

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

21 мая 2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Регулярные и сингулярные методы теории возмущений**

Направление подготовки (специальности)  
01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Математическое моделирование и численные методы»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 12 апреля 2024 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2024 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Регулярные и сингулярные методы теории возмущений» относится к числу специальных математических дисциплин. Цель освоения дисциплины заключается в том, чтобы дать студентам представление об асимптотических методах интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый или большой параметр, познакомить студентов с понятиями асимптотической последовательности и асимптотического разложения, математическими основами регулярных и сингулярных методов теории возмущений. В рамках дисциплины обучающимся необходимо освоить методы прямого разложения, Линдштедта-Пуанкаре, перенормировки, многих масштабов, усреднения, Крылова-Боголюбова, пограничного слоя, сращивания асимптотических разложений, ВКБ. Эти знания необходимы студентам для решения научных и технических, фундаментальных и прикладных проблем.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Регулярные и сингулярные методы теории возмущений» относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений. Ее содержание диктуется внутренней логикой математики, целостностью и завершенностью отдельных разделов, и их иерархией, а также ее связями с другими математическими дисциплинами. Для освоения дисциплины студентам нужен определенный уровень знаний и навыков, полученных ранее из курсов дисциплин «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ».

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесённые с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-1</b> Способностью проводить научные исследования и получать новые научные и прикладные результаты самостоятельно и в составе научного коллектива	<b>И-ПК-1.1</b> Имеет способность проводить собственные научные исследования	<b>Знать:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- основы теории возмущений;</li><li>- определение асимптотического разложения;</li><li>- свойства асимптотических разложений;</li><li>- понятия регулярности и сингулярности в теории возмущений;</li><li>- определение пограничных слоев.</li></ul> <b>Уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- интегрировать асимптотические разложения;</li><li>- строить фазовый портрет дифференциального уравнения;</li><li>- применять асимптотические методы для решения научных и технических, фундаментальных и прикладных проблем;</li></ul>
	<b>И-ПК-1.2</b>	<b>Владеть навыками:</b>

	Имеет опыт самостоятельного получения новых научных и (или) прикладных результатов	- использования асимптотических методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый или большой параметр; - применения методов прямого разложения, пограничного слоя для решения задач.
--	--	---

#### 4. Объём, структура и содержание дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет **2** зачётных единицы, **72** акад. час.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоёмкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Определение асимптотического разложения. Единственность	2	1					8	
2	Свойства асимптотических разложений	2	1	1				8	
3	Метод фазовой плоскости	2	1	1				8	
4	Метод многих масштабов	2	1	1				8	
5	Вариация произвольных постоянных. Метод усреднения	2	1	1		1		8	
6	Метод пограничного слоя	2	3	4		1		9	
							0,3	4,7	Зачёт
	ИТОГО		8	8		2	0,3	53,7	

#### Содержание разделов дисциплины:

##### Раздел 1. Определение асимптотического разложения. Единственность.

Символы порядка и их свойства. Асимптотическая последовательность функций. Асимптотическое разложение (в смысле Пуанкаре). Единственность асимптотического разложения по данной асимптотической последовательности. Термины «асимптотическое разложение», «асимптотический ряд», «асимптотика». Асимптотическое разложение в смысле Олвера.

##### Раздел 2. Свойства асимптотических разложений.

Эквивалентность различных определений асимптотического разложения. Линейные свойства асимптотических разложений. Произведение и частное асимптотических разложений. Интегрирование асимптотических разложений.

##### Раздел 3. Метод фазовой плоскости.

Метод фазовой плоскости. Фазовый портрет уравнения Дюффинга.

#### **Раздел 4. Метод многих масштабов.**

Описание метода многих масштабов. Применение метода к уравнению Дюффинга и к задаче с высокочастотными слагаемыми.

#### **Раздел 5. Вариация произвольных постоянных. Метод усреднения.**

Изложение метода вариации произвольных постоянных на примере уравнения Дюффинга. Эвристические соображения, приводящие к формальной процедуре метода усреднения.

#### **Раздел 6. Метод пограничного слоя.**

Пограничные слои. Замена переменных на новые быстрые или растянутые переменные. Метод пограничного слоя.

### **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

### **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

### **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»

[http://www.lib.uniyl.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyl.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>

- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>

- Электронная библиотечная система «Консультант студента»  
<https://www.studentlibrary.ru>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Ильин А. М., Данилин А. Р. Асимптотические методы в анализе. - М.: Физматлит, 2009.

2. Бурд В. Ш. Метод усреднения на бесконечном промежутке и некоторые задачи теории колебаний. – Ярославль: ЯрГУ, 2013.

### **б) дополнительная литература**

1. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский - 4-е изд., испр. и доп. - М.: Наука, 1974. - 503 с.

2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости: учебное пособие. - СПб: Лань, 2016. <https://reader.lanbook.com/book/323612>

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

### **Автор(-ы):**

профессор кафедры  
математического моделирования,  
д. ф.-м. н., профессор

С. А. Кащенко

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Регулярные и сингулярные методы  
теории возмущений»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

Зачет проводится в форме письменной работы. Примеры заданий.

1. Найти асимптотическое приближение решения начальной задачи  $\varepsilon \dot{x} + x = \sin t, x(0) = 0$ , где  $\varepsilon$  - малый положительный параметр.
2. Найти асимптотическое приближение решения уравнения второго порядка  $\varepsilon^2 \ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + x = \cos 2t, x(0) = \dot{x}(0) = 0$ , где  $\varepsilon$  - малый положительный параметр.

## **Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Регулярные и сингулярные методы теории возмущений»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Регулярные и сингулярные методы теории возмущений» являются лекции. По большинству тем предусмотрены практические и лабораторные занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. В процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала.

В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков, в течение обучения почти на каждом занятии проводятся небольшие самостоятельные работы на знание определений и формулировок основных теорем. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий для самостоятельной работы, которые вызвали затруднения. В конце изучения дисциплины студенты сдают зачёт.