

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию  
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
Кафедра математического анализа

# **Математические модели рыночной экономики**

*Методические указания*

*Рекомендовано  
Научно-методическим советом университета  
для студентов специальности Математика*

Ярославль 2005

УДК 338.24.01  
ББК В 183.4я73+У012.2я73  
М 34

*Рекомендовано  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2005 года*

Рецензент - кафедра математического анализа  
Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова

Составитель **Балабаев В.Е.**

М 34 Математические модели рыночной экономики : метод. указания / Сост.  
В.Е. Балабаев; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль : ЯрГУ, 2005. – 44 с.

Сравниваются монетаристский и кейнсианский подходы к прогнозированию и регулированию рыночной экономики. Специальный параграф посвящен финансово-кредитной подсистеме, которая наряду с производственной подсистемой составляет экономику. Заключительный параграф посвящен прогнозированию финансовых рисков и валютных кризисов, что в настоящее время крайне актуально. Даны вопросы и задачи по рассмотренным темам.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности Математика (дисциплина "Математические методы в экономике", блок ДС), очной формы обучения.

УДК 338.24.01  
ББК В 183.4я73+У012.2я73

© Ярославский государственный университет, 2005  
© Балабаев В.Е., 2005

---

Учебное издание

## **Математические модели рыночной экономики**

Методические указания

Составитель **Балабаев** Владимир Евгеньевич

Редактор, корректор А.А. Аладьева  
Компьютерная верстка И.Н. Ивановой  
Подписано в печать 25.12.2005 г. Формат 60х84/16. Бумага тип.  
Усл. печ. л. 2,56. Уч.-изд. л. 1,5. Тираж экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Отпечатано на ризографе.  
Ярославский государственный университет.  
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.

# 1. Классическая модель рыночной экономики

Классическую модель рыночной экономики можно рассматривать как систему взаимосвязанных моделей, каждая из которых выражает поведение одного из трёх рынков: рабочей силы, денег и товаров.

Модель наиболее подходит для описания экономики с совершенной конкуренцией. В условиях действия монополий она не работает.

## 1.1. Рынок рабочей силы

Рынок рабочей силы, как и другие, описывается с помощью трех зависимостей: функции спроса, функции предложения и условия равновесия. В классической модели функция спроса на рабочую силу выводится из двух гипотез:

1) фирмы полностью конкурентны при предложении товаров и найме рабочей силы;

2) при прочих равных условиях предельный продукт труда снижается по мере роста рабочей силы.

Из этих гипотез вытекает, что в состоянии равновесия предельный продукт труда в стоимостном выражении равен ставке заработной платы  $w$ :

$$p \frac{\partial F}{\partial L} = w, \quad (1.1)$$

где  $p$  - цена продукта;  $F = F(K, L)$ , при этом  $K$  - фонды,  $L$  - число занятых.

В самом деле, если бы это было не так, скажем,  $p \frac{\partial F}{\partial L} > w$ , то фирмы старались бы увеличить наем, поскольку с каждой дополнительной единицей труда получали бы прибыль  $p \frac{\partial F}{\partial L} - w$ , если же  $p \frac{\partial F}{\partial L} < w$ , то фирмы несут убыток, поэтому стараются сократить наем.

Из соотношения (1.1), а следовательно, из гипотез 1 и 2, вытекает, что при падении ставки заработной платы предельный продукт также будет падать, пока снова не будет достигнуто равновесие.

То, что изложено выше в форме концептуальных рассуждений, можно также доказать строго математически.

Обозначим через  $\Pi$  прибыль<sup>1</sup>, тогда в предположении, что все факторы производства, кроме труда, фиксированы, получаем

$$\Pi = pF(K, L) - wL - rK, \quad (1.2)$$

необходимое условие максимума прибыли:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = p \frac{\partial F}{\partial L} - w = 0, \text{ но поскольку } \frac{\partial^2 \Pi}{\partial L^2} = p \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0,$$

то, действительно, условие (1.1) – это условие максимума прибыли.

Перепишем соотношение (1.1) в следующем виде:

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{w}{p}$$

и продифференцируем его по реальной заработной плате  $\frac{w}{p}$ :

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} \right) \left( \frac{\partial L}{\partial (w/p)} \right) = 1,$$

поскольку  $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ , то  $\frac{\partial L}{\partial (w/p)} < 0$ , т. е. с ростом реальной заработной платы *спрос на рабочую силу* падает.

*Предложение рабочей силы* также является функцией реальной заработной платы. Принимается постулат: *чем больше реальная заработная плата, тем больше предложение рабочей силы*.

Эти гипотезы классической теории о рынке рабочей силы представлены на рис. 1.1, на котором  $L^D$  - кривая спроса,  $L^S$  - кривая предложения.

---

<sup>1</sup> В этом случае экономика рассматривается как одна большая фирма.

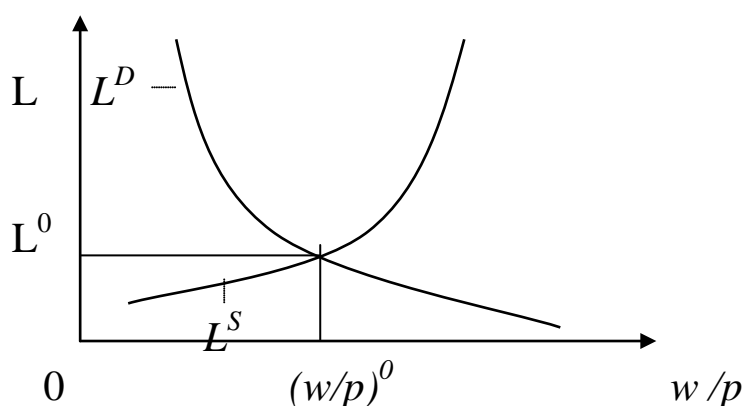


Рис. 1.1. Равновесие на рынке рабочей силы

В равновесии реальная заработная плата равна  $(w/p)^0$ , а занятость -  $L^0$ .

Если бы реальная заработная плата превысила равновесное значение, т. е.  $\frac{w}{p} > \left(\frac{w}{p}\right)^0$ , то возникло бы превышение предложения над спросом на рабочую силу  $L^S\left(\frac{w}{p}\right) > L^D\left(\frac{w}{p}\right)$ , поэтому избыточное предложение привело бы к падению заработной платы под влиянием вынужденной безработицы, при этом цены  $p$  упадут, но в меньшей степени, так, что реальная заработная плата снизится до  $\left(\frac{w}{p}\right)^0$ .

Если бы оказалось  $\frac{w}{p} < \left(\frac{w}{p}\right)^0$ , то недостаток рабочей силы вынудил бы предпринимателей увеличить оплату труда и снова было бы достигнуто динамическое равновесие.

## 1.2. Рынок денег

Теория спроса на деньги (без других финансовых активов) в классической модели основывается на гипотезе, что *совокупный спрос на деньги* - это функция денежного дохода (т. е. функция от  $Y_p$ , где  $Y$  - валовой внутренний продукт в натуральном исчислении), причём прямо пропорциональная денежному доходу:

$$M^D = kYp. \quad (1.3)$$

Предложение денег  $M^S$  рассматривается как фиксированная, экзогенно заданная величина. На рис. 1.2 представлены кривые спроса и предложения денег. Для каждого  $Y$  своя кривая спроса [см. соотношение (1.3)].

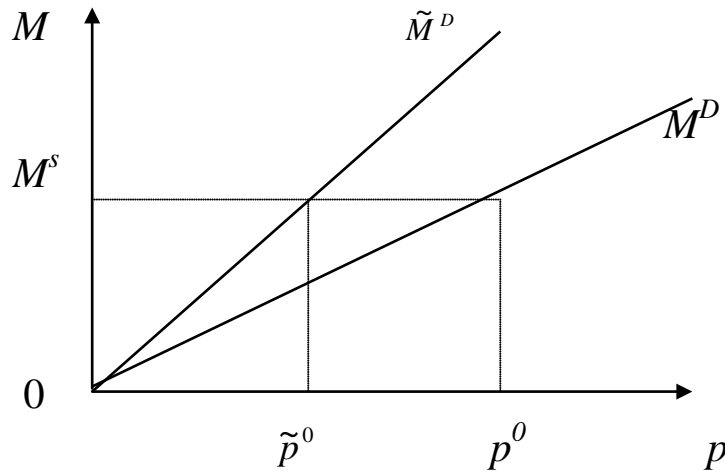


Рис. 1.2. Равновесие на рынке денег

Если при данном  $Y$  цена  $p < p^0$ , то имеется избыточное предложение денег  $M^S - M^D(p)$ , в этом случае постулируется, что цена возрастет до уровня  $p^0$ .

### 1.3. Рынок товаров

Спрос на товары (планируемые расходы) - это сумма спроса на потребительские и инвестиционные товары  $E = C + I$ . Согласно модели  $C = C(r)$ ,  $I = I(r)$ , причём  $C(r)$ ,  $I(r)$  как функции нормы процента  $r$  убывают с ростом  $r$ .

В самом деле, чем больше  $r$ , тем больше доход от сбережений, следовательно, всё большая часть дохода будет сберегаться и всё меньшая часть расходоваться на потребительские товары. Если же речь идёт об инвестициях, то чем выше  $r$  (т. е. ставка процента, применяемая при дисконтировании будущих расходов на инвестиции и приведении их к текущему времени), тем ниже будет сегодняшняя оценка любого данного инвестиционного проекта. Проекты, дающие прибыль при низких учетных ставках,

при более высоких ставках становятся невыгодными и будут отвергнуты инвестором, стремящимся получить большую прибыль.

В классической модели *предложение товаров* является функцией уровня занятости, определяемого на рынке рабочей силы  $Y=Y(L^0)$ .

*Условие равновесия* состоит в том, что предложение товаров  $Y(L^0)$  равно спросу на товары  $E=C(r)+I(r)$ .

Объединяя уравнения и условия, задающие рынки рабочей силы, денег и товаров, получаем **классическую модель** в полном объёме.

*Рынок рабочей силы:*

$$L^S=L^S(w/p), L^D=L^D(w/p), \quad (1.4)$$

$$L^S\left[\left(\frac{w}{p}\right)^0\right]=L^D\left[\left(\frac{w}{p}\right)^0\right]=L^0 \quad (1.5)$$

*Рынок денег:*

$$M^S=M^S, \quad M^D=kpY, \quad (1.6)$$

$$M^S=M^D=kp^0Y. \quad (1.7)$$

*Рынок товаров:*

$$Y=Y(L^0), \quad E=C(r)+I(r), \quad (1.8)$$

$$Y(L^0)=C(r^0)+I(r^0)=Y^0. \quad (1.9)$$

Таким образом, каждый рынок задаётся кривыми спроса и предложения и точкой равновесия. Достаточно одному из рынков выйти из состояния равновесия, как и все остальные рынки выйдут из этого состояния и потом будут стремиться к некоторому новому состоянию динамического равновесия.

## 2. Модель Кейнса

Работа Кейнса «Общая теория занятости, процента и денег» вышла в 1936 г. как ответ на проблемы, возникшие в связи с кризисом перепроизводства и массовой безработицей в период Великой депрессии 1929 - 1933 гг. Классическая модель, рассмотренная выше, давала ответ на задачу поиска равновесия в экономике в условиях полной занятости. Но как прийти к равновесию, если эконо-

номика при определённом стечении обстоятельств далеко отошла от равновесного состояния и характеризуется безработицей?

«Кейнс видел свою задачу в том, чтобы показать, что равновесие при полной занятости не является общим случаем. Общий случай – это равновесие при наличии безработицы, а полная занятость лишь особый случай. Чтобы достигнуть желаемого состояния полной занятости, государство обязано проводить особую политику по её достижению, поскольку автоматически действующие рыночные силы без этой поддержки не гарантируют её достижения»<sup>2</sup>.

Предполагается, что существует рынок денег, который отличен от рынка облигаций. Всего рассматривается три вида активов: деньги, облигации, физический капитал. Относительная цена денег, выраженная в облигациях, - это *ставка процента по облигациям*. Предполагается, что в условиях равновесия норма прибыли на физический капитал (т. е. на имеющийся запас инвестиционных товаров) равна ставке дохода по облигациям.

Таким образом, другое отличие модели - возможность проследить, как денежно-кредитная политика влияет на производство. Например, увеличение денежной массы путём печатания новых денег изменяет пропорции обмена между деньгами и облигациями. Если денег станет больше, их будут хранить только при снижении нормы процента на облигации (альтернативный вид активов), при этом норма прибыли также должна снизиться, поскольку облигации и капитал - близкие предметы.

Рассмотрим теперь критерий максимума прибыли по отношению к капиталу (фондам) при фиксированном уровне занятости. Прибыль  $\Pi = pF(K, L) - rK - wL$ , поэтому необходимое усло-

вие экстремума  $\frac{\partial \Pi}{\partial K} = p \frac{\partial F}{\partial K} - r = 0$ , поскольку  $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial K^2} < 0$ , то действительно получим условие максимума:

$$p \frac{\partial F}{\partial K} = r, \quad (2.1)$$

---

<sup>2</sup> Харрис Л. Денежная теория. – М.: Прогресс, 1990. – С. 269.



т. е. предельная производительность фондов в стоимостном виде равна норме прибыли (ставке процента).

Таким образом, падение нормы прибыли согласно (2.1) означает падение предельного продукта капитала (если считать, что цены не изменятся), а поскольку предельный продукт падает с ростом  $K$ , то падение нормы прибыли с необходимостью предполагает увеличение спроса на инвестиционные товары, следовательно, и на товары в целом. Итак, проследив всю причинно-следственную цепочку, видим, что сравнительно небольшое увеличение денежной массы приводит к росту спроса на товары, соответственно, к росту предложения товаров, т. е. к увеличению конечного продукта.

Рассмотрим более подробно рынок труда в модели Кейнса. Напомним, что в классической модели (см. рис. 1.1) равновесие наступало при полной занятости и равновесное значение реальной

заработной платы  $\left(\frac{w}{p}\right)^0$  определялось из условия

$L^D\left[\left(\frac{w}{p}\right)^0\right] = L^0$ , при этом равновесный конечный продукт  $Y^0 = F(K, L^0)$ , где  $L^0$  - число занятых при полной занятости.

Предположим теперь, что по определённым причинам спрос  $E$  (на продукцию) оказался меньше предложения  $Y$  при полной занятости.

В этом случае, как считал Кейнс, фактически произведённый конечный продукт  $Y$  будет равен спросу  $Y=E$ , т. е.  $Y < Y^0$ . Это немедленно окажет влияние на рынок рабочей силы, поскольку при прочих равных условиях меньший объём продукта можно произвести с помощью меньшего числа рабочих, т. е.  $L < L^0$ . Таким образом, если в классической модели реальная заработная плата  $(w/p)^0$  определяла число занятых  $L^0 = L\left(\frac{w}{p}\right)^0$ , то в модели Кейнса спрос на товары  $E$  определяет уровень занятости  $L$ , при этом  $L^0 - L$  и есть тот уровень безработицы, который диктуется рынками денег и товаров.

Разгадка здесь в том, что производители не могут продать столько, сколько они хотели бы, но производят и продают только

в объёме спроса. Поэтому кривая спроса на рабочую силу, которая выводилась в предположении максимизации прибыли, не может быть применена.

Подведём итоги. *Основные новшества модели Кейнса* по сравнению с классической состоят в следующем:

1) равновесие на рынке товаров достигается при равенстве планируемого спроса и фактического предложения;

2) фактический спрос на рабочую силу определяется фактически востребованным продуктом, и, следовательно, равновесие на рынке рабочей силы может быть достигнуто тогда, когда рынок товаров находится в равновесии.

В целом модель Кейнса записывается в следующем виде ( $Lq(r)$  - спрос на облигации в зависимости от процентной ставки).

*Рынок рабочей силы:*

$$L^S = L^S(w/p), L^D = L^D(Y^0). \quad (2.2)$$

*Рынок денег:*

$$M^S = M^S; M^D = kpY + Lq(r), \quad \frac{dLq}{dr} < 0 \quad (2.3)$$

$$M^S = M^D \quad (2.4)$$

*Рынок товаров:*

$$Y = Y(L), E = C(Y) + I(r), \quad \frac{dC}{dY} > 0, \quad \frac{dI}{dr} < 0, \quad (2.5)$$

$$Y = E. \quad (2.6)$$

Рассмотрим равновесие на рынке товаров в предположении, что зависимости  $C(Y)$ ,  $I(r)$  линейные, т. е. спрос на потребительские товары растёт с ростом предложения товаров  $C(Y) = a + bY$ ,  $a > 0$ ,  $0 < b < 1$ , а спрос на инвестиционные товары линейно убывает с ростом нормы процента  $I(r) = d - fr$ ,  $d > 0$ ,  $f > 0$ . Тогда условие (2.6) запишется в следующей форме :

$$Y^D = a + bY^G + d - fr,$$

откуда

$$Y^G = \left( \frac{a+d}{1-b} \right) - \left( \frac{f}{1-b} \right) r, \quad (2.7)$$

т.е. кривая равновесия на рынке товаров (кривая  $IS$  на рис. 2.1) является линейно-убывающей функцией  $r$  и, следовательно, при фиксированном значении  $r$  имеется единственное значение  $Y^G(r)$ .

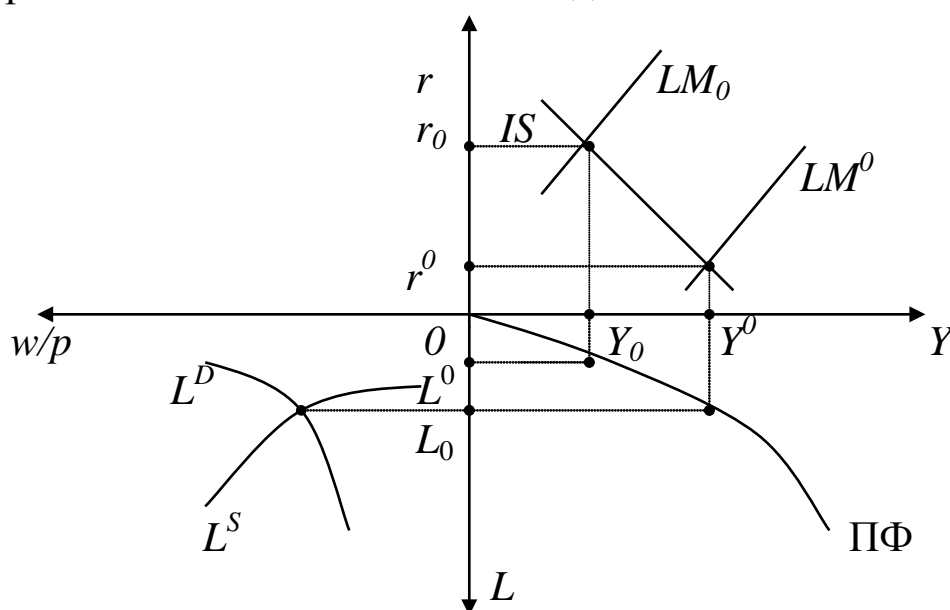


Рис. 2.1. Равновесие в модели Кейнса

Рассмотрим теперь *равновесие на рынке денег* в предположении, что спрос на облигации  $Lq(r)$  линейен, т. е.  $Lq(r) = h - jr$ . Условие равновесия (2.4) при этом запишется в виде

$$Y^M = \frac{M^S - h}{kp} + \frac{jr}{kp}, \quad (2.8)$$

т.е. кривая равновесия на рынке денег (кривая  $LM$ ) является возрастающей линейной функцией  $r$ , следовательно, при фиксированном значении  $r$  имеется единственное равновесное значение  $Y^M(r)$ .

Общее равновесие на рынках денег и товаров достигается при  $Y^G(r_0) = Y^M(r_0) = Y_0$ , причём точка равновесия  $(Y_0, r_0)$  (точка пересечения кривых  $IS$  и  $LM$ ) единственна. Совокупное равновесие на рынках денег и товаров однозначно определяет фактическую потребность в рабочей силе  $Y_0 = F(K, L_0)$ .

Общая картина установления равновесия показана на рис. 2.1. В первом квадранте изображены кривые  $IS$ ,  $LM$ , в четвёртом квадранте - производственная функция экономики ПФ как функция  $L$ , в третьем квадранте - кривые спроса и предложения на рабочую силу. Как видим, причинные связи направлены от рынков товаров и денег к рынку рабочей силы через ПФ, причём рынок труда не является определяющим.

Если классическая модель предполагает автоматическую тенденцию к полной занятости, то в модели Кейнса таковой нет. В самом деле, пусть равновесие установилось при занятости  $L_0 < L^0$ . Тогда, для того чтобы добиться полной занятости  $L^0$ , надо увеличить выпуск продукции до  $Y^0 = F(K, L^0)$ , что потребовало бы сместить кривую  $LM$  в положение  $LM^0$ . Как это видно из (2.8), такое смещение можно обеспечить при экзогенно заданном предложении денег  $M^S$  и фиксированных коэффициентах  $k, h$  только путём снижения цен  $p$ , но никакого механизма снижения цен при фиксированной ставке заработной платы  $w_0$  в модели Кейнса не заложено. Следовательно, для перехода к полной занятости нужна специальная государственная политика.

Если кривая  $LM$  не линейна и при этом имеет горизонтальный участок, то возникает ликвидная ловушка. При указанной форме кривой существует равновесие на финансовом рынке вне зависимости от падения цен, связанного с избыточным предложением товаров и рабочей силы.

И ещё одна особенность: уровень планируемых расходов  $E$  бывает настолько высок, что производство  $Y$  не может достигнуть этого уровня. Это происходит тогда, когда точка пересечения кривых  $IS$  и  $LM$  имеет отрицательное значение нормы процента.

Коррекцией подхода Кейнса является *монетаристский анализ экономики*, развитый в начале 70-х годов М. Фридменом. Суть различия в подходах Кейнса и Фридмена в следующем: Кейнс считал, что самое значительное влияние на движение ос-

новных макроэкономических показателей оказывает спрос на товары, в то время как, по мнению Фридмена, главное - контроль над предложением денег. Монетаристы считают, что спекулятивный спрос на деньги не зависит от ставки процента, поэтому увеличение предложения денег приводит к росту цен, но не объёмов производства, как это следовало бы из модели Кейнса. Монетаристы считают, что денежно-кредитная политика не может повлиять в долгосрочном плане на реальный объём производства и безработицу, хотя в краткосрочном плане это возможно.

Как свидетельствует наш опыт и опыт других стран, иногда оправдывался подход Кейнса, иногда - подход Фридмена. Малая и контролируемая государством инфляция - действует кейнсианский подход; гиперинфляция и слабый контроль государства - монетаристский подход.

### **3. Математические модели финансового рынка**

*Финансовый рынок* - это рынок, на котором товарами служат деньги, банковские кредиты и ценные бумаги. К ценным бумагам относят: облигации, акции, фьючерсы (*фьючерс* - обязательство продавца поставить к определённому сроку определённое количество товара в определённое место), опционы (*опцион* - право на покупку в будущем определённого количества товара по фиксированной цене).

В соответствии с видом товаров финансовый рынок разделяется на денежный, кредитный и фондовый. Последние два образуют рынок капитала.

В нормально функционирующей рыночной экономике финансовый рынок обслуживает финансовую систему, способствует продвижению продуктов производства, ставших товарами, к потребителям.

Переход товара от одного владельца к другому сопровождается встречным потоком денежных выплат. Эти выплаты, как правило, осуществляются в безналичной форме при посредничестве банков.

Банки обслуживают сферу обращения: в них накапливается наличная выручка розничной торговли и сферы обслуживания, которая возвращается на предприятия и в систему социальной защиты для выплаты зарплаты, пенсий, пособий. В банках также аккумулируются сбережения населения (отложенный спрос). Банки обслуживают и производственную систему, поскольку предоставляют производителям кредиты. Кредиты необходимы предприятиям, так как материальные затраты совершаются ранее, чем будет произведена и продана продукция, а также для поддержания, модернизации и расширения производственных мощностей.

При нехватке собственных средств коммерческие банки берут в долг у других банков, прежде всего государственных. Государственные банки образуют государственную резервную систему. Кроме того, они аккумулируют налоговые поступления от населения, предприятий и организаций, через них осуществляется выплата зарплаты работникам бюджетной сферы, пенсий, пособий.

При нехватке средств в государственных банках государство проводит дополнительную денежную эмиссию (при недостатке денег в обращении это нормально, а при избытке - приводит к инфляции) либо выпускает государственные займы.

### **3.1. Финансовые операции**

Простейший вид финансовой операции (сделки) - предоставление в долг некоторой суммы  $S(0)$  с условием, что через время  $T$  (измеряемое, как правило, в годах) будет возвращена сумма  $S(T)$ .

В результате этой операции заимодавец (кредитор) получит прибыль  $S(T)-S(0)$ , а в расчёте на единицу кредита

$$r_T = \frac{S(T) - S(0)}{S(0)}. \quad (3.1)$$

Величина  $r_T$ , являющаяся в статистическом смысле темпом прироста, называется *эффективностью операции* (с точки зрения кредитора), *процентной ставкой*, *ставкой процента* либо просто *интересом*, *ростом* (ведь деньги отданы в рост).

Другим показателем эффективности операции (также с точки зрения кредитора) является *дисконт* - отношение прибыли к возвращаемой сумме:

$$d_T = \frac{S(T) - S(0)}{S(T)}. \quad (3.2)$$

Интерес  $r_T$  и дисконт  $d_T$  обычно измеряются в процентах, однако при практических расчётах и решении задач необходимо использовать их обычные значения.

Указанные величины находятся в следующих соотношениях:

$$r_T = \frac{d_T}{1 - d_T}; \quad d_T = \frac{r_T}{1 + r_T};$$

$$S(T) = S(0)(1 + r_T); \quad S(0) = S(t)(1 - d_T). \quad (3.3)$$

Обозначим интерес и дисконт за год через  $r$  и  $d$ , тогда расчёт  $r_T$  и  $d_T$  может осуществляться по схеме простых и сложных процентов либо по их комбинации.

Форма расчёта по *простым процентам*:

$$r_T = Tr. \quad (3.4)$$

При расчёте по долгосрочным кредитам на целое число лет применяется схема *сложных процентов*: на каждый вложенный рубль через год будет получено  $1 + r$ , отдав в рост эту новую сумму, ещё через год (т. е. через два года с начала отсчёта), получим  $(1 + r)^2, \dots$ , через  $T$  лет -

$$1 + r_T = (1 + r)^T. \quad (3.5)$$

При расчётах за неполное число лет иногда применяется комбинированная схема (сложные проценты - целое число лет, простые - за остаток), что приводит к следующей формуле:

$$1 + r_T = (1 + r)^{[T]}(1 + r\{T\}), \quad (3.6)$$

где  $[T]$  - целая часть  $T$  (целое число лет, содержащихся в  $T$ );  
 $\{T\}$  - дробная часть;  $T = [T] + \{T\}$ .

**Пример 1.** Некто поместил в банк 100 тыс. марок. Ежемесячно на эту сумму выплачивается 1,6 %. В конце месяца клиент хотел бы получить по 2 тыс. марок. Сколько месяцев ему придётся ждать?

Решение. В этом случае норма процента задана не за год, а за месяц:  $r = 0,016$ , следовательно,  $T$  измеряется в месяцах. Согласно условию задачи надо найти такое  $T$ , при котором  $[100(1+r)^T]r = 2$ .

Из последнего соотношения находим

$$(1+0,016)^T = 1,25,$$

или

$$T \ln 1,016 = \ln 1,25,$$

откуда

$$T = \frac{\ln 1,25}{\ln 1,016} = \frac{0,2231}{0,0159} = 14,$$

т. е. клиенту придётся ждать 14 месяцев. За это время сумма его вклада достигнет 125 тыс. марок, и доход с этой суммы при месячной норме 1,6% составит искомые 2 тыс. марок.

Часто используется также *дисконт – фактор*

$$V_T = \frac{1}{1+r_T} = 1-d_T. \quad (3.7)$$

При расчёте по сложным процентам за целое число лет  $T$

$$V_T = \frac{1}{(1+r)^T} = (1-d)^T = V^T, \quad (3.8)$$

где  $V$  – годичный дисконт- фактор.

Эффективной ставкой называется годичная ставка сложных процентов, которая обеспечивает заданное соотношение между возвращаемой суммой  $S(T)$  и кредитом  $S(0)$



$$(1 + r_{ef})^T = \frac{S(T)}{S(0)}, \quad (3.9)$$

откуда

$$r_{ef} = \left[ \frac{S(T)}{S(0)} \right]^{\frac{1}{T}} - 1.$$

В более сложном случае финансовая операция рассматривается как *поток платежей*. Получение кредита может быть распределено по времени точно так же, как и выплаты по нему. То же можно сказать и об операциях с ценными бумагами.

Если рассматривать поток платежей с позиций одного из участников, то естественно считать все поступления положительными, а все выплаты отрицательными. Результат такой распределённой операции может быть измерен путём приведения всех платежей (с учётом знака) к начальному моменту времени. Эта величина называется чистой приведённой величиной NPV (net present value):

$$NPV = \sum_{k=1}^N S_k V_{t_k} = \sum_{k=1}^N S_k \frac{1}{(1+r)^{t_k}}, \quad (3.10)$$

где  $t_1, \dots, t_N$  - момент платежей  $S_1, \dots, S_N$ ;

$V_{t_k}$  - дисконт-фактор в момент  $t_k$ . При этом  $t_1=0$ , т. е. момент первой выплаты принимается за начало отсчёта.

**Пример 2.** Контракт между фирмой А и банком В предусматривает, что банк предоставляет фирме кредит в течение 3 лет ежегодными платежами 1 млн. долл. В начале каждого года при ставке 10% годовых. Фирма возвращает долг: в конце третьего года – 1 млн. долл., четвёртого года – 1 млн. долл., пятого года – 1 млн. долл. Приемлема ли эта операция для банка?

Решение. По формуле (3.10) ( $t_1=0, t_2=1, t_3=2, t_4=3, t_5=4, t_6=5$ ):

$$\begin{aligned} NPV &= -1 - \frac{1}{1+0,1} - \frac{1}{(1+0,1)^2} + \frac{1}{(1+0,1)^3} + \frac{2}{(1+0,1)^4} + \frac{1}{(1+0,1)^5} = \\ &= 0,003 \text{ млн долл.} > 0, \end{aligned}$$

т. е. эта операция приемлема для банка.

Для сравнения различных финансовых операций между собой используется *эффективная ставка операции* (сравните с (3.9)), которая обеспечивает минимальное из приемлемых значений  $NVP=0$ , т. е. является корнем уравнения

$$\sum_{k=1}^N \frac{S_k}{(1+r_{ef})^{t_k}} = 0, \quad t_I=0 \quad (3.11)$$

В частности, для простейшей финансовой операции

$$-S(0) + \frac{S(T)}{(1+r_{ef})^T} = 0,$$

откуда

$$r_{ef} = \left[ \frac{S(T)}{S(0)} \right]^{\frac{1}{T}} - 1,$$

что совпадает с (3.9).

Если платежи совершаются ежедневно и много раз за день, удобно рассматривать накопленную сумму таких платежей  $S(t)$  (конкретного финансового учреждения) как функцию непрерывного времени. Тогда можно говорить о мгновенной скорости роста:

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

и силе роста (силе интереса)

$$\delta = \frac{dS}{dt}, \quad S(t) = \frac{d}{dt} [\ln S(t)]. \quad (3.12)$$

Если  $\delta(t)$  задано, то можно найти накопленную сумму  $S(t)$ , решая дифференциальные уравнения (3.12):

$$S(T) = S(0)e^{\int_0^T \delta(t) dt}. \quad (3.13)$$

Сравнивая (3.3) и (3.13), получаем

$$I + r_T = e^{\int_0^T \delta(t) dt}.$$

Таким образом, при  $\delta(t)=\delta=\text{const}$

$$I + r_T = e^{\delta T}$$

или

$$\delta = \frac{1}{T} \ln(1 + r_T).$$

Если рост  $r_T$  вычисляется по формулам сложных процентов с годовой ставкой  $r$ , то

$$\delta = \frac{1}{T} \ln(1 + r)^T,$$

в этом случае

$$\delta = \ln(1 + r),$$

при малых значениях  $r$

$$\delta \approx r.$$

### 3.2. Финансовый риск

Выше были рассмотрены некоторые финансовые операции и показатели их эффективности, причём последние рассматривались как детерминированные величины. На самом деле большинство финансовых операций – рискованные, в том смысле, что их эффективность не детерминирована, т. е. не полностью известна на момент заключения сделки. Особенно это относится к операциям покупки и продажи ценных бумаг, прежде всего акций.

Степень неопределённости, рискованности финансовых операций можно измерить, если принять гипотезу, что эффективность каждой из них  $R$  является случайной величиной, а наблюдаемые в действительности её значения  $r$  – лишь отдельные реализации этой случайной эффективности.

В таком случае под *риском* понимается вероятность любого нежелательного для инвестора события, например вероятность

разориться. В какой-то степени неопределённость, а следовательно, и риск характеризует дисперсия эффективности. Чем меньше дисперсия, тем меньше неопределённость. Из двух альтернативных финансовых операций  $R_1, R_2$  с  $MR_i=m_i, DR_i=\sigma_i^2, i=1, 2, m_1 < m_2, \sigma_1 < \sigma_2$ , инвестор, склонный к риску, выберет вторую, поскольку в среднем она более эффективна ( $m_2 > m_1$ ), в то время как более осторожный инвестор выберет первую, поскольку она менее рискованна ( $\sigma_1 < \sigma_2$ ), хотя и менее эффективна.

Любая система мер, направленная на снижение риска, называется *хеджированием*. Ниже рассмотрим математическую модель, которая позволяет выполнить хеджирование путём оптимизации портфеля ценных бумаг.

Покупая акции одной компании, инвестор ставит своё благополучие в зависимость от курсовых колебаний акций этой компании. Если же он вложит свой капитал в акции нескольких компаний, то эффективность сформированного таким образом портфеля ценных бумаг будет зависеть от усреднённого курса нескольких компаний, а степень неопределённости будет задаваться усреднённой дисперсией. Если усреднённая дисперсия меньше отдельных дисперсий или равна нулю (в исключительных случаях), выполняя эту операцию, мы уменьшаем неопределённость.

**Оптимизация портфеля ценных бумаг.** Пусть имеются  $n$  видов ценных бумаг, из которых инвестор может сформировать портфель. Эти бумаги характеризуются эффективностями  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , которые являются случайными величинами с известными математическими ожиданиями  $MR=m_i$  и известной ковариационной матрицей  $B = ||\text{cov}(R_i, R_j)||$ , в частности  $\text{cov}(R_i, R_j) = DR_i = \sigma_i^2$ .

Если инвестор распределил свой капитал долями  $\theta_i, 0 \leq \theta_i \leq 1$ ,  $\sum_{i=1}^n \theta_i = 1$ , в разные ценные бумаги, то эффективность сформированного портфеля

$$R_p = \sum_{i=1}^n \theta_i R_i, \quad (3.14)$$

причём эта случайная эффективность имеет следующее математическое ожидание и дисперсию:

$$MR_p = M\left(\sum_{i=1}^n \theta_i R_i\right) = \sum_{i=1}^n \theta_i MR_i = \sum_{i=1}^n \theta_i m_i,$$

$$\sigma_p^2 = DR_p = D\left(\sum_{i=1}^n \theta_i R_i\right) = \text{cov}\left(\sum_{i=1}^n \theta_i R_i, \sum_{j=1}^n \theta_j R_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_i \theta_j \text{cov}(R_i, R_j).$$

Распределение  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ ,  $0 \leq \theta_i \leq 1$ ,  $\sum_{i=1}^n \theta_i = 1$  назовём *структурой портфеля ценных бумаг*.

Оставив за инвестором выбор средней эффективности и помогая ему минимизировать в этом случае неопределенность, получаем следующую задачу по оптимизации портфеля ценных бумаг:

$$\min \sum_{i=1}^n b_{ij} \theta_i \theta_j, \quad b_{ij} = \text{cov}(R_i, R_j), \quad (3.15)$$

$$\sum_{i=1}^n \theta_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \theta_i = m_p,$$

$$\theta_1 \geq 0, \dots, \theta_n \geq 0,$$

где  $m_p$  – выбранное инвестором значение средней эффективности портфеля.

Это задача на минимизацию квадратичной формы от  $n$  переменных  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , связанных двумя соотношениями  $\sum_{i=1}^n \theta_i = 1$ ,

$\sum_{i=1}^n m_i \theta_i = m_p$ , а также условиями  $\theta_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , т. е. задача квадратичного программирования. Опустив условия неотрицательности переменных, получаем задачу Марковитца, решение которой представлено ниже.

С помощью функции Лагранжа сведём задачу на условный экстремум к задаче на безусловный экстремум:

$$L(\theta_1, \dots, \theta_n, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \theta_i \theta_j + \lambda \left( - \sum_{i=1}^n \theta_i + 1 \right) + \mu \left( - \sum_{i=1}^n m_i \theta_i + m_p \right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_l} = 2 \sum_{i=1}^n b_{ij} \theta_i - \lambda - \mu m_l, \quad l=1, \dots, n, \quad (3.16)$$

производные по  $\lambda$ ,  $\mu$  воспроизводят указанные выше два соотношения, тем самым для  $(n + 2)$  переменных  $\theta_1, \dots, \theta_n, \lambda, \mu$  получаем  $(n + 2)$  уравнения.

Запишем полученные уравнения в матричной форме, используя следующие обозначения:

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}, \quad \theta' = (\theta_1, \dots, \theta_n), \quad m' = (m_1, \dots, m_n)$$

где штрих применяется для обозначения операции транспонирования матрицы.

Уравнения (3.16) примут вид:

$$B\theta = \frac{\lambda}{2}e + \frac{\mu}{2}m;$$

первое условие (3.16):

$$e'\theta = 1;$$

второе условие:

$$m'\theta = m_p.$$

Предположим, что между эффективностями  $R_1, \dots, R_n$  нет линейной связи, поэтому ковариационная матрица  $B$  не вырождена ( $|B| \neq 0$ ), следовательно, существует обратная матрица  $B^{-1}$ . Используя этот факт, разрешим (3.16) в матричной форме относительно  $\theta$ :

$$\theta = \frac{\lambda}{2}B^{-1}e + \frac{\mu}{2}B^{-1}m, \quad (3.17)$$

подставив это решение в первое и второе условия, получим два уравнения для определения  $\frac{\lambda}{2}$  и  $\frac{\mu}{2}$ :

$$\begin{cases} (e'B^{-1}e)\frac{\lambda}{2} + (e'B^{-1}m)\frac{\mu}{2} = 1; \\ (m'B^{-1}e)\frac{\lambda}{2} + (m'B^{-1}m)\frac{\mu}{2} = m_p. \end{cases}$$

Решая два последних уравнения по правилу Крамера, находим

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{(m'B^{-1}m) - m_p(e'B^{-1}m)}{(e'B^{-1}e)(m'B^{-1}m) - (m'B^{-1}e)^2};$$

$$\frac{\mu}{2} = \frac{m_p(e'B^{-1}e) - (m'B^{-1}e)}{(e'B^{-1}e)(m'B^{-1}m) - (m'B^{-1}e)^2};$$

подставляя это решение в (3.17), получаем следующую структуру оптимального портфеля:

$$\theta^* = \frac{[(m'B^{-1}m) - m_p(e'B^{-1}m)]B^{-1}e + [m_p(e'B^{-1}e) - (m'B^{-1}e)]B^{-1}m}{(e'B^{-1}e)(m'B^{-1}m) - (m'B^{-1}e)^2} \quad (3.18)$$

Простой подстановкой убеждаемся, что

$$e'\theta^* = 1, m'\theta^* = m_p.$$

Кроме того, находим минимальную дисперсию, соответствующую оптимальной структуре:

$$(\sigma_p^*)^2 = (\theta^*)' B \theta^* = \frac{m_p^2(e'B^{-1}e) - 2m_p(m'B^{-1}e) + (m'B^{-1}m)}{(e'B^{-1}e)(m'B^{-1}m) - (m'B^{-1}e)^2} \quad (3.19)$$

Если в решении некоторые  $\theta_i \leq 0$ , то исключаем из портфеля соответствующие бумаги и решаем задачу заново.  $\square$

Если эффективности некоррелированы, то ковариационная матрица диагональна:

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_2^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

поэтому обратная к ней матрица также диагональна:

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

В этом случае выражения для оптимальной структуры и отвечающей ей дисперсии значительно упрощаются. Прежде всего найдём постоянные:

$$\begin{aligned} e'B^{-1}e &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \\ (e'B^{-1}m)' = m'B^{-1}e &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\sigma_i^2} \\ m'B^{-1}m &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i^2}{\sigma_i^2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Заметим, что при расчётах удобно пользоваться следующими двумя естественными предположениями:

1) все средние эффективности ценных бумаг различны (это предположение естественно: если бы было два вида ценных бумаг с одинаковыми средними эффективностями, но разными дисперсиями, то инвестор всегда выбрал бы бумагу с меньшей дисперсией); опираясь на это предположение, можно перенумеровать ценные бумаги в порядке убывания средних эффективностей

$$m_1 > m_2 > \dots > m_n;$$

2) большим средним эффективностям соответствует большая дисперсия:

$$\sigma_1^2 > \sigma_2^2 > \dots > \sigma_n^2$$



(это предположение также естественно: из двух ценных бумаг, одна из которых имеет большую эффективность, а другая – большую дисперсию, инвестор всегда выбрал бы первую).

Теперь убедимся, что в знаменателе дисперсии (3.19) стоит положительное число. В самом деле,

$$\begin{aligned} (e'B^{-1}e)(m'B^{-1}m) - (e'B^{-1}m)^2 &= \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \right) \left( \sum_{j=1}^n \frac{m_j^2}{\sigma_j^2} \right) - \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\sigma_i^2} \right) \left( \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\sigma_j^2} \right) - \sum_{i,j} \frac{m_i m_j}{\sigma_i^2 \sigma_j^2} = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{\sigma_i^2 \sigma_j^2} = \\ &= \sum_{i < j} \frac{m_i^2 - 2m_i m_j + m_j^2}{\sigma_i^2 \sigma_j^2} = \sum_{i < j} \frac{(m_i - m_j)^2}{\sigma_i^2 \sigma_j^2} > 0, \end{aligned}$$

поскольку все  $m_i$  разные.

Точно так же доказывается положительность числителя дисперсии:

$$\begin{aligned} &m_p^2 (e'B^{-1}e) - 2m_p (m'B^{-1}e) + (m'B^{-1}m) \\ &= m_p^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} - 2m_p \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\sigma_i^2} + \sum_{i=1}^n \frac{m_i^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{(m_p - m_i)^2}{\sigma_i^2} > 0, \end{aligned}$$

поэтому дисперсия оптимального портфеля

$$(\sigma_p^*)^2 = (\theta^*)' B \theta^* = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{(m_i - m_p)^2}{\sigma_i^2}}{\sum_{i < j} \frac{(m_i - m_j)^2}{\sigma_i^2 \sigma_j^2}} > 0, \quad (3.21)$$

что служит лишним подтверждением правильности выполненных расчётов.

Поскольку в случае некоррелированности эффективностей  $R_1, \dots, R_n$

$$B^{-1}e = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma_n^2} \end{bmatrix}, \quad B^{-1}m = \begin{bmatrix} \frac{m_1}{\sigma_1^2} \\ \vdots \\ \frac{m_n}{\sigma_n^2} \end{bmatrix}$$

то оптимальная структура портфеля принимает вид:

$$\theta_l^* = \frac{1}{\sigma_l^2 \sum_{i < j} \frac{(m_i - m_j)^2}{\sigma_i^2 \sigma_j^2}} \sum_{i=1}^n \frac{(m_i - m_p)(m_j - m_l)}{\sigma_i^2}, \quad l=1,..n. \quad (3.22)$$

Из выражения (3.22) видно, что даже в случае некоррелированности эффективностей решение, полученное без учёта неотрицательности компонент структуры, может содержать отрицательные элементы. В этом случае надо произвести перерасчёт, последовательно исключая из портфеля наибольшие по модулю отрицательные компоненты.

**Пример 3. Оптимизация портфеля ценных бумаг.** Инвестор может составить портфель из трёх видов ценных бумаг, эффективности которых  $R_1, R_2, R_3$  являются некоррелированными случайными величинами, имеющими следующие математические ожидания и стандартные отклонения:

$MR_1=11, \sigma_1=4; MR_2=10, \sigma_2=3; MR_3=9, \sigma_3=1;$   
(все данные в процентах к цене покупки).

Определить оптимальный портфель при  $m_p=10$ .

Для демонстрации методики выполнения теоретических расчётов в конкретных условиях приведём решение полностью.

**Решение:** согласно условию задачи необходимо найти такую структуру портфеля  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ,  $\theta_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^3 \theta_i = 1$ , при которой эффек-

тивность портфеля  $R_p = \sum_{i=1}^3 \theta_i R_i$  имеет математическое ожидание

$$MR_p = \sum_{i=1}^3 \theta_i MR_i = 11\theta_1 + 10\theta_2 + 9\theta_3 = 10$$

И минимальную дисперсию (из всех возможных при указанных условиях)

$$\sigma_p^2 = DR_p = D\left(\sum_{i=1}^3 \theta_i R_i\right) = \sum_{i=1}^3 \theta_i^2 DR_i = 16\theta_1^2 + 9\theta_2^2 + \theta_3^2.$$

Таким образом, приходим к следующей задаче квадратичного программирования:

$$\begin{aligned} \min_{\theta} (16\theta_1^2 + 9\theta_2^2 + \theta_3^2), \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1, \\ 11\theta_1 + 10\theta_2 + 9\theta_3 = 10, \\ \theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0, \theta_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Вначале решим «урезанную» задачу (без учета условий неотрицательности элементов структуры):

$$\begin{aligned} \min_{\theta} (16\theta_1^2 + 9\theta_2^2 + \theta_3^2), \\ 1 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 0, \\ 10 - (11\theta_1 + 10\theta_2 + 9\theta_3) = 0. \end{aligned}$$

Это обычная задача на условный экстремум. Составляем функцию Лагранжа:

$$L(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \lambda, \mu) = 16\theta_1^2 + 9\theta_2^2 + \theta_3^2 + \lambda(1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) + \mu(10 - 11\theta_1 - 10\theta_2 - 9\theta_3).$$

Необходимым условием ее экстремума является равенство нулю производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= 32\theta_1 - \lambda - 11\mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= 18\theta_2 - \lambda - 10\mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_3} &= 2\theta_3 - \lambda - 9\mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - 1) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} &= -(11\theta_1 + 10\theta_2 + 9\theta_3 - 10) = 0. \end{aligned}$$

Как видим, последние два уравнения воспроизводят условия задачи.

Разрешим первые три уравнения относительно элементов структуры:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{32}(\lambda + 11\mu), \\ \theta_2 &= \frac{1}{18}(\lambda + 10\mu), \end{aligned} \tag{3.23}.$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2}(\lambda + 9\mu).$$

Подставив это решение в условия задачи, получим уравнения для  $\frac{\lambda}{2}, \frac{\mu}{2}$ :

$$\begin{cases} 1,1736\left(\frac{\lambda}{2}\right) + 10,7986\left(\frac{\mu}{2}\right) = 1, \\ 10,7986\left(\frac{\lambda}{2}\right) + 99,6736\left(\frac{\mu}{2}\right) = 10, \end{cases}$$

из которых определяем

$$\frac{\lambda}{2} = -22,6434; \quad \frac{\mu}{2} = 2,5535.$$

Подставив эти значения в выражение для (3.23), получаем следующую структуру оптимального портфеля:

$$\theta_1^* = 0,3404; \quad \theta_2^* = 0,3214; \quad \theta_3^* = 0,3382.$$

Дисперсия оптимального портфеля

$$(\sigma_p^*)^2 = (\theta_1^*)^2 \sigma_1^2 + (\theta_2^*)^2 \sigma_2^2 + (\theta_3^*)^2 \sigma_3^2 = 2,8981,$$

как видим, это гораздо меньше дисперсии  $\sigma_p^2 = 9$  для случая, когда в портфель входят только бумаги второго вида (при той же средней эффективности, что и для оптимального портфеля!).  $\square$

*Модификация портфеля ценных бумаг.* Рассмотрим случай, когда инвестор может наряду с покупкой ценных бумаг делать вложения, не связанные с риском. Разумеется, эффективность таких вложений, вообще говоря, меньше, чем средняя эффективность при покупке ценных бумаг.

Как должен инвестор скомбинировать рисковую и безрисковую части портфеля, чтобы минимизировать дисперсию при выбранной им средней эффективности портфеля  $m_p$ ?

В строгой постановке получаем следующую задачу квадратичного программирования:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \theta_i \theta_j, \quad b_{ij} = \text{cov}(R_i, R_j);$$

$$\sum_{i=1}^n \theta_i + \theta_0 = 1, \text{ или } e' \theta + \theta_0 = 1; \quad \sum_{i=1}^n m_i \theta_i + r_0 \theta_0 = m_p, \text{ или } m' \theta + r_0 \theta_0 = m_p;$$

$$\theta_0 \geq 0, \theta_1 \geq 0, \dots, \theta_n \geq 0,$$

где  $r_0, \theta_0$  – соответственно эффективность и доля безрисковой части портфеля, при этом естественно предполагать, что  $r_0 < m_n$ .

Как и выше, вначале решим задачу без учёта ограничений на неотрицательность элементов структуры (задача Тобина).

Строим функцию Лагранжа ( $m_0 = r_0$ ):

$$L(\theta_1, \dots, \theta_n, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \theta_i \theta_j + \lambda \left( - \sum_{i=1}^n \theta_i + 1 \right) + \mu \left( - \sum_{i=1}^n m_i \theta_i + m_p \right),$$

приравниваем к нулю ее производные по  $\theta_i, i = 0, \dots, n$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta_0} = -(\lambda + \mu r_0) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_l} = 2 \sum_{i=1}^n b_{li} \theta_i - \lambda - \mu m_l = 0, \quad l=1, \dots, n, \end{cases}$$

откуда (используя обозначения, применявшиеся выше)

$$\lambda = -\mu r_0, \tag{3.24}$$

$$B\theta^* = \frac{\lambda}{2} e + \frac{\mu}{2} m, \quad \text{или} \quad \theta^* = \frac{\lambda}{2} B^{-1} e + \frac{\mu}{2} B^{-1} m,$$

Подставив эти выражения в условия, получим два уравнения относительно  $\mu$  и  $\theta^*$ :

$$\begin{cases} \frac{\mu}{2} (-r_0 e' B^{-1} e + e' B^{-1} m) = 1 - \theta_0^*, \\ \frac{\mu}{2} (-r_0 m' B^{-1} e + m' B^{-1} m) = m_p - r_0 \theta_0^*. \end{cases}$$

Поделив второе уравнение на первое, найдём

$$\frac{m_p - r_0 \theta_0^*}{1 - \theta_0^*} = \frac{(m' B^{-1} m) - r_0 (m' B^{-1} e)}{(e' B^{-1} m) - r_0 (e' B^{-1} e)},$$

откуда

$$\theta_0^* = \frac{[(m' B^{-1} m) - r_0 (m' B^{-1} e)] + m_p [(e' B^{-1} m) - r_0 (e' B^{-1} e)]}{[(m' B^{-1} m) - r_0 (m' B^{-1} e)] - r_0 [(e' B^{-1} m) - r_0 (e' B^{-1} e)]} \quad (3.25)$$

Используя найденное значение  $\theta_0^*$ , получаем

$$\frac{\mu}{2} = \frac{m_p - r_0}{(m' B^{-1} m) - 2r_0 (m' B^{-1} e) + r_0^2 (e' B^{-1} e)} = \frac{m_p - r_0}{(m - r_0 e)' B^{-1} (m - r_0 e)}$$

поэтому согласно (8.3.24)

$$\frac{\lambda}{2} = - \frac{r_0 (m_p - r_0)}{(m - r_0 e)' B^{-1} (m - r_0 e)} \quad (3.26)$$

$$\theta^* = \frac{(m_p - r_0) B^{-1} (m - r_0 e)}{(m - r_0 e)' B^{-1} (m - r_0 e)}$$

следовательно,

$$(\sigma_p^*)^2 = (\theta^*)' B \theta^* = \frac{(m_p - r_0)^2}{(m - r_0 e)' B^{-1} (m - r_0 e)} \quad (3.27)$$

Последнее выражение запишем в виде:

$$\sigma_p^* = \frac{m_p - r_0}{\Delta},$$

$$\Delta^2 = (m - r_0 e)' B^{-1} (m - r_0 e).$$

Если некоторые из  $\theta_i < 0$  в решении (3.25), (3.26), то исключаем из портфеля соответствующие ценные бумаги и решаем задачу заново.  $\square$

В случае некоррелированности эффективностей матрица  $B^{-1}$  также диагональна:

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Используя диагональность  $B^{-1}$ , имеем

$$m' B^{-1} m = \sum_{i=1}^n \frac{m_i^2}{\sigma_i^2},$$

$$m' B^{-1} e = e' B^{-1} m = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\sigma_i^2},$$

$$e' B^{-1} e = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2},$$

$$m' B^{-1} m - r_0(m' B^{-1} e) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i(m_i - r_0)}{\sigma_i^2},$$

$$e' B^{-1} m - r_0(e' B^{-1} e) = \sum_{i=1}^n \frac{(m_i - r_0)}{\sigma_i^2},$$

$$(m - r_0 e)' B^{-1} (m - r_0 e) = \sum_{i=1}^n \frac{(m_i - r_0)^2}{\sigma_i^2},$$

поэтому формулы (3.25), (3.26) для элементов структуры портфеля ценных бумаг и формула (3.27) для дисперсии эффективности портфеля примут следующий вид:

$$\theta_0^* = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{(m_i - m_p)(m_i - r_0)}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{(m_i - r_0)^2}{\sigma_i^2}}; \quad (3.28)$$

$$\theta_i^* = \frac{(m_p - r_0)(m_i - r_0)}{\sigma_i^2 \sum_{l=1}^n \frac{(m_l - r_0)^2}{\sigma_l^2}}, \quad i=1, \dots, n \quad (3.29)$$

$$\sigma_p^* = \frac{(m_p - r_0)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(m_i - r_0)^2}{\sigma_i^2}}}. \quad (3.30)$$

Как видно из последних трех формул, безрисковая часть будет входить в портфель, т. е.  $\theta_0^* > 0$ , если

$$m_p < \frac{\sum_{i=1}^n \frac{m_i(m_i - r_0)}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{m_i - r_0}{\sigma_i^2}} = \bar{m}_p(r_0). \quad (3.31)$$

При  $m_p = \bar{m}_p$  в портфеле будет присутствовать только рискованная часть ( $\theta_0^* = 0$ ), поэтому решение, найденное по формулам (3.29), (3.30), должно совпадать с решением, найденным по формулам (3.21), (3.22).

При  $m_p = r_0$  в портфеле будет присутствовать только безрисковая часть,  $\theta_0^* = 1$ ,  $\sigma_p^* = 0$ .

Превышение средней эффективности ценной бумаги над эффективностью безрискового вклада называется *премией за риск*.

Имеет место следующий факт: премия за риск конкретной ценной бумаги, включенной в оптимальный портфель, пропорциональна премии за риск портфеля в целом

$$m_l - r_0 = \beta_l^* (m_p - r_0), \quad l = 1, \dots, n, \quad (3.32)$$

где  $\beta_l^* = \frac{\text{cov}(R_l, R_p^*)}{(\sigma_p^*)^2}$  бета-вклад ценной бумаги в оптимальный портфель, т. е. отношение ковариации эффективности ценной бумаги и портфеля к вариации портфеля.

Введем следующие обозначения:

$$\beta^* = \begin{pmatrix} \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_n^* \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$$



Имеем

$$R_p^* = r_0\theta_0^* + \sum_{i=1}^n R_i\theta_i^* = r_0\theta_0^* + R'\theta^*,$$

$$MR_p^* = r_0\theta_0^* + m'\theta^* = m_p,$$

поэтому

$$R_p^* - m_p = R'\theta^* - m'\theta^* = (R - m)'\theta^*.$$

Последнее выражение позволяет найти вектор  $\beta^*$

$$(B = \|\text{cov}(R_i, R_j)\| = M(R - m)(R - m)'): \\ \beta^* = \frac{1}{(\sigma_p^*)^2} M(R - m)(R_p^* - m_p) = \frac{1}{(\sigma_p^*)^2} M(R - m)(R - m)'\theta^* = \\ \frac{B\theta^*}{(\sigma_p^*)^2} = \frac{B(m_p - r_0)B^{-1}(m - r_0e)}{(\sigma_p^*)^2(m - r_0e)'B^{-1}(m - r_0e)} = \frac{(m - r_0e)}{(m_p - r_0)},$$

или

$$m - r_0e = \beta^*(m_p - r_0).$$

что покомпонентно записывается в следующей форме:

$$m - r_0 = \beta_l^*(m_p - r_0). \quad \square$$

### 3.3. Равновесие на рынке ценных бумаг

Поведение большого числа инвесторов  $i=1, \dots, I$  на рынке ценных бумаг сходно с поведением потребителей на конкурентном рынке, который описывается моделью Вальраса.

Начальный капитал каждого инвестора  $k_i^0$  состоит из вложений в безрисковые и рискованные ценные бумаги:

$$k_i^0 = b_i^0 + \sum_{j=1}^n \theta_{ij}^0 W_j^0,$$

где  $b_i^0$  - безрисковый вклад;

$\theta_{ij}^0$  - доля  $i$ -го инвестора в общей стоимости рискованных ценных бумаг  $j$ -го вида;

$W_j^0$  - общая стоимость рисковых ценных бумаг  $j$ -го вида.

Поведение инвесторов определяется исходя из следующих предположений:

1) инвесторы одинаково информированы об эффективности вложений в различные ценные бумаги;

2) каждый инвестор стремится приобрести оптимальный портфель рисковых ценных бумаг, а долю безрисковой части вложений определяет путём максимизации среднего значения квадратичной функции полезности ( $R$ - случайная эффективность при выбранной структуре портфеля,  $k$ - капитал):

$$u_i(kR) = kr - A_i(kR - km_R)^2, m_R = MR,$$

т.е. путём максимизации

$$Mu_i(kR) = km_R - A_i k^2 \sigma_R^2, \quad I = 1, \dots, I \quad (3.33)$$

Коэффициенты  $A_i > 0$  характеризуют склонность инвесторов к риску; при малом  $A_i$  – склонность велика, поэтому мерой склонности к риску следует считать  $A_i^{-1}$ .

Из предположений 1 и 2 следует, что все инвесторы стремятся приобрести одинаковые по структуре портфели рисковых ценных бумаг, т. е. эффективности рисковой части у всех инвесторов одинаковы и равны  $R^*$ .

Если  $i$  –й инвестор вложит долю  $\theta_{i0}$  своего первоначального капитала в безрисковые ценные бумаги, то в конце интервала времени, для которого определены все эффективности, его капитал станет равным

$$k_i^1 = \theta_{i0} k_i^0 (1 + r_0) + (1 - \theta_{i0}) k_i^0 (1 + R^*).$$

Средняя полезность этого капитала

$$g_i(\theta_{i0}) = Mu_i(k_i^0 R) = \theta_{i0} k_i^0 r_0 + (1 - \theta_{i0}) k_i^0 m^* - A_i (1 - \theta_{i0})^2 (k_i^0)^2 (\sigma^*)^2,$$

где

$$m^* = MR^*, (\sigma^*)^2 = DR^*.$$

Поскольку

$$\frac{dg_i}{d\theta_{i0}} = k_i^0(r_0 - m^*) + 2A_i(k_i^0)^2(1 - \theta_{i0})(\sigma^*)^2,$$

то максимум средней полезности достигается при выборе безрисковых вложений

$$\theta_{i0}^* = 1 - \frac{m^* - r_0}{2A_i K_i^0 (\sigma^*)^2},$$

поэтому все инвесторы вложат в рискованные ценные бумаги следующий капитал:

$$\sum_{i=1}^I (1 - \theta_{i0}^*) k_i^0 = \frac{m^* - r_0}{2(\sigma^*)^2} \sum_{i=1}^I \frac{1}{A_i}.$$

Равновесие определяется как равенство спроса и предложения:

$$\frac{m^* - r_0}{2(\sigma^*)^2} \sum_{i=1}^I \frac{1}{A_i} = W^0, \quad (3.34)$$

где  $W^0$  – суммарная исходная стоимость рискованных ценных бумаг.

По определению эффективностей

$$R_i = \frac{W_l^1 - W_l^0}{W_l^0}, \quad R = \frac{W^1 - W^0}{W^0},$$

где  $W_l^0, W_l^1$  – суммарные исходная и будущая стоимость рискованных ценных бумаг  $l$ -го вида;  $W^1 = \sum_{l=1}^n W_l^1$  – суммарная будущая стоимость рискованных ценных бумаг.

Имеем ( $W_l^0, W^0$  – неслучайные величины!)

$$m = MR = \frac{MW^1 - W^0}{W^0} = m^*, \quad m_l = MR_l = \frac{MW_l^1}{W_l^0} = 1,$$

$$\sigma^2 = DR = \frac{1}{(W^0)^2}, \quad DW^1 = (\sigma^*)^2, \quad (3.35)$$

Подставив последние выражения в уравнения (3.32), разрешаем затем каждое из них относительно  $W_l^0$ :

$$W_l^0 = \frac{1}{1+r_0} \left\{ MW_l^1 - \frac{\text{cov}(W_l^1, W^1)}{DW^1} [MW^1 - (1+r_0)W^0] \right\}.$$

Точно так же, подставляя выражения  $m$ ,  $\sigma^2$  из (3.35) в уравнение баланса (3.34), находим

$$W^0 = \frac{1}{1+r_0} \left[ MW^1 - \frac{2DW^1}{\sum_{i=1}^l A_i^{-1}} \right],$$

поэтому получаем окончательное выражение для равновесного значения общей стоимости бумаг  $l$  – го вида:

$$W_l^0 = \frac{1}{1+r_0} \left[ MW_l^1 - 2 \frac{\text{cov}(W_l^1, W^1)}{\sum_{i=1}^l A_i^{-1}} \right].$$

Если риск отсутствует, то получаем естественное соотношение:

$$W_l^0 = \frac{W_l^1}{1+r_0}.$$

## 4. Прогнозирование валютных кризисов и финансовых рисков

*Валютный кризис* – это скачкообразное падение курса национальной валюты (или нескольких взаимосвязанных валют) ниже некоторого порогового значения (например, увеличение цены доллара в рублях более чем на 10%).

Валютный кризис – это проявление слабости национальной экономики, выражающейся в падении ВВП, сокращении золотовалютных резервов, отрицательном сальдо внешней торговли, росте внешнего долга. Все эти отрицательные подвижки улавливаются субъектами финансового рынка и, в конечном счёте, выплёскиваются через падение курса национальной валюты (и ценных бумаг).

Механизм валютного кризиса можно сравнить с механизмом землетрясения, которое созревает в результате постепенной подвижки тектонических плит. Когда последние приходят в состояние неустойчивого равновесия, то начинаются слабые высокочастотные колебания земной поверхности, которые улавливаются некоторыми видами животных, что даёт им шанс на спасение. Своевременное получение сигнала о надвигающемся валютном кризисе позволяет государству заблаговременно принять необходимые меры по стабилизации экономической ситуации, а инвесторам избежать больших потерь.

Но валютный рынок – это сегмент финансового рынка, а финансовый рынок – всего лишь часть национальной экономики. Поэтому, как отмечалось выше, валютный кризис предопределяется общим состоянием экономики, которое в известной мере отслеживается через цены финансовых активов.

Исходя из этого, в настоящем параграфе вначале описывается модель прогнозирования цен финансовых активов (и финансовых рисков), затем приводится модель прогнозирования валютных кризисов.

## Модель прогнозирования финансовых рисков

Напомним классическое определение *эффективности финансовой операции* (процентной ставки, нормы прибыли на финансовый актив):

$$\frac{S_1 - S}{S} = r, \quad S_1 = S(1+r), \quad S_t = S(1+r)^t,$$

где  $S = S_0$  – первоначальная сумма, вложенная инвестором (кредитором) в данный финансовый актив (инструмент);  $S_1$  – возвращаемая сумма через один период (год, месяц);  $S_t$  – возвращаемая сумма через  $t$  периодов.

Если операция рискованная, то её эффективность  $R$  становится случайной величиной, следовательно, существует вероятность  $P\{R < 0\}$ , что инвестор понесёт потери. В нашем понимании эта вероятность и есть риск. Косвенной характеристикой риска служит дисперсия  $DR = \sigma^2$ : чем меньше дисперсия, тем меньше риск. Для уменьшения риска принимаются определённые меры, называемые хеджированием, в том числе составляется портфель активов ( $\theta_i$  – доля  $i$ -го актива в портфеле).

$$R_p = \sum_{i=1}^n \theta_i R_i, \quad S = \sum_{i=1}^n S_i, \quad \theta_i = \frac{S_i}{S}.$$

Выше был изложен метод Марковитца – метод выбора оптимального портфеля, характеризующегося минимальной дисперсией  $DR_p \rightarrow \min$ , при заданной средней эффективности  $MR_p = m_p$ . Если цены (следовательно, и риски) отдельных активов меняются, то портфель надо соответствующим образом корректировать. Поэтому прогнозирование цен активов позволяет рациональным образом управлять структурой портфеля.

Модели финансового рынка, рассмотренные в предыдущем параграфе, опирались на предположение классической теории эффективного рынка об однородности поведения его участников. В современной теории финансового рынка фундаментальным является предположение о *фрактальности* (неоднородности) пове-

дения его участников. Более активно себя ведут владельцы «коротких денег», более пассивно – владельцы «длинных денег». Это приводит к тому (как это следует из теоретических и прикладных исследований), что плотности распределения вероятностей характеристик рискованных финансовых операций имеют «тяжёлые хвосты» и более островершинны, чем нормальная плотность.

Если платежи по финансовым операциям совершаются ежедневно и много раз за день, то, как говорилось выше, удобнее рассматривать накопленную сумму таких платежей  $S(t)$  как функцию непрерывного времени  $t$ , тогда можно говорить о скорости роста платежей  $S'(t)$  и об относительной скорости роста  $\frac{S'}{S} = \delta$ , при примерном постоянстве относительной скорости роста

$$S(t) = S(0)e^{\delta t}, S(1) = S(0)e^{\delta} \text{ или } 1+R = e^{\delta},$$

где  $R = \frac{S(1) - S(0)}{S(0)}$ .

Вместе с тем  $\delta$  - это удельная логарифмическая прибыль ( $P_0, P_1$  – цены актива в начальный и первый моменты времени):

$$\delta = \ln(1+R) = \ln\left(1 + \frac{P_1 - P_0}{P_0}\right) = \ln P_1 - \ln P_0,$$

последнее соотношение можно рассматривать в любой момент времени

$$\delta_t = \ln P_t - \ln P_{t-1} - \ln(1+R_t) \quad (4.1)$$

где  $R_t$  – процентная ставка в момент  $t$  (но не за  $t$  периодов).

В диссертационной работе<sup>3</sup> О. В. Самохвалова на основе анализа зарубежных исследований и тестирования различных моделей по данным российских финансовых рынков (денежного, валютного, фондового, товарного и деривативного) была предложена следующая теоретико-вероятностная модель для

---

<sup>3</sup> Самохвалов О. В. Моделирование и количественная оценка риска российских финансовых рынков: Дис. ...канд. экон. наук. М., 2001.

анализа и прогнозирования логарифмической прибыли (в расчёте на день) финансовых активов:

$$\delta_t = \xi_t + \xi_t^e, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (4.2)$$

$$\xi_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t, \quad \xi_t^e = \eta_t J_t,$$

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \ln \sigma_{t-1}^2 + \alpha_2 \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \alpha_3 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \xi_t, \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_t \sim N(0,1), \quad \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0 \text{ при } t \neq t', \quad \eta_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

$$J_t \sim N(y, \gamma), \quad M\xi_t = 0.$$

Согласно этой модели логарифмическая прибыль имеет в своём составе две составляющие: регулярную  $\xi_t$ , порождённую «длинными деньгами», и скачкообразную  $\xi_t^e$ , порождённую «короткими деньгами».

В регулярной составляющей среднее близко к нулю  $\mu \approx 0$ ; стандартное отклонение  $\sigma_t$  определяется из статистического соотношения (8.4.3), установленного по прошлым данным, при этом  $\varepsilon_t$ ,  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ , – последовательность некоррелированных стандартных нормальных величин. Таким образом, регулярная составляющая является смесью нормальных распределений.

В основе модели лежит регрессионная зависимость доли  $p_t$  кризисных месяцев к общему числу рассмотренных месяцев от указанных (но несколько преобразованных) факторов:

$$p_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^6 \alpha_i x_{ti} + \varepsilon_t, \quad (4.4)$$

где  $x_{t1}$  – отношение золотовалютных резервов к государственному долгу;

$x_{t2}$  – показатель, определяемый по объёму и изменчивости ВВП;

$x_{t3}$  – трехмесячное скользящее среднее индекса цен акций;

$x_{t4}$  – шестимесячное скользящее среднее склонности к риску;



$x_{t5}$  – шестимесячное скользящее среднее склонности к риску с шагом в 6 месяцев;

$x_{t6}$  – номер класса «кризисности», к которому отнесена данная национальная экономика.

Расчеты коэффициентов регрессионной модели были выполнены по данным около 30 валютных кризисов, которые произошли за последние несколько десятилетий (включая валютные кризисы в Юго-Восточной Азии, Латинской Америке, РФ в 1995 и 1998 гг.).

Значение зависимой переменной  $p_t$  в модели (4.4.) для конкретного кризиса в конкретной стране определялось как отношение кризисных месяцев к общему числу рассматриваемых за определенное число лет месяцев (кризисных и спокойных). Значения независимых переменных усреднялись (либо накапливались) по рассматриваемым месяцам.

Зная оценки параметров регрессии  $\hat{\alpha}_i$  и найдя прогнозы значений независимых переменных  $x_i(t+1)$ , можно определить прогноз зависимой переменной  $\hat{p}_{t+1}$ .

Само решение о валютном кризисе в будущем месяце ( $t+1$ ) принимается по логистической функции от этого прогноза:

$$\hat{p}_{t+1} = \frac{1}{1 + e^{-\hat{p}_{t+1}}}. \quad (4.5)$$

Полученная величина  $\hat{p}_{t+1}$  интерпретируется как индекс вероятности девальвации (индикатор девальваций). Следующий месяц оценивается как кризисный, если  $\hat{p}_{t+1} > 0,4$ .

В работе<sup>4</sup> В.И. Соловьёва, Е.С. Долматова предлагается использовать энтропию (неопределённость) временных рядов валютных курсов в качестве индикатора приближающихся валютных кризисов.

На рис. 4.1 показаны результаты расчёта индикатора девальвации для российского рубля с июня 1998 г. по июнь 1999 г., приведённые в цитируемой работе.

---

<sup>4</sup> Соловьёв В. И., Долматов Е. С. Энтропия как индикатор кризисных явлений на валютных рынках // Вестник университета. Изд. центр ГУУ, 2001. Сер. ИИСУ, №1(2).

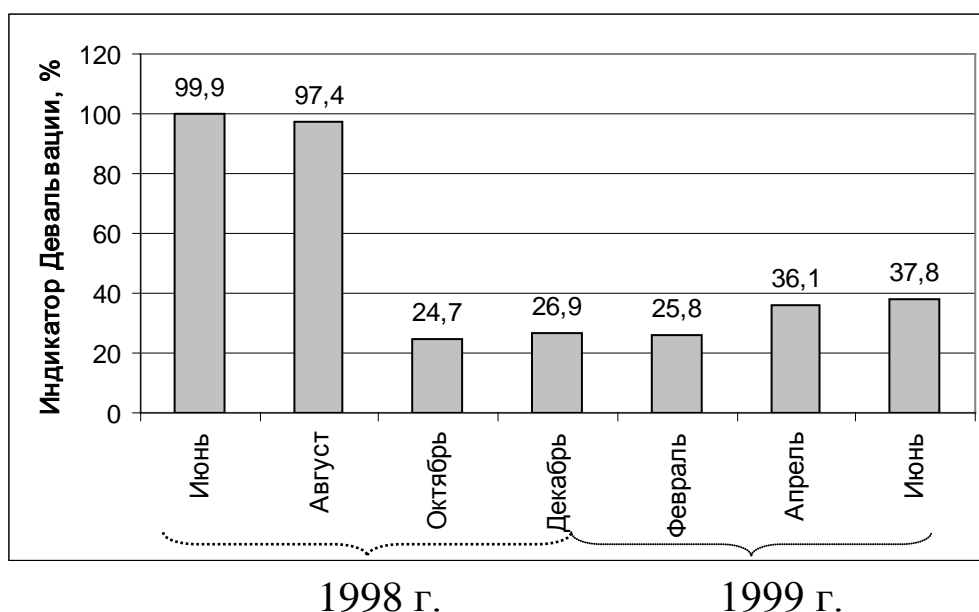


Рис. 4.1. Динамика индикатора девальваций по данным РФ

В качестве индикатора используется абсолютный темп прироста энтропии  $H_t$  ( $t$  измеряется в днях):

$$V_t = \left| \frac{H_t - H_{t-1}}{H_t} \right|,$$

а сама энтропия определяется с помощью метода «падающих прямоугольников» по временному ряду валютных курсов.

Этот метод более прост, требует для своей реализации только данные об обменных курсах. В этом же состоит и его недостаток, ведь валютные кризисы – это результат неустойчивости всей экономической системы, состояние которой определяется многими макроэкономическими показателями. Поэтому, на наш взгляд, для большей надёжности прогноза следует применять сразу несколько моделей (включая изложенные выше). Необходимо также дальнейшее совершенствование этих моделей.

## Вопросы и задачи

1. Дебитор заключил договор на 100 тыс. марок. Процентная ставка – 3%, ежегодный возврат кредита и процентов к нему – 6 тыс. марок. Через сколько лет клиент возвратит 40% кредита?

2. Инвестор, располагающий суммой в 300 тыс. марок, может вложить свой капитал в акции автомобильного концерна А и строительного предприятия В. Чтобы уменьшить риск, акций А должно быть приобретено по крайней мере в 2 раза больше, чем акций В, причём последних можно купить не более чем на 100 тыс. марок. Дивиденды по акциям А составляют 8% в год, по акциям В – 10%. Какую максимально возможную прибыль можно получить в первый год?

3. Инвестор, имеющий 300 тыс. марок, может вложить свой капитал в акции А, В, С. Процентные ставки по акциям являются независимыми случайными величинами  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  с математическими ожиданиями  $MR_A=8\%$ ,  $MR_B=10\%$ ,  $MR_C=12\%$  и стандартными отклонениями  $\sigma_A=1\%$ ,  $\sigma_B=2\%$ ,  $\sigma_C=4\%$ . Как нужно скомбинировать покупку разных акций, чтобы за первый год получить в среднем 30 тыс. марок дивидендов при минимальной дисперсии?

4. Чем отличается модель Кейнса от классической модели рыночной экономики?

5. В чём сходство и различие кейнсианского и монетаристского подходов к управлению экономикой?

6. Каковы условия равновесия на финансовом рынке?

7. Доказать, что функция спроса на рабочую силу в конкурентной экономике является убывающей функцией реальной заработной платы.

8. Заключён кредитный договор на 200 тыс. марок. В конце каждого года клиент должен выплачивать постоянную сумму Е (возврат части кредита и процентов по нему). Найти Е, если процентная ставка равна 2,5% и к концу пятого года клиент должен вернуть 40% кредита.

9. Доказать, что при отсутствии корреляции и при

$$m_p = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} m_i (m_i - r_0)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} (m_i - r_0)} = \bar{m}_p(r_0),$$

структура рисковей части портфеля ценных бумаг, найденная при наличии безрисковых ценных бумаг с эффективностью  $r_0$ , совпадает со структурой портфеля, не содержащего безрисковой части (при выборе  $m_p = \bar{m}_p(r_0)$ ).

## Содержание

<b>1. Классическая модель рыночной экономики .....</b>	<b>3</b>
1.1. Рынок рабочей силы .....	3
1.2. Рынок денег .....	5
1.3. Рынок товаров.....	6
<b>2. Модель Кейнса .....</b>	<b>7</b>
<b>3. Математические модели финансового рынка .....</b>	<b>13</b>
3.1. Финансовые операции .....	14
3.2. Финансовый риск.....	19
3.3. Равновесие на рынке ценных бумаг .....	33
<b>4. Прогнозирование валютных кризисов и финансовых рисков .....</b>	<b>37</b>
Модель прогнозирования финансовых рисков.....	38
<b>Вопросы и задачи.....</b>	<b>43</b>



# Математические модели рыночной экономики

