \frac{\pi}{2} \right) - v^3 \left(t, x - \frac{\pi}{2} \right) = 0, \quad (2.10)$$

$$v(t, x + \pi) \equiv -v(t, x).$$

Обозначим, далее, через Ω_n — совокупность наборов (α, β) , при которых краевая задача (2.10) имеет не менее n различных экспоненциально орбитально устойчивых циклов указанного в теореме 2.1 вида. Справедливо следующее утверждение [28].

Теорема 2.2. Множество Ω_n не пусто при любом натуральном n .

Так как при доказательстве теоремы будем интересоваться периодическими решениями задачи (2.10), бифурцирующими при увеличении параметра β и при $\alpha \ll 1$ из нулевого состояния равновесия, то сначала

исследуем последнее на устойчивость. С этой целью отбросим в (2.10) нелинейность и положим в получившейся линейной краевой задаче $v = \exp(\lambda t \pm i(2n - 1)x)$. В итоге убеждаемся, что ее спектр устойчивости состоит из чисел $\lambda_n, \bar{\lambda}_n, n = 1, 2, \dots$, где

$$\lambda_n = -1 + (-1)^{n-1} \beta [\alpha(2n - 1) + i] / [1 + \alpha^2(2n - 1)^2]. \quad (2.11)$$

Из равенств (2.11) следует, что в случае $\alpha \ll 1$ нулевое решение устойчиво (неустойчиво) при $\beta < 2$ (> 2). Поэтому всюду ниже будем считать, что в (2.10)

$$\alpha = \mu \ll 1, \quad \beta = 2 + \gamma\mu, \quad \gamma \sim 1, \quad \gamma > 0. \quad (2.12)$$

Поскольку при условиях (2.12) у краевой задачи (2.10) возбуждаются лишь моды $\exp(\pm i(2n - 1)x)$ с нечетными номерами $n \sim \mu^{-1}$, то речь пойдет о быстро осциллирующих по x циклах, бифурцирующих из нуля на этих модах. Для их построения рассмотрим сначала краевую задачу (2.10) при условиях

$$\alpha = 1 + \delta\mu, \quad \beta = 2 + \gamma\mu, \quad \delta_1 \leq \delta \leq \delta_2, \quad (2.13)$$

где $\delta_1 < \delta_2$ произвольно фиксированы. Из равенств (2.11) следует, что в этом случае $\operatorname{Re} \lambda_1 \sim \frac{\gamma}{2}\mu$, а остальные собственные значения (2.11) имеют отрицательные действительные части порядка единицы. Таким образом, здесь находимся в рамках применимости классической бифуркационной теоремы Андронова — Хопфа, распространенной на уравнения с запаздыванием в [35, 56]. В частности, из содержащихся в [35] результатов вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Для любых $\delta_1 < \delta_2$ найдется такое $\mu_0 > 0$, что при условиях (2.13) и при $0 < \mu \leq \mu_0$ краевая задача (2.10) имеет периодическое решение*

$$v = \sqrt{\mu} v_0(\xi, \delta, \mu), \quad \xi = \sigma(\mu)t + x. \quad (2.14)$$

Здесь аналитические по совокупности своих переменных функции v_0, σ таковы, что $v_0(\xi, \delta, 0) = \sqrt{\frac{4}{3}} \gamma \cos \xi, \sigma(0) = 1$.

Обратимся теперь к задаче (2.10) при условиях (2.12). Непосредственная проверка показывает, что в этом случае она имеет периодические решения

$$v_n = \sqrt{\mu} v_0(\xi, \delta_n(\mu), \mu), \quad \xi = \sigma(\mu)t + (4n + 1)x, \quad \delta_n(\mu) = 4n + 1 - 1/\mu \quad (2.15)$$

с асимптотически большими номерами n , удовлетворяющими неравенствам

$$\delta_1 \leq 4n + 1 - 1/\mu \leq \delta_2. \quad (2.16)$$

Тем самым, и здесь сталкиваемся с некоторым аналогом принципа подобия из § 1.

Для исследования устойчивости высокомодовых циклов (2.15), (2.16) использовалась стандартная методика (см. [28]). На этом пути было получено следующее утверждение.

Лемма 2.2. Пусть $\delta_1 < \delta_2$ — произвольно фиксированные числа из интервала $(l_-(\gamma), l_+(\gamma))$, где

$$l_{\pm}(\gamma) = -\frac{3}{4}\eta \pm \sqrt{\frac{3}{4}\eta^2 + 4}, \quad \eta = \gamma/3.$$

Тогда при всех достаточно малых $\mu > 0$ циклы (2.15), (2.16) экспоненциально орбитально устойчивы.

В дополнение к приведенной лемме заметим, что поскольку

$$\lim l_{\pm}(\gamma) = \pm\infty, \quad \gamma \rightarrow \infty,$$

то при подходящем увеличении γ и уменьшении μ количество устойчивых циклов (2.15), (2.16) может быть сделано сколь угодно большим. Теорема 2.2 доказана.

В заключение скажем несколько слов о происхождении краевой задачи (2.1). В связи с этим напомним, что в случае $C_0 = 0$ впервые математическая модель рассматриваемого автогенератора на основе разработанной в [33] методики была предложена в работе [10]. Однако явление буферности в нем (при $C_0 = 0$) удалось обнаружить и изучить, как теоретически, так и экспериментально, лишь значительно позднее (см. [11, 12, 14], [26]). Введение же дополнительной емкости C_0 , с одной стороны, мотивировано тем, что оно приводит к снижению критического значения коэффициента усиления, необходимого для возбуждения автоколебаний в линии (напомним, что в [11, 12, 14] “пороговый” коэффициент усиления был близок к единице, а в нашем случае он имеет вид $\varepsilon\beta$, т.е. мал). С другой стороны, вспомогательная емкость позволяет обнаружить в данной задаче новый феномен — так называемую высокомодовую буферность. Суть этого явления состоит в том, что в системе могут быть устойчивыми только периодические режимы, бифурцирующие из нуля на конечном числе высоких

мод. Младшие же и, наоборот, слишком высокие моды при этом не возбуждаются. Подчеркнем, что именно с такой ситуацией мы и сталкиваемся при уменьшении в (2.1) параметра α и при увеличении нормированного коэффициента усиления β .

2.2. Явление буферности в $RCLG$ -линии с малыми искажениями

В этом пункте рассмотрим тот же самый генератор, что и выше, но в несколько ином диапазоне параметров. А именно, теперь считаем малыми уже не суммарные потери в линии, а искажения в ней. Тогда при условии $C_0 = 0$ математической моделью данного генератора служит краевая задача (см. [27])

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{a^2}{4} - \varepsilon \right) u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} &= 0, \quad u \Big|_{x=0} + \beta u \Big|_{x=1} - u^3 \Big|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь по-прежнему u — нормированная переменная составляющая напряжения в линии,

$$a = G\sqrt{L/C} + R\sqrt{C/L}, \quad \varepsilon = \frac{1}{4}(R\sqrt{C/L} - G\sqrt{L/C})^2,$$

причем $0 < \varepsilon \ll 1$, а параметры $a, \beta > 0$ имеют порядок единицы. В качестве фазового пространства в данном случае возьмем $\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \in V = \overset{\circ}{W}_2^1(0, 1) \times L_2(0, 1)$, где $\overset{\circ}{W}_2^1 \subset W_2^1$ — нелинейное многообразие функций, удовлетворяющих второму граничному условию из (2.17). Напомним, что однозначная разрешимость отвечающей (2.17) смешанной задачи с начальными условиями из указанного фазового пространства впервые была установлена в [46] (см. также [11, 26]).

Поставим вопрос о существовании и устойчивости автоколебаний краевой задачи (2.17), бифурцирующих из нуля при увеличении β . В связи с этим положим в ней

$$\beta = \text{ch}(a/2) + \varepsilon\gamma, \quad \gamma \sim 1. \quad (2.18)$$

Целесообразность такого выбора параметра β обусловлена тем, что в этом случае при $\varepsilon = 0$ характеристическое уравнение $\operatorname{ch}(\lambda + a/2) + \operatorname{ch}(a/2) = 0$, отвечающее нулевому состоянию равновесия, имеет группу чисто мнимых резонансных корней $\lambda = \pm i\omega_n$, $\omega_n = \pi(2n - 1)$, $n = 1, 2, \dots$, которым соответствуют периодические решения

$$\exp(i\omega_n t)h_n(x), \quad \exp(-i\omega_n t)\bar{h}_n(x),$$

$$h_n(x) = \operatorname{ch}\left[\left(i\omega_n + \frac{a}{2}\right)(x - 1)\right], \quad n \geq 1 \quad (2.19)$$

линеаризованной краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a^2}{4}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad u \Big|_{x=0} + \operatorname{ch}\left(\frac{a}{2}\right)u \Big|_{x=1} = 0. \quad (2.20)$$

Остальные же корни этого уравнения исчерпываются равенствами $\lambda = -a \pm i\omega_n$, $n = 1, 2, \dots$, а отвечающие им решения Ляпунова — Флоке имеют вид

$$\exp(-a + i\omega_n)t \bar{h}_n(x), \quad \exp(-a - i\omega_n)t h_n(x), \quad n \geq 1. \quad (2.21)$$

Итак, при условии (2.18) и при $\varepsilon = 0$ в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия сталкиваемся примерно с такой же ситуацией, что и в предыдущем пункте. Единственное несущественное отличие заключается в том, что здесь соответствующее характеристическое уравнение имеет в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$ уже не один корень, а счетное их число. Поэтому, как и выше, для нахождения автоколебаний краевой задачи (2.17), (2.18) воспользуемся методом бесконечномерной нормализации.

Следуя описанной в п. 2.1 методике и обыгрывая существование у краевой задачи (2.20) периодических решений (2.19), подставим в (2.17) равенство

$$u = \sqrt{\varepsilon}u_0(t, s, x) + \varepsilon^{3/2}u_1(t, s, x) + \dots, \quad (2.22)$$

где $s = \varepsilon t$

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(s) \exp(i\omega_n t)h_n(x) + \bar{z}_n(s) \exp(-i\omega_n t)\bar{h}_n(x), \quad (2.23)$$

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(i\omega_n t) + \bar{B}_n(x, s) \exp(-i\omega_n t), \quad (2.24)$$

а комплексные амплитуды z_n таковы, что по-прежнему сходится ряд с общим членом $\omega_n^2 |z_n|^2$. Приравнивая затем коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, для фигурирующих в (2.24) коэффициентов B_n получаем краевые задачи

$$\begin{aligned} \frac{d^2 B_n}{dx^2} - \left(\frac{a}{2} + i\omega_n \right) B_n &= \left[(2i\omega_n + a) \frac{dz_n}{ds} - z_n \right] h_n(x), \\ \frac{dB_n}{dx} \Big|_{x=1} &= 0, \quad B_n \Big|_{x=0} + \operatorname{sh} \left(\frac{a}{2} \right) B_n \Big|_{x=1} + f_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.25)$$

Здесь, как и выше, f_n — коэффициент при $\exp(i\omega_n y)$ ряда Фурье функции $\gamma v - v^3$, где v задается равенством (2.7).

Из условий разрешимости краевых задач (2.25) для определения неизвестных амплитуд z_n получаем счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$2 \frac{dz_n}{ds} = z_n \left/ \left(\frac{a}{2} + i\omega_n \right) \right. + 2f_n \left/ \operatorname{sh} \left(\frac{a}{2} \right) \right., \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.26)$$

которая, как и аналогичная ей система (2.8), сворачивается в краевую задачу

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial y} + a \frac{\partial v}{\partial s} &= v + \frac{a}{\operatorname{sh}(a/2)} (\gamma v - v^3) + \frac{2}{\operatorname{sh}(a/2)} (\gamma - 3v^2) \frac{\partial v}{\partial y}, \\ v(s, y+1) &\equiv -v(s, y) \end{aligned} \quad (2.27)$$

для функции (2.7).

Теорема 2.3. Любому периодическому решению краевой задачи (2.27) вида $v = v_0(\sigma_0 s + y)$, $\sigma_0 = \text{const}$, экспоненциально орбитально устойчивому или дихотомичному (в метрике W_2^1), в исходной задаче (2.17), (2.18) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ отвечает цикл той же устойчивости, асимптотика которого получается из (2.22)–(2.24) по описанному в теореме 2.1 правилу. Кроме того, при каждом натуральном n заведомо не пуста совокупность Ω_n наборов параметров (a, γ) , при которой краевая задача (2.27) имеет не менее n различных экспоненциально орбитально устойчивых циклов.

Остановимся сначала на причинах, по которым здесь оказывается справедливым аналог теоремы 2.1. В данном случае они допускают ту же самую наглядную геометрическую интерпретацию, что и в п. 2.1. Для пояснения сути дела рассмотрим группу линейных ограниченных операторов

$T(t)$, порождаемую решениями краевой задачи (2.20) в гильбертовом пространстве $V_0 = \overset{\circ}{W}_2^1(0, 1) \times L_2(0, 1)$, где теперь

$$\overset{\circ}{W}_2^1(0, 1) = \left\{ g(x) \in W_2^1(0, 1) : g(0) + \operatorname{ch} \frac{a}{2} g(1) = 0 \right\}.$$

Лемма 2.3. *Фазовое пространство V_0 допускает такое представление в виде прямой суммы $V_1 \oplus V_2$ замкнутых подпространств V_j , $j = 1, 2$, что, во-первых, $T(t)V_j \subset V_j$, $j = 1, 2$, при любом $t \in \mathbb{R}$; во-вторых, сужения $T_j(t)$ группы $T(t)$ на инвариантные подпространства V_j , $j = 1, 2$, обладают свойствами:*

$$T_1(t+1) \equiv -T_1(t), \quad \|T_2(t)\|_{V_2 \rightarrow V_2} \leq M \exp(-at), \quad (2.28)$$

где константа $M > 0$ не зависит от t .

Доказательство. Обращаем внимание, что аналоги свойств (2.28) имеют, очевидно, место для решений (2.19), (2.21) краевой задачи (2.20). Поэтому для обоснования всей совокупности требуемых фактов достаточно показать, что система

$$\frac{1}{\omega_n} \operatorname{ch} \left[\frac{a}{2}(x-1) \right] \cos \omega_n x, \quad \frac{1}{\omega_n} \operatorname{sh} \left[\frac{a}{2}(x-1) \right] \sin \omega_n x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

образует базис Рисса [8] в $\overset{\circ}{W}_2^1(0, 1)$, а при умножении на ω_n будет базисом Рисса и в $L_2(0, 1)$.

Рассмотрим вспомогательные гильбертовы пространства

$$H_1 = \{g(x) \in W_2^1(0, 1) : g(0) + g(1) = 0, \quad g(1-x) \equiv -g(x)\}, \quad (2.30)$$

$$H_2 = \{g(x) \in W_2^1(0, 1) : g(0) = g(1) = 0, \quad g(1-x) \equiv g(x)\}, \quad (2.31)$$

и заметим, что пространство $\overset{\circ}{W}_2^1(0, 1)$ изоморфно $H_1 \times H_2$. Действительно, искомый изоморфизм осуществляет оператор Π , ограниченный вместе со своим обратным и задающийся равенствами:

$$\begin{aligned} \Pi : (g_1, g_2) \in H_1 \times H_2 &\rightarrow g(x) = \\ &= \operatorname{ch} \left[\frac{a}{2}(x-1) \right] g_1(x) + \operatorname{sh} \left[\frac{a}{2}(x-1) \right] g_2(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, 1); \end{aligned}$$

$$\Pi^{-1} : g(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, 1) \rightarrow (g_1, g_2) \in H_1 \times H_2,$$

где

$$g_1 = \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{2}\right)} \left[g(x) \operatorname{sh}\left(\frac{a}{2}x\right) - g(1-x) \operatorname{sh}\left(\frac{a}{2}(1-x)\right) \right],$$

$$g_2 = -\frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{2}\right)} \left[g(x) \operatorname{ch}\left(\frac{a}{2}x\right) + g(1-x) \operatorname{ch}\left(\frac{a}{2}(1-x)\right) \right].$$

А так как системы $\left\{ \frac{1}{\omega_n} \cos \omega_n x, n = 1, 2, \dots \right\}$ и $\left\{ \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n x, n = 1, 2, \dots \right\}$ образуют, очевидно, ортогональные базисы в пространствах H_1 и H_2 соответственно, то изоморфная им система (2.29) по определению будет базисом Рисса в $\overset{\circ}{W}_2^1(0, 1)$. Остается добавить, что для $L_2(0, 1)$ все рассуждения сохраняются, если в (2.30), (2.31) заменить $\overset{\circ}{W}_2^1(0, 1)$ на $L_2(0, 1)$, отбросить граничные условия, а соответствующие тождества считать справедливыми почти всюду на отрезке $0 \leq x \leq 1$. Лемма доказана. \square

Итак, подпространство V_1 представляет собой экспоненциально орбитально устойчивое инвариантное многообразие краевой задачи (2.20). Далее, при переходе от (2.20) к исходной задаче (2.17), (2.18) это многообразие сохраняется в достаточно малой окрестности нуля фазового пространства V , в чем можно убедиться с помощью описанной в [55] схемы, применимость которой гарантирует доказанная лемма (см. также аналогичные построения в [45, 46]). И наконец, из способа получения системы (2.26) следует, что она — укороченная нормальная форма на указанном многообразии. Таким образом, первое из утверждений теоремы 2.3 — стандартное соответствие между грубыми циклами исходной системы и ее нормальной формы.

Для доказательства второго утверждения теоремы 2.3, т. е. непустоты множества Ω_n при любом натуральном n , достаточно положить в (2.27) $\gamma = \gamma_0 a$, $\gamma_0 > 0$, выполнить нормировку $v/\sqrt{a} \rightarrow v$, сократить на \sqrt{a} и перейти к пределу при $a \rightarrow 0$. В результате получим краевую задачу

$$2 \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial y} = v + 4(\gamma_0 - 3v^2) \frac{\partial v}{\partial y}, \quad v(s, y+1) \equiv -v(s, y), \quad (2.32)$$

для которой аналогичное утверждение обосновано в [12, 26].

Остановимся подробнее на свойствах задачи (2.32). Для этого с помощью подходящих нормировок переменных s, v и замен s на t , y на x

приведем ее к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = v + \lambda(1 - v^2) \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v(t, x + 1) \equiv -v(t, x), \quad (2.33)$$

где $\lambda = 4\gamma_0$. В работах [12, 26] показано, что, во-первых, на интервале $0 < \lambda < \lambda_0$, где $\lambda_0 = 2/(3 - 2 \ln 2)$, она имеет непрерывное по λ периодическое решение

$$w = w_0(y, \lambda), \quad y = \sigma_0(\lambda)t - x : \quad w_0(y, 0) = 2 \cos \pi y, \quad \sigma_0(0) = 1/\pi^2, \quad (2.34)$$

а на интервале $0 < \lambda < \lambda_n$, $\lambda_n = \lambda_0/(2n + 1)$, $n = 0, 1, \dots$ — периодические решения

$$w = w_n(y, \lambda), \quad y = \sigma_n(\lambda)t - x, \quad (2.35)$$

получающиеся из (2.34) с помощью принципа подобия:

$$w_n = w_0((2n + 1)y, (2n + 1)\lambda), \quad \sigma_n(\lambda) = \sigma_0((2n + 1)\lambda)/(2n + 1)^2;$$

во-вторых, для любого натурального N найдется такое достаточно малое $\lambda_N > 0$, что при $0 < \lambda \leq \lambda_N$ циклы (2.35) с номерами $n = 0, 1, \dots, N$ экспоненциально орбитально устойчивы; и, наконец, в-третьих, при увеличении параметра λ и при прохождении его через критические значения λ_n циклы (2.35) разрушаются за счет градиентных катастроф, т. е. становятся разрывными, оставаясь ограниченными в C -норме. Таким образом, при $\lambda > \lambda_0$ не остается ни одного из них.

2.3. Автоколебания в системе Витта при резонансном спектре собственных частот

В известной работе А. А. Витта [6] рассмотрен генератор, содержащий отрезок двухпроводной линии длины l с равномерно распределенными индуктивностью L , емкостью C и сопротивлением R . Предполагалось, что к одному концу линии присоединена емкость C_0 , а к другому — нелинейное сопротивление с падающей характеристикой. В качестве математической модели такого автогенератора в [6] предложена краевая задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon v, \\ v|_{x=0} &= \varepsilon \alpha(u - u^3/3)|_{x=0}, \quad \beta \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=1} + v \Big|_{x=1} = 0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где u и v — нормированные переменные составляющие напряжения и силы тока в линии; $\varepsilon = lR\sqrt{C/L}$; $\beta = C_0/(Cl)$; $\alpha > 0$ — коэффициент усиления. При условии малости ε в [6] получены асимптотические формулы для периодических по t решений этой краевой задачи и исследована их устойчивость.

В данном пункте, следуя [29], будем считать, что $\varepsilon\alpha = \mu \ll 1$, но $\mu/\varepsilon \gg 1$. Тогда, пренебрегая слагаемым $-\varepsilon v$ во втором уравнении из (2.36) (т. е. рассматривая идеальную линию) и снова обозначая малый параметр μ через ε , получим краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \\ v|_{x=0} &= \varepsilon(u + pu^2 - u^3/3)|_{x=0}, \quad \beta \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=1} + v \Big|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Здесь параметр p , знак которого произволен, отвечает за эффект несимметрии характеристики нелинейного элемента, существенный в рассматриваемом автогенераторе. В качестве фазового пространства (пространства начальных условий $(u(0, x), v(0, x))$) данной краевой задачи возьмем нелинейное многообразие $\Sigma \subset W_2^1(0, 1) \times W_2^1(0, 1)$, состоящее из вектор-функций, компоненты которых удовлетворяют первому граничному условию из (2.37).

Автоколебаниями краевой задачи (2.37) будем интересоваться при дополнительном предположении о малости β . Для согласования порядков малости параметров β и ε заметим, что при $\varepsilon = 0$ спектр устойчивости ее нулевого положения равновесия состоит из нулевого собственного числа и чисто мнимых собственных значений $\pm\sigma_n$, где $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n < \dots$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \sigma = -\beta\sigma$. Заметим, далее, что при каждом фиксированном n справедливо асимптотическое представление

$$\sigma_n = \omega_n(1 - \beta + \beta^2) + (\omega_n^3/3 - \omega_n)\beta^3 + O(\beta^4), \quad \beta \rightarrow 0, \quad (2.38)$$

где $\omega_n = n\pi$, $n \geq 1$. Формулы (2.38) наводят на мысль о целесообразности условия

$$\beta = \beta_0 \varepsilon^{1/3}, \quad \beta_0 = \operatorname{const} > 0, \quad (2.39)$$

так как в этом случае “отход” от резонансности у собственных частот σ_n происходит в порядке ε , что согласуется с порядком малости в первом граничном условии из (2.37).

Обращаем внимание, что получающаяся из (2.37) при условии (2.39) и при $\varepsilon = 0$ линейная краевая задача обладает явными резонансными

свойствами — ее общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} u_0 &= z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [z_n \exp(i\omega_n t) + \bar{z}_n \exp(-i\omega_n t)] \cos \omega_n x, \\ v_0 &= -i \sum_{n=1}^{\infty} [z_n \exp(i\omega_n t) - \bar{z}_n \exp(-i\omega_n t)] \sin \omega_n x, \end{aligned} \quad (2.40)$$

где z_0 и z_n , $n \geq 1$, — произвольные вещественная и комплексные постоянные, причем сходится ряд с общим членом $\omega_n^2 |z_n|^2$. Поэтому, как и в п. 2.1, 2.2, для нахождения автоколебаний краевой задачи (2.37), (2.39) воспользуемся формализмом метода бесконечномерной нормализации, имеющим в данном случае определенную специфику. А именно, здесь автоколебания ищем в виде

$$\begin{aligned} u &= u_0(\tau, s, x) + \varepsilon^{1/3} u_1(\tau, s, x) + \varepsilon^{2/3} u_2(\tau, s, x) + \varepsilon u_3(\tau, s, x) + \dots, \\ v &= v_0(\tau, s, x) + \varepsilon^{1/3} v_1(\tau, s, x) + \varepsilon^{2/3} v_2(\tau, s, x) + \varepsilon v_3(\tau, s, x) + \dots, \end{aligned} \quad (2.41)$$

где

$$\tau = (1 - \beta_0 \varepsilon^{1/3} + \beta_0^2 \varepsilon^{2/3})t, \quad s = \varepsilon t, \quad (2.42)$$

а функции u_0, v_0 задаются равенствами (2.40), в которых необходимо t заменить на τ и считать амплитуды z_0, z_n , $n \geq 1$ неизвестными (подлежащими определению) функциями переменной s . Остальные же выписанные коэффициенты рядов (2.41) имеют вид ($j = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} u_j &= A_0^j(x, s) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^j(x, s) \exp(i\omega_n \tau) + \bar{A}_n^j(x, s) \exp(-i\omega_n \tau), \\ v_j &= B_0^j(x, s) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^j(x, s) \exp(i\omega_n \tau) + \bar{B}_n^j(x, s) \exp(-i\omega_n \tau). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Подставляя ряды (2.41) в задачу (2.37), (2.39) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , для определения фигурирующих в (2.43) функций A_n^j, B_n^j получим рекуррентную последовательность линейных неоднородных краевых задач. Отметим, что в силу специального выбора поправок порядка $\varepsilon^{1/3}$ и $\varepsilon^{2/3}$ и (2.42) соответствующие краевые задачи при $j = 1, 2$ оказываются разрешимыми и их решения задаются

равенствами

$$\begin{aligned}
 A_0^j &= B_0^j = 0, \quad j = 1, 2; \\
 A_n^1 &= z_n \omega_n \beta_0 x \sin \omega_n x, \quad B_n^1 = i z_n \omega_n \beta_0 x \cos \omega_n x; \\
 A_n^2 &= -\frac{z_n}{2} \omega_n \beta_0^2 [\omega_n x^2 \cos \omega_n x + 2x \sin \omega_n x], \\
 B_n^2 &= \frac{i z_n}{2} \omega_n \beta_0^2 [\omega_n x^2 \sin \omega_n x - 2x \cos \omega_n x].
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

В случае же $j = 3$ приходим к краевым задачам

$$\begin{aligned}
 \frac{dA_n^3}{dx} + i\omega_n B_n^3 &= i\omega_n [\beta_0 B_n^2 - \beta_0^2 B_n^1] + i \frac{dz_n}{ds} \sin \omega_n x, \\
 \frac{dB_n^3}{dx} + i\omega_n A_n^3 &= i\omega_n [\beta_0 A_n^2 - \beta_0^2 A_n^1] - \frac{dz_n}{ds} \cos \omega_n x, \\
 B_n^3 \Big|_{x=0} &= f_n, \quad B_n^3 \Big|_{x=1} = -\beta_0 \frac{dB_n^2}{dx} \Big|_{x=1}.
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Здесь f_n — коэффициент при $\exp(i\omega_n y)$ ряда Фурье функции $w + pw^2 - w^3/3$, где

$$w(s, y) = z_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} z_n(s) \exp(i\omega_n y) + \bar{z}_n(s) \exp(-i\omega_n y). \tag{2.46}$$

Условия разрешимости задач (2.45) с учетом равенств (2.44) записываются в виде счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_n}{ds} = i\beta_0^3 (\omega_n^3/3 - \omega_n) z_n + f_n, \quad n = 0, 1, \dots \tag{2.47}$$

для определения неизвестных амплитуд z_n . Привлекая, далее, функцию (2.46), убеждаемся, что, как и в случае (2.8), (2.26), система (2.47) сворачивается в краевую задачу

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{\beta_0^3}{3} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \beta_0^3 \frac{\partial w}{\partial y} + w + pw^2 - w^3/3, \quad w(s, y+2) \equiv w(s, y). \tag{2.48}$$

Следует отметить, что в отличие от случаев, рассмотренных в п. 2.1, 2.2, здесь краевая задача (2.48) не является нормальной формой для исходной задачи (2.37), (2.39), так как не существует корректно

определенной замены, приводящей последнюю к виду (2.47). Для пояснения сути дела рассмотрим пространство l_2^1 последовательностей вида $z = (z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n, \dots)$, для которых конечна норма

$$\|z\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 |z_n|^2 \right)^{1/2},$$

и заметим, что построенные в п. 2.1, 2.2 отрезки рядов (2.3) и (2.22) индуцируют ограниченные нелинейные операторы, действующие из l_2^1 в $W_2^1(0,1)$. А это, в свою очередь, позволяет сконструировать из них корректные замены переменных, приводящие краевые задачи (2.1) и (2.17), (2.18) (на соответствующих инвариантных многообразиях) к системам в l_2^1 вида (2.8) и (2.26). В случае же построенных выше отрезков рядов (2.41) ситуация иная: при произвольно фиксированном векторе $z \in l_2^1$, как следует из (2.44), $u_1, v_1 \in L_2(0,1)$ по переменной x , а ряды для u_2, v_2 и тем более для u_3, v_3 вообще носят формальный характер. Поэтому, согласно принятой в [41], [40] терминологии, краевую задачу (2.48) будем называть квазинормальной формой.

Несмотря на все вышесказанное, стандартное утверждение о соответствии между периодическими решениями задач (2.48) и (2.37), (2.39) остается в силе. Точнее говоря, каждому периодическому решению $w = w_0(\xi)$, $\xi = \sigma_0 s + y$, $\sigma_0 = \text{const}$ краевой задачи (2.48), экспоненциально орбитально устойчивому или дихотомичному (в метрике фазового пространства W_2^3 периодических с периодом 2 функций), при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ в исходной задаче (2.37), (2.39) соответствует цикл той же устойчивости, а его асимптотика получается из (2.41), (2.42) по описанному в теореме 2.1 правилу. Доказательство этого утверждения вытекает из результатов работ [41] и [26], [13], где даны две различные версии обоснования метода квазинормальных форм в случае гиперболических уравнений.

Выполняя в краевой задаче (2.48) замену $y - \beta_0^3 s \rightarrow y$, в результате которой исчезает слагаемое $-\beta_0^3 \partial w / \partial y$, затем обозначая s через t и через x , приходим к модельной краевой задаче

$$\frac{\partial w}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = w + pw^2 - \frac{w^3}{3}, \quad w(t, x+2) \equiv w(t, x), \quad (2.49)$$

где $a^2 = \beta_0^3/3$. Вопросы о существовании и устойчивости ее периодических решений типа бегущих волн, т. е. вида

$$w = w(y), \quad y = nx + a^2 n^3 \sigma t, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.50)$$

подробно изучены в монографии [26]. Поэтому здесь ограничимся лишь кратким обзором содержащихся в [26] результатов.

Подставляя (2.50) в (2.49), для определения периодической с периодом 2 функции $w(y)$ и частоты σ приходим к дифференциальному уравнению

$$w''' + \sigma w' = \mu[w + pw^2 - w^3/3], \quad (2.51)$$

в котором параметр $\mu = 1/(a^2 n^3)$ для удобства будем считать меняющимся непрерывно. Предполагая, далее, что $\mu \ll 1$, функции $\sigma(\mu)$, $w(y, \mu)$ будем искать в виде

$$w = w_0(y) + \mu w_1(y) + \dots, \quad \sigma = \pi^2 + \mu \sigma_1 + \dots$$

Здесь $w_0(y) = c + 2\xi \cos \pi y$, а c и ξ — произвольные вещественные постоянные, определяющиеся вместе с поправкой к частоте σ_1 из условий разрешимости в классе 2-периодических функций уравнения

$$w_1''' + \pi^2 w_1' = -\sigma_1 w_0' + w_0 + pw_0^2 - w_0^3/3.$$

Несложный подсчет показывает, что $\sigma_1 = 0$, $\xi^2 = 1 + 2pc - c^2$, где c — корень уравнения $H(z) = 0$;

$$H(z) \equiv 2p + (4p^2 - 1)z - 5pz^2 + 5z^3/3. \quad (2.52)$$

Справедливо следующее утверждение [26].

Теорема 2.4. Пусть многочлен (2.52) имеет корень $z = c_*$, для которого $H'(c_*) \neq 0$ и $1 + 2pc_* - c_*^2 > 0$. Тогда найдется такое $\mu_0 > 0$, что, во-первых, при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ существует пара достаточно гладких по своим переменным функций

$$(\sigma(\mu), w(y, \mu)) : w(y + 2, \mu) \equiv w(y, \mu), w(y, 0) = c_* + 2\xi_* \cos \pi y,$$

$$\xi_* = \sqrt{1 + 2pc_* - c_*^2}, \quad \sigma(0) = \pi^2, \quad \sigma'(0) = 0,$$

обращающих уравнение (2.51) в тождество; во-вторых, краевая задача (2.49) имеет счетное число циклов

$$w_n = w(y, \mu), \quad y = nx + a^2 n^3 \sigma(\mu)t, \quad \mu = [a^2 n^3]^{-1} \quad (2.53)$$

с номерами n , удовлетворяющими неравенству

$$[a^2 n^3]^{-1} \leq \mu_0; \quad (2.54)$$

в-третьих, все циклы (2.53), (2.54) экспоненциально орбитально устойчивы при $H'(c_*) < 0$ и неустойчивы при $H'(c_*) > 0$.

Отдельно остановимся на исследовании поведения корней многочлена (2.52) при изменении параметра p . С этой целью рассмотрим точку $c_0 = p + \sqrt{(p^2 + 1)/5}$ его локального минимума и положим $\Psi(p) = H(z)|_{z=c_0}$. Непосредственно проверяется, что

$$\Psi(0) = -\frac{2}{3\sqrt{5}} < 0, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \Psi(p) = +\infty,$$

$$\Psi'(p) = 1 + 2p^2 - 2p\sqrt{\frac{p^2 + 1}{5}} > 0 \text{ при всех } p \geq 0.$$

Таким образом, уравнение $\Psi(p) = 0$ имеет на полуоси $p \geq 0$ единственный корень $p_* = 0,323\dots$. А отсюда, в свою очередь, следует, что, во-первых, при $|p| < p_*$ многочлен (2.52) имеет три вещественных корня $c_0 < c_1 < c_2$: $H'(c_j) > 0$, $j = 0, 2$, $H'(c_1) < 0$; во-вторых, при прохождении $|p|$ через значение p_* два его корня сливаются и исчезают; в-третьих, при $|p| > p_*$ остается только один корень $c = c_*$: $H'(c_*) > 0$. Отметим еще, что во всех случаях неравенство $1 + 2pc - c^2 > 0$ для корней многочлена (2.52) выполняется автоматически.

Из теоремы 2.4 следует, что при $|p| < p_*$ краевая задача (2.49) имеет счетное число устойчивых циклов, отвечающих корню c_1 многочлена (2.52). А отсюда и из аналога теоремы 2.1, о справедливости которого говорилось выше, вытекает, что в рамках исходной краевой задачи (2.37), (2.39) в этом случае наблюдается явление буферности: по любому натуральному N можно указать такое $\varepsilon_N > 0$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_N$ она имеет не менее N различных устойчивых циклов. С другой стороны, если $|p| > p_*$, то буферность в ней исчезает. Для сравнения заметим, что в краевых задачах (2.1) и (2.17), (2.18) ситуация иная: квадратичная нелинейность не оказывает существенного влияния на динамику и, в частности, поэтому она в них не учтена.

И последнее. При достаточно больших значениях β_0 неравенство (2.54) выполняется, очевидно, для всех $n \geq 1$. Поэтому в данном случае краевая задача (2.49) при $|p| < p_*$ имеет полный набор устойчивых циклов (2.50), причем форма каждого из них близка к гармонической. При уменьшении же a^2 зависимость от $y = nx + a^2 n^3 \sigma t$ части из этих циклов (с младшими номерами n) усложняется.

2.4. Заключительные замечания

Как показывают рассмотренные в этом параграфе примеры, изучение гиперболических краевых задач, состоящих из линейной системы телеграфных уравнений с нелинейными граничными условиями на концах конечного отрезка, актуально в связи с тем, что они являются математическими моделями для широкого класса автогенераторов с отрезком длинной линии в цепи обратной связи. При этом нелинейные элементы, имеющие произвольную природу (классическая лампа, туннельный диод и т. д.), в таких автогенераторах присоединены, как правило, к концам линии, что и объясняет происхождение нелинейных граничных условий в соответствующих математических моделях.

Предположим, что в задачах об устойчивости нулевого положения равновесия некоторой гиперболической системы из описанного выше класса реализуется критический случай счетного числа чисто мнимых собственных значений, а при изменении некоторых входящих в эту систему параметров происходит смещение части спектра устойчивости в правую комплексную полуплоскость. Тогда естественным образом возникает вопрос о существовании и устойчивости автоколебаний такой системы, бифурцирующих из нуля. По-видимому, первой публикацией, посвященной данной проблеме, является уже упоминавшаяся статья А. А. Витта [6]. Из ее результатов, а также из значительно более поздних работ [16, 17, 21–24, 26–30] следует, что при отсутствии определенных резонансных соотношений между собственными частотами системы чаще всего в ней реализуется феномен буферности. Точнее говоря, в этом случае имеется некоторое количество квазигармонических (т. е. близких к гармоническим по t) устойчивых циклов, которое за счет подходящего выбора параметров может быть сделано сколь угодно большим. Кроме этого, имеются еще неустойчивые квазигармонические инвариантные торы различных размерностей, разделяющие области притяжения устойчивых циклов. Подчеркнем, что именно с такой ситуацией мы сталкиваемся в случае краевых задач (2.36), (2.37) при условии, что параметр β имеет порядок единицы.

Предположим теперь, что спектр собственных частот рассматриваемой гиперболической краевой задачи является эквидистантным или становится таковым при изменении некоторых параметров (эквидистантность означает, что если занумеровать все собственные частоты в порядке возрастания, то расстояния между любыми двумя соседними из них будут одинаковы). В данной ситуации, которая более интересна в математиче-

ском плане и весьма часто встречается в приложениях, бифурцирующие из нуля автоколебания обладают некоторыми специфическими особенностями. Имеющийся к настоящему времени достаточно богатый фактический материал, частично представленный в данном параграфе, позволяет выявить следующие закономерности.

1). Разрушение буферности. Диапазон параметров, в котором реализуется феномен буферности, существенно сужается и соответственно уменьшается количество устойчивых циклов. Более того, при прохождении некоторых параметров через конечные критические значения все циклы последовательно разрушаются за счет градиентных катастроф (см. соответствующее место в п. 2.2). Таким образом, динамика в данном случае характеризуется следующей схемой:

$$\begin{aligned} \boxed{\text{Буферность}} &\rightarrow \boxed{\text{Градиентные катастрофы}} \rightarrow \\ &\rightarrow \boxed{\text{Разрывные колебания}}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Отметим, что схема (2.55) реализуется в двух основных ситуациях. Во-первых, с ней сталкиваемся в наиболее часто встречающемся случае, когда в гиперболической системе с эквидистантным или близким к эквидистантному спектру собственных частот увеличивается некоторый энергетический параметр, т. е. параметр, отвечающий за смещение спектра устойчивости в правую комплексную полуплоскость. Во-вторых, схема (2.55) может возникнуть при переходе в гиперболической системе от неэквидистантного спектра собственных частот к эквидистантному. И наконец, что самое главное, в случае реализации схемы (2.55) исследование любой конкретной гиперболической системы приводит к одной и той же модельной краевой задаче (2.33) или к некоторой ее модификации, сохраняющей основные свойства (подобной модификацией является, например, задача (2.27)). Таким образом, краевая задача (2.33) представляет собой своего рода инвариант, характеризующий рассматриваемую особенность.

Первая из отмеченных альтернатив, при которых имеем дело со схемой (2.55), наблюдается, например, в краевой задаче (2.17), (2.18) при фиксированном достаточно малом α и при увеличении γ , так как в этом случае ее динамика описывается краевой задачей (2.32). Вторая же альтернатива реализуется в краевой задаче (2.37) при увеличении параметра β . Для того чтобы убедиться в этом, подставим в нее $\beta^{-1} = \varepsilon\gamma$, $\gamma = \text{const} > 0$. В

результате приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial u}{\partial x}, \\ v \Big|_{x=0} &= \varepsilon(u - u^3/3) \Big|_{x=0}, & \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=1} + \varepsilon\gamma v \Big|_{x=1} &= 0, \end{aligned} \quad (2.56)$$

в которой для простоты считаем $p = 0$.

При $\varepsilon = 0$ спектр собственных частот краевой задачи (2.56) является, очевидно, эквидистантным, так как эти частоты задаются равенствами $\omega_n = \frac{\pi}{2}(2n - 1)$, $n = 1, 2, \dots$. Поэтому для отыскания ее автоколебаний воспользуемся в очередной раз методом бесконечномерной нормализации, а именно, подставим в (2.56) ряды

$$u = u_0(t, s, x) + \varepsilon u_1(t, s, x) + \dots, \quad v = v_0(t, s, x) + \varepsilon v_1(t, s, x) + \dots,$$

где $s = \varepsilon t$, все функции являются 4-периодическими по t , а u_0, v_0 задаются равенствами (2.40), в которых следует положить $z_0 = 0$, $z_n = z_n(s)$, $\omega_n = \frac{\pi}{2}(2n - 1)$, $n \geq 1$. В результате для определения неизвестных амплитуд z_n получим счетную систему уравнений, которая в данном случае сворачивается в краевую задачу

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial y} = -\gamma w + (1 - w^2) \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w(s, y + 2) \equiv -w(s, y) \quad (2.57)$$

для функции

$$w(s, y) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(s) \exp(i\omega_n y) + \bar{z}_n(s) \exp(-i\omega_n y). \quad (2.58)$$

Остается добавить, что поскольку задача (2.57) приводится к виду (2.33) при $\lambda = 1/\gamma$, то, в силу изложенного в конце п. 2.2, схема (2.55) реализуется при уменьшении γ как в нормальной форме (2.57), так и в исходной задаче (2.56).

2). Сохранение буферности. Весьма интересно, что переход в гиперболической системе от неэквидистантного спектра к эквидистантному может вызвать и прямо противоположные последствия: увеличение количества сосуществующих устойчивых циклов, а также расширение диапазона параметров, в котором наблюдается само явление буферности. Специфика же резонансности здесь проявляется в следующих двух аспектах: во-первых, часть устойчивых циклов теряет гармоническую форму;

во-вторых, увеличивается количество устойчивых высокомодовых автоколебаний, что, в свою очередь, может привести к возникновению флуктуационного хаоса (см. п. 3.2).

С описанной ситуацией сталкиваемся, например, при исследовании автоколебаний в длинной линии с туннельным диодом [15], а также в рамках краевой задачи (2.37) при $\beta \rightarrow 0$ (см. п. 2.3). Отметим, наконец, что, как и в предыдущем случае, здесь имеется свой инвариант — модельная краевая задача (2.49).

3). Высокомодовая буферность. Содержащиеся в п. 2.1 результаты показывают, что при эквидистантном спектре собственных частот в системе может наблюдаться так называемая высокомодовая буферность. Это означает, напомним, что устойчивыми в ней являются только те периодические решения, которые бифурцируют на конечном числе высоких мод; младшие же и, наоборот, излишне высокие моды не возбуждаются вообще.

4). Синхронизация мод. В некоторых случаях при эквидистантном спектре собственных частот происходит так называемая синхронизация мод: в системе реализуется единственный устойчивый цикл, несмотря на то, что количество n_* возбужденных мод может быть любым. Увеличение же числа n_* приводит здесь лишь к тому, что этот цикл становится релаксационным.

Приведенный список содержит все известные к настоящему времени особенности динамики нелинейных резонансных гиперболических уравнений. Важно также, что их удастся обнаружить при анализе простейших физических моделей. Исключение составляет пока только четвертое свойство, которое звучит весьма парадоксально и, казалось бы, противоречит всей совокупности изложенных выше фактов. Поэтому имеет смысл остановиться на нем более подробно.

В качестве конкретного радиофизического примера, в котором наблюдается эффект синхронизации мод, рассмотрим автогенератор из п. 2.1 при условии, что теперь сосредоточенная емкость C_0 находится на входе усилителя, т. е. в точке $x = 1$. Тогда, опираясь на развитую в [33] методику, можно показать, что при $G = 0$ его математической моделью служит краевая задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon v, \\ \alpha \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=1} + v \Big|_{x=1} = 0, \quad u \Big|_{x=0} + \beta u \Big|_{x=1} - u^3 \Big|_{x=1} = 0, \end{aligned} \quad (2.59)$$

где $\varepsilon, \alpha, \beta > 0$.

Автоколебаниями краевой задачи (2.59) будем интересоваться при условиях

$$\alpha = \alpha_0 \varepsilon, \quad \beta = 1 + \varepsilon^2 \gamma, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (2.60)$$

где параметры $\alpha_0, \gamma > 0$ имеют порядок единицы. Нетрудно увидеть, что в этом случае при $\varepsilon = 0$ спектр устойчивости ее нулевого состояния равновесия состоит из чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega_n$, $\omega_n = \pi(2n - 1)$, $n = 1, 2, \dots$. Однако в отличие, скажем, от ситуации, рассмотренной в п. 2.1, здесь сталкиваемся со следующей характерной особенностью: каждое собственное число ω_n^2 оператора

$$Lw = -\frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \frac{dw}{dx} \Big|_{x=1} = 0, \quad w \Big|_{x=0} + w \Big|_{x=1} = 0$$

двукратно, так как наряду с собственной функцией $\cos \omega_n x$ ему отвечает одна присоединенная функция $(2\omega_n)^{-1}(1-x) \sin \omega_n x$. Поэтому при каждом $n \geq 1$ оказывается разрешимой краевая задача

$$B_n'' + \omega_n^2 B_n = i\omega_n \cos \omega_n x, \quad B_n'(1) = 0, \quad B_n(0) + B_n(1) = 0,$$

а ее решение имеет вид

$$B_n(x) = \frac{i}{2}(x-1) \sin \omega_n x. \quad (2.61)$$

Отмеченная особенность объясняет, в частности, причину, по которой в (2.60) отклонение коэффициента усиления β от критического значения взято величиной порядка ε^2 , а не ε . По этой же причине, как будет показано ниже, автоколебания краевой задачи (2.59), (2.60), бифурцирующие из нуля при $\varepsilon > 0$, имеют амплитуду порядка ε , а не $\sqrt{\varepsilon}$, как, например, в случае задачи (2.17), (2.18).

Для проведения процедуры бесконечномерной нормализации, следуя изложенной в п. 2.1 методике, подставим в (2.59) ряды

$$u = \varepsilon u_0(t, s, x) + \varepsilon^2 u_1(t, s, x) + \varepsilon^3 u_2(t, s, x) + \dots,$$

$$v = \varepsilon v_0(t, s, x) + \varepsilon^2 v_1(t, s, x) + \varepsilon^3 v_2(t, s, x) + \dots,$$

где $s = \varepsilon t$, функции u_0, v_0 задаются равенствами (2.40) при $z_0 = 0$, $z_n = z_n(s)$, $\omega_n = \pi(2n - 1)$, $n \geq 1$. Приравнявая затем коэффициенты при ε^2 и ε^3 , для нахождения 2-периодических по t функций u_j, v_j , $j = 1, 2$,

приходим к краевым задачам

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= -\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial s}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial s} - v_0, \\ v_1 \Big|_{x=1} &= -\alpha_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} \Big|_{x=1}, \quad u_1 \Big|_{x=0} + u_1 \Big|_{x=1} = 0; \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} &= -\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial s}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} = -\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial s} - v_1, \\ v_2 \Big|_{x=1} &= -\alpha_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} \Big|_{x=1}, \quad u_2 \Big|_{x=0} + u_2 \Big|_{x=1} = u_0^3 \Big|_{x=1} - \gamma u_0 \Big|_{x=1}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Несложный анализ краевой задачи (2.62) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x, s) \exp(i\omega_n t) + \bar{C}_n(x, s) \exp(-i\omega_n t), \\ v_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n(x, s) \exp(i\omega_n t) + \bar{D}_n(x, s) \exp(-i\omega_n t), \end{aligned} \quad (2.64)$$

где

$$\begin{aligned} C_n &= \left(2 \frac{dz_n}{ds} + z_n \right) B_n(x) + i\alpha_0 \omega_n z_n \sin \omega_n x, \\ D_n &= \frac{i}{\omega_n} \left[\frac{dC_n}{dx} - i \left(\frac{dz_n}{ds} + z_n \right) \sin \omega_n x \right], \end{aligned} \quad (2.65)$$

а B_n — функции (2.61). Подставляя далее (2.64), (2.65) в (2.63), после некоторых преобразований убеждаемся, что условия разрешимости в классе 2-периодических по t функций краевой задачи (2.63) имеют вид

$$\frac{d^2 z_n}{ds^2} + \frac{dz_n}{ds} = -(1/4 + i\alpha\omega_n)z_n - 2i\alpha_0\omega_n \frac{dz_n}{ds} + 2f_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.66)$$

Здесь f_n — коэффициент при $\exp(i\omega_n y)$ ряда Фурье функции $\gamma w - w^3$, где $w = w(s, y)$ определяется равенством (2.58).

Из формул (2.66), (2.58) очевидным образом вытекает, что счетная система (2.66) сворачивается в краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial w}{\partial s} &= 2\left(\gamma - \frac{1}{8}\right)w - 2w^3 - \alpha_0 \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ w(s, y+1) &\equiv -w(s, y). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Выполняя, далее, при условии $\gamma > 1/8$ в ней замены

$$s/\delta \rightarrow s, \quad \delta\sqrt{2}w \rightarrow w, \quad y - \alpha_0\delta s \rightarrow y,$$

где $\delta = 1/\sqrt{2(\gamma - 1/8)}$, а затем обозначая s через t , y через x , приведем ее к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w - w^3, \quad w(t, x+1) \equiv -w(t, x). \quad (2.68)$$

Предположим, что краевая задача (2.68) имеет состояние равновесия $w_0(x) \not\equiv 0$, являющееся решением краевой задачи

$$a^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + w - w^3 = 0, \quad w(x+1) \equiv -w(x). \quad (2.69)$$

Тогда, очевидно, она имеет целое их семейство $\{w_0\} = \{w = w_0(x+c) : c \in \mathbb{R}\}$, а соответствующая спектральная задача

$$a^2 \frac{d^2 h}{dx^2} + [1 - 3w_0^2(x)]h = \mu h, \quad h(x+1) \equiv -h(x) \quad (2.70)$$

имеет нулевое собственное значение, которому отвечает собственная функция $h_0(x) = dw_0/dx$.

Обозначим через μ_n , $n \geq 1$, ненулевые собственные значения краевой задачи (2.70) и заметим, что семейство $\{w_0\}$ экспоненциально орбитально устойчиво при $\mu_n < 0$, $n \geq 1$, и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение μ_n положительно. Действительно, линеаризуя краевую задачу (2.68) на состоянии равновесия $w_0(x)$ и полагая в получившейся линейной краевой задаче $w = h(x) \exp \lambda t$, для определения h приходим к задаче (2.70) при $\mu = \lambda^2 + \delta\lambda$.

Обращаем внимание, что краевая задача (2.68) не является нормальной формой для исходной краевой задачи (2.59), (2.60) (по тем же причинам, что и в п. 2.3). Однако стандартное утверждение о соответствии между решениями этих задач по-прежнему остается в силе. Точнее говоря, каждому семейству состояний равновесия $\{w_0\}$ краевой задачи (2.68), экспоненциально орбитально устойчивому или дихотомичному, в исходной задаче (2.59), (2.60) соответствует цикл с теми же свойствами устойчивости.

Динамика состояний равновесия краевой задачи (2.68) по параметру a изучена в [26], где показано, что хотя при $a \rightarrow 0$ их количество неограниченно растет, однако устойчивым среди них является только одно семейство $\{w_*\}$, где $w_* = w_*(x, a)$ — решение задачи (2.69), существующее при

$0 < a < 1/\pi$ и обладающее свойствами:

$$\begin{aligned} w_*(0, a) = w_*(1, a) = 0, \quad w_*(x, a) > 0 \text{ при } 0 < x < 1, \\ w_*(x, 0) = \text{sign}(\sin \pi x). \end{aligned} \quad (2.71)$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что при всех $\gamma > 1/8 + \alpha_0^2 \pi^2/2$ (данное неравенство эквивалентно условию $a < 1/\pi$) в исходной задаче (2.59), (2.60) семейству $\{w_*\}$ соответствует устойчивый цикл, приобретающий релаксационную форму при $\gamma \rightarrow \infty$ (см. последнее свойство (2.71)). Отметим, наконец, что этот цикл остается единственным аттрактором системы (2.59), (2.60), несмотря на то, что при увеличении γ количество возбужденных мод в ней неограниченно растет.

Глава 3.

Метод квазинормальных форм для систем с запаздыванием

3.1. Постановка проблемы

В данной главе перейдем к проблеме применения метода квазинормальных форм в системах с запаздыванием.

Рассмотрим вопросы существования, построения асимптотики и устойчивости периодических решений, бифурцирующих из нулевого состояния равновесия в системах с большим запаздыванием. Изложение проведем на уровне рассмотрения конкретного содержательного примера — некоторого скалярного нелинейного дифференциально-разностного уравнения второго порядка, являющегося математической моделью одноконтурного RCL-генератора с запаздыванием в цепи обратной связи.

Введем в рассмотрение некоторый аналог изученного в работах [26, 31] генератора с RCLG-распределенными параметрами в цепи обратной связи и с нелинейным элементом лампового типа. Точнее говоря, ниже предлагается математическая модель нового физического объекта, получающегося из упомянутого генератора в результате следующих действий. Сначала заменим непрерывную RCLG-линию в нем так называемым фильтром низких частот (см., например, [53]), представляющим собой дискретную RCL-цепочку. Более того, оставим в этой цепочке только один RCL-контур. В результате приходим к излишне упрощенному генератору, в котором колебания отсутствуют (математической моделью такой системы является некоторое скалярное нелинейное дифференциальное урав-

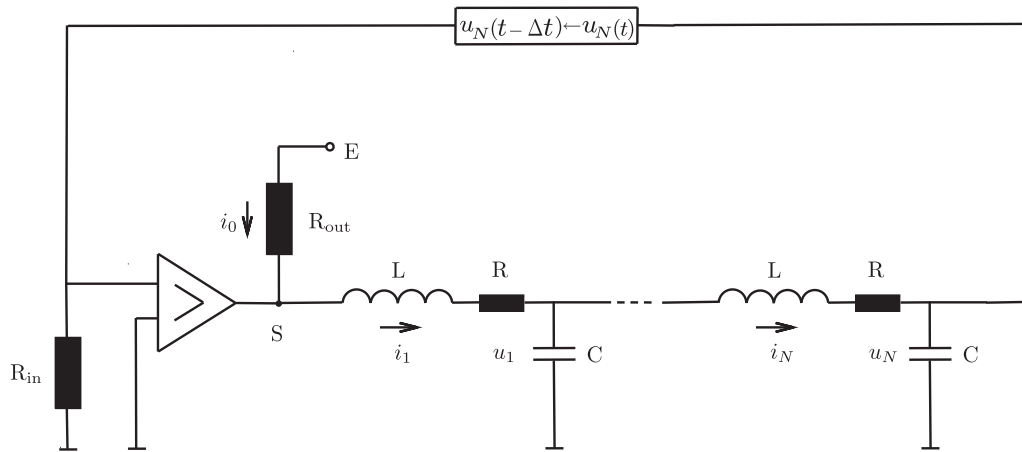


Рис. 3.1.

нение второго порядка, единственный аттрактор которого — устойчивое состояние равновесия). Поэтому, для того чтобы исправить положение, несколько усложним получившийся генератор, а именно, добавим на вход усилителя элемент постоянного запаздывания Δt (практические способы реализации такого элемента описаны, например, в [1]). Как будет ясно из дальнейшего анализа, подобное усложнение возвращает задаче требуемые автоколебательные свойства.

Приступим к описанию физического объекта исследования. Рассмотрим автогенератор, блок-схема которого представлена на рис. 3.1. Предполагаем, что имеется цепочка из N последовательно соединенных RCL-контуров, к одному из концов которой присоединен нелинейный элемент с монотонной вольт-амперной характеристикой $i = f(u)$ (см. рис. 3.2), а к другому — элемент запаздывания Δt . Как известно [53], для токов i_n и напряжений u_n в такой цепочке справедлива система уравнений

$$C du_n/dt + i_{n+1} = i_n, \quad R i_n + L di_n/dt = u_{n-1} - u_n, \quad n = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

которую, естественно, следует дополнить уравнениями для i_{N+1} и u_0 . В данном случае i_{N+1} — это ток на входе нелинейного элемента, выражающийся через входное напряжение $u_N(t - \Delta t)$ (см. рис. 3.1) посредством равенства

$$i_{N+1} = u_N(t - \Delta t)/R_{in}, \quad (3.2)$$

где R_{in} — входное сопротивление усилителя. Что же касается переменной u_0 , то в качестве таковой следует взять напряжение в узле S (см. рис. 3.1). Первый закон Кирхгофа и закон Ома для данного узла приводят к равенствам $i_0 = f(u_N(t - \Delta t)) + i_1$, $i_0 = (E - u_0)/R_{out}$, где i_0 — ток, текущий

через выходное сопротивление усилителя R_{out} (см. рис. 3.1). А отсюда, в свою очередь, получаем требуемое уравнение для u_0 , имеющее вид

$$u_0 + R_{out}f(u_N(t - \Delta t)) + R_{out}i_1 = E. \quad (3.3)$$

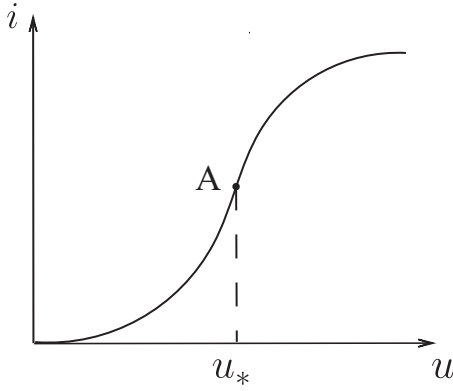


Рис. 3.2.

Из приведенных физических соображений следует, что математической моделью рассматриваемого генератора служит система дифференциально-разностных уравнений (3.1) — (3.3). При изучении этой системы ограничимся простейшей ситуацией, когда низкочастотный фильтр состоит только из одного RCL-контура, а усилитель является идеальным, т. е. $R_{in} = \infty$. Учитывая в (3.1) — (3.3) равенства $N = 1$, $R_{in} = \infty$, $u_1 = u$, $i_1 = i$ и исключая переменную i , в интересующем нас случае приходим к уравнению

$$LC \ddot{u} + (R + R_{out})C \dot{u} + u = E - R_{out}f(u(t - \Delta t)). \quad (3.4)$$

Для удобства последующего анализа выполним в (3.4) замены $t/\sqrt{LC} \rightarrow t$, $u = u_* + x$, где u_* — единственное (в силу монотонности $f(u)$) решение уравнения $u + R_{out}f(u) = E$, определяющее положение рабочей точки A на нелинейной характеристике $i = f(u)$ (см. рис. 3.2). В результате получаем уравнение

$$\ddot{x} + a \dot{x} + x = g(x(t - \theta)), \quad (3.5)$$

в котором $a = (R + R_{out})\sqrt{C/L}$, $\theta = \Delta t/\sqrt{LC}$, $g(x) = E - R_{out}f(u_* + x) - u_*$. Предположим, далее, что фигурирующая в (3.5) функция $g(x)$ записывается в виде $g(x) = F(Kx)$, где $K > 0$ — коэффициент усиления нелинейного элемента, а функция $F(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ не зависит от K и обладает следующими свойствами (продиктованными характером поведения нелинейности $i = f(u)$):

$$\begin{aligned} F'(x) < 0 \text{ при } \forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) \rightarrow q_1 \text{ при } x \rightarrow -\infty, \\ F(x) \rightarrow -q_2 \text{ при } x \rightarrow +\infty, \quad q_1, q_2 > 0; \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$F(x) = -x + d_1x^2 + d_2x^3 + O(x^4) \text{ при } x \rightarrow 0. \quad (3.7)$$

Итак, объектом дальнейшего анализа является дифференциально-разностное уравнение

$$\ddot{x} + a\dot{x} + x = F(Kx(t - \theta)). \quad (3.8)$$

В качестве фазового пространства (пространства начальных условий (x, \dot{x})) этого уравнения возьмем, как обычно, $C[-\theta, 0] \times \mathbb{R}$ и будем интересоваться его аттракторами в указанном пространстве. Точнее говоря, поставим вопрос о существовании и устойчивости его периодических решений, бифурцирующих из нуля при увеличении параметра K и при дополнительном условии $\theta \gg 1$.

В настоящей работе сформулированная бифуркационная проблема подробно разбирается для уравнения (3.8) в случае большого затухания ($a > \sqrt{2}$). При этом разрабатываются некоторые общие подходы к вопросам о существовании, асимптотике и устойчивости периодических решений, пригодные для широкого класса сингулярно возмущенных систем с запаздыванием.

3.2. Основной результат

3.2.1. Линейный анализ. В дальнейшем будем интересоваться автоколебаниями уравнения (3.8), бифурцирующими из нуля при условиях

$$1/\theta = \varepsilon \ll 1, \quad a > \sqrt{2}, \quad K = 1 + \varepsilon^2\gamma, \quad \gamma = \text{const} > 0 \quad (3.9)$$

и при увеличении параметра γ . Первым этапом в решении указанной бифуркационной проблемы является, как обычно, линейный анализ, т. е. исследование расположения корней соответствующего нулевому состоянию равновесия характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a\lambda + 1 = -K \exp(-\lambda\theta). \quad (3.10)$$

На этом пути, в частности, прояснится роль фигурирующего в (3.9) неравенства $a > \sqrt{2}$, а также станет понятной причина, по которой коэффициент усиления K отличается от критического значения $K = 1$ на величину порядка ε^2 .

Выполним в уравнении (3.10) замену $\lambda\theta \rightarrow \lambda$ и учтем соотношения (3.9). В результате оно преобразуется к более удобному для последующего анализа виду

$$\varepsilon^2\lambda^2 + \varepsilon a\lambda + 1 = -(1 + \varepsilon^2\gamma) \exp(-\lambda). \quad (3.11)$$

В самом деле, нетрудно заметить, что все корни получившегося уравнения (3.11) распадаются на две группы. К первой группе отнесем так называемые некритические корни этого уравнения, которые находятся в левой комплексной полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$ и не приближаются к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$. Во вторую группу объединим все оставшиеся его корни

$$\lambda_n(\varepsilon), \quad \bar{\lambda}_n(\varepsilon), \quad \lambda_n(0) = i\omega_n, \quad \omega_n = \pi(2n - 1), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.12)$$

являющиеся комплексными и при $\varepsilon = 0$ обращающиеся в соответствующие корни предельного уравнения $\exp(-\lambda) = -1$. Ясно, что именно эти корни и отвечают за устойчивость нулевого состояния равновесия. Поэтому наша ближайшая задача заключается в построении для них равномерной по n асимптотики.

Подставим в (3.11) равенства $\lambda = i\omega_n + \mu$, $\varepsilon\omega_n = z$ и будем считать, что параметр z непрерывно меняется на полуоси $z \geq 0$. В результате приходим к вспомогательному уравнению

$$(iz + \varepsilon\mu)^2 + a(iz + \varepsilon\mu) + 1 = (1 + \varepsilon^2\gamma) \exp(-\mu). \quad (3.13)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $z \geq 0$ уравнение (3.13) имеет единственное решение $\mu = \mu(z, \varepsilon)$, $\mu(0, 0) = 0$, допускающее представление вида*

$$\mu(z, \varepsilon) = \mu_0(z, \varepsilon) + \varepsilon\delta(z, \varepsilon), \quad \mu_0 = \ln(1 + \varepsilon^2\gamma) - \ln(1 + iaz - z^2). \quad (3.14)$$

Здесь бесконечно дифференцируемая по совокупности переменных z, ε комплекснозначная функция $\delta(z, \varepsilon)$ обладает свойствами

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} |\delta(z, \varepsilon)| = 0 \text{ равномерно по } \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],$$

$$\delta(0, \varepsilon) = -a\gamma\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad \delta(z, 0) = -\frac{(2iz + a)\mu_0(z, 0)}{1 + iaz - z^2}, \quad (3.15)$$

а комплексный логарифм в (3.14) определен равенством

$$\ln(1 + iaz - z^2) = \frac{1}{2} \ln((1 - z^2)^2 + a^2 z^2) +$$

$$+ i \arcsin\left(az / \sqrt{(1 - z^2)^2 + a^2 z^2}\right). \quad (3.16)$$

Доказательство. Подставляя в (3.13) соотношения (3.14), (3.16), для интересующей нас функции $\delta = \delta(z, \varepsilon)$ получаем уравнение

$$\Upsilon(\delta, \varepsilon) = \frac{(2iz + a)(\mu_0(z, \varepsilon) + \varepsilon\delta)}{1 + iaz - z^2} + \frac{\varepsilon(\mu_0(z, \varepsilon) + \varepsilon\delta)^2}{1 + iaz - z^2}, \quad (3.17)$$

где $\Upsilon(\delta, \varepsilon) = (\exp(-\varepsilon\delta) - 1)/\varepsilon$. Нетрудно увидеть, что в точке

$$\delta = -\frac{(2iz + a)\mu_0(z, 0)}{1 + iaz - z^2}, \quad \varepsilon = 0$$

данное уравнение равномерно по $z \geq 0$ удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции по переменной δ . Поэтому из (3.17) однозначно определяется функция $\delta = \delta(z, \varepsilon)$, обладающая первыми двумя свойствами (3.15). Действительно, равномерное по ε предельное равенство $\lim_{z \rightarrow +\infty} |\delta| = 0$ справедливо в силу того факта, что при $z \rightarrow +\infty$ равномерно по ε стремятся к нулю коэффициенты фигурирующего в правой части уравнения (3.17) квадратичного многочлена переменной δ . Что же касается асимптотического равенства для $\delta(0, \varepsilon)$, то для его обоснования достаточно положить в (3.17) $z = 0$ и увидеть, что получающееся в итоге уравнение

$$\Upsilon(\delta, \varepsilon) = a(\ln(1 + \varepsilon^2\gamma) + \varepsilon\delta) + \varepsilon(\ln(1 + \varepsilon^2\gamma) + \varepsilon\delta)^2$$

при всех достаточно малых $\varepsilon \geq 0$ имеет решение $\delta = -a\gamma\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$. Лемма доказана.

Из установленной леммы следует, что интересующие нас корни (3.12) уравнения (3.11) допускают равномерное по n асимптотическое представление

$$\lambda_n(\varepsilon) = i\omega_n + (\mu_0(z, \varepsilon) + \varepsilon\delta(z, \varepsilon)) \Big|_{z=\varepsilon\omega_n}, \quad n \geq 1. \quad (3.18)$$

Заметим, далее, что при $a > \sqrt{2}$ справедливы свойства

$$\operatorname{Re} \mu_0(z, 0) < 0 \text{ при } \forall z > 0, \quad \frac{d^2}{dz^2} \operatorname{Re} \mu_0(z, 0) \Big|_{z=0} = -(a^2 - 2) < 0, \quad (3.19)$$

а в случае $0 < a < \sqrt{2}$, напротив, у функции $\operatorname{Re} \mu_0(z, 0)$ существует участок положительности, примыкающий к точке $z = 0$. Таким образом, условие $a > \sqrt{2}$ гарантирует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ корни (3.18) заведомо не могут иметь положительных действительных частей порядка единицы. Более подробный анализ их асимптотического поведения приводит к формулам

$$\lambda_n(\varepsilon) = i\omega_n(1 - a\varepsilon + a^2\varepsilon^2) + [\gamma - (a^2/2 - 1)\omega_n^2] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.20)$$

которые в отличие от (3.18) уже не являются равномерно пригодными по n . В связи с этим представляет интерес следующая

Лемма 3.2. *По любому фиксированному $\gamma > (a^2/2 - 1)\pi^2$, $\gamma \neq (a^2/2 - 1)\omega_n^2$, $n \geq 1$ можно указать такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\gamma) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ выполняются неравенства*

$$\operatorname{Re} \lambda_n(\varepsilon) > 0, \quad 1 \leq n \leq n_0; \quad \operatorname{Re} \lambda_n(\varepsilon) < 0 \quad \forall n > n_0, \quad (3.21)$$

где $n_0 = \max\{n \in \mathbb{N} : \gamma > (a^2/2 - 1)\omega_n^2\}$.

Для доказательства заметим, что справедливость первой группы неравенств (3.21), а также оценок $\operatorname{Re} \lambda_n(\varepsilon) < 0$ при $n > n_0$, $n \sim 1$ вытекает из формул (3.20). В случае же $n \gg 1$ требуемые оценки получаются из (3.18) с учетом нелокальных свойств (3.19) функции $\operatorname{Re} \mu_0(z, 0)$ и свойств (3.15) остатка $\delta(z, \varepsilon)$.

Лемма 3.2 проясняет причину специального выбора в (3.9) коэффициента усиления K . Действительно, при таком способе задания K и при увеличении параметра γ корни (3.18) характеристического уравнения (3.11) последовательно переходят из левой комплексной полуплоскости в правую. Поэтому, в частности, при условиях (3.9) и при

$$\gamma > (a^2/2 - 1)\pi^2 \quad (3.22)$$

нулевое состояние равновесия уравнения (3.8) теряет устойчивость. Таким образом, естественно возникает проблема отыскания возможных автоколебательных режимов этого уравнения, бифурцирующих из нуля при выполнении неравенства (3.22). Решение данной проблемы приводится в следующем пункте.

3.2.2. Алгоритмическая часть метода квазинормальных форм.

Специфика поставленной выше бифуркационной задачи заключается в том, что она близка к бесконечномерной: при $\varepsilon \rightarrow 0$ к мнимой оси стремится счетное число корней (3.18) характеристического уравнения (3.11). В подобной ситуации не удастся напрямую воспользоваться известными конечномерными методами исследования динамики, базирующимися на аппарате интегральных многообразий и нормальных форм [47, 57]. В связи с этим в начале 1980-х гг. для случая, близкого к бесконечномерному вырождению, Ю.С. Колесовым был предложен специальный асимптотический метод, названный впоследствии методом квазинормальных форм. Не останавливаясь подробно на истории вопроса, напомним, что к настоящему времени этот метод обоснован в ряде модельных ситуаций как

для параболических [50, 51], так и для гиперболических [26, 32] краевых задач.

В случае дифференциально-разностных уравнений второго порядка с большим запаздыванием алгоритмические аспекты метода квазинормальных форм разработаны в статьях [19, 20]. Обоснование результатов из [19, 20], в принципе, может быть проведено по описанной в [5] стандартной схеме. Однако в данной ситуации имеется и другой, альтернативный способ доказательства существования и устойчивости периодических решений, сводящий в некотором смысле проблему к конечномерной. Ниже этот способ иллюстрируется на примере уравнения (3.8) при условиях (3.9), (3.22).

Для построения асимптотики периодических решений в интересующем нас случае сначала выполним в уравнении

$$\ddot{x} + a\dot{x} + x = F((1 + \varepsilon^2\gamma)x(t - 1/\varepsilon)), \quad (3.23)$$

получающемся из (3.8) при учете соотношений (3.9), замену времени

$$\tau = \varepsilon\sigma(\varepsilon)t, \quad \sigma(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2 + \varepsilon^3\sigma_3 + \dots \quad (3.24)$$

В результате приходим к уравнению

$$\varepsilon^2\sigma^2(\varepsilon) \frac{d^2x}{d\tau^2} + \varepsilon a \sigma(\varepsilon) \frac{dx}{d\tau} + x = F((1 + \varepsilon^2\gamma)x(\tau - \sigma(\varepsilon))), \quad (3.25)$$

возможные периодические решения которого будем искать в виде формальных рядов по целым степеням ε :

$$x = \varepsilon x_0(\tau) + \varepsilon^2 x_1(\tau) + \varepsilon^3 x_2(\tau) + \dots \quad (3.26)$$

Предполагаем, что все фигурирующие в (3.26) функции $x_k(\tau)$, $k \geq 0$ являются периодическими с периодом 2, а первое слагаемое имеет вид

$$x_0(\tau) = \xi_0(\tau), \quad \xi_0(\tau + 1) \equiv -\xi_0(\tau). \quad (3.27)$$

Здесь $\xi_0(\tau)$ — пока произвольная вещественная "амплитуда" колебаний, подлежащая определению вместе с другими аналогичными амплитудами и коэффициентами σ_k , $k \geq 1$ из (3.24) в ходе некоторого алгоритма.

Обращаем внимание, что упомянутая выше функция $\xi_0(\tau)$ допускает разложение Фурье вида

$$\xi_0(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{0,n} \exp(i\omega_n \tau) + \bar{\xi}_{0,n} \exp(-i\omega_n \tau), \quad (3.28)$$

в котором присутствуют все "критические" частотные компоненты, отвечающие корням $\lambda = \pm i\omega_n$, $n \geq 1$ уравнения (3.11) при $\varepsilon = 0$. Таким образом, становятся понятными способ выбора $x_0(\tau)$ и требование 2-периодичности всех остальных членов ряда (3.26). Что же касается порядка малости первого слагаемого в (3.26), то, как и в рамках классической бифуркационной теоремы Андронова–Хопфа (см. [47, 57]), естественно считать его равным корню квадратному из надкритичности $\max_{n \geq 1} \operatorname{Re} \lambda_n(\varepsilon) = (\gamma - (a^2/2 - 1)\pi^2)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$. Во всяком случае, ниже мы ограничимся отысканием именно таких периодических решений.

Приступим к описанию алгоритма нахождения функций $x_k(\tau)$, $k \geq 0$ и коэффициентов σ_k , $k \geq 1$. С этой целью подставим в (3.25) соотношения (3.26), (3.27) вместе с тейлоровским разложением (3.7) и в получившемся выражении будем приравнивать слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях ε . В результате приходим к рекуррентной последовательности линейных неоднородных разностных уравнений вида

$$x_k(\tau) + x_k(\tau - 1) = \varphi_k(\tau), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.29)$$

анализ которых проводится по следующей общей схеме.

Разобьем фигурирующую в (3.29) 2-периодическую неоднородность $\varphi_k(\tau)$ на два слагаемых

$$\varphi_{k,1}(\tau) + \varphi_{k,2}(\tau) : \quad \varphi_{k,1}(\tau + 1) \equiv -\varphi_{k,1}(\tau), \quad \varphi_{k,2}(\tau + 1) \equiv \varphi_{k,2}(\tau),$$

где

$$\varphi_{k,1}(\tau) = (\varphi_k(\tau) - \varphi_k(\tau + 1))/2, \quad \varphi_{k,2}(\tau) = (\varphi_k(\tau) + \varphi_k(\tau + 1))/2. \quad (3.30)$$

Предположим, далее, что справедливо условие разрешимости уравнения (3.29) в классе 2-периодических функций, т. е.

$$\varphi_{k,1}(\tau) \equiv 0. \quad (3.31)$$

Тогда из (3.29), (3.30) находим

$$x_k(\tau) = \frac{1}{2} \varphi_{k,2}(\tau) + \xi_k(\tau), \quad (3.32)$$

где $\xi_k(\tau)$ — произвольная антипериодическая с периодом 1 функция.

В случае $k = 0$ описанная схема приводит к равенствам (3.27), (3.28). Если же $k = 1$, то, как нетрудно увидеть, $\varphi_1(\tau) = -(\sigma_1 + a)\xi'_0(\tau) + d_1\xi_0^2(\tau)$ (здесь и ниже штрих означает производную по τ), а выполнения соответствующего условия разрешимости (3.31) добиваемся за счет выбора

поправки к частоте σ_1 . В итоге убеждаемся, что

$$\sigma_1 = -a, \quad x_1(\tau) = \frac{d_1}{2} \xi_0^2(\tau) + \xi_1(\tau), \quad (3.33)$$

где d_1 — коэффициент при квадратичном слагаемом из (3.7).

При $k = 2$ рассмотрению подлежит уравнение (3.29), неоднородность в котором с учетом уже установленной информации (3.33) записывается в виде

$$\varphi_2(\tau) = (a^2/2 - 1)\xi_0'' + (a^2 - \sigma_2)\xi_0' + \gamma \xi_0 - (d_1^2 + d_2)\xi_0^3 + 2d_1\xi_0\xi_1. \quad (3.34)$$

Подставляя, далее, формулу (3.34) в (3.30) — (3.32), приходим к выводу, что

$$x_2(\tau) = d_1\xi_0(\tau)\xi_1(\tau) + \xi_2(\tau), \quad (3.35)$$

а амплитуда $\xi_0(\tau)$ с необходимостью должна удовлетворять нелинейной краевой задаче

$$(a^2/2 - 1)\xi_0'' + (a^2 - \sigma_2)\xi_0' + \gamma \xi_0 - (d_1^2 + d_2)\xi_0^3 = 0, \quad \xi_0(\tau + 1) \equiv -\xi_0(\tau). \quad (3.36)$$

Отметим сразу, что последняя может иметь нетривиальные решения только при условии

$$\sigma_2 = a^2, \quad (3.37)$$

которое всюду ниже предполагаем выполненным.

Последующая реализация алгоритма зависит от выбора конкретного решения краевой задачи

$$(a^2/2 - 1)\xi_0'' + \gamma \xi_0 - (d_1^2 + d_2)\xi_0^3 = 0, \quad \xi_0(\tau + 1) \equiv -\xi_0(\tau), \quad (3.38)$$

получающейся из (3.36) при учете равенства (3.37). В связи с этим будем считать, что данная задача допускает некоторое грубое решение $\xi_0(\tau) \not\equiv 0$. Для пояснения указанного свойства заметим, что такое решение порождает целое семейство решений $\{\xi_0(\tau + c), c \in \mathbb{R}\}$, а соответствующая ему спектральная задача

$$\Pi h \equiv (a^2/2 - 1)h'' + (\gamma - 3(d_1^2 + d_2)\xi_0^2(\tau))h = \lambda h, \quad h(\tau + 1) \equiv -h(\tau) \quad (3.39)$$

всегда имеет собственное значение $\lambda = 0$, которому отвечает собственная функция $h = \xi_0'(\tau)$. Под грубостью же решения $\xi_0(\tau)$ будем понимать простоту нулевой точки спектра задачи (3.39).

Итак, возьмем в качестве фигурирующей в (3.27) амплитуды $\xi_0(\tau)$ некоторое грубое решение краевой задачи (3.38) и с помощью метода математической индукции покажем, что в этом случае алгоритм нахождения коэффициентов рядов (3.24), (3.26) продолжается неограниченно. Действительно, предположим, что при некотором k , $k \geq 4$ для функции $x_{k-2}(\tau)$ получена формула

$$x_{k-2}(\tau) = d_1 \xi_0(\tau) \xi_{k-3}(\tau) + \xi_{k-2}(\tau) + \Delta_{k-2}(\tau), \quad (3.40)$$

в которой присутствуют две пока неизвестные антипериодические функции $\xi_{k-3}(\tau)$ и $\xi_{k-2}(\tau)$. Остаток же $\Delta_{k-2}(\tau)$, напротив, полностью определен, поскольку он зависит от функций $\xi_m(\tau)$, $m \leq k-4$ и поправок к частоте σ_m , $m \leq k-2$, которые считаем уже найденными. Отметим, что именно с такой ситуацией мы сталкиваемся при $k=4$ (см. (3.35)).

На следующем шаге алгоритма для $x_{k-1}(\tau)$ имеем дело с линейным неоднородным разностным уравнением вида (3.29), неоднородность $\varphi_{k-1}(\tau)$ в котором зависит от двух предыдущих функций $x_{k-3}(\tau)$, $x_{k-2}(\tau)$ и поправки к частоте σ_{k-1} линейным образом. Точнее говоря, для $\varphi_{k-1}(\tau)$ при $k > 4$ справедливо представление

$$\begin{aligned} \varphi_{k-1}(\tau) = & -x''_{k-3}(\tau) + a^2(x'_{k-3}(\tau) + x'_{k-3}(\tau-1)) - \\ & - a(x'_{k-2}(\tau) + x'_{k-2}(\tau-1)) - \gamma x_{k-3}(\tau-1) - \frac{a^2}{2} x''_{k-3}(\tau-1) - \sigma_{k-1} \xi'_0(\tau) + \\ & + d_1 \left(2a \frac{d}{d\tau} (x_{k-3}(\tau-1) \xi_0(\tau-1)) + 2 x_{k-3}(\tau-1) x_1(\tau-1) - 2 x_{k-2}(\tau-1) \xi_0(\tau) \right) + \\ & + 3 d_2 x_{k-3}(\tau-1) \xi_0^2(\tau) + \varphi_{k-1}^0(\tau), \quad (3.41) \end{aligned}$$

в котором остаток $\varphi_{k-1}^0(\tau)$, как и остаток $\Delta_{k-2}(\tau)$ из (3.40), зависит только от $\xi_m(\tau)$, $m \leq k-4$ и σ_m , $m \leq k-2$, а при $k=4$ — представление

$$\begin{aligned} \varphi_3(\tau) = & -x''_1(\tau) + a^2(x'_1(\tau) + x'_1(\tau-1)) - a(x'_2(\tau) + x'_2(\tau-1)) - \gamma x_1(\tau-1) - \\ & - \frac{a^2}{2} x''_1(\tau-1) - \sigma_3 \xi'_0(\tau) + d_1 \left(2a \frac{d}{d\tau} (x_1(\tau-1) \xi_0(\tau-1)) + \right. \\ & \left. + x_1^2(\tau-1) - 2 x_2(\tau-1) \xi_0(\tau) \right) + 3 d_2 x_1(\tau-1) \xi_0^2(\tau) + \varphi_3^0(\tau), \quad (3.42) \end{aligned}$$

где функция $\varphi_3^0(\tau)$ также является известной. Далее, при $k > 4$ подставим в (3.41) формулу (3.40) и аналогичную формулу для $x_{k-3}(\tau)$, а при $k=4$ учтем в представлении (3.42) формулы (3.33), (3.35). В результате в обоих

случаях условие равенства нулю антипериодической компоненты $\varphi_{k-1,1}(\tau)$ неоднородности $\varphi_{k-1}(\tau)$ (см. (3.30), (3.31)) приводит к краевой задаче вида

$$\Pi \xi_{k-3} - \sigma_{k-1} \xi_0'(\tau) + \tilde{\varphi}_{k-1,1}(\tau) = 0, \quad \xi_{k-3}(\tau+1) \equiv -\xi_{k-3}(\tau) \quad (3.43)$$

для определения $\xi_{k-3}(\tau)$. Здесь $\tilde{\varphi}_{k-1,1}(\tau)$ — некоторая уже известная антипериодическая с периодом 1 функция, а Π — дифференциальный оператор из (3.39).

Анализ получившейся задачи не вызывает затруднений. Действительно, в силу простоты нулевого собственного значения спектральной задачи (3.39) неоднородная задача (3.43) разрешима в том и только том случае, когда

$$\int_0^1 \tilde{\varphi}_{k-1,1}(\tau) \xi_0'(\tau) d\tau - \sigma_{k-1} \int_0^1 (\xi_0'(\tau))^2 d\tau = 0. \quad (3.44)$$

Таким образом, сначала из (3.44) находим очередную поправку к частоте σ_{k-1} , что делает интересующую нас задачу разрешимой. После этого в качестве $\xi_{k-3}(\tau)$ берем единственное ее решение, удовлетворяющее дополнительному условию нормировки

$$\int_0^1 \xi_{k-3}(\tau) \xi_0'(\tau) d\tau = 0. \quad (3.45)$$

Указанный способ определения σ_{k-1} и $\xi_{k-3}(\tau)$ делает упомянутое выше разностное уравнение для $x_{k-1}(\tau)$ разрешимым в классе 2-периодических функций и приводит к аналогичному (3.32) равенству

$$x_{k-1}(\tau) = \frac{1}{2} \varphi_{k-1,2}(\tau) + \xi_{k-1}(\tau), \quad (3.46)$$

где $\varphi_{k-1,2}(\tau)$ — периодическая компонента функции (3.41), определяющаяся с помощью второго соотношения (3.30), а $\xi_{k-1}(\tau)$, $\xi_{k-1}(\tau+1) \equiv -\xi_{k-1}(\tau)$ — очередная амплитуда. Следовательно, для завершения шага индукции осталось убедиться, что формула (3.46) преобразуется к виду (3.40) (при замене k на $k+1$). Действительно, вновь привлекая равенство (3.41) или (3.42), приходим к выводу, что

$$\varphi_{k-1,2}(\tau) = 2 d_1 \xi_0(\tau) \xi_{k-2}(\tau) + \tilde{\varphi}_{k-1,2}(\tau), \quad (3.47)$$

где остаток $\tilde{\varphi}_{k-1,2}(\tau)$ зависит от уже найденных функций $\xi_m(\tau)$, $m \leq k-3$ и величин σ_m , $m \leq k-1$. И наконец, подставляя (3.47) в (3.46), получаем требуемый факт.

Подводя итог, отметим, что после того как фиксировано некоторое грубое решение краевой задачи (3.38), все члены рядов (3.24), (3.26) определяются однозначно (при условии, конечно, что решения краевых задач (3.43) нормируются равенствами (3.45)). Строгий же смысл описанному алгоритму придает следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Предположим, что краевая задача (3.38) имеет некоторое грубое решение $\xi_0(\tau) \not\equiv 0$ и пусть m — количество положительных собственных значений отвечающей ему спектральной задачи (3.39). Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ в исходном уравнении (3.23) выбранному решению $\xi_0(\tau)$ соответствует единственный цикл вида*

$$x = x(\tau, \varepsilon), \quad d\tau/dt = \varepsilon\sigma(\varepsilon), \quad (3.48)$$

где функции $x(\tau, \varepsilon)$, $x(\tau + 2, \varepsilon) \equiv x(\tau, \varepsilon)$ и $\sigma(\varepsilon)$ достаточно гладко зависят от своих переменных и допускают асимптотические разложения (3.24), (3.26). Кроме того, цикл (3.48) является экспоненциально орбитально устойчивым в случае $m = 0$ и дихотомичным при $m > 0$ с размерностью неустойчивого многообразия, равной $m + 1$.

Доказательство сформулированной теоремы будет приведено в разделе 3. Здесь же отметим, что содержащийся в ней результат допускает следующую интерпретацию. Рассмотрим параболическую краевую задачу

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = (a^2/2 - 1) \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + \gamma \xi - (d_1^2 + d_2)\xi^3, \quad \xi(r, \tau + 1) \equiv -\xi(r, \tau), \quad (3.49)$$

в которой r играет роль времени, а τ является пространственной переменной. Фазовым пространством этой задачи будем считать банахово пространство E_0 непрерывных антипериодических функций $\xi(\tau)$ с нормой $\|\xi\| = \max_{0 \leq \tau \leq 1} |\xi(\tau)|$. Теорема 3.1 фактически утверждает, что любому семейству состояний равновесия $\{\xi_0(\tau + c) : c \in \mathbb{R}\}$ краевой задачи (3.49), экспоненциально устойчивому или дихотомичному (в метрике указанного выше фазового пространства), в исходном уравнении (3.23) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствует цикл (3.48) с теми же свойствами устойчивости.

Следуя установившейся традиции, краевую задачу (3.49) назовем квазинормальной формой уравнения (3.23) или просто квазинормальной формой. В данном случае термин "квазинормальная" оправдан тем, что задача

(3.49) хотя и содержит определенный объем информации об исходном объекте, но ее вывод, приведенный в [19,20], базируется на некоторых сугубо формальных построениях.

Для придания теореме 3.1, носящей пока условный характер, содержательного смысла остановимся на вопросе о количестве и устойчивости состояний равновесия квазинормальной формы (3.49) в наиболее интересном с прикладной точки зрения случае мягкой нелинейности, когда выполняется неравенство

$$d_1^2 + d_2 > 0. \quad (3.50)$$

При этом условии после замен $\gamma r \rightarrow r$, $\sqrt{(d_1^2 + d_2)/\gamma} \xi \rightarrow \xi$ интересующая нас краевая задача принимает вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \sigma^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + \xi - \xi^3, \quad \xi(r, \tau + 1) \equiv -\xi(r, \tau), \quad (3.51)$$

где $\sigma = \sqrt{(a^2/2 - 1)/\gamma}$.

Динамика состояний равновесия краевой задачи (3.51) по параметру σ изучена в [26], где показано, что, во-первых, при всех $\sigma > 1/\pi$ устойчиво ее нулевое решение и других состояний равновесия у нее в этом случае нет; во-вторых, нетривиальные состояния равновесия появляются только при $\sigma < 1/\pi$ (данное условие эквивалентно выполнению неравенства (3.22)) и исчерпываются семействами

$$\{\xi_n(\tau + c, \sigma), c \in \mathbb{R}\} : \xi_n = \xi_0((2n + 1)\tau, (2n + 1)\sigma), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.52)$$

где $\xi_0 = \xi_0(\tau, \sigma)$ — решение краевой задачи (3.51), существующее при $0 < \sigma < 1/\pi$ и обладающее свойствами:

$$\begin{aligned} \xi_0(0, \sigma) = \xi_0(1, \sigma) = 0, \quad \xi_0(\tau, \sigma) > 0 \text{ при } 0 < \tau < 1, \\ \xi_0(\tau, 1/\pi) \equiv 0, \quad \xi_0(\tau, 0) = \text{sign}(\sin \pi \tau). \end{aligned} \quad (3.53)$$

При этом семейство (3.52) с номером $n = 0$ экспоненциально устойчиво при всех $0 < \sigma < 1/\pi$, а любое семейство с номером $n \geq 1$ на всем промежутке своего существования $0 < \sigma < (\pi(2n + 1))^{-1}$ дихотомично.

Из перечисленных фактов и теоремы 3.1 вытекает, что в исходном уравнении (3.23) при условиях (3.22), (3.50) семейству (3.52) с номером $n = 0$ соответствует устойчивый цикл вида (3.48). Как показывают свойства (3.53), этот цикл бифурцирует из нуля при прохождении параметра γ через некоторое критическое значение $\gamma(\varepsilon)$, $\gamma(0) = (a^2/2 - 1)\pi^2$ и приобретает релаксационный характер при $\gamma \rightarrow \infty$. Отметим еще, что при любом

фиксированном $a > \sqrt{2}$ он остается единственным локальным аттрактором данного уравнения, несмотря на то, что при увеличении γ общее количество неустойчивых циклов, отвечающих семействам (3.52) при $n \geq 1$, неограниченно растет.

3.3. Доказательство теоремы 3.1

3.3.1. Существование периодических решений. В данном пункте установим справедливость теоремы 3.1 в части существования и единственности цикла (3.48), отвечающего фиксированному грубому решению $\xi_0(\tau) \not\equiv 0$ краевой задачи (3.38). В связи с этим обратим внимание, что в силу равенств (3.33), (3.37), (3.48) нас интересуют возможные периодические решения уравнения (3.23) периода

$$T(\varepsilon) = \frac{2}{\varepsilon} (1 + \varepsilon \delta(\varepsilon)), \quad \delta(\varepsilon) = a + \varepsilon^2 \delta_*, \quad (3.54)$$

где $\delta_* = \delta_*(\varepsilon)$ — некоторая гладкая функция параметра ε . Для их отыскания воспользуемся следующим специальным приемом, предложенным в близкой ситуации в работе [59].

Пусть $x = x(t)$ — одно из таких периодических решений и $y(t) = x(t - 1/\varepsilon - \delta(\varepsilon))$. Тогда из очевидных соотношений $x(t - 1/\varepsilon) = y(t + \delta(\varepsilon))$, $y(t - 1/\varepsilon) = x(t + \delta(\varepsilon))$ вытекает, что пара функций $x(t)$, $y(t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\ddot{x} + a\dot{x} + x = F((1 + \varepsilon^2 \gamma)y(t + \delta)), \quad \ddot{y} + a\dot{y} + y = F((1 + \varepsilon^2 \gamma)x(t + \delta)).$$

Далее, считая x, y независимыми переменными, выполним в получившейся системе замену времени $-t \rightarrow t$ и положим $v_1 = x$, $v_2 = \dot{x}$, $v_3 = y$, $v_4 = \dot{y}$, $v = \text{colon}(v_1, v_2, v_3, v_4)$. В результате она преобразуется к более удобному для последующего анализа виду

$$\dot{v} = Av + G(v(t - \delta), \varepsilon). \quad (3.55)$$

$$\text{Здесь } A = \text{diag}\{A_0, A_0\}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix},$$

$$G(v, \varepsilon) = \text{colon}\{0, F((1 + \varepsilon^2 \gamma)v_3), 0, F((1 + \varepsilon^2 \gamma)v_1)\}, \quad (3.56)$$

а запаздывание $\delta = \delta(\varepsilon)$ задается вторым равенством (3.54), в котором δ_* — пока произвольный параметр. Таким образом, проблема нахождения

периодических решений (3.48) уравнения (3.23), бифурцирующих из нулевого состояния равновесия при малых $\varepsilon > 0$, сводится к аналогичному вопросу для вспомогательной системы (3.55). Преимущество последней перед исходным уравнением состоит в том, что она уже не является сингулярно возмущенной. А это значит, что к ней заведомо применимы стандартные методы локального анализа, связанные с редукцией системы на центральное многообразие в окрестности нулевого решения и построением нормальной формы на этом многообразии.

Для применения упомянутых локальных методов сначала необходимо изучить спектр устойчивости нулевого состояния равновесия системы (3.55). В связи с этим обратимся к соответствующей системе в вариациях, которая в переменных $v = \text{colon}(w_1, w_2)$, $w_1 = \text{colon}(v_1, v_2)$, $w_2 = \text{colon}(v_3, v_4)$ имеет вид

$$\dot{w}_1 = A_0 w_1 + B_0(\varepsilon) w_2(t - \delta(\varepsilon)), \quad \dot{w}_2 = A_0 w_2 + B_0(\varepsilon) w_1(t - \delta(\varepsilon)), \quad (3.57)$$

где

$$B_0(\varepsilon) = (1 + \varepsilon^2 \gamma) B_0, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Выполним в (3.57) замены $w_1 = h_1 + h_2$, $w_2 = h_2 - h_1$, $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^2$, в результате которых интересующая нас система распадается на две независимые подсистемы

$$\dot{h}_1 = A_0 h_1 - B_0(\varepsilon) h_1(t - \delta(\varepsilon)), \quad \dot{h}_2 = A_0 h_2 + B_0(\varepsilon) h_2(t - \delta(\varepsilon)). \quad (3.59)$$

Далее, введем в рассмотрение их характеристические квазиполиномы

$$P_{\pm}(\lambda, \varepsilon) = \det(A_0 \pm B_0(\varepsilon) \exp(-\delta(\varepsilon)\lambda) - \lambda I),$$

где I — единичная матрица, и учтем в этих квазиполиномах явные выражения для A_0 , $B_0(\varepsilon)$ (см. (3.56), (3.58)). В итоге убеждаемся, что

$$P_{\pm}(\lambda, \varepsilon) = \lambda^2 - a\lambda + 1 \pm (1 + \varepsilon^2 \gamma) \exp(-\delta(\varepsilon)\lambda). \quad (3.60)$$

Несложный анализ получившихся квазиполиномов (3.60) показывает, что $P_{-}(\lambda, 0)$ имеет двукратный корень $\lambda = 0$, которому в системе (3.57) при $\varepsilon = 0$ соответствуют решения Ляпунова–Флоке

$$v_*(t) \equiv e_0, \quad v_{**}(t) = te_0 + e_1, \quad e_0 = \text{colon}(1, 0, -1, 0), \\ e_1 = \text{colon}(0, 1, 0, -1), \quad (3.61)$$

а действительные части остальных корней этого квазиполинома отличны от нуля. У второго же квазиполинома $P_+(\lambda, 0)$ корни на мнимой оси отсутствуют вообще.

Как известно (см., например, [35, 57]), обнаруженное выше поведение спектра устойчивости влечет существование в фазовом пространстве $V = C([- \delta(\varepsilon), 0]; \mathbb{R}^4)$ системы (3.55) двумерного центрального многообразия Σ , располагающегося в некоторой достаточно малой окрестности $\mathcal{U} \subset V$ точки $v = 0$ и инвариантного для ее траекторий. Последнее означает, что для любой траектории $v(t+s)$, $t \geq 0$, $-\delta(\varepsilon) \leq s \leq 0$ системы (3.55) с начальным условием $v(t+s)|_{t=0} \in \mathcal{U} \cap \Sigma$ включение $v(t+s) \in \Sigma$ выполняется до тех пор, пока $v(t+s)$ остается в \mathcal{U} .

Для геометрического описания многообразия Σ разложим пространство V в прямую сумму $V_0(\varepsilon) \oplus V_1(\varepsilon)$ инвариантных для траекторий системы (3.57) подпространств. Здесь $V_0(\varepsilon)$ — двумерное корневое подпространство этой системы, соответствующее двум корням квазиполинома $P_-(\lambda, \varepsilon)$, стремящимся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, а $V_1(\varepsilon)$ — дополнительное подпространство, отвечающее всем остальным корням $P_-(\lambda, \varepsilon)$ и всем корням квазиполинома $P_+(\lambda, \varepsilon)$. Обозначим, далее, через $P_0(\varepsilon)$, $P_1(\varepsilon)$: $P_0(\varepsilon) + P_1(\varepsilon) = I$, $P_0(\varepsilon)P_1(\varepsilon) = 0$ проекторы на указанные подпространства. Согласно общей теории центральных многообразий, распространенной на уравнения с запаздыванием в работах [34, 35, 57], интересующее нас многообразие Σ в переменных $v_{(j)} = P_j(\varepsilon)v(s)$, $v(s) \in V$, $j = 0, 1$ записывается в виде

$$\Sigma = \left\{ v(s) \in V : v = v_{(0)} + \psi(v_{(0)}, \varepsilon), \quad v_{(0)} \in \mathcal{U} \cap V_0(\varepsilon) \right\}. \quad (3.62)$$

Здесь $\psi(*, \varepsilon) : V_0(\varepsilon) \rightarrow V_1(\varepsilon)$ — некоторый нелинейный оператор, достаточно гладкий (в смысле Фреше) по совокупности переменных $v_{(0)} \in \mathcal{U} \cap V_0(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$ подходящим образом мало, и такой что

$$\psi(0, \varepsilon) \equiv 0, \quad \psi'_{v_{(0)}}(0, \varepsilon) \equiv 0. \quad (3.63)$$

Нетрудно увидеть, что тождества (3.63) вытекают из того факта, что исходная система (3.55) имеет состояние равновесия $v = 0$ при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Для выявления же некоторых дополнительных свойств симметрии многообразия (3.62) снова обратимся к исходному уравнению (3.55) и заметим, что

$$S_0 A = A S_0, \quad S_0 G(v, \varepsilon) = G(S_0 v, \varepsilon), \quad (3.64)$$

где S_0 — линейное преобразование, задающееся равенством

$$S_0 v = \text{colon}(v_3, v_4, v_1, v_2). \quad (3.65)$$

Соотношения (3.64) свидетельствуют о том, что система (3.55) не меняется при замене $S_0 v \rightarrow v$, а значит, $S_0 \Sigma = \Sigma$. Точнее говоря, в силу неединственности центрального многообразия можно лишь утверждать, что существует многообразие Σ , обладающее этим свойством. Действительно, заменим функцию $F(x)$ в (3.56) на $F_\sigma(x) = -x + (x + F(x))\chi(x/\sigma)$, где $\sigma > 0$, а функция $\chi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ такова, что $0 \leq \chi(x) \leq 1$ при $\forall x \in \mathbb{R}$, $\chi(x) \equiv 1$ при $|x| \leq 1$, $\chi(x) \equiv 0$ при $|x| \geq 2$. В этом случае, как следует, например, из содержащихся в [4] результатов, при подходящем уменьшении σ вспомогательная система

$$\dot{v} = Av + G_\sigma(v(t-\delta), \varepsilon), \quad G_\sigma = \text{colon} \left\{ 0, F_\sigma((1+\varepsilon^2\gamma)v_3), 0, F_\sigma((1+\varepsilon^2\gamma)v_1) \right\}$$

имеет единственное глобальное центральное многообразие Σ_σ . А так как по-прежнему $S_0 G_\sigma(v, \varepsilon) = G_\sigma(S_0 v, \varepsilon)$, то отсюда и из единственности Σ_σ заключаем, что $S_0 \Sigma_\sigma = \Sigma_\sigma$. Остается заметить, что в силу равенства $G_\sigma(v, \varepsilon) \equiv G(v, \varepsilon)$, имеющего место в некоторой достаточно малой окрестности точки $v = 0$, множество $\Sigma_\sigma \cap \mathcal{U}$ совпадает с одним из локальных центральных многообразий (3.62) исходной системы (3.55).

Отдельно остановимся на вопросе о дополнительных свойствах оператора $\psi(v_{(0)}, \varepsilon)$, вытекающих из факта S_0 -инвариантности многообразия (3.62). Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Равенство $S_0 \Sigma = \Sigma$ влечет выполнение тождества*

$$S_0 \psi(-v_{(0)}, \varepsilon) \equiv \psi(v_{(0)}, \varepsilon) \quad \forall v_{(0)} \in \mathcal{U} \cap V_0(\varepsilon), \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]. \quad (3.66)$$

Доказательство. Покажем сначала, что

$$S_0 P_0(\varepsilon) = -P_0(\varepsilon), \quad S_0 V_1(\varepsilon) \subset V_1(\varepsilon). \quad (3.67)$$

С этой целью заметим, что любая траектория $v(t+s)$, $t \geq 0$, $-\delta(\varepsilon) \leq s \leq 0$ линейной системы (3.57) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} v(t+s) &= v^1(t+s) + v^2(t+s), \\ v^j(t+s) &= \text{colon} (h_j(t+s), (-1)^j h_j(t+s)), \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.68)$$

где $h_1(t+s)$, $h_2(t+s)$ — траектории систем (3.59) с произвольными начальными условиями $h_1(s)$, $h_2(s) \in C([-\delta(\varepsilon), 0]; \mathbb{R}^2)$. Заметим, далее, что для компоненты $v^2(t+s)$ из (3.68) всегда справедливо включение

$$v^2(t+s) \in V_1(\varepsilon). \quad (3.69)$$

Поэтому если $v(t+s) \in V_0(\varepsilon)$, то автоматически $v^2(t+s) \equiv 0$ и $S_0v(t+s) = S_0v^1(t+s) = -v^1(t+s)$. Таким образом, установлено первое свойство (3.67).

Предположим теперь, что $v(t+s) \in V_1(\varepsilon)$. Тогда в силу (3.65), (3.69) имеем

$$\begin{aligned} v^1(t+s) &= v(t+s) - v^2(t+s) \in V_1(\varepsilon), \\ S_0v(t+s) &= S_0v^1(t+s) + S_0v^2(t+s) = -v^1(t+s) + v^2(t+s) \in V_1(\varepsilon), \end{aligned}$$

а значит, выполняется и второе свойство (3.67).

Проделанные предварительные построения позволяют уже без труда завершить обоснование леммы. Действительно, фиксируем произвольно элемент $v \in \Sigma$ и разложим его в сумму $v = v_{(0)} + v_{(1)}$: $v_{(0)} \in V_0(\varepsilon)$, $v_{(1)} \in V_1(\varepsilon)$, $v_{(1)} = \psi(v_{(0)}, \varepsilon)$ (см. (3.62)). Применяя затем к этому элементу преобразование (3.65) и учитывая свойства (3.67), приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} S_0v &= \tilde{v}_{(0)} + \tilde{v}_{(1)} : \tilde{v}_{(0)} \in V_0(\varepsilon), \tilde{v}_{(1)} \in V_1(\varepsilon), \\ \tilde{v}_{(0)} &= -v_{(0)}, \tilde{v}_{(1)} = S_0\psi(v_{(0)}, \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Но поскольку в силу равенства $S_0\Sigma = \Sigma$ элемент (3.70) также принадлежит многообразию (3.62), то $\tilde{v}_{(1)} = \psi(\tilde{v}_{(0)}, \varepsilon)$ или, что то же самое,

$$S_0\psi(v_{(0)}, \varepsilon) = \psi(-v_{(0)}, \varepsilon). \quad (3.71)$$

Остается заметить, что получившееся равенство (3.71) эквивалентно требуемому свойству (3.66). Лемма 3.1 доказана.

Обращаем внимание, что все проделанные выше построения, касающиеся многообразия Σ , носят чисто геометрический характер. Для придания им аналитической формы введем в пространстве $V_0(\varepsilon)$ координаты ξ, η посредством равенства

$$v_{(0)} = \xi v_*(s, \varepsilon) + \eta v_{**}(s, \varepsilon), \quad -\delta(\varepsilon) \leq s \leq 0, \quad (3.72)$$

где $v_*(s, \varepsilon), v_{**}(s, \varepsilon) \in V_0(\varepsilon)$ — некоторые базисные функции, обладающие следующими свойствами. Во-первых, $v_*(t, \varepsilon), v_{**}(t, \varepsilon)$ являются решениями системы (3.57), обращающимися при $\varepsilon = 0$ в (3.61); во-вторых, после перехода в $V_0(\varepsilon)$ к переменным ξ, η по формуле (3.72) движения в этом подпространстве, индуцируемые системой (3.57), задаются уравнениями вида

$$\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = \alpha(\varepsilon)\xi + \beta(\varepsilon)\eta, \quad \alpha(0) = \beta(0) = 0. \quad (3.73)$$

Алгоритм асимптотического вычисления функций $v_*(s, \varepsilon)$, $v_{**}(s, \varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$ описан, например, в [44]. Как показано в этой работе, их можно выбрать аналитически зависящими от ε , что и считаем сделанным.

Итак, подставим соотношение (3.72) в (3.9). В результате убеждаемся, что в координатах ξ , η многообразие Σ приобретает вид

$$\Sigma = \left\{ v(s) \in V : v = \xi v_*(s, \varepsilon) + \eta v_{**}(s, \varepsilon) + \tilde{H}(\xi, \eta, \varepsilon, s) \right\}, \quad (3.74)$$

а движения на нем описываются аналогичной (3.73), но уже нелинейной системой

$$\dot{\xi} = \eta + \Phi_1(\xi, \eta, \varepsilon), \quad \dot{\eta} = \alpha(\varepsilon)\xi + \beta(\varepsilon)\eta + \Phi_2(\xi, \eta, \varepsilon). \quad (3.75)$$

Здесь $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $s \in [-\delta(\varepsilon), 0]$, $(\xi, \eta) \in \Omega(r_0)$, где $\Omega(r_0) = \{(\xi, \eta) : \xi^2 + \eta^2 \leq r_0^2\}$. Что же касается непрерывных по совокупности переменных и достаточно гладких по (ξ, η, ε) вектор-функции \tilde{H} со значениями в \mathbb{R}^4 и скалярных функций $\Phi_j(\xi, \eta, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, то они удовлетворяют вытекающим из (3.63), (3.66) тождествам

$$\begin{aligned} \tilde{H}(0, 0, \varepsilon, s) &\equiv \tilde{H}'_\xi(0, 0, \varepsilon, s) \equiv \tilde{H}'_\eta(0, 0, \varepsilon, s) \equiv 0, \quad S_0 \tilde{H}(-\xi, -\eta, \varepsilon, s) \equiv \\ &\equiv \tilde{H}(\xi, \eta, \varepsilon, s), \quad \Phi_j(0, 0, \varepsilon) \equiv \frac{\partial \Phi_j}{\partial \xi}(0, 0, \varepsilon) \equiv \frac{\partial \Phi_j}{\partial \eta}(0, 0, \varepsilon) \equiv 0, \quad j=1, 2. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Термин "достаточно гладкие" здесь означает, что при подходящем уменьшении постоянных ε_0 , $r_0 > 0$ можно гарантировать существование у этих функций любого наперед заданного конечного числа непрерывных производных по (ξ, η, ε) .

Остановимся еще на одном важном для дальнейшего свойстве функций Φ_j , $j = 1, 2$. В связи с этим обратим внимание, что в силу (3.76) и первого равенства из (3.67) многообразие (3.74) не меняется при одновременном применении преобразования S_0 и замене $\xi \rightarrow -\xi$, $\eta \rightarrow -\eta$. А это значит, что при $\xi \rightarrow -\xi$, $\eta \rightarrow -\eta$ должна оставаться неизменной и система (3.75). Таким образом, с необходимостью имеем

$$\Phi_j(-\xi, -\eta, \varepsilon) \equiv -\Phi_j(\xi, \eta, \varepsilon), \quad j = 1, 2. \quad (3.77)$$

Заканчивая описание общих свойств многообразия (3.74) и нормальной формы (3.75) на нем, заметим, что последнюю можно несколько упростить. Действительно, перейдем в (3.74), (3.75) к координатам $\tilde{\xi} = \xi$,

$\tilde{\eta} = \eta + \Phi_1(\xi, \eta, \varepsilon)$, а затем снова обозначим $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ через (ξ, η) . В итоге получим многообразие

$$\Sigma = \left\{ v(s) \in V : v = \xi v_*(s, \varepsilon) + \eta v_{**}(s, \varepsilon) + H(\xi, \eta, \varepsilon, s) \right\} \quad (3.78)$$

и систему

$$\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = \alpha(\varepsilon)\xi + \beta(\varepsilon)\eta + \Phi(\xi, \eta, \varepsilon), \quad (3.79)$$

нелинейности H и Φ в которых по-прежнему удовлетворяют всем тождествам вида (3.76), (3.77).

Проделанный предварительный анализ показывает, что интересующий нас вопрос о периодических решениях системы (3.55), бифурцирующих из нуля при $\varepsilon > 0$, сводится к аналогичному вопросу для ее нормальной формы (3.79) на центральном многообразии (3.78). Исследование системы (3.79), в свою очередь, требует знания некоторых членов тейлоровских разложений

$$\begin{aligned} \alpha(\varepsilon) &= \varepsilon^2 b_{1,1} + O(\varepsilon^4), \quad \beta(\varepsilon) = \varepsilon^2 b_{1,2} + O(\varepsilon^4), \\ \Phi(\xi, \eta, \varepsilon) &= b_{3,1}\xi^3 + b_{3,2}\xi^2\eta + b_{3,3}\xi\eta^2 + b_{3,4}\eta^3 + O(\varepsilon^2(|\xi| + |\eta|)^3). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Точнее говоря, в дальнейшем нам потребуются явные выражения только для коэффициентов $b_{1,1}$, $b_{1,2}$, $b_{3,1}$, которые вычисляются с помощью следующего алгоритма.

Фиксируем произвольно некоторое решение системы (3.79) и подставим его компоненты $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$ в формулу для v из (3.78). В результате должна получиться траектория $v(t+s)$ исходной системы (3.55). Поэтому, в частности, ее решением будет и функция $h(t) = v(t+s)|_{s=0}$, которая может быть представлена в виде

$$h(t) = h(\xi, \eta, \varepsilon) \Big|_{\substack{\xi=\xi(t), \\ \eta=\eta(t)}}, \quad h(\xi, \eta, \varepsilon) = \xi v_*(0, \varepsilon) + \eta v_{**}(0, \varepsilon) + H(\xi, \eta, \varepsilon, 0). \quad (3.81)$$

А отсюда очевидным образом вытекает равенство

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial h}{\partial \xi}(\xi, \eta, \varepsilon)\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta}(\xi, \eta, \varepsilon) \left(\alpha(\varepsilon)\xi + \beta(\varepsilon)\eta + \Phi(\xi, \eta, \varepsilon) \right) \right\} \Big|_{\substack{\xi=\xi(t), \\ \eta=\eta(t)}} = \\ & = Ah(\xi(t), \eta(t), \varepsilon) + G(h(\xi(t-\delta(\varepsilon)), \eta(t-\delta(\varepsilon)), \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.82)$$

Дальнейший способ действий стандартен: подставим в (3.82) тейлоровские разложения (3.80) вместе с аналогичным разложением функции

$h(\xi, \eta, \varepsilon)$, имеющим вид

$$h = \xi e_0 + \eta e_1 + \varepsilon^2 \xi h_{1,1} + \varepsilon^2 \eta h_{1,2} + \xi^2 h_{2,1} + \xi \eta h_{2,2} + \eta^2 h_{2,3} + \xi^3 h_{3,1} + \xi^2 \eta h_{3,2} + \xi \eta^2 h_{3,3} + \eta^3 h_{3,4} + \dots, \quad (3.83)$$

где, напомним, e_0, e_1 — векторы из (3.61), и будем последовательно приравнивать в получившемся выражении слева и справа коэффициенты при $\varepsilon^2 \xi, \varepsilon^2 \eta, \xi^2, \dots, \eta^3$. При этом следует учитывать, что

$$\begin{aligned} \xi(t - \delta(\varepsilon)) &= \xi - \delta(\varepsilon) \dot{\xi} + \frac{\delta^2(\varepsilon)}{2} \ddot{\xi} + \dots, \\ \eta(t - \delta(\varepsilon)) &= \eta - \delta(\varepsilon) \dot{\eta} + \frac{\delta^2(\varepsilon)}{2} \ddot{\eta} + \dots, \end{aligned}$$

где все производные считаем выраженными через правые части системы (3.79). Например, $\dot{\xi} = \eta, \dot{\eta} = \dot{\xi} = \alpha(\varepsilon)\xi + \beta(\varepsilon)\eta + \Phi(\xi, \eta, \varepsilon)$ и т. д.

Указанные действия приводят для определения неизвестных векторных коэффициентов $h_{j,k} \in \mathbb{R}^4$ из (3.83) к линейным неоднородным алгебраическим уравнениям вида

$$(A + B)h_{j,k} = r_{j,k}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_0 \\ B_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.84)$$

где B_0 — матрица из (3.58). Заметим, далее, что все уравнения (3.84) оказываются вырожденными, так как $(A + B)e_0 = 0$. Неизвестные же коэффициенты разложений (3.80) находим из условий разрешимости этих уравнений, т. е. из равенств

$$(r_{j,k}, g_0) = 0, \quad (3.85)$$

где $(*, *)$ — евклидово скалярное произведение, а вектор g_0 , являющийся решением однородного сопряженного уравнения, задается формулой

$$g_0 = \frac{1}{a^2 - 2} \text{colon}(a, -1, -a, 1). \quad (3.86)$$

При реализации описанной общей схемы существенно то обстоятельство, что неоднородности в (3.84) допускают представления

$$r_{j,k} = (e_1 + aBe_1 - (a^2/2)Be_0) b_{j,k} + r_{j,k}^0, \quad (3.87)$$

где добавки $r_{j,k}^0$ зависят от уже найденных ранее коэффициентов разложений (3.80). Подставляя, далее, соотношение (3.87) в (3.85) и учитывая условие нормировки

$$(e_1 + aBe_1 - (a^2/2)Be_0, g_0) = 1,$$

которому удовлетворяет вектор (3.86), сначала находим очередной коэффициент $b_{j,k} = -(r_{j,k}^0, g_0)$, а затем и само решение $h_{j,k}$, $(h_{j,k}, g_0) = 0$ системы (3.84).

Указанный способ действий позволяет определить требуемые коэффициенты $b_{1,1}$, $b_{1,2}$, $b_{3,1}$, для которых, опуская промежуточные вычисления, приведем сразу итоговые формулы:

$$b_{1,1} = -\frac{2\gamma}{a^2 - 2}, \quad b_{1,2} = \frac{2}{a^2 - 2} \left(\delta_* + a\gamma + \frac{a^3}{6} b_{1,1} \right),$$

$$b_{3,1} = \frac{2}{a^2 - 2} (d_1^2 + d_2). \quad (3.88)$$

Возвращаясь к системе (3.79), напомним, что нас интересуют ее периодические решения периода $T(\varepsilon)$ (см. (3.54)) и амплитуды порядка ε . В связи с этим перейдем от (3.79) к скалярному уравнению второго порядка для ξ , сделаем в получившемся уравнении замены

$$\tau = \varepsilon t / (1 + \varepsilon a + \varepsilon^3 \delta_*), \quad \xi = \varepsilon \xi_*(\tau) \quad (3.89)$$

и подставим в него явные формулы (3.88) для найденных выше коэффициентов из (3.80). В результате после сокращения на ε^3 и умножения на $a^2/2 - 1$ упомянутое уравнение примет вид

$$(a^2/2 - 1)\xi_*'' + \gamma \xi_* - (d_1^2 + d_2)\xi_*^3 = -(2\varepsilon\tilde{\delta} + \varepsilon^2\tilde{\delta}^2)(a^2/2 - 1)\xi_*'' +$$

$$+ \varepsilon \left(\delta_* + \frac{a\gamma(a^2/3 - 1)}{a^2/2 - 1} \right) \xi_*' + \varepsilon b \xi_*^2 \xi_*' + \varepsilon^2 \Psi(\xi_*, \xi_*', \varepsilon). \quad (3.90)$$

Здесь $\tilde{\delta} = -(a + \varepsilon^2 \delta_*) / (1 + \varepsilon a + \varepsilon^3 \delta_*)$, $b = (a^2/2 - 1)b_{3,2}$, а скалярная функция $\Psi(u_1, u_2, \varepsilon)$ достаточно гладко зависит от своих переменных $(u_1, u_2, \varepsilon) \in \Omega \times [0, \varepsilon_0]$, где Ω — произвольно фиксированная ограниченная область из \mathbb{R}^2 , и удовлетворяет вытекающему из (3.77) тождеству

$$\Psi(-u_1, -u_2, \varepsilon) \equiv -\Psi(u_1, u_2, \varepsilon). \quad (3.91)$$

Штрихом же в (3.90), как и ранее, обозначено дифференцирование по τ .

Описанная последовательность действий сводит интересующую нас проблему к поиску периодического решения уравнения (3.90) периода 2, обращающегося при $\varepsilon = 0$ в некоторое наперед заданное решение $\xi_* = \xi_0(\tau)$ краевой задачи (3.38), о котором говорится в условиях теоремы 3.1. В связи с этим в качестве области определения Ω функции Ψ по

переменным u_1, u_2 возьмем некоторый шар с центром в нуле, содержащий целиком кривую $\{(u_1, u_2) : u_1 = \xi_0(\tau), u_2 = \xi'_0(\tau), 0 \leq \tau \leq 2\}$.

Как будет показано ниже, решение с требуемыми свойствами у уравнения (3.90) при подходящем выборе свободного параметра δ_* (см. (3.89)) действительно существует и при выполнении некоторого дополнительного условия нормировки оказывается единственным. Точнее говоря, имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.4. *Найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ существует единственная пара достаточно гладких по своим переменным функций*

$$\begin{aligned} (\xi_*(\tau, \varepsilon), \delta_*(\varepsilon)) : \quad & \xi_*(\tau + 1, \varepsilon) \equiv -\xi_*(\tau, \varepsilon), \quad \xi_*(\tau, 0) = \xi_0(\tau), \\ & \int_0^1 \xi_*(\tau, \varepsilon) \xi'_0(\tau) d\tau = 0, \quad \delta_*(0) = \tilde{\delta}_*, \\ \tilde{\delta}_* = & -\frac{a\gamma(a^2/3 - 1)}{a^2/2 - 1} - b \int_0^1 \xi_0^2(\tau) (\xi'_0(\tau))^2 d\tau / \int_0^1 (\xi'_0(\tau))^2 d\tau, \end{aligned} \quad (3.92)$$

обращающих уравнение (3.37) в тождество.

Доказательство. Дополним уравнение (3.90) граничным условием $\xi_*(\tau + 1) \equiv -\xi_*(\tau)$ и заметим, что получившаяся в итоге нелинейная краевая задача при $\varepsilon = 0$ допускает требуемое решение $\xi_* = \xi_0(\tau)$, поскольку в этом случае она с точностью до обозначений совпадает с задачей (3.38). Если же $\varepsilon > 0$, то ее решение будем искать в виде $\xi_* = \xi_0(\tau) + \varepsilon h$, что сводит проблему к анализу краевой задачи

$$\begin{aligned} \Pi h = & \left(\delta_* + \frac{a\gamma(a^2/3 - 1)}{a^2/2 - 1} \right) \xi'_0(\tau) + b \xi_0^2(\tau) \xi'_0(\tau) + 2a(a^2/2 - 1) \xi''_0(\tau) + \\ & + \varepsilon \Delta(\tau, h, h', h'', \varepsilon, \delta_*), \quad h(\tau + 1) \equiv -h(\tau). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Здесь Π — дифференциальный оператор из (3.39), а достаточно гладкая по своим переменным функция $\Delta(\tau, u_1, u_2, u_3, \varepsilon, \delta_*)$ обладает вытекающим из (3.91) свойством

$$\Delta(\tau + 1, -u_1, -u_2, -u_3, \varepsilon, \delta_*) \equiv -\Delta(\tau, u_1, u_2, u_3, \varepsilon, \delta_*). \quad (3.94)$$

При анализе задачи (3.93) нам потребуются банаховы пространства E_0^0 и E_2^0 , первое из которых состоит из непрерывных антипериодических с периодом 1 функций $h(\tau)$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\int_0^1 h(\tau) \xi_0'(\tau) d\tau = 0,$$

а элементами второго являются функции $h(\tau) \in E_0^0 \cap C^2(\mathbb{R})$. Нормы в указанных пространствах определим формулами

$$\|h\|_{E_0^0} = \max_{0 \leq \tau \leq 1} |h(\tau)|, \quad \|h\|_{E_2^0} = \|h\|_{E_0^0} + \|h'\|_{E_0^0} + \|h''\|_{E_0^0}.$$

Причины, по которым краевую задачу (3.93) удобно рассматривать именно в этих пространствах, заключаются в следующем. Во-первых, в силу грубости решения $\xi_0(\tau)$ задачи (3.38) отвечающий ему линейный дифференциальный оператор Π имеет ограниченный обратный $\Pi^{-1} : E_0^0 \rightarrow E_2^0$. Во-вторых, из свойства (3.94) вытекает, что оператор суперпозиции

$$h(\tau) \rightarrow \Delta(\tau, h(\tau), h'(\tau), h''(\tau), \varepsilon, \delta_*) \quad (3.95)$$

действует из E_2^0 в E_0^0 и является достаточно гладким по всем своим переменным.

Для доказательства разрешимости задачи (3.93) при подходящем выборе параметра δ_* сначала введем в рассмотрение вспомогательное операторное уравнение в пространстве E_2^0 :

$$h = \Pi^{-1} \{ \Gamma - l(h) \xi_0'(\tau) \}, \quad (3.96)$$

где через $\Gamma(\tau, h, h', h'', \varepsilon, \delta_*)$ обозначена правая часть уравнения из (3.93), а функционал l имеет вид

$$l(h) = \int_0^1 \Gamma(\tau, h(\tau), h'(\tau), h''(\tau), \varepsilon, \delta_*) \xi_0'(\tau) d\tau / \int_0^1 (\xi_0'(\tau))^2 d\tau. \quad (3.97)$$

Заметим, далее, что из факта ограниченности Π^{-1} и из отмеченных выше свойств оператора (3.95) следует, что оператор, порождаемый правой частью уравнения (3.96) в пространстве E_2^0 , преобразует в себя некоторый замкнутый шар этого пространства независимого от ε радиуса с центром в нуле и является сжимающим (с константой сжатия порядка ε). А отсюда и из принципа сжимающих отображений заключаем, что уравнение (3.96) имеет единственное решение $h_*(\tau, \varepsilon, \delta_*)$, $h_*(\tau + 1, \varepsilon, \delta_*) \equiv -h_*(\tau, \varepsilon, \delta_*)$, достаточно гладко зависящее от всех своих переменных. Ясно также, что это решение будет удовлетворять исходной краевой задаче (3.93) в том и только том случае, когда

$$l(h_*) = 0, \quad (3.98)$$

где l — функционал (3.97).

Получившееся равенство (3.98) будем рассматривать как уравнение для нахождения неизвестного параметра δ_* . Нетрудно увидеть, что в точке $\varepsilon = 0$, $\delta_* = \tilde{\delta}_*$, где $\tilde{\delta}_*$ — постоянная из (3.92), к этому уравнению применима теорема о неявной функции по переменной δ_* . Таким образом, из (3.98) однозначно определяем гладкую функцию $\delta_* = \delta_*(\varepsilon)$, $\delta_*(0) = \tilde{\delta}_*$ параметра ε , которая, собственно, и является одной из искомых функций (3.92). Вторая же из этих функций задается, очевидно, равенством

$$\xi_*(\tau, \varepsilon) = \xi_0(\tau) + \varepsilon h_*(\tau, \varepsilon, \delta_*)|_{\delta_* = \delta_*(\varepsilon)}.$$

Лемма 3.2 полностью доказана.

Подводя итог, обратим внимание на еще одно важное обстоятельство: из способа перехода от исходного уравнения (3.23) к вспомогательной системе (3.55) следует, что нас должны интересовать только те ее периодические с периодом (3.54) решения $v = v(t, \varepsilon)$, которые обладают дополнительным свойством симметрии

$$S_0 v(t + T(\varepsilon)/2, \varepsilon) \equiv v(t, \varepsilon), \quad (3.99)$$

где S_0 — преобразование (3.65). Заметим, далее, что в силу леммы 3.2 при $\delta = a + \varepsilon^2 \delta_*(\varepsilon)$, где $\delta_*(\varepsilon)$ — функция из (3.92), рассматриваемая система допускает единственный цикл

$$v = v(\tau, \varepsilon), \quad v(\tau + 2, \varepsilon) \equiv v(\tau, \varepsilon), \quad d\tau/dt = \varepsilon / (1 + \varepsilon a + \varepsilon^3 \delta_*(\varepsilon)), \quad (3.100)$$

где вектор-функция $v(\tau, \varepsilon) = \text{colon}(v_1(\tau, \varepsilon), v_2(\tau, \varepsilon), v_3(\tau, \varepsilon), v_4(\tau, \varepsilon))$ — результат подстановки в равенство для v из (3.78) соотношений

$$s = 0, \quad \xi = \varepsilon \xi_*(\tau, \varepsilon), \quad \eta = \varepsilon^2 \xi'_*(\tau, \varepsilon) / (1 + \varepsilon a + \varepsilon^3 \delta_*(\varepsilon)). \quad (3.101)$$

Что же касается требуемого свойства симметрии (3.99), т. е. тождества $S_0 v(\tau + 1, \varepsilon) \equiv v(\tau, \varepsilon)$, то оно вытекает из антипериодичности функции $\xi_*(\tau, \varepsilon)$ и из установленных выше свойств (см. (3.67), (3.76))

$$S_0 v_*(s, \varepsilon) \equiv -v_*(s, \varepsilon), \quad S_0 v_{**}(s, \varepsilon) \equiv -v_{**}(s, \varepsilon), \\ S_0 H(-\xi, -\eta, \varepsilon, s) \equiv H(\xi, \eta, \varepsilon, s) \quad (3.102)$$

многообразия (3.78).

Возвращаясь к исходному уравнению (3.23), отметим, что циклу (3.100) отвечает единственный его цикл вида (3.48), где функция $x(\tau, \varepsilon)$ и частота $\sigma(\varepsilon)$ определяются равенствами

$$x(\tau, \varepsilon) = v_1(-\tau, \varepsilon), \quad \sigma(\varepsilon) = 1 / (1 + \varepsilon a + \varepsilon^3 \delta_*(\varepsilon)). \quad (3.103)$$

Остается добавить, что этот цикл обладает всеми требуемыми в теореме 3.1 асимптотическими свойствами.

3.3.2. Исследование устойчивости. В данном пункте проведем анализ свойств устойчивости построенного выше цикла (3.48) уравнения (3.23). В связи с этим сделаем следующее: возьмем отвечающее указанному циклу периодическое решение $x(t, \varepsilon) = x(\tau, \varepsilon)|_{\tau=\varepsilon\sigma(\varepsilon)t}$, положим в (3.23) $x = x(t, \varepsilon) + h$, отбросим нелинейные по h слагаемые и в получившемся уравнении в вариациях выполним замену $\exp(-\lambda t)h \rightarrow h$, $\lambda = \text{const} \in \mathbb{C}$. В результате приходим к уравнению вида

$$\ddot{h} + (a + 2\lambda)\dot{h} + (\lambda^2 + a\lambda + 1)h = \exp(-\lambda/\varepsilon)\Lambda(x(t-1/\varepsilon, \varepsilon), \varepsilon)h(t-1/\varepsilon), \quad (3.104)$$

где $\Lambda(x, \varepsilon) = (1 + \varepsilon^2\gamma)F'((1 + \varepsilon^2\gamma)x)$, коэффициенты которого являются периодическими с периодом $T(\varepsilon)$ (см. (3.54)) при $\delta(\varepsilon) = a + \varepsilon^2\delta_*(\varepsilon)$. Заметим, далее, что интересующая нас проблема устойчивости цикла (3.48) сводится, очевидно, к отысканию возможных значений $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Re } \lambda \geq 0$, при которых уравнение (3.104) допускает нетривиальные $T(\varepsilon)$ -периодические решения. Если же таких λ не существует (кроме, естественно, простой точки спектра $\lambda = 0$, которой соответствует решение $h = \dot{x}(t, \varepsilon)$), то в этом случае рассматриваемый цикл будет экспоненциально орбитально устойчивым.

При исследовании возможных периодических решений уравнения (3.104) воспользуемся тем же приемом, что и в п. 3.1. А именно, предположим, что это уравнение имеет некоторое $T(\varepsilon)$ -периодическое решение $h(t, \varepsilon) \not\equiv 0$. Тогда, как нетрудно увидеть, пара функций $h_1(t) = h(t, \varepsilon)$, $h_2(t) = h(t - 1/\varepsilon - \delta(\varepsilon), \varepsilon)$ будет удовлетворять системе

$$\begin{aligned} \ddot{h}_1 + (a + 2\lambda)\dot{h}_1 + (\lambda^2 + a\lambda + 1)h_1 &= \\ &= \exp(-\lambda/\varepsilon)\Lambda(y(t + \delta(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon)h_2(t + \delta(\varepsilon)), \\ \ddot{h}_2 + (a + 2\lambda)\dot{h}_2 + (\lambda^2 + a\lambda + 1)h_2 &= \\ &= \exp(-\lambda/\varepsilon)\Lambda(x(t + \delta(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon)h_1(t + \delta(\varepsilon)), \end{aligned} \quad (3.105)$$

где $y(t, \varepsilon) = x(t - 1/\varepsilon - \delta(\varepsilon), \varepsilon)$. Далее, считая h_1, h_2 независимыми переменными, сделаем в (3.105) последовательно замены $-t \rightarrow t$, $\exp(-\lambda t)h_j \rightarrow h_j$, $j = 1, 2$ и положим $v_1 = h_1$, $v_2 = \dot{h}_1$, $v_3 = h_2$, $v_4 = \dot{h}_2$, $v = \text{colon}(v_1, v_2, v_3, v_4)$. В результате с учетом равенств (3.103) приходим к аналогичной (3.55), но уже линейной по v системе

$$\dot{v} = Av + \kappa B(\tau, \varepsilon)v(t - \delta(\varepsilon)), \quad d\tau/dt = \varepsilon\sigma(\varepsilon). \quad (3.106)$$

Здесь матрица A та же самая, что и в (3.55), а 2-периодическая по τ матрица $B(\tau, \varepsilon)$ определяется формулами

$$B(\tau, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & B_0(\tau - 1, \varepsilon) \\ B_0(\tau, \varepsilon) & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0(\tau, \varepsilon) = b_0(\tau, \varepsilon) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.107)$$

$$b_0(\tau, \varepsilon) = \Lambda(x(-\tau + \varepsilon\delta(\varepsilon)\sigma(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon).$$

Что же касается комплексного параметра $\varkappa = \exp(-\lambda T(\varepsilon)/2)$, то в силу предполагаемого условия $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ будем считать его непрерывно меняющимся на множестве

$$\mathfrak{X} = \{\varkappa \in \mathbb{C} : 0 < |\varkappa| \leq 1\}. \quad (3.108)$$

Из способа получения системы (3.106) вытекает, что интересующие нас точки спектра λ уравнения (3.104) определяются по следующему правилу. Пусть $\mu = \mu(\varkappa, \varepsilon)$ — произвольный мультипликатор линейной $T(\varepsilon)$ -периодической системы

$$\dot{v} = Av + \varkappa B(\varepsilon\sigma(\varepsilon)t, \varepsilon)v(t - \delta(\varepsilon)), \quad (3.109)$$

которому отвечает решение Ляпунова–Флоке

$$v = \exp\left(\frac{t}{T(\varepsilon)} \ln \mu\right) \tilde{v}(t, \varepsilon), \quad \tilde{v}(t + T(\varepsilon), \varepsilon) \equiv \tilde{v}(t, \varepsilon), \quad (3.110)$$

обладающее аналогичным (3.99) дополнительным свойством симметрии

$$S_0 \tilde{v}(t + T(\varepsilon)/2, \varepsilon) \equiv \tilde{v}(t, \varepsilon). \quad (3.111)$$

Тогда, очевидно, $\lambda = (2/T(\varepsilon)) \ln(1/\varkappa)$, где \varkappa — произвольный корень уравнения

$$\mu(\varkappa, \varepsilon) = \varkappa^2, \quad (3.112)$$

принадлежащий множеству (3.108).

Приведенный метод отыскания характеристических показателей λ цикла (3.48) нуждается в некоторых пояснениях. Отметим, во-первых, что хотя при переходе от (3.104) к (3.105) переменные h_1 , h_2 и предполагались независимыми, но на периодических решениях системы (3.105) должно выполняться соотношение $h_2(t) = h_1(t - T(\varepsilon)/2)$. А это значит, что при составлении уравнений (3.112) следует брать только те мультипликаторы системы (3.109), которым соответствуют решения Ляпунова–Флоке вида (3.110), (3.111). Во-вторых, из явных формул для $B(\tau, \varepsilon)$ (см. (3.107))

закключаем, что при $\varkappa = 1$ система (3.109) представляет собой систему в вариациях на цикле (3.100) и в силу этого допускает периодическое решение $v = \dot{v}(t, \varepsilon)$, где $v(t, \varepsilon) = v(\tau, \varepsilon)|_{\tau=\varepsilon\sigma(\varepsilon)t}$. Заметим также, что это периодическое решение обладает требуемым свойством (3.111) (для доказательства достаточно продифференцировать по t равенство (3.99)). Тем самым, значение $\varkappa = 1$ заведомо будет корнем одного из уравнений (3.112). Если же данный корень простой и помимо него в множестве (3.108) у уравнений (3.112) существует еще m решений (с учетом их кратностей), то цикл (3.48) оказывается дихотомичным при $m > 0$ (с размерностью неустойчивого многообразия, равной $m + 1$) и экспоненциально орбитально устойчивым в случае $m = 0$.

Для реализации описанной выше общей схемы исследования устойчивости сначала необходимо разобраться с асимптотическим поведением мультипликаторов $\mu(\varkappa, \varepsilon)$ системы (3.109). Решение этой проблемы существенно облегчает то обстоятельство, что коэффициенты данной системы близки к постоянным и, в частности, при $\varepsilon = 0$ она переходит в систему

$$\dot{v} = Av + \varkappa Bv(t - a), \quad (3.113)$$

где B — матрица из (3.84). А отсюда следует, что интересующие нас мультипликаторы $\mu(\varkappa, \varepsilon)$ допускают асимптотические представления

$$\mu(\varkappa, \varepsilon) = \exp(\lambda T(\varepsilon))(1 + o(1)), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.114)$$

где $\lambda = \lambda(\varkappa)$ — характеристические показатели системы (3.113), определяющиеся из уравнений

$$\lambda^2 - a\lambda + 1 = \varkappa \exp(-a\lambda), \quad \lambda^2 - a\lambda + 1 = -\varkappa \exp(-a\lambda). \quad (3.115)$$

Опираясь на формулы (3.114), нетрудно увидеть, что если $\lambda = \lambda(\varkappa)$ — корень одного из уравнений (3.115), такой что $\operatorname{Re} \lambda(\varkappa) \neq 0 \forall \varkappa \in \mathfrak{X}$, то для соответствующего ему мультипликатора $\mu(\varkappa, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ реализуются только две возможности: $\lim |\mu(\varkappa, \varepsilon)| = \infty$ или $\lim |\mu(\varkappa, \varepsilon)| = 0$. Ясно, что в первом случае уравнение (3.112) заведомо не имеет корней в множестве (3.108). Во втором же случае проблемной является лишь ситуация, когда $\operatorname{Re} \lambda(\varkappa) \rightarrow -\infty$ при $\varkappa \rightarrow 0$. Следует, однако, заметить, что корни уравнений (3.115), обладающие этим свойством, имеют асимптотику вида

$$\lambda = \frac{1}{a} \ln \varkappa + O(\ln(\ln \varkappa)), \quad \varkappa \rightarrow 0. \quad (3.116)$$

Подставляя, далее, формулу (3.116) в (3.114), приходим к выводу, что отвечающие получившимся мультипликаторам $\mu(\varkappa, \varepsilon)$ уравнения (3.112) по-прежнему не имеют решений в \mathfrak{X} .

Проделанный предварительный анализ позволяет ограничиться рассмотрением только тех корней уравнений (3.115), действительные части которых при некоторых $\varkappa \in \mathfrak{X}$ могут обращаться в нуль. Для отыскания таких корней у первого уравнения (3.115) положим в нем $\lambda = i\omega$, $\omega \geq 0$ и возьмем модули от левой и правой частей получившегося равенства. В результате убеждаемся, что $|\varkappa|^2 = 1 + (a^2 - 2)\omega^2 + \omega^4$, но в то же время $|\varkappa| \leq 1$, $1 + (a^2 - 2)\omega^2 + \omega^4 \geq 1$ при $\forall \omega \geq 0$. А это значит, что данное уравнение может иметь на мнимой оси только корень $\lambda = 0$ и только при $\varkappa = 1$, причем этот корень является двукратным. Что же касается второго уравнения (3.115), то, как показывают аналогичные рассуждения, для всех его корней $\lambda(\varkappa)$ выполняются неравенства $\operatorname{Re} \lambda(\varkappa) \neq 0 \forall \varkappa \in \mathfrak{X}$.

Из установленного поведения характеристических показателей системы (3.113) при изменении параметра $\varkappa \in \mathfrak{X}$ следует, что разрешимыми в множестве \mathfrak{X} могут быть только два уравнения (3.112), отвечающие двум близким к единице мультипликаторам системы (3.109) при

$$\varkappa = 1 - \nu : \quad \nu = \nu_1 + i\nu_2, \quad \nu_j \in \mathbb{R}, \quad |\nu_j| \ll 1, \quad j = 1, 2, \quad 2\nu_1 \geq \nu_1^2 + \nu_2^2. \quad (3.117)$$

В результате проблема поиска возможных корней этих уравнений сводится к асимптотическому исследованию упомянутых мультипликаторов, которые назовем критическими и обозначим через $\mu_1(\varepsilon, \nu)$, $\mu_2(\varepsilon, \nu)$. При анализе критических мультипликаторов, однако, удобнее работать не с самой системой (3.109), а с расширенной автономной системой (3.106), где τ рассматривается как дополнительная пространственная координата.

Как уже отмечалось выше, при $\varkappa = 1$ уравнение для v из (3.106) представляет собой линеаризацию системы (3.55) при $\delta = a + \varepsilon^2 \delta_*(\varepsilon)$ на цикле (3.100). А отсюда вытекает существование при $\varkappa = 1$ в фазовом пространстве $C([- \delta(\varepsilon), 0]; \mathbb{R}^4) \times \mathbb{R}$ системы (3.106) трехмерного инвариантного многообразия вида

$$\Sigma_0(\tau, \xi, \eta) = \left\{ (v(s), \tau) \in C([- \delta(\varepsilon), 0]; \mathbb{R}^4) \times \mathbb{R} : \right. \\ \left. v = v^1(s, \tau, \varepsilon)\xi + v^2(s, \tau, \varepsilon)\eta \right\}. \quad (3.118)$$

Здесь $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \tau \leq 2 \pmod{2}$ — параметры на многообразии, а непрерывные по совокупности переменных (s, τ, ε) и достаточно гладкие по (τ, ε) вектор-функции $v^j(s, \tau, \varepsilon)$, $j = 1, 2$ определяются по следующему правилу.

Для нахождения $v^1(s, \tau, \varepsilon)$ необходимо продифференцировать по ξ правую часть равенства для v из (3.78), а затем подставить в получившееся выражение второе и третье соотношения из (3.101) вместе с формулой $\delta(\varepsilon) = a + \varepsilon^2 \delta_*(\varepsilon)$. В случае $v^2(s, \tau, \varepsilon)$ последовательность действий аналогичная, но только равенство для v дифференцируется по η .

Указанный способ построения функций $v^j(s, \tau, \varepsilon)$, $j = 1, 2$ вместе со свойствами (3.102) многообразия (3.78) позволяет заключить, что, во-первых,

$$v^j(s, \tau + 2, \varepsilon) \equiv v^j(s, \tau, \varepsilon), \quad S_0 v^j(s, \tau + 1, \varepsilon) \equiv -v^j(s, \tau, \varepsilon), \quad j = 1, 2; \quad (3.119)$$

во-вторых, движения на многообразии (3.118) описываются системой

$$\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = -p(\tau, \varepsilon)\eta - q(\tau, \varepsilon)\xi, \quad \dot{\tau} = \varepsilon\sigma(\varepsilon), \quad (3.120)$$

где $p = -\beta(\varepsilon) - \partial\Phi/\partial\eta$, $q = -\alpha(\varepsilon) - \partial\Phi/\partial\xi$, а функции $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$, $\Phi(\xi, \eta, \varepsilon)$ заимствованы из (3.79). Производные же здесь, как и выше, вычисляются при значениях ξ , η , задающихся формулами (3.101). Отметим еще, что нечетность Φ по переменным ξ , η (см. (3.77)) и свойство антипериодичности функции $\xi_*(\tau, \varepsilon)$ приводят к равенствам

$$p(\tau + 1, \varepsilon) \equiv p(\tau, \varepsilon), \quad q(\tau + 1, \varepsilon) \equiv q(\tau, \varepsilon). \quad (3.121)$$

Перейдем теперь к случаю (3.117) и заметим, что многообразие (3.118) в силу его дихотомичности продолжается по параметру ν . Точнее говоря, при $\nu \in \mathbb{C}$, $|\nu| \ll 1$ оно задается аналогичным (3.118) равенством

$$\Sigma_\nu(\tau, \xi, \eta) = \left\{ (v(s), \tau) \in C([- \delta(\varepsilon), 0]; \mathbb{R}^4) \times \mathbb{R} : \right. \\ \left. v = v^1(s, \tau, \varepsilon, \nu)\xi + v^2(s, \tau, \varepsilon, \nu)\eta \right\}, \quad (3.122)$$

в котором функции $v^j(s, \tau, \varepsilon, \nu)$, $v^j(s, \tau + 2, \varepsilon, \nu) \equiv v^j(s, \tau, \varepsilon, \nu)$, $j = 1, 2$ являются достаточно гладкими по (τ, ε) и аналитическими по ν . Более того, из факта инвариантности системы (3.106) по отношению к замене $\tau \rightarrow \tau + 1$, $S_0 v \rightarrow v$ и из свойства симметрии $S_0 \Sigma_0(\tau + 1, -\xi, -\eta) = \Sigma_0(\tau, \xi, \eta)$ (см. (3.119)) вытекает справедливость аналогичного свойства

$$S_0 \Sigma_\nu(\tau + 1, -\xi, -\eta) = \Sigma_\nu(\tau, \xi, \eta) \quad (3.123)$$

при всех достаточно малых по модулю ν .

Собственно говоря, в дальнейшем нас будет интересовать система уравнений на многообразии (3.122), имеющая аналогичный (3.120) вид

$$\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = -p(\tau, \varepsilon, \nu)\eta - q(\tau, \varepsilon, \nu)\xi, \quad \dot{\tau} = \varepsilon\sigma(\varepsilon). \quad (3.124)$$

Здесь коэффициенты p, q обладают теми же свойствами гладкости по τ, ε, ν , что и функции v^1, v^2 , а значит, допускают тейлоровские разложения

$$\begin{aligned} p(\tau, \varepsilon, \nu) &= \varepsilon p_1(\tau) + \varepsilon^2 p_2(\tau) + \nu p_3(\tau) + \dots, \\ q(\tau, \varepsilon, \nu) &= \varepsilon q_1(\tau) + \varepsilon^2 q_2(\tau) + \nu q_3(\tau) + \dots \end{aligned} \quad (3.125)$$

Отметим еще, что для них сохраняются аналогичные (3.121) тождества

$$p(\tau + 1, \varepsilon, \nu) \equiv p(\tau, \varepsilon, \nu), \quad q(\tau + 1, \varepsilon, \nu) \equiv q(\tau, \varepsilon, \nu), \quad (3.126)$$

так как в силу (3.123) система (3.124) не должна меняться при одновременном выполнении замен $\tau \rightarrow \tau + 1, \xi \rightarrow -\xi, \eta \rightarrow -\eta$.

Отыскание выписанных членов разложений (3.125) не вызывает затруднений. Действительно, для $p_j(\tau), q_j(\tau), j = 1, 2$ из указанного выше способа построения многообразия (3.118) и системы (3.120) вытекают формулы

$$\begin{aligned} p_1(\tau) &= q_1(\tau) = 0, \quad p_2(\tau) = -b_{1,2} - b_{3,2}\xi_0^2(\tau), \\ q_2(\tau) &= \frac{1}{a^2/2 - 1} (\gamma - 3(d_1^2 + d_2)\xi_0^2(\tau)), \end{aligned} \quad (3.127)$$

где $b_{1,2}, b_{3,2}$ — коэффициенты из (3.80). Что же касается оставшихся двух коэффициентов $p_3(\tau), q_3(\tau)$, то при их вычислении можно положить в (3.106) $\varepsilon = 0$ и для получившегося автономного уравнения (3.113) воспользоваться алгоритмом подсчета коэффициентов нормальной формы из п. 3.1. На этом пути приходим к равенствам

$$p_3(\tau) \equiv a/(a^2/2 - 1), \quad q_3(\tau) \equiv -1/(a^2/2 - 1). \quad (3.128)$$

Вернемся к интересующей нас проблеме асимптотического вычисления критических мультипликаторов $\mu_j(\varepsilon, \nu), j = 1, 2$ системы (3.109). В связи с этим обратим внимание, что данные мультипликаторы являются в то же время мультипликаторами уравнения

$$\xi'' + \frac{p(\tau, \varepsilon, \nu)}{\varepsilon\sigma(\varepsilon)} \xi' + \frac{q(\tau, \varepsilon, \nu)}{\varepsilon^2\sigma^2(\varepsilon)} \xi = 0 \quad (3.129)$$

с 2-периодическими по τ коэффициентами, получающегося из первых двух уравнений системы (3.124) при переходе к времени τ . Однако прежде чем браться за анализ уравнения (3.129), необходимо согласовать порядки малости параметров ε и ν . Делается это с помощью следующих соображений.

Заметим сначала, что критические мультипликаторы $\mu_j(\varepsilon, \nu)$, $j = 1, 2$ в первом приближении задаются аналогичными (3.114) формулами

$$\begin{aligned}\mu_1(\varepsilon, \nu) &= \exp(\lambda_+(\nu)T(\varepsilon))(1 + o(1)), \\ \mu_2(\varepsilon, \nu) &= \exp(\lambda_-(\nu)T(\varepsilon))(1 + o(1)),\end{aligned}\tag{3.130}$$

где $\lambda_{\pm}(\nu) = \pm\sqrt{\nu/(a^2/2 - 1)} + O(\nu^{3/2})$ – два близких к нулю корня первого уравнения (3.115) при $\varkappa = 1 - \nu$. Поэтому для разрешимости соответствующих уравнений (см. (3.112))

$$\mu_j(\varepsilon, \nu) = (1 - \nu)^2, \quad j = 1, 2\tag{3.131}$$

необходимо, чтобы модули этих мультипликаторов имели порядок единицы. А отсюда и из (3.130) заключаем, что при $\nu \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ должно оставаться ограниченным отношение $\operatorname{Re}(\sqrt{\nu})/\varepsilon$. Но поскольку наложенные на параметр ν требования (см. (3.117)) исключают возможность $\operatorname{Re}(\sqrt{\nu}) = 0$, то отсюда окончательно получаем:

$$\nu = \nu_0 \varepsilon^2, \quad \nu_0 = \operatorname{const} \in \mathbb{C}.\tag{3.132}$$

Приступим теперь непосредственно к исследованию уравнения (3.129). С этой целью выполним в нем замену $\exp(-\tau \ln(1 - \nu))\xi \rightarrow \xi$, дополним получившееся уравнение условием антипериодичности с периодом 1 и учтем формулы (3.125) – (3.128), (3.132). В результате приходим к краевой задаче вида

$$\Pi \xi - \nu_0 \xi = \varepsilon(\tilde{p}(\tau, \varepsilon, \nu_0)\xi' + \tilde{q}(\tau, \varepsilon, \nu_0)\xi), \quad \xi(\tau + 1) \equiv -\xi(\tau),\tag{3.133}$$

где Π – дифференциальный оператор из (3.39), $\tilde{p}(\tau, \varepsilon, \nu_0)$, $\tilde{q}(\tau, \varepsilon, \nu_0)$ – некоторые достаточно гладкие по всем переменным и периодические по τ с периодом 1 функции, а свободный параметр $\nu_0 \in \mathbb{C}$ будем считать спектральным. Причины же, по которым имеет смысл рассматривать краевую задачу (3.133), проясняет следующее утверждение.

Лемма 3.5. *Параметр $\varkappa \in \mathfrak{X}$ является корнем одного из уравнений (3.112) в том и только том случае, когда он имеет вид $\varkappa = 1 - \nu_0 \varepsilon^2$, где $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ – некоторое собственное значение краевой задачи (3.133).*

Доказательство. Установим сначала необходимость. В связи с этим напомним, что среди уравнений (3.112) разрешимыми в \mathfrak{X} могут быть только два уравнения (3.131) при условиях (3.117), (3.132). Заметим, далее, что мультипликаторы $\tilde{\mu}_j(\varepsilon, \nu_0)$, $j = 1, 2$ уравнения из (3.133), вычисленные за период $\tau = 2$, связаны с критическими мультипликаторами $\mu_j(\varepsilon, \nu)$, $j = 1, 2$ из (3.131) посредством равенств

$$\tilde{\mu}_j(\varepsilon, \nu_0) = \mu_j(\varepsilon, \nu_0 \varepsilon^2) / (1 - \nu_0 \varepsilon^2)^2, \quad j = 1, 2. \quad (3.134)$$

Поэтому если $\varkappa \in \mathfrak{X}$ — решение одного из уравнений (3.112), то автоматически $\varkappa = 1 - \nu_0 \varepsilon^2$, где ν_0 — некоторое собственное значение краевой задачи

$$P\xi - \nu_0 \xi = \varepsilon(\tilde{p}(\tau, \varepsilon, \nu_0)\xi' + \tilde{q}(\tau, \varepsilon, \nu_0)\xi), \quad \xi(\tau + 2) \equiv \xi(\tau). \quad (3.135)$$

На следующем этапе фиксируем произвольное нетривиальное решение $\xi(\tau, \nu_0, \varepsilon)$ получившейся задачи (3.135) и покажем, что оно является и решением краевой задачи (3.133) при том же значении ν_0 . Для этого положим

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi(\tau, \nu_0, \varepsilon) \exp(\tau \ln(1 - \nu_0 \varepsilon^2))|_{\tau=\varepsilon\sigma(\varepsilon)t}, \\ \eta(t) &= \dot{\xi}(t), \quad \tau(t) = \varepsilon\sigma(\varepsilon)t \end{aligned} \quad (3.136)$$

и рассмотрим точку на многообразии (3.122) (при $\nu = \nu_0 \varepsilon^2$) с координатами $\tau(t)$, $\xi(t)$, $\eta(t)$. По прошествии времени $T(\varepsilon)/2$, где, напомним, $T(\varepsilon) = 2(\varepsilon\sigma(\varepsilon))^{-1}$, указанная точка, оставаясь на данном многообразии, перейдет в точку с координатами $\tau(t) + 1$, $\xi(t + T(\varepsilon)/2)$, $\eta(t + T(\varepsilon)/2)$. А так как при составлении уравнений (3.112) брались решения Ляпунова–Флоке (3.110), удовлетворяющие дополнительному условию (3.111), то две эти точки с необходимостью должны быть связаны соотношением

$$\begin{aligned} S_0 \Sigma_\nu(\tau(t) + 1, \xi(t + T(\varepsilon)/2), \eta(t + T(\varepsilon)/2)) &= \\ &= \Sigma_\nu(\tau(t), (1 - \nu_0 \varepsilon^2)\xi(t), (1 - \nu_0 \varepsilon^2)\eta(t)). \end{aligned} \quad (3.137)$$

Но, с другой стороны, из (3.123) имеем

$$\begin{aligned} S_0 \Sigma_\nu(\tau(t) + 1, \xi(t + T(\varepsilon)/2), \eta(t + T(\varepsilon)/2)) &= \\ &= \Sigma_\nu(\tau(t), -\xi(t + T(\varepsilon)/2), -\eta(t + T(\varepsilon)/2)). \end{aligned} \quad (3.138)$$

А это значит, что функции $\xi(t)$, $\eta(t)$ удовлетворяют тождествам

$$\xi(t + T(\varepsilon)/2) \equiv -(1 - \nu_0 \varepsilon^2)\xi(t), \quad \eta(t + T(\varepsilon)/2) \equiv -(1 - \nu_0 \varepsilon^2)\eta(t), \quad (3.139)$$

из которых, в свою очередь, вытекает требуемое свойство $\xi(\tau + 1, \nu_0, \varepsilon) \equiv -\xi(\tau, \nu_0, \varepsilon)$.

Для обоснования леммы 3.3 в части достаточности фиксируем некоторое собственное значение $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ краевой задачи (3.133) и обозначим через $\xi(\tau, \nu_0, \varepsilon) \not\equiv 0$ отвечающую ему собственную функцию. Нетрудно увидеть, что $\xi(\tau, \nu_0, \varepsilon)$ является одновременно и решением задачи (3.135). Поэтому при $\nu = \nu_0(\varepsilon)$ обращается в единицу один из мультипликаторов (3.134), а значит, исходная система (3.109) при $\varkappa = 1 - \nu_0(\varepsilon)\varepsilon^2$ допускает мультипликатор $\mu = (1 - \nu_0(\varepsilon)\varepsilon^2)^2$. Тем самым, остается лишь убедиться, что соответствующее данному мультипликатору решение Ляпунова–Флоке (3.110) обладает свойством (3.111).

Как и выше, рассмотрим аналогичные (3.136) функции $\xi(t)$, $\eta(t)$, построенные по выбранному решению $\xi(\tau, \nu_0, \varepsilon)$ задачи (3.133) и заведомо удовлетворяющие тождествам (3.139) в силу антипериодичности этого решения. Заметим, далее, что интересующее нас свойство (3.111) эквивалентно выполнению равенства (3.137). Последнее же очевидным образом вытекает из соотношений (3.138), (3.139). Лемма 3.3 полностью доказана.

Установленная лемма позволяет уже без труда завершить обоснование теоремы 3.1. Действительно, поскольку при $\varepsilon = 0$ краевая задача (3.133) переходит в (3.39), то согласно стандартной теории возмущений (см., например, [18]) мы можем утверждать следующее: любому простому собственному значению $\lambda = \lambda_0$ порождающей задачи (3.39) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствует единственное вещественное собственное значение $\nu_0(\varepsilon)$, $\nu_0(0) = \lambda_0$ возмущенной задачи (3.133). Если же $\lambda = \lambda_0$ оказывается двукратным, то ему отвечают два, вообще говоря, комплексных собственных значения $\nu_{0,1}(\varepsilon)$, $\nu_{0,2}(\varepsilon)$: $\nu_{0,2}(\varepsilon) = \overline{\nu_{0,1}(\varepsilon)}$, $\nu_{0,1}(0) = \nu_{0,2}(0) = \lambda_0$ задачи (3.133). Добавим еще, что $\nu_0 = 0$ является простым собственным значением этой задачи при всех $0 \leq \varepsilon \ll 1$, так как при $\nu_0 = 0$ уравнение из (3.133) представляет собой линеаризацию уравнения (3.90) при $\delta_* = \delta_*(\varepsilon)$ на антипериодическом решении $\xi_*(\tau, \varepsilon)$ (см. (3.92)).

Подведем итог. Пусть краевая задача (3.39) имеет ровно m положительных собственных значений λ_j , $j = 1, \dots, m$. Тогда из утверждения леммы 3.3 и из отмеченной выше связи между спектрами задач (3.39), (3.133) вытекает, что в множестве (3.108) уравнения (3.112), помимо простого корня $\varkappa = 1$, допускают ровно m решений, причем эти решения имеют вид $\varkappa_j = 1 - \nu_{0,j}(\varepsilon)\varepsilon^2$, где $\nu_{0,j}(\varepsilon)$, $\nu_{0,j}(0) = \lambda_j$, $j = 1, \dots, m$ — собственные значения задачи (3.133). А отсюда, как уже говорилось ранее, следует, что интересующий нас цикл (3.48) является экспоненциально

орбитально устойчивым в случае $m = 0$ и дихотомичным при $m > 0$. Теорема 3.1 полностью доказана.

3.4. Заключение

В первую очередь попытаемся взглянуть на предложенные выше методы асимптотического анализа периодических решений с некоторых более общих позиций. С этой целью обратимся к сингулярно возмущенной системе с запаздыванием вида

$$\varepsilon \dot{x} = C(\mu)x + D(\mu)x(t-1) + f(x, x(t-1), \mu), \quad (3.140)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $|\mu| \ll 1$, $x \in \mathbb{R}^n$, а матрицы $C(\mu)$, $D(\mu)$ и вектор-функция $f(x, y, \mu)$: $f(0, 0, \mu) \equiv 0$, $f'_x(0, 0, \mu) \equiv f'_y(0, 0, \mu) \equiv 0$ бесконечно дифференцируемы по своим переменным. Основные ограничения, при которых будем рассматривать систему (3.140), формулируются в терминах полинома

$$P(\lambda, z, \mu) = \det(C(\mu) + \lambda D(\mu) - izI), \quad (3.141)$$

зависящего от μ и от вспомогательного параметра $z \geq 0$. А именно, предположим, что, во-первых, гурвицевой является матрица $C_0 = C(0)$; во-вторых, уравнение $P(\lambda, 0, 0) = 0$ имеет простой корень $\lambda = -1$, а все остальные его корни находятся в множестве $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$; в-третьих, при $\forall z > 0$ все корни полинома $P(\lambda, z, 0)$ лежат в Λ ; и наконец, в-четвертых, простой корень $\lambda(z, \mu)$, $\lambda(0, 0) = -1$ полинома (3.141), существующий при $|\mu| \ll 1$, $0 \leq z \ll 1$ в силу предыдущих условий, обладает свойствами:

$$\alpha = \frac{d^2}{dz^2} |\lambda(z, 0)|^2 \Big|_{z=0} > 0, \quad \beta = \lambda'_\mu(0, 0) > 0. \quad (3.142)$$

Следует отметить, что к виду (3.140) приводится уже изученное нами уравнение (3.8), если перейти от него к системе для $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, выполнить замену $\theta t \rightarrow t$ и положить $\varepsilon = 1/\theta$, $\mu = K - 1$. В результате получится система (3.140) при $n = 2$, удовлетворяющая при $a > \sqrt{2}$ всем перечисленным чуть выше условиям, поскольку здесь

$$C(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a \end{pmatrix}, \quad D(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 - \mu & 0 \end{pmatrix},$$

$$P(\lambda, z, \mu) = \lambda(1 + \mu) + 1 + iaz - z^2. \quad (3.143)$$

При сформулированных ограничениях и при

$$\mu = \mu_0 \varepsilon^2, \quad \mu_0 = \text{const} > 0 \quad (3.144)$$

нулевое решение системы (3.140) обладает теми же свойствами устойчивости, что и в частном случае (3.143). А именно, у квазиполинома

$$Q(\lambda, \varepsilon) = \det (C(\mu) + D(\mu) \exp(-\lambda) - \varepsilon \lambda I) \Big|_{\mu=\mu_0 \varepsilon^2}$$

существует группа корней, лежащих в полуплоскости $\{\lambda : \text{Re } \lambda < 0\}$ и не приближающихся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$, и группа критических корней $\lambda_n(\varepsilon)$, $\bar{\lambda}_n(\varepsilon)$, $n \geq 1$, $\lambda_n(0) = i\omega_n$, где ω_n — частоты из (3.12), переходящих последовательно в правую комплексную полуплоскость при увеличении параметра μ_0 . А отсюда, в свою очередь, вытекает, что при дополнительном условии (3.144) для системы (3.140) практически без изменений сохраняется описанный в п. 2.2 алгоритм построения асимптотики периодических решений. Точнее говоря, при реализации этого алгоритма в данном случае следует выполнить в (3.140) замену

$$\tau = \sigma(\varepsilon)t, \quad \sigma(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2 + \varepsilon^3\sigma_3 + \dots \quad (3.145)$$

и подставить в получившееся уравнение ряд по целым степеням ε :

$$x = \varepsilon x_0(\tau) + \varepsilon^2 x_1(\tau) + \varepsilon^3 x_2(\tau) + \dots, \quad x_0(\tau) = \xi_0(\tau)e_0, \quad (3.146)$$

где все вектор-функции $x_k(\tau)$, $k \geq 0$ являются 2-периодическими по τ , $\xi_0(\tau)$ — произвольная антипериодическая с периодом 1 скалярная функция, а e_0 — собственный вектор матрицы $C_0 - D_0$, $D_0 = D(0)$, отвечающий ее нулевому собственному значению.

После приравнивания в (3.140) коэффициентов при одинаковых степенях ε для $x_k(\tau)$, $k \geq 1$ приходим к аналогичной (3.29) рекуррентной последовательности разностных уравнений вида

$$C_0 x_k(\tau) + D_0 x_k(\tau - 1) = \varphi_k(\tau), \quad k \geq 1. \quad (3.147)$$

Постоянные же σ_k , $k \geq 1$ из (3.145) и возникающие на каждом шаге аддитивные добавки $\xi_k(\tau)e_0$, $\xi_k(\tau + 1) \equiv -\xi_k(\tau)$, $k \geq 0$ определяем из условий разрешимости этих уравнений в классе 2-периодических функций, т. е. из равенств $(\varphi_{k,1}(\tau), g_0) \equiv 0$, где $\varphi_{k,1}(\tau)$ — антипериодическая компонента неоднородности $\varphi_k(\tau)$ (см. (3.30)), а вектор g_0 таков, что $(C_0^* - D_0^*)g_0 = 0$, $(D_0 e_0, g_0) = 1$. В частности, из условия разрешимости уравнения (3.147)

при $k = 3$ для фигурирующей в (3.146) амплитуды $\xi_0(\tau)$ приходим к аналогичной (3.38) нелинейной краевой задаче. Добавим, наконец, что здесь остается в силе (вместе с обоснованием) и аналог нашего основного утверждения — теоремы 3.1.

Не представляет труда описание аналогичного (3.140) класса дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, на который распространяются развитые в настоящей работе методы. Однако более интересным является вопрос об их применимости в окрестности дополнительного вырождения, когда при изменении некоторого параметра величина α из (3.142) обращается в нуль. Заметим, что в силу (3.143) именно такая ситуация и реализуется в уравнении (3.8) при прохождении параметра a через критическое значение $a = \sqrt{2}$. Поэтому при анализе указанной особенности вновь обратимся к данному уравнению, считая, что

$$1/\theta = \varepsilon \ll 1, \quad a = \sqrt{2} + \varepsilon a_0, \quad K = 1 + \varepsilon^3 \gamma, \quad a_0, \gamma = \text{const} > 0. \quad (3.148)$$

Возможные автоколебательные режимы уравнения

$$\varepsilon^2 \ddot{x} + \varepsilon(\sqrt{2} + \varepsilon a_0) \dot{x} + x = F((1 + \varepsilon^3 \gamma)x(t - 1)), \quad (3.149)$$

получающегося из (3.8) при замене $\theta t \rightarrow t$ и при условиях (3.148), будем искать в виде формального ряда

$$x = \varepsilon^{3/2} x_0(r, \tau) + \varepsilon^{5/2} x_1(r, \tau) + \varepsilon^3 x_2(r, \tau) + \\ + \varepsilon^{7/2} x_3(r, \tau) + \varepsilon^{9/2} x_4(r, \tau) + \dots, \quad (3.150)$$

где

$$\tau = (1 - \sqrt{2}\varepsilon + (2 - a_0)\varepsilon^2 - 2\sqrt{2}(1 - a_0)\varepsilon^3)t, \\ r = \varepsilon^3 t, \quad x_0(r, \tau) = \xi_0(r, \tau), \quad (3.151)$$

а $\xi_0(r, \tau)$, $\xi_0(r, \tau + 1) \equiv -\xi(r, \tau)$ — некоторая подлежащая определению амплитуда колебаний. Остальные же коэффициенты $x_k(r, \tau)$, $k \geq 1$ ряда (3.150) считаем периодическими по τ с периодом 2.

После подстановки в (3.149) соотношений (3.7), (3.150) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε для определения функций $x_k(r, \tau)$, $k \geq 1$ приходим к серии линейных неоднородных разностных уравнений вида

$$x_k(r, \tau) + x_k(r, \tau - 1) = \varphi_k(r, \tau), \quad k = 1, \dots, 4, \quad (3.152)$$

где переменная r рассматривается как параметр. Заметим, далее, что в силу специального выбора поправок к частоте в (3.151) уравнения (3.152) при $k = 1, 2, 3$ оказываются заведомо разрешимыми в классе 2-периодических по τ функций, а их решения задаются равенствами $x_1 \equiv x_3 \equiv 0$, $x_2 = (d_1/2)\xi_0^2(r, \tau)$. В случае же $k = 4$ условие разрешимости соответствующего уравнения приводит для определения неизвестной амплитуды $\xi_0(r, \tau)$ к краевой задаче

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial r} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\partial^3 \xi_0}{\partial \tau^3} + a_0 \sqrt{2} \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial \tau^2} + \gamma \xi_0 - (d_1^2 + d_2) \xi_0^3, \\ \xi_0(r, \tau + 1) \equiv -\xi_0(r, \tau), \quad (3.153)$$

где r играет роль времени, а τ — пространственной переменной. Получившуюся краевую задачу, как и аналогичную ей задачу (3.49), назовем квазинормальной формой.

Используя развитую нами методику, можно показать, что любому периодическому решению краевой задачи (3.153) вида

$$\xi_0 = \xi_{0,*}(\sigma_0 r + (2n + 1)\tau) : \sigma_0 \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \xi_{0,*}(y + 1) \equiv -\xi_{0,*}(y), \quad (3.154)$$

экспоненциально орбитально устойчивому или дихотомичному (в метрике фазового пространства W_2^3 антипериодических с периодом 1 функций $\xi(\tau)$), в исходном уравнении (3.8) при условиях (3.148) и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ отвечает цикл периода $T(\varepsilon) = \frac{2}{\varepsilon}(1 + \varepsilon\delta(\varepsilon))$, $\delta(0) = \sqrt{2}$ с теми же свойствами устойчивости. В частности, проблема существования этого цикла, как и ранее, сводится к анализу вспомогательной системы (3.55) на ее центральном многообразии Σ . Однако теперь это многообразие будет уже не двумерным, а трехмерным, поскольку при $a = \sqrt{2}$ квазиполином $P_-(\lambda, 0)$ (см. (3.60)) имеет трехкратный корень $\lambda = 0$.

В заключение добавим, что, как следует из содержащихся в [26] результатов, при условии (3.50) и при $a_0 \rightarrow 0$ количество сосуществующих устойчивых периодических решений (3.154) у квазинормальной формы (3.153) неограниченно растет и при $a_0 = 0$ становится счетным. А это означает, что в случае мягкой нелинейности неограниченное накапливание устойчивых циклов при подходящем изменении параметров a , K , θ происходит и в самом уравнении (3.8), т. е. наблюдается хорошо известный феномен буферности (см. [26, 31]).

Литература

1. *Азьян Ю. М., Мигулин В. В.* Об автоколебаниях в системе с запаздывающей обратной связью // Радиотехника и электроника. 1956. Т. 1, № 4. С. 418–427.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
3. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 252 с.
4. *Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н.* Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М.: МЦНМО, 2005.
5. *Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Мат. сб. 1986. Т. 130, № 4. С. 488–499.
6. *Витт А. А.* Распределенные автоколебательные системы // Журн. технич. физики. 1934. Т. 4, № 1. С. 144–157.
7. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю.* Локальные методы анализа динамических систем: учеб. пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2006. 92 с.
8. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965. 448 с.
9. *Гукенхеймер Д., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 508 с.
10. *Камбулов В. Ф.* Расчет автоколебаний в RCL -генераторах с распределенными параметрами в цепи обратной связи // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 1976. С. 86–89.

11. Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю. О явлении буферности в одной резонансной гиперболической краевой задаче из радиофизики // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 7. С. 77–96.
12. Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю. Об одном модельном гиперболическом уравнении, возникающем в радиофизике // Мат. моделирование. 1996. Т. 8, № 1. С. 93–102.
13. Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Бифуркация пространственно неоднородных циклов у нелинейного волнового уравнения с малой диффузией // Тр. ММО. 1997. Т. 59. С. 124–147.
14. Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю. О специфике генерируемых колебаний в *LCRG*-автогенераторе с малым затуханием в цепи обратной связи // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 8. С. 1019–1024.
15. Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Теоретический и экспериментальный анализ феномена буферности в длинной линии с туннельным диодом // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 5. С. 638–645.
16. Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Исследование автоколебаний в генераторе Ван-дер-Поля с распределенными параметрами // Вестник МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1999. № 3. С. 23–27.
17. Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. О явлении высокомодовой буферности в одной резонансной гиперболической краевой задаче из радиофизики // ДАН. 1999. Т. 366, № 5. С. 613–615.
18. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
19. Кащенко С. А. Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 25, № 8. С. 1448–1451.
20. Кащенко С. А. Уравнение Гинзбурга-Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, № 3. С. 457–465.
21. Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. Бифуркация автоколебаний сингулярно возмущенного волнового уравнения // ДАН СССР. 1990. Т. 315, № 2. С. 281–283.

22. Колесов А. Ю. Устойчивость автоколебаний телеграфного уравнения, бифурцирующих из состояния равновесия // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 2. С. 59–65.
23. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Построение периодических решений уравнения типа Буссинеска с помощью метода квазинормальных форм // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1, № 1. С. 207–220.
24. Колесов А. Ю. Существование счетного числа устойчивых циклов в средах с дисперсией // Изв. РАН. Сер. математика. 1995. Т. 59, № 3. С. 141–158.
25. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Бифуркация пространственно неоднородных автоколебаний от нелокального однородного цикла в системах с малой диффузией // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1996. Вып. 19. С. 262–283.
26. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений. М.: МАИК «Наука», 1998. (Тр. МИАН им. В. А. Стеклова. 1998. Т. 222. 192 с.)
27. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Автоколебания в $RCLG$ -линии с малыми искажениями // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 11. С. 1559–1561.
28. Колесов А. Ю., Розов Н. Х., Сушко В. Г. Специфика автоколебательных процессов в резонансных гиперболических системах // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5, № 2. С. 437–473.
29. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Автоколебания в системе Витта при резонансном спектре собственных частот // ДАН. 2000. Т. 370, № 1. С. 1–4.
30. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Асимптотическое исследование одной гиперболической краевой задачи из радиофизики // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, Механика. 2000. № 1. С. 21–26.
31. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Явление буферности в $RCLG$ -автогенераторе: теоретический анализ и результаты эксперимента // Тр. МИАН. 2001. Т. 233. С. 153–207.

32. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М.: Физматлит, 2004.
33. Колесов Ю.С. Математическая теория RC -генераторов с распределенными параметрами в цепи обратной связи // Дифференц. уравнения и их применение. Вильнюс: Ин-т физики и математики АН Лит. ССР, 1971. Вып. 2. 68 с.
34. Колесов Ю.С. Математические модели экологии // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 1979. С. 3–40.
35. Колесов Ю.С., Швитра Д.И. Автоколебания в системах с запаздыванием. Вильнюс: Мокслас, 1979. 146 с.
36. Колесов Ю.С., Колесов В.С., Федик И.И. Автоколебания в системах с распределенными параметрами. Киев: Наукова думка, 1979. 162 с.
37. Колесов Ю.С. Задача паразит–хозяин // Динамика биологических популяций: межвуз. сб. Горький: Горьковский ун-т. 1984. С. 28–34.
38. Колесов Ю.С. Об одной бифуркационной теореме в теории автоколебаний распределенных систем // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 10. С. 1709–1713.
39. Колесов Ю.С. Метод квазинормальных форм в задаче об установившихся режимах параболических систем с малой диффузией // Укр. мат. журн. 1987. Т. 39, № 1. С. 27–34.
40. Колесов Ю.С. Бифуркация инвариантных торов параболических систем с малой диффузией // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 3. С. 121–136.
41. Колесов Ю.С. Асимптотика и устойчивость нелинейных параметрических колебаний сингулярно возмущенного телеграфного уравнения // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 10. С. 57–72.
42. Колесов Ю.С. Обоснование метода квазинормальных форм для уравнения Хатчинсона с малым коэффициентом диффузии. Изв. РАН. Сер. Математика. 2001. Т. 65, № 4. С. 111–132.
43. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Новые методы нелинейной механики. М.; Л.: ОНТИ, 1934. 364 с.

44. *Кубышкин Е. П.* Параметрический резонанс в линейных периодических системах с последствием // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 1978. С. 43–76.
45. *Куликов А. Н.* Интегральные многообразия гиперболических уравнений в случае, близком к критическому одной пары чисто мнимых корней // Вестник Яросл. ун-та. 1975. Вып. 13. С. 94–117.
46. *Куликов А. Н.* Исследование одной краевой задачи, возникающей в радиофизике // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 1976. С. 67–85.
47. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.
48. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 504 с.
49. *Мищенко Е. Ф., Колесов А. Ю., Колесов Ю. С., Розов Н. Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995. 328 с.
50. *Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005.
51. *Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995.
52. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховых пространствах // Тр. ММО. 1961. Т. 10. С. 297–350.
53. *Стрелков С. П.* Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964.
54. *Хакен К.* Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
55. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
56. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

57. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985. 280 с.
58. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 416 с.
59. Hale J. K., Huang W. Square and pulse waves in matrix delay differential equations // *Dynamic Systems and Applications*. 1992. № 1. P. 51–70.
60. Hutchinson G. E. Circular causal systems in ecology // *Ann. N. Y. Acad. Sci.* 1948. V. 50. P. 221–246.
61. Kuramoto Y., Tsuzuki T. Reductive perturbation approach to chemical instabilities // *Progr. Theor. Phys.* 1975. V. 52. P. 1399–1401.
62. Kuramoto Y., Tsuzuki T. On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems // *Progr. Theor. Phys.* 1975. V. 54, №. 3. P. 687–699.
63. Kuramoto Y., Tsuzuki T. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium // *Progr. Theor. Phys.* 1976. V. 55. P. 356–369.
64. Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. New York: Springer-Verlag, Inc. 1990. 682 p.

Учебное издание

Глызин Сергей Дмитриевич

Колесов Андрей Юрьевич

Метод квазинормальных форм

Учебное пособие

Редактор, корректор М. В. Никулина

Компьютерный набор, верстка С. Д. Глызин

Подписано в печать 06.06.11. Формат 60×84/16. Бумага Data Copy.
Усл. печ. л. 6,07. Уч.-изд. л. 6,0. Тираж 70 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.

Отпечатано на ризографе.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов

МЕТОД
КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

ISBN 978-5-8397-0803-7



9 785839 708037