

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова

В. Ш. Бурд

Дискретное операторное исчисление
и линейные разностные уравнения

Учебное пособие

*Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальности
010200 Прикладная математика и информатика*

Ярославль 2009

УДК 517.929
ББК В161.62_я73
Б 91

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2009/10 года*

Рецензенты:

А. В. Проказников, д-р физ.-мат. наук, Ярославский филиал
Учреждения Российской академии наук Физико-технологического
института РАН;
кафедра математического анализа ЯГПУ им. К. Д. Ушинского.

Б 91 Бурд, В. Ш. Дискретное операторное исчисление и линейные разностные уравнения: учеб. пособие / В. Ш. Бурд; науч. ред. С. Д. Глызин; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль: ЯрГУ, 2009 — 156 с. ISBN 978-5-8397-0694-1

Пособие посвящено элементарному изложению теории линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами на базе дискретного операторного исчисления. Рассматриваются также некоторые задачи теории чисел, алгебры и анализа, в которых появляются линейные разностные уравнения второго порядка. В частности, дается введение в теорию непрерывных дробей.

Пособие содержит много упражнений, которые должны помочь овладеть техникой решения линейных разностных уравнений с помощью дискретного операторного исчисления.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 010200 Прикладная математика и информатика (дисциплина «Линейные разностные уравнения», блок СД), очной формы обучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственный контракт № 02.740.11.0197).

Библиогр.: 29 назв.

ISBN 978-5-8397-0694-1

УДК 517.929
ББК В161.62_я73

© Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова, 2009

Оглавление

Предисловие	5
Глава 1. Дискретное операторное исчисление	7
1.1. Свертка функций дискретного аргумента	7
1.1.1. Свойства свертки	7
1.1.2. Оператор суммирования	10
1.2. Операторы. Операторное исчисление	15
1.2.1. Замечание о Z -преобразовании	25
1.2.2. Производящие функции	26
Глава 2. Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами	32
2.1. Линейные разностные уравнения первого порядка	32
2.1.1. Уравнения с постоянным коэффициентом в однородной части	32
2.1.2. Уравнения, которые преобразуются в линейные уравнения первого порядка	35
2.1.3. Уравнения с периодической неоднородностью	38
2.1.4. Уравнения с переменным коэффициентом в однородной части	39
2.1.5. Уравнения с периодическими коэффициентами	42
2.2. Линейные разностные уравнения второго порядка	43
2.2.1. Операторный метод решения	43
2.2.2. Примеры неоднородных уравнений	47
2.2.3. Общее решение однородного уравнения	52
2.2.4. Некоторые уравнения с переменными коэффициентами	58
2.2.5. Некоторые нелинейные уравнения	64
2.3. Некоторые приложения	66
2.3.1. Числа Фибоначчи	66
2.3.2. Непрерывные дроби	72
2.3.3. Определители трехдиагональных матриц	88
2.3.4. Многочлены Чебышева	93

2.3.5.	Краевые задачи для разностных уравнений	98
2.4.	Однородные уравнения k -го порядка	99
2.4.1.	Построение общего решения	105
2.5.	Неоднородные уравнения k -го порядка	113
2.5.1.	Решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями	114
2.5.2.	Вычисление частного решения, когда правая часть уравнения является квазимногочленом	115
2.5.3.	Вычисление конечных сумм	123
2.5.4.	Метод комплексных амплитуд	129
2.5.5.	Некоторые уравнения высокого порядка с переменными коэффициентами	135
2.6.	Системы разностных уравнений	137
2.6.1.	Схема применения операторного метода для решения системы разностных уравнений	137
2.6.2.	Решение системы двух разностных уравнений	138
2.6.3.	Вычисление матрицы A^n	145
2.6.4.	Вычисление подходящих дробей для периодической непрерывной дроби с периодом $l \geq 2$	147

Литература

153

Предисловие

Эта книга посвящена элементарному изложению теории линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Изложение базируется на дискретном операторном исчислении, являющимся дискретным аналогом операторного исчисления Микусинского.

Символические методы для решений разностных уравнений с постоянными коэффициентами развивались еще в 19-м веке. Они описываются в книге Дж. Буля [1], первое издание которой вышло в 1860 году. Строгое обоснование символических методов решения разностных уравнений с постоянными коэффициентами было получено на основе Z -преобразования. Это преобразование — дискретный аналог преобразования Лапласа. Элементы дискретного операторного исчисления были изложены в работах Moore [11] и Brand [2] (см. также [3] и [4]).

В настоящей книге на основе дискретного операторного исчисления строится общая теория разностных (рекуррентных) уравнений с постоянными коэффициентами. Изложение этой теории во многих аспектах более полное, чем в руководствах Elaydi [5], Jordan [6], Kelley, Peterson [7], Miller [10], Spiegel [14].

Операторные формулы дают представление дискретных функций через оператор обратный к оператору сдвига. Он является дискретным аналогом оператора дифференцирования в операторном исчислении Микусинского. Это позволяет простейшим путем получить явные формулы для решения однородных и неоднородных разностных уравнений.

Книга состоит из двух глав.

Первая глава посвящена построению операторного исчисления. Определяются алгебраические операции для дискретных функций, причем роль умножения играет свертка дискретных функций. Операторы вводятся как дроби a/b , где a и b — дискретные функции. В этой же главе вводятся производящие функции. Методы операторного исчисления и производящие функции применяются к доказательству тождеств с биномиальными коэффициентами.

Во второй главе излагается теория линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Первый и второй разделы посвящены линейным разностным уравнениям первого и второго порядков. Операторный метод позволяет не только получить решение конкретного разностного уравнения, но и изучить структуру решений общего однородного и неоднородного уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассматриваются линейные уравнения с переменными коэффициентами и нелинейные уравнения, которые преобразуются в

линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами или уравнения первого порядка.

В третьем разделе описываются некоторые задачи теории чисел, алгебры и анализа, в которых появляются линейные разностные уравнения второго порядка. Параграф 2.3.2 можно рассматривать как введение в теорию непрерывных дробей.

Четвертый и пятый разделы посвящены линейным однородным и неоднородным разностным уравнениям высокого порядка с постоянными коэффициентами.

Последний раздел посвящен системам линейных разностных уравнений.

Книга содержит много упражнений, которые способствуют овладению техникой решения линейных разностных уравнений с помощью операторного исчисления.

Для понимания первой главы, раздела 2.1 и параграфов 2.2.1–2.2.3 второй главы достаточно владеть основами элементарной математики и теорией пределов. Для чтения остальных параграфов желательно знакомство с началами анализа и линейной алгебры.

Книга может служить основой односеместрового курса для студентов младших курсов.

П. Н. Нестеров и А. Ю. Ухалов ознакомились с текстом книги и сделали ряд ценных замечаний. Автор выражает им благодарность.

Глава 1

Дискретное операторное исчисление

1.1. Свертка функций дискретного аргумента

1.1.1. Свойства свертки

Предполагается, что областью определения всех функций дискретного аргумента, рассматриваемых в дальнейшем, служит множество неотрицательных целых чисел $n = 0, 1, 2, \dots$. Дискретной функции $f(n)$ соответствует последовательность ее значений

$$f(0), f(1), f(2), \dots$$

Отправным пунктом построения дискретного операторного исчисления является понятие свертки. Сверткой функций $f(n)$ и $g(n)$ называется функция $h(n)$, которая определяется формулой

$$h(n) = \sum_{k=0}^n f(n-k)g(k) = f(n)g(0) + f(n-1)g(1) + \dots + f(1)g(n-1) + f(0)g(n).$$

Будем обозначать свертку функций $f(n)$ и $g(n)$ через $f(n) \cdot g(n)$. Обычное произведение этих функций обозначается через $f(n)g(n)$.

Приведем примеры вычисления свертки. Пусть $f(n) = g(n) = a^n$. Тогда

$$a^n \cdot a^n = \sum_{k=0}^n a^{n-k}a^k = (n+1)a^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Обозначим через $e = e(n)$ дискретную функцию $e(n)$, для которой $e(0) = 1$ и $e(n) = 0$, $n \geq 1$. Пусть $f(n)$ — произвольная дискретная

функция. Вычислим свертку

$$h(n) = f \cdot e = \sum_{k=0}^n f(n-k)g(k).$$

Очевидно,

$$h(0) = f(0)g(0) = f(0), \quad h(1) = f(1)g(0) + f(0)g(1) = f(1), \dots,$$

$$h(m) = f(m)g(0) + f(m-1)g(1) + \dots + f(0)g(m) = f(m), \dots, \quad m \leq n.$$

Таким образом, справедливо равенство $f(n) \cdot e = f(n)$. Далее, обозначим через l дискретную функцию $f(n)$, для которой $f(n) \equiv 1$. Из предыдущего следует, что $l \cdot e = l$.

Упражнения. Вычислить свертку $f(n) \cdot g(n)$, если

- a) $f(n) = l, g(n) = n^2$;
- b) $f(n) = l, g(n) = n$;
- c) $f(n) = l, g(n) = 2^n$;
- d) $f(n) = 3^n, g(n) = 5^n$;
- e) $f(0) = 0, f(1) = 1, f(n) = 0, n \geq 2, g(0) = 1, g(1) = -1, g(n) = 0, n \geq 2$;
- f) $f(0) = 0, f(1) = 1, f(n) = 0, n \geq 2, g(n) = a^n$.

Установим основные свойства свертки.

1. Коммутативность свертки. Покажем, что значение свертки не зависит от порядка следования функций $f(n)$ и $g(n)$, т. е.

$$f(n) \cdot g(n) = g(n) \cdot f(n).$$

Проверим справедливость равенства

$$\sum_{k=0}^n f(n-k)g(k) = \sum_{k=0}^n g(n-k)f(k). \quad (1.1)$$

Сделав в сумме слева подстановку $n-k=s$, получим

$$\sum_{s=n}^0 f(s)g(n-s) = \sum_{s=0}^n g(n-s)f(s),$$

что и доказывает равенство (1.1). Доказанное свойство называется коммутативностью свертки. Символически запишем это равенство в виде

$$f \cdot g = g \cdot f.$$

Таким образом, свертка обладает свойством, аналогичным свойству коммутативности умножения чисел.

2. Ассоциативность свертки. Свертка обладает также свойством, аналогичным свойству ассоциативности умножения чисел

$$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h).$$

Действительно,

$$(f \cdot g) \cdot h = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{l=0}^{n-k} f(n-k-l)g(l) \right) h(k).$$

Положим $l = \omega - k$ ($0 \leq k \leq \omega \leq n$). Тогда

$$(f \cdot g) \cdot h = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\omega=k}^n f(n-\omega)g(\omega-k) \right) h(k).$$

Переставляя порядок суммирования, получим

$$(f \cdot g) \cdot h = \sum_{\omega=0}^n f(n-\omega) \sum_{k=0}^{\omega} g(\omega-k)h(k) = f \cdot (g \cdot h).$$

3. Дистрибутивность свертки относительно сложения. Кроме коммутативности и ассоциативности, свертка обладает еще третьим основным свойством произведения чисел, а именно дистрибутивностью относительно сложения

$$f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h.$$

Это свойство свертки очевидно.

4. Свертка обладает еще одним важным свойством произведения чисел, которое сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1.1. Если свертка функций $f(n)$ и $g(n)$ равна нулю при всех n , то по крайней мере одна из функций $f(n)$, $g(n)$ равна нулю при всех n .

Доказательство. Доказательство легко получается по индукции. Если

$$h(n) = f(n) \cdot g(n) = \sum_{k=0}^n f(n-k)g(k) = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

то

$$h(0) = f(0)g(0) = 0.$$

Пусть для определенности $g(0) = 0$, $f(0) \neq 0$. Тогда из равенства

$$h(1) = f(1)g(0) + f(0)g(1) = 0$$

следует, что $g(1) = 0$. Далее, если $g(n) = 0$ при $n = 0, \dots, k-1$, то из равенства

$$h(k) = f(k)g(0) + f(k-1)g(1) + \dots + f(0)g(k) = 0$$

следует, что $g(k) = 0$. □

Заметим, что обычное произведение функций $f(n)$ и $g(n)$ этим свойством свертки не обладает.

Таким образом, над дискретными функциями можно производить действия сложения, вычитания и взятия свертки по тем же правилам, что и арифметические действия сложения, вычитания и умножения над обычными целыми числами. Это позволяет заменить сложные преобразования последовательностей (дискретных функций) почти механическими вычислениями.

В дальнейшем будем различать числа и дискретные функции, которые при всех n равны одному и тому же числу. Так, через $\{2\}$ будем обозначать число 2, а символ $\{2\}_n$ обозначает такую функцию $f(n)$, что $f(n) = 2$ при всех n .

Очевидно,

$$\{2\}_n \cdot \{3\}_n = \sum_{k=0}^n 2 \times 3 = 6(n+1) = 6(\{1\}_n \cdot \{1\}_n).$$

В общем случае

$$\{\alpha\}_n \cdot \{\beta\}_n = \alpha\beta(\{1\}_n \cdot \{1\}_n).$$

1.1.2. Оператор суммирования

Нам понадобятся биномиальные коэффициенты. Напомним, что биномиальные коэффициенты — это коэффициенты в формуле бинома Ньютона

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n.$$

Биномиальный коэффициент C_n^k определяется формулой

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

где $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$. Будем предполагать, что $0! = 1$, $C_n^0 = 1$, и $C_n^k = 0$ при $k > n$.

Для биномиальных коэффициентов справедливо тождество Паскаля

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

Тождество непосредственно следует из формул, определяющих биномиальные коэффициенты.

Назовем оператором суммирования дискретную функцию $l = \{1\}_n$. Это название оправдывается тем обстоятельством, что для любой функции $f(n)$ имеем

$$l \cdot f = \sum_{k=0}^n f(k) = f(0) + \dots + f(n).$$

Можно вычислить степени оператора l . Прежде чем провести это вычисление, поговорим об элементарных методах суммирования (см., например, Гельфонд [18]).

Вопрос о вычислении суммы

$$f(0) + \dots + f(n) = \sum_{k=0}^n f(k)$$

можно свести к следующей задаче. Найти такую функцию $F(n)$, что

$$F(k+1) - F(k) = f(k). \quad (1.2)$$

Действительно, если найдена функция $F(k)$, удовлетворяющая уравнению (1.2), то

$$F(1) - F(0) = f(0), \quad F(2) - F(1) = f(1), \dots, F(n+1) - F(n) = f(n).$$

Складывая эти равенства, получим

$$\sum_{k=0}^n f(k) = F(n+1) - F(0). \quad (1.3)$$

Приведем примеры. Справедливы равенства

$$a^{k+1} - a^k = a^k(a - 1),$$

$$\sin \alpha(k+1) - \sin \alpha k = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos(\alpha k + \frac{\alpha}{2}),$$

$$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} = -\frac{1}{k(k+1)},$$

$$\operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg} k = \operatorname{arctg} \frac{1}{1+k(k+1)}.$$

Из формулы (1.3) получим соответственно

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1},$$

$$\sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \alpha k\right) = \frac{\sin(n+1)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

$$\sum_{k=0}^n \operatorname{arctg} \frac{1}{1+k(k+1)} = \operatorname{arctg}(n+1).$$

Одним из приемов элементарного суммирования является преобразование Абеля. Пусть $u(0), u(1), \dots, u(n)$ и $v(0), v(1), \dots, v(n)$ — произвольные последовательности вещественных чисел. Положим

$$V(n) = \sum_{k=0}^n v(k).$$

Преобразованием Абеля называется формула

$$\sum_{k=m}^n u(k)v(k) = \sum_{k=m}^{n-1} (u(k) - u(k+1))V(k) + u(n)V(n) - u_m V_{m-1}. \quad (1.4)$$

(если $m = 0$, то условимся считать, что $V(-1) = 0$).

Для доказательства формулы (1.4) заметим, что

$$v(k) = V(k) - V(k-1).$$

Подставим это выражение в левую часть формулы (1.4) и сгруппируем слагаемые. Получим правую часть формулы (1.4).

При $m = 0$ получим, в частности,

$$\sum_{k=0}^n u(k)v(k) = \sum_{k=0}^{n-1} (u(k) - u(k+1))V(k) + u(n)V(n). \quad (1.5)$$

Если мы положим

$$\Delta u(k) = u(k+1) - u(k), \quad \Delta V(k) = V(k+1) - V(k),$$

то формулу (1.4) можно записать в виде

$$\sum_{k=m}^{n-1} V(k) \Delta u(k) = V(n)u(n) - u(m)V(m-1) - \sum_{k=m}^n u(k) \Delta V(k-1).$$

В качестве примера применения преобразования Абеля вычислим сумму

$$\sum_{k=0}^n k a^k.$$

Положим $u(k) = k$, $v(k) = a^k$. Тогда

$$V(k) = \sum_{j=0}^k a^j = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1}.$$

В силу формулы (1.5)

$$\sum_{k=0}^n k a^k = \sum_{k=0}^{n-1} (k - (k+1)) \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} + n \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} = -\frac{a^{n+1} - a}{(a - 1)^2} + n \frac{a^{n+1}}{a - 1}.$$

Упражнение.

Вычислить сумму

$$\sum_{k=1}^n k^2 a^k.$$

Вернемся к вычислению степеней оператора l . Очевидно,

$$l^2 = l \cdot l = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1,$$

$$l^3 = l \cdot l^2 = \sum_{k=0}^n (k+1) = 1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Эту формулу можно записать, используя определение биномиального коэффициента, в виде

$$l^3 = C_{n+2}^2.$$

По индукции доказывается общая формула

$$l^r = l \cdot l^{r-1} = \frac{(n+1) \dots (n+r-1)}{(r-1)!} = C_{n+r-1}^{r-1}, \quad r > 1. \quad (1.6)$$

В самом деле, если

$$l^{r-1} = \frac{(n+1) \dots (n+r-2)}{(r-2)!} = C_{n+r-2}^{r-2},$$

то

$$l^r = l \cdot l^{r-1} = \sum_{k=0}^n \frac{(k+1) \dots (k+r-2)}{(r-2)!} = \sum_{k=0}^n C_{k+r-2}^{r-2}.$$

Из тождества Паскаля следует, что

$$C_{n+r-1}^{r-1} = C_{n+r-2}^{r-1} + C_{n+r-2}^{r-2}.$$

Оно означает, что C_{n+r-2}^{r-1} является решением уравнения

$$F(n+1) - F(n) = C_{n+r-2}^{r-2}.$$

Поэтому в силу формулы суммирования справедливо тождество

$$F(n+1) = C_{n+r-1}^{r-1} = \sum_{k=0}^n C_{k+r-2}^{r-2}. \quad (1.7)$$

Тем самым формула (1.6) доказана.

Из формулы $l^{m+1}l^{r+1} = l^{m+r+2}$ следует тождество для биномиальных коэффициентов

$$\sum_{k=0}^n C_{k+m}^m C_{n-k+r}^r = C_{n+m+r+1}^{r+m+1}.$$

Выражение

$$l^r f(n)$$

можно, в силу ассоциативности операции свертки, интерпретировать двумя способами:

1) как функцию, которая получается последовательным r -кратным суммированием функции $f(k)$ в пределах от 0 до n ;

2) как свертку функций C_{n+r-1}^{r-1} и $f(n)$.

Отсюда следует выражение многократной суммы через однократную

$$\sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^{k_1} \sum_{k_3=0}^{k_2} \dots \sum_{k_r=0}^{k_{r-1}} f(k_r) = \sum_{k=0}^n C_{n-k+r-1}^{r-1} f(k). \quad (1.8)$$

Другой более сложный вывод формулы (1.8) содержится в книге Гельфонда [18].

1.2. Операторы. Операторное исчисление

Теперь, как и в алгебре, можно ввести дроби a/b , где $a(n)$ и $b(n)$ — дискретные функции, причем $b(n)$ не равна тождественно нулю. Под делением понимается действие, обратное свертке, т. е. символ a/b обозначает такую дискретную функцию $c(n)$, что

$$a = b \cdot c. \quad (1.9)$$

Например, если $a(n) = \{n^3\}$, $b(n) = \{n\}$, то из формулы

$$\{n^3\} = \sum_{k=0}^n (n-k)c_k$$

получим $c_0 = 1$, $c_n = 6n$, $n \geq 1$.

Для того чтобы символ a/b был однозначно определен, нужно, чтобы только одна функция $c(n)$ удовлетворяла соотношению (1.9). Это непосредственно следует из теоремы 1.1. В самом деле, если бы равенство (1.9) выполнялось для двух различных функций $c_1(n)$ и $c_2(n)$, т. е.

$$a = b \cdot c_1, \quad a = b \cdot c_2,$$

то мы имели бы

$$b \cdot (c_1 - c_2) = 0.$$

Так как функции $b(n)$ и $c(n)$ не равны тождественно нулю, то последнее равенство противоречит теореме 1.1.

Может случиться, что для данных дискретных функций $a(n)$ и $b(n)$ не существует дискретной функции $c(n)$, удовлетворяющей равенству (1.9), т. е. для последовательностей $(a(0), a(1), \dots)$ и $(b(0), b(1), \dots)$ не существует последовательности $(c(0), c(1), \dots)$, удовлетворяющей равенству (1.9). Пусть, например, $a(n) = l^2 = \{n+1\}$, $b(n) = l^2 - l = \{n\}$. Тогда равенство

$$\{n+1\} = \{n\} \cdot c(n)$$

не может выполняться ни для одной дискретной функции $c(n)$, так как оно означало бы, что

$$n+1 = \sum_{k=0}^n (n-k)c(k)$$

для любых $n \geq 0$. Последнее равенство неверно при $n = 0$.

Уже в арифметике мы встречаемся с невыполнимостью действия деления в области целых чисел, что приводит к введению рациональных

чисел (дробей). Всякое целое число является рациональным, так как представимо в виде дроби

$$\frac{cb}{b}, \quad b \neq 0.$$

Аналогично, невыполнимость действия, обратного к свертке, приводит к новому математическому понятию, а именно к понятию оператора.

Дробь

$$\frac{l^2}{l^2 - l}$$

представляет собой оператор, который не является дискретной функцией. В общем случае, если для двух данных функций $a(n)$ и $b(n)$ не существует дискретной функции $c(n)$, удовлетворяющей равенству (1.9), то дробь a/b изображает оператор. Любая дискретная функция $a(n)$ является оператором, так как ее можно записать в виде

$$\frac{a \cdot b}{b},$$

где $b(n)$ не равна тождественно нулю.

Вычислим частное двух операторов суммирования $l = \{1\}_n$. Так как $l \cdot e = l$, то

$$\frac{l}{l} = e.$$

Напомним, что $e(0) = 1$, $e(n) = 0$ при $n \geq 1$. Таким образом, оператор l/l представляет собой дискретную функцию $e(n)$. Ее можно представить в виде последовательности $(1, 0, \dots, 0, \dots)$, у которой первый элемент равен 1, а все остальные элементы равны нулю. Функция $e = l/l$ играет такую же роль в операторном исчислении, как 1 в умножении чисел. Будем обозначать оператор l/l через $\mathbf{1}$.

Действительно, если $a(n)$ — произвольная дискретная функция, то

$$a \cdot \frac{l}{l} = a \cdot \mathbf{1} = a \cdot e = a.$$

Точно также дробь

$$\{\alpha\} \frac{l}{l},$$

где $\{\alpha\}$ — число, играет роль числа α в обычном умножении:

$$\mathbf{a} \cdot \{\alpha\} \frac{l}{l} = \{\alpha\} \mathbf{a},$$

где \mathbf{a} — оператор. Ясно, что вышеуказанная дробь задается последовательностью $(\alpha, 0, \dots, 0, \dots)$.

Назовем числовым оператором дробь

$$[\alpha] = \frac{\alpha l}{l} = \alpha \mathbf{1}.$$

Легко проверить формулы

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta], \quad [\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha\beta]. \quad (1.10)$$

Числовые операторы следует отличать от дискретных функций, которые при всех n принимают одно и то же значение. Для этих функций вместо соотношений (1.10) выполняются следующие

$$\{\alpha\}_n + \{\beta\}_n = \{\alpha + \beta\}_n, \quad \{\alpha\}_n \cdot \{\beta\}_n = \sum_{k=0}^n \alpha\beta = (n+1)\alpha\beta.$$

Для произвольной функции $f(n)$ имеет место формула

$$[\alpha]f(n) = \alpha \frac{l}{l} f(n) = \alpha f(n),$$

т. е. умножение произвольной функции на числовой оператор $[\alpha]$ равносильно умножению ее значений на число α .

Учитывая свойства числовых операторов, можно опустить квадратные скобки и вместо $[\alpha]$ писать α .

Действия над операторами будем производить так же, как и над обычными дробями. Две дроби, составленные из операторов, равны

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$$

в том и только том случае, когда

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}.$$

Если $a = a_1(n)/a_2(n)$ и $b = b_1(n)/b_2(n)$ — два оператора, то их произведение определяется формулой

$$a \cdot b = \frac{a_1(n) \cdot b_1(n)}{a_2(n) \cdot b_2(n)}.$$

Далее,

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \cdot \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}},$$

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} + \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}}.$$

Естественно предполагается, что операторы \mathbf{b} и \mathbf{d} не равны тождественно нулю.

Аналогично вводится операция деления операторов

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} : \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{d}}{\mathbf{b}\mathbf{c}}.$$

Следовательно, над операторами можно производить все четыре арифметические действия, как и над рациональными числами. Будем говорить, что операторы образуют поле, подразумевая под этим выполнение четырех арифметических действий, как и в поле рациональных чисел.

Обратным к оператору \mathbf{c} будем называть оператор \mathbf{d} , удовлетворяющий равенству

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{1}.$$

Определим оператор, обратный к оператору суммирования. Этот оператор задается формулой

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{1}}{l}.$$

В силу этого определения

$$l \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot l = \mathbf{1} = \frac{l}{l}.$$

Из этих равенств получим

$$\sum_{k=0}^n u(k) = (1, 0, \dots).$$

Поэтому

$$u(0)=1, \quad u(0)+u(1)=0, \quad u(0)+u(1)+u(2)=0, \dots, \quad u(0)+u(1)+\dots+u(n)=0.$$

Следовательно, оператор \mathbf{u} представляет собой дискретную функцию $u(n) = (1, -1, 0, \dots)$. Введем теперь оператор

$$\sigma = \mathbf{1} - \mathbf{u} = \frac{l - \mathbf{1}}{l} = (0, 1, 0, \dots).$$

Оператор σ называется оператором сдвига.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2. *Справедлива формула*

$$x(n) = \sigma x(n+1) + x(0), \quad (1.11)$$

где $x(0) = (x(0), 0, \dots)$.

Доказательство. Очевидно,

$$\sigma x(n+1) = (0, 1, 0, \dots) \cdot (x(1), x(2), \dots) = (0, x(1), x(2), \dots).$$

□

Для нас в дальнейшем основную роль будет играть оператор

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{1}}{\sigma} = \frac{l}{l - \mathbf{1}},$$

обратный к оператору σ . Для этого оператора из формулы (1.11) следует равенство

$$x(n+1) = \mathbf{s}x(n) - \mathbf{s}x(0). \quad (1.12)$$

Далее, получим

$$x(n+2) = \mathbf{s}x(n+1) - \mathbf{s}x(1) = \mathbf{s}^2x(n) - \mathbf{s}^2x(0) - \mathbf{s}x(1). \quad (1.13)$$

По индукции легко устанавливается общая формула

$$x(n+k) = \mathbf{s}^kx(n) - \mathbf{s}^kx(0) - \mathbf{s}^{k-1}x(1) - \dots - \mathbf{s}x(k-1). \quad (1.14)$$

В дальнейшем нам придется рассматривать многочлены от оператора \mathbf{s}

$$\alpha_k \mathbf{s}^k + \alpha_{k-1} \mathbf{s}^{k-1} + \dots + \alpha_1 \mathbf{s} + \{\alpha\}_0,$$

где $\alpha_k, \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ — произвольные числа. Действия над этими многочленами выполняются, как и в элементарной алгебре. Например,

$$(\mathbf{s} - \mathbf{1})(\mathbf{s}^{k-1} + \mathbf{s}^{k-2} + \dots + \mathbf{s} + 1) = \mathbf{s}^k - \mathbf{1}.$$

Теорема 1.3. *Если два многочлена от оператора \mathbf{s} равны, то равны и соответствующие коэффициенты, т. е. из равенства*

$$\alpha_k \mathbf{s}^k + \alpha_{k-1} \mathbf{s}^{k-1} + \dots + \alpha_1 \mathbf{s} + \{\alpha\}_0 = \beta_k \mathbf{s}^k + \beta_{k-1} \mathbf{s}^{k-1} + \dots + \beta_1 \mathbf{s} + \{\beta\}_0 \quad (1.15)$$

следуют равенства $\alpha_i = \beta_i$, $i = 0, 1, \dots, k$.

Доказательство. Умножая обе части равенства (1.15) на $(l - \mathbf{1})^k$ и учитывая, что $\mathbf{s} = l/(l - \mathbf{1})$, получим

$$\begin{aligned} \alpha_k l^k + \alpha_{k-1} l^{k-1} (l - \mathbf{1}) + \dots + \alpha_1 l (l - \mathbf{1})^{k-1} + \alpha_0 (l - \mathbf{1})^k = \\ = \beta_k l^k + \beta_{k-1} l^{k-1} (l - \mathbf{1}) + \dots + \beta_1 l (l - \mathbf{1})^{k-1} + \beta_0 (l - \mathbf{1})^k. \end{aligned}$$

Из формулы (1.6) для степеней оператора l вытекает равенство двух многочленов дискретной переменной n . Сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях этих многочленов, получим утверждение теоремы. \square

Перейдем теперь к выводу операторных формул, связывающих оператор \mathbf{s} с некоторыми элементарными функциями дискретного аргумента, и, следовательно, получим операторные изображения этих функций.

Сразу отметим, что из определения оператора \mathbf{s} следует операторная формула

$$l = (1, 1, \dots) = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s} - \mathbf{1}}.$$

Положим $x(n) = a^n$ в формуле (1.12). Получим

$$a^{n+1} = \mathbf{s}a^n - \mathbf{s} \cdot \mathbf{1},$$

откуда

$$a^n(a - \mathbf{s}) = -\mathbf{s}$$

и

$$a^n = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s} - a}. \quad (1.16)$$

Получили операторное изображение показательной функции. Отметим, что в правой части формулы a — это числовой оператор, т.е. последовательность $(a, 0, \dots, 0)$. Далее,

$$a^n - \mathbf{1} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s} - a} - \mathbf{1} = \frac{a}{\mathbf{s} - a}$$

и, следовательно,

$$\frac{a^n - \mathbf{1}}{a} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s} - a}. \quad (1.17)$$

Используя определение свертки, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - a)^2} &= \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s} - a} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s} - a} = a^n(a^{n-1} - a^{-1}) = \\ &= \sum_{k=0}^n a^{n-k}(a^{k-1} - a^{-1}) = \sum_{k=0}^n a^{n-1} - a^{n-1} = na^{n-1} = C_n^1 a^{n-1}. \end{aligned}$$

Итак,

$$na^{n-1} = \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - a)^2}. \quad (1.18)$$

В частности, для дискретной функции $f(n) = n$ получим

$$n = \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - 1)^2}. \quad (1.19)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - a)^3} &= \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - a)^2} \cdot \frac{1}{\mathbf{s} - a} = C_n^1 a^{n-1} \cdot \frac{a^n - 1}{a} = \\ &= \frac{1}{a} \left(\sum_{k=0}^n a^{n-k} C_k^1 a^{k-1} - C_n^1 a^{n-1} \right) = \\ &= a^{n-2} \left[\sum_{k=0}^n C_k^1 - C_n^1 \right] = a^{n-2} (C_{n+1}^2 - C_n^1) = C_n^2 a^{n-2}. \end{aligned}$$

Итак,

$$C_n^2 a^{n-2} = \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - a)^3}. \quad (1.20)$$

Докажем по индукции, что справедлива общая формула

$$C_n^k a^{n-k} = \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - a)^{k+1}}. \quad (1.21)$$

Если имеет место операторная формула

$$C_n^{k-1} a^{n-k+1} = \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - a)^k},$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - a)^{k+1}} &= \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - a)^k} \cdot \frac{1}{\mathbf{s} - a} = C_n^{k-1} a^{n-k+1} \cdot \frac{a^n - 1}{a} = \\ &= \frac{1}{a} \left(\sum_{i=0}^n C_i^{k-1} a^{i-k+1} a^{n-i} - C_n^{k-1} a^{n-k+1} \right) = \\ &= a^{n-k} \left(\sum_{i=k-1}^n C_i^{k-1} - C_n^{k-1} \right) = a^{n-k} (C_{n+1}^k - C_n^{k-1}) = C_n^k a^{n-k}. \end{aligned}$$

Здесь использовано тождество (1.7). Следовательно, справедлива формула (1.21).

В частности, справедлива операторная формула

$$C_n^k = \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - 1)^{k+1}}.$$

Следовательно, мы получили операторное изображение последовательности

$$C_0^k, C_1^k, C_2^k, \dots$$

Далее,

$$\frac{s^2}{(s-1)^{k+1}} = sC_n^k = C_{n+1}^k - sC_0^k = C_{n+1}^k.$$

По индукции доказывается следующая операторная формула:

$$\frac{s^{q+1}}{(s-1)^{k+1}} = s^q C_n^k = C_{n+q}^k, \quad q \geq k \geq 0.$$

Отметим, что из формулы

$$n^2 = 2C_n^2 + C_n^1$$

следует, что операторное изображение функции n^2 имеет вид

$$n^2 = \frac{s(s+1)}{(s-1)^3}.$$

Найдем теперь операторное изображение последовательности

$$C_k^n = (C_k^0, C_k^1, C_k^2, \dots).$$

Положим $k = 1$. Получим последовательность

$$C_1^n = (C_1^0, C_1^1, 0, 0, \dots) = (1, 1, 0, 0, \dots).$$

Операторное изображение этой последовательности имеет вид

$$\mathbf{1} + \sigma = \mathbf{1} + \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s}.$$

Легко видеть, что последовательность

$$C_2^n = (C_2^0, C_2^1, C_2^2, 0, 0, \dots) = (1, 2, 1, 0, 0, \dots)$$

можно записать в виде $(\mathbf{1} + \sigma)C_1^n$. Следовательно,

$$C_2^n = \frac{(s+1)^2}{s^2}.$$

Покажем по индукции, что справедлива формула

$$C_k^n = \frac{(s+1)^k}{s^k}. \quad (1.22)$$

Пусть

$$C_{k-1}^n = \frac{(s+1)^{k-1}}{s^{k-1}}.$$

Последовательность $(1 + \sigma)C_{k-1}^n$ имеет вид

$$(C_{k-1}^0, C_{k-1}^1 + C_{k-1}^0, C_{k-1}^2 + C_{k-1}^1, \dots, C_{k-1}^m + C_{k-1}^{m-1}, \dots).$$

Так как $C_{k-1}^m + C_{k-1}^{m-1} = C_k^m$, то

$$(1 + \sigma)C_{k-1}^n = C_k^n.$$

Формула (1.22) доказана.

Продолжим вычисление операторных изображений элементарных функций.

Если a комплексное число, то представим его в виде

$$a = re^{i\varphi},$$

где r — модуль, а φ — аргумент числа. Получим из формулы (1.16)

$$r^n e^{in\varphi} = \frac{s}{s - re^{i\varphi}}. \quad (1.23)$$

Отделяя вещественную и мнимую части, находим

$$r^n \cos n\varphi = \frac{s(s - r \cos \varphi)}{s^2 - 2rs \cos \varphi + r^2}, \quad (1.24)$$

$$r^n \sin n\varphi = \frac{sr \sin \varphi}{s^2 - 2rs \cos \varphi + r^2}. \quad (1.25)$$

В частности, при $r = 1$ получим формулы

$$\cos n\varphi = \frac{s(s - \cos \varphi)}{s^2 - 2s \cos \varphi + 1}, \quad (1.26)$$

$$\sin n\varphi = \frac{s \sin \varphi}{s^2 - 2s \cos \varphi + 1}. \quad (1.27)$$

При $r = 1$ и $\varphi = \pi$ получим

$$\cos n\pi = (-1)^n = \frac{s}{s+1}.$$

Отметим, что из формулы (1.24) следует формула (1.16), если положить $\varphi = 0$, $r = a$. Умножая (1.24) на $\sin \varphi$, а (1.25) на $\cos \varphi$ и складывая, получим формулу

$$r^n \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi} = \frac{s^2}{s^2 - 2rs \cos \varphi + r^2}. \quad (1.28)$$

Легко также получаются формулы

$$a^n \operatorname{ch} n\varphi = \frac{s(s - ch\varphi)}{s^2 - 2as \operatorname{ch} \varphi + a^2}, \quad (1.29)$$

$$a^n \operatorname{sh} n\varphi = \frac{as \operatorname{sh} \varphi}{s^2 - 2as \operatorname{ch} \varphi + a^2}, \quad (1.30)$$

где $\operatorname{sh} \varphi$ и $\operatorname{ch} \varphi$ — гиперболические функции. Отметим еще формулу

$$\frac{(a + ib)^n + (a - ib)^n}{2} = \frac{s(s - a)}{(s - a)^2 + b^2}, \quad (1.31)$$

которая непосредственно следует из формулы (1.16).

Установим еще несколько тождеств для биномиальных коэффициентов. Так как $l = s/(s - 1)$, то

$$lC_n^k = \frac{s}{s - 1} \frac{s}{(s - 1)^{k+1}} = s \frac{s}{(s - 1)^{k+2}} = sC_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} = \sum_{m=0}^n C_m^k.$$

Вычислим свертку

$$\begin{aligned} C_n^m \cdot C_n^r &= \sum_{k=0}^n C_k^m C_{n-k}^r = \frac{s}{(s - 1)^{m+1}} \frac{s}{(s - 1)^{r+1}} = s \frac{s}{(s - 1)^{m+r+2}} = \\ &= sC_n^{m+r+1} = C_{n+1}^{m+r+1}. \end{aligned}$$

Следовательно, получили тождество

$$\sum_{k=0}^n C_k^m C_{n-k}^r = C_{n+1}^{m+r+1}.$$

Далее, вычислим свертку

$$C_m^n \cdot C_r^n = \sum_{k=0}^n C_m^k C_r^{n-k} = \frac{(1 + s)^m}{s^m} \frac{(1 + s)^r}{s^r} = \frac{(1 + s)^{m+r}}{s^{m+r}} = C_{m+r}^n.$$

Получили биномиальное тождество

$$\sum_{k=0}^n C_m^k C_r^{n-k} = C_{m+r}^n,$$

которое называется сверткой Вандермонда.

Упражнения.

Доказать следующие тождества для биномиальных коэффициентов:

- а) $C_n^r = \sum_{k=0}^{n-r} C_{n-k-1}^{r-1}$;
- б) $\sum_{k=0}^n C_{n-k}^m C_{k+q}^r = C_{n+q+1}^{m+r+1}, \quad n, m \geq 0, \quad r \geq q \geq 0.$

В таблице 1 приведены полученные операторные формулы.

Таблица 1
Оригиналы и изображения

N	$f(n)$	$F(s)$
1	a^n	$\frac{s}{s-a}$
2	na^{n-1}	$\frac{s}{(s-a)^2}$
3	n	$\frac{s}{(s-1)^2}$
4	n^2	$\frac{s(s+1)}{(s-1)^3}$
5	$(-1)^n$	$\frac{s}{s+1}$
6	C_n^k	$\frac{s}{(s-1)^{k+1}}$
7	C_k^n	$\frac{(1+s)^k}{s^k}$
8	$C_n^k a^{n-k}$	$\frac{s}{(s-a)^{k+1}}$
9	$r^n \cos n\varphi$	$\frac{s(s-r \cos \varphi)}{s^2 - 2rs \cos \varphi + r^2}$
10	$r^n \sin n\varphi$	$\frac{sr \sin \varphi}{s^2 - 2rs \cos \varphi + r^2}$
11	$r^n \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}$	$\frac{s^2}{s^2 - 2rs \cos \varphi + r^2}$
12	$a^n \operatorname{ch} n\varphi$	$\frac{s(s - \operatorname{ch} \varphi)}{s^2 - 2as \operatorname{ch} \varphi + a^2}$
13	$a^n \operatorname{sh} n\varphi$	$\frac{rs \operatorname{sh} \varphi}{s^2 - 2as \operatorname{ch} \varphi + a^2}$
14	$\frac{(a+ib)^n + (a-ib)^n}{2}$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$

1.2.1. Замечание о Z -преобразовании

Читатели, которые знакомы с Z -преобразованием, могут заметить, что формулы (1.16)–(1.31) совпадают с операционными формулами, полученными с помощью Z -преобразования (см., например, Деч [21]),

если s заменить на z . Это совпадение неслучайно. Напомним, что при Z -преобразовании дискретной функции $a(n)$ соответствует функция комплексного переменного z :

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(n)}{z^n}.$$

Если

$$|a(k)| \leq Kk^n,$$

где K, k — некоторые положительные числа, то функция $A(z)$ аналитическая вне некоторого круга $|z| > R$ ($R < k$).

Сумме дискретных функций $a(n)$ и $b(n)$ соответствует сумма $A(z) + B(z)$ их Z -преобразований. Свертке дискретных функций

$$a(n) \cdot b(n) = \sum_{k=0}^n a(n-k)b(k)$$

соответствует произведение $A(z) \cdot B(z)$ их Z -преобразований.

Будем рассматривать дискретные функции, для которых зафиксированы постоянные K и k . Тогда соответствующие Z -преобразования представляют собой аналитические вне круга $|Z| > k$ функции. Оператору a/b поставим в соответствие функцию комплексного переменного, которая представима в виде $A(z)/B(z)$, где $A(z)$ и $B(z)$ являются Z -преобразованиями функций $a(n)$ и $b(n)$ соответственно, причем $B(z)$ не равна тождественно нулю. Тогда полю операторов взаимно однозначно будет соответствовать поле функций комплексного переменного, которые представимы в виде $A(z)/B(z)$, причем операциям над операторами будут соответствовать арифметические операции над функциями комплексного переменного.

1.2.2. Производящие функции

Производящей функцией последовательности a_0, a_1, \dots называется формальный степенной ряд

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

Производящая функция является алгебраическим объектом и, вообще говоря, не обладает функционально-аналитическими свойствами. Следовательно, над производящими функциями можно производить алгебраические действия. Если $A(t)$ и $B(t)$ — производящие функции последовательностей $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ и $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots)$, то $A(t) + B(t)$ —

производящая функция последовательности $a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots$. Произведением производящих функций $A(t)$ и $B(t)$ называется производящая функция

$$A(t) \cdot B(t) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)t + \dots,$$

т.е. $A(t) \cdot B(t)$ — производящая функция последовательности, которая является сверткой последовательностей **a** и **b**.

Легко проверить, что введенные операции сложения и умножения производящих функций обладают свойствами коммутативности и ассоциативности.

Вычислим производящую функцию $L(t)$ для последовательности $l = (1, 1, 1, \dots)$. Очевидно, $L(t) = 1 + t + t^2 + \dots$. Заметим, что $tL(t) = t + t^2 + \dots = L(t) - 1$. Отсюда получим, что

$$L(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Заметим, что эта формула получается из операторного представления оператора l :

$$l = \frac{s}{s-1},$$

если положить $s = 1/t$. Далее, из таблицы 1 операторных изображений можно получить таблицу производящих функций для элементарных функций (см. табл. 2).

Обратим внимание на формулу 7 из таблицы 2. Она означает, что справедливо равенство

$$\sum_{k \geq 0} C_n^k t^k = (1+t)^n, \quad n \geq 0.$$

Естественно предполагается, что $C_n^k = 0$, если $k > n$. Поэтому слева стоит конечная сумма. При $t = 1$ получаем известное тождество

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n.$$

При $t = -1$ получим тождество

$$C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

Производящие функции удобно использовать для вычисления различных сумм, содержащих биномиальные коэффициенты.

Таблица 2
Простейшие производящие функции

N	$f(n)$	$A(t)$
1	1	$\frac{1}{1-t}$
2	a^n	$\frac{1}{1-at}$
3	na^n	$\frac{at}{(1-at)^2}$
4	n	$\frac{t}{(1-t)^2}$
5	n^2	$\frac{t(t+1)}{(1-t)^3}$
6	C_n^k	$\frac{t^k}{(1-t)^{k+1}}$
7	C_k^n	$(1+t)^n$
8	$C_n^k a^n$	$\frac{(at)^k}{(1-at)^{k+1}}$
9	$(-1)^n$	$\frac{1}{1+t}$
10	$r^n \sin \varphi$	$\frac{rt \sin \varphi}{1 - 2rt \cos \varphi + r^2 t^2}$

Отметим сначала, что разложение некоторой функции в степенной ряд позволяет найти производящую функцию для последовательности коэффициентов этого ряда. Приведем примеры. Из разложения

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} x^k$$

следует, что для последовательности $(-1)^k/(k+1)$, $k = 0, 1, \dots$ производящая функция имеет вид $\ln(1+x)/x$. Используя биномиальный ряд

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots,$$

где α — произвольное вещественное число, можно найти производящие функции для многих последовательностей. Положим в биномиальном

ряде $\alpha = -1/2$, $x = -4y$. Получим разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1-4y}} = 1 + \frac{1}{2}4y + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2!}4^2y^2 + \dots + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots \frac{2m-1}{2}}{m!}4^my^m + \dots$$

В коэффициенте a_m при y^m умножим числитель и знаменатель на $m!$ и сократим числитель на 2^m . Тогда

$$a_m = \frac{(2m)!}{(m!)^2} = C_{2m}^m.$$

Следовательно, функция

$$\frac{1}{\sqrt{1-4y}}$$

является производящей для последовательности C_{2k}^k , $k = 0, 1, 2, \dots$

Аналогично устанавливается, что функция

$$\frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x})$$

является производящей для последовательности

$$\frac{1}{k+1}C_{2k}^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Упражнения.

1. Доказать справедливость формул

a)

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots + (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k + \dots,$$

где $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)$, $(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k$;

b)

$$\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}x^{2k-1};$$

c)

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \dots + \frac{1}{2k+1}x^{2k} + \dots \right);$$

d)

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} \left(\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \right)^m = \sum_{k \geq 0} C_{2k+m}^k x^k.$$

2. Найти производящую функцию для последовательностей

а) $1 \cdot 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 4, 3 \cdot 4 \cdot 5, 4 \cdot 5 \cdot 6, \dots$;

б) $C_{2k-1}^k, k = 0, 1, 2, \dots$;

с) $(-1)^k C_n^k, k = 0, 1, 2, \dots$.

Метод производящих функций позволяет доказывать различные тождества, содержащие биномиальные коэффициенты. Приведем простой пример.

Вычислим сумму

$$f(n) = \sum_k C_n^k 2^{n-k}.$$

Производящая функция для $f(n)$ имеет вид

$$F(t) = \sum_{n \geq 0} f(n) t^n = \sum_{n \geq 0} t^n \sum_k C_n^k 2^{n-k}.$$

Переставляя порядки суммирования, получим

$$F(t) = \sum_k 2^{-k} \sum_{n \geq 0} C_n^k 2^n t^n.$$

Производящая функция для $C_n^k 2^n$ согласно таблице 2 есть $(2t)^k (1 - 2t)^{k+1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_k 2^{-k} \frac{(2t)^k}{(1 - 2t)^{k+1}} = \frac{1}{1 - 2t} \sum_k \left(\frac{t}{1 - 2t} \right)^k = \frac{1}{1 - 2t} \frac{1}{1 - \frac{t}{1 - 2t}} = \\ &= \frac{1 - 2t}{(1 - 2t)(1 - 3t)} = \frac{1}{1 - 3t} = 3^n. \end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$f(n) = \sum_k C_n^k 2^{n-k} = 3^n.$$

Упражнения.

Вычислить суммы

а)

$$\sum_k C_n^k a^{n-k};$$

б)

$$\sum_k C_{n+k}^{3k} 3^{n-k}.$$

Подробнее с описанным методом вычисления сумм, содержащих биномиальные коэффициенты, можно ознакомиться по книге Wilf [15]. В этой книге, а также в книгах [20] и [23] содержится подробное изложение свойств производящих функций и их применений в различных областях математики.

Глава 2

Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами

2.1. Линейные разностные уравнения первого порядка

2.1.1. Уравнения с постоянным коэффициентом в однородной части

Рассмотрим линейное разностное уравнение первого порядка

$$x(n+1) - ax(n) = f(n), \quad (2.1)$$

где a — постоянная, $f(n)$ — дискретная функция, определенная при $n \geq 0$. В силу формулы (1.12)

$$x(n+1) = sx(n) - sx(0).$$

Подставляя это выражение в (2.1), получим

$$(s - a)x(n) = f(n) + sx(0).$$

Это уравнение назовем изображающим уравнением. Оно обладает двумя важными особенностями. Во-первых, оно является линейным алгебраическим уравнением относительно $x(n)$; во-вторых, содержит начальное значение $x(0)$. Решение изображающего уравнения получается сразу и имеет вид

$$x(n) = \frac{s}{s - a}x(0) + \frac{1}{s - a}f(n).$$

Теперь из формул (1.16) и (1.17) следует, что изображению решения соответствует оригинал

$$x(n) = a^n x(0) + \frac{a^n - 1}{a} \cdot f(n).$$

Вычисляя свертку, получим

$$x(n) = a^n x(0) + \frac{1}{a} \left[\sum_{k=0}^n a^{n-k} f(k) - f(n) \right].$$

Решение имеет вид

$$x(n) = a^n x(0) + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} f(k) = a^n x(0) + \sum_{k=1}^n a^{n-k} f(k-1), \quad n \geq 1. \quad (2.2)$$

Отметим, что из формулы (2.2) следует, что решение уравнения (2.1) однозначно определяется начальным условием.

Формула (2.2) содержит громоздкую операцию — вычисление свертки. Ее можно избежать, если удастся найти операторное изображение функции $f(n)$.

Приведем пример. Рассмотрим уравнение

$$x(n+1) = 2x(n) + 2^{n+1} - 1, \quad x(0) = 0. \quad (2.3)$$

Изображающее уравнение имеет вид

$$sx - sx(0) = 2x + 2 \frac{s}{s-2} - l.$$

Учитывая, что $x(0) = 0$, получим операторное изображение решения

$$x = 2 \frac{s}{(s-2)^2} - l \frac{1}{s-2}.$$

Оригинал первого слагаемого в силу формулы (1.18) равен $n2^n$. Вычислим оригинал для второго слагаемого

$$l \frac{1}{s-2} = l \frac{2^n - 1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (2^k - 1) = \frac{1}{2} (2 + 2^2 + \dots + 2^n) = 2^n - 1.$$

Решение уравнения (2.3) имеет вид

$$x(n) = (n-1)2^n + 1.$$

Следовательно, метод решения уравнения (2.1) состоит в следующем. Сначала переходим к изображающему уравнению, которое является алгебраическим уравнением. Затем, решая изображающее уравнение, получим рациональное выражение относительно оператора s , которое является изображением некоторой дискретной функции. Эта функция и дает решение первоначальной задачи.

Покажем, как задачу (2.3) можно решить, используя производящие функции. Производящую функцию решения $x(n)$ уравнения (2.3) можно представить в виде следующего формального ряда

$$A(t) = x(0) + x(1)t + x(2)t^2 + \dots = x(1)t + x(2)t^2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)t^k.$$

Тогда производящая функция, соответствующая $x(n+1)$, имеет вид

$$x(1) + x(2)t + x(2)t^2 + \dots = \frac{A(t)}{t}.$$

Из таблицы 2 для производящих функций находим, что

$$2^{n+1} = \frac{2}{1-2t}, \quad 1 = \frac{1}{1-t}.$$

Теперь из (2.3) получим уравнение для нахождения производящей функции $A(t)$:

$$\frac{A(t)}{t} = 2A(t) + \frac{2}{1-2t} - \frac{1}{1-t}.$$

Перенесем слагаемое с $A(t)$ из правой части в левую часть и сложим дроби, стоящие в левой части. Получим

$$\left(\frac{1}{t} - 2\right) A(t) = \frac{1}{(1-t)(1-2t)}.$$

Следовательно, производящая функция решения $x(n)$ имеет вид

$$A(t) = \frac{t}{(1-t)(1-2t)^2}.$$

Осталось найти дискретную функцию, которой соответствует производящая функция $A(t)$. Выражение для $A(t)$ представим в виде суммы трех дробей со знаменателями $1-t$, $1-2t$, $(1-2t)^2$ соответственно. Такое представление называется разложением на простейшие дроби. Это разложение имеет вид

$$\frac{t}{(1-t)(1-2t)^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1-2t} + \frac{c}{(1-2t)^2}, \quad (2.4)$$

где постоянные a , b , c подлежат определению. Умножим обе части равенства (2.4) на $(1 - 2t)^2$ и перейдем к пределу при $t \rightarrow 1/2$. Получим $c = 1$. Тогда (2.4) запишется в виде

$$\frac{t}{(1-t)(1-2t)^2} - \frac{1}{(1-2t)^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1-2t}.$$

Выполнив вычитание дробей в левой части, получим

$$-\frac{1}{(1-t)(1-2t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1-2t}.$$

Для вычисления постоянной a умножим обе части последнего равенства на $(1-t)$ и перейдем к пределу при $t \rightarrow 1$, а для вычисления постоянной b умножим обе части этого равенства на $(1-2t)$ и перейдем к пределу при $t \rightarrow 1/2$. Получим $a = 1$, $b = -2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{1-t} - \frac{2}{1-2t} + \frac{1}{(1-2t)^2} = \frac{1}{1-t} - \frac{2}{1-2t} + \frac{1-2t+2t}{(1-2t)^2} = \\ &= \frac{1}{1-t} - \frac{2}{1-2t} + \frac{1}{1-2t} + \frac{2t}{(1-2t)^2} = \frac{1}{1-t} - \frac{1}{1-2t} + \frac{2t}{(1-2t)^2}. \end{aligned}$$

Обращаясь к таблице 2 представления дискретных функций через производящие функции, получим, что решение уравнения (2.3) имеет вид

$$x(n) = (n-1)2^n + 1.$$

2.1.2. Уравнения, которые преобразуются в линейные уравнения первого порядка

Некоторые разностные уравнения после преобразования переходят в разностные уравнения первого порядка. Приведем примеры.

Анализ одного из алгоритмов сортировки приводит к уравнению (см. Lueker [9])

$$x(n) = 2x(n/2) + n - 1, \quad n \geq 2, \quad x(1) = 0. \quad (2.5)$$

Положим $n = 2^k$ и $x(2^k) = y(k)$. Тогда $x(n/2) = x(2^{k-1}) = y(k-1)$ и уравнение (2.5) перейдет в разностное уравнение первого порядка

$$y(k) = 2y(k-1) + 2^k - 1, \quad k \geq 1, \quad y(0) = 0.$$

Запишем это уравнение в виде

$$y(k+1) = 2y(k) + 2^{k+1} - 1, \quad k \geq 0, \quad y(0) = 0.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (2.3). Поэтому

$$y(k) = (k - 1)2^k + 1.$$

Так как $k = \log_2 n$, то решение уравнения (2.5) имеет вид

$$x(n) = (\log_2 n - 1)n + 1, \quad n \geq 2.$$

В качестве второго примера рассмотрим нелинейное разностное уравнение

$$x(n) = 3x^2(n - 1), \quad x(0) = 1, \quad n \geq 1. \quad (2.6)$$

Положим $y(n) = \log_2 x(n)$. Тогда уравнение (2.6) переходит в уравнение

$$y(n) = 2y(n - 1) + \log_2 3, \quad y(0) = 0, \quad n \geq 1.$$

Запишем это уравнение в виде

$$y(n + 1) = 2y(n) + \log_2 3, \quad y(0) = 0, \quad n \geq 0.$$

Изображающее уравнение имеет вид

$$(s - 2)y = l \log_2 3.$$

Следовательно,

$$y = l \frac{1}{s - 2} \log_2 3$$

и

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \log_2 3 = (2^n - 1) \log_2 3.$$

Отсюда получим решение уравнения (2.6)

$$x(n) = 2^{(2^n - 1) \log_2 3} = 3^{2^n - 1}.$$

Числа Каталана определяются нелинейным разностным уравнением

$$c(n + 1) = \sum_{k=0}^n c(n - k)c(k), \quad c(0) = 1.$$

Изображающее уравнение имеет вид

$$sc(n) - s = c(n) \cdot c(n) = (c(n))^2.$$

Отсюда получим

$$c(n) = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4s}}{2}.$$

Положим $s = 1/t$. Получим производящую функцию для чисел Каталана

$$A(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}.$$

Знак «+» опущен, так как разложение соответствующей функции в степенной ряд содержит отрицательные степени. В разделе 1.2.2 показано, что этой производящей функции соответствует дискретная функция

$$\frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

Следовательно, числа Каталана определяются формулой

$$c(n) = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

Упражнения.

1. Найти решение следующих уравнений двумя способами, используя операторное исчисление и производящие функции.

- a) $x(n+1) = 3x(n) + 3^n n$, $x(0) = 1$;
- b) $x(n+1) = 3x(n) + 2^n$, $x(0) = 1$;
- c) $x(n+1) = 5x(n) - 2^{-n}$, $x(0) = 2$;
- d) $x(n+1) = ax(n) + b$, $x(0) = c$, где b — постоянная.

2. Решить уравнения

- a) $x(n) = 2x(n+1) + 3^n x(n)x(n+1)$.
(Указание: перейти к уравнению относительно $1/x(n)$);
- b) $x(n) = 2x(n/3) - 1$, $n \geq 2$, $x(1) = 1$.
(Указание: положить $n = 3^k$);
- c) $x(n) = ax^m(n-1)$, $x(0) = 1$, $a > 0$, $n \geq 1$;
- d) $x(n) = 3^n x^4(n-1)$, $x(0) = 2$.

3. Пусть $m > 0$ — целое число. Дискретная функция $x(n)$ называется периодической с периодом m , если $x(n+m) = x(n)$, $n = 0, 1, \dots$. При каком a все решения уравнения $x(n+1) = ax(n)$ являются периодическими с периодом m ?

4. Дискретная функция $x(n)$ называется антипериодической с периодом m , если $x(n+m) = -x(n)$, $n = 0, 1, \dots$. При каких a все решения уравнения $x(n+1) = ax(n)$ являются антипериодическими с периодом m ? При каких a все решения этого уравнения удовлетворяют соотношению $x(n+m) = \rho x(n)$, где ρ — некоторое вещественное число?

2.1.3. Уравнения с периодической неоднородностью

Вернемся к уравнению (2.1). Пусть $f(n)$ — периодическая функция с периодом m , где $m > 0$ — целое число. Такое число называется натуральным. Выясним условия, при которых уравнение (2.1) имеет единственное периодическое решение периода m .

Пусть $x(n)$ — решение уравнения (2.1). Тогда $x(n + m)$ также будет решением этого уравнения, что следует из равенства

$$x(n + m + 1) = ax(n + m) + f(n + m) = ax(n + m) + f(n).$$

Условие периодичности $x(n + m) = x(n)$ означает, что решения $x(n + m)$ и $x(n)$ совпадают. В частности, они совпадают при $n = 0$, т. е. $x(0) = x(m)$. Так как решения однозначно определяются начальными условиями, то из последнего условия следует, что решения $x(n)$ и $x(n + m)$ совпадают при всех n . Обратимся к формуле (2.2). В силу этой формулы равенство $x(0) = x(m)$ означает, что

$$x(m) = a^m x(0) + \sum_{k=1}^m a^{m-k} f(k-1) = x(0).$$

Отсюда следует, что $x(0)$ однозначно определяется, если $a^m - 1 \neq 0$, формулой

$$x(0) = -\frac{1}{a^m - 1} \sum_{k=1}^l a^{m-k} f(k-1).$$

Таким образом, при условии $a^m - 1 \neq 0$ уравнение (2.1) имеет единственное периодическое решение, определяемое формулой

$$x(n) = -\frac{a^n}{a^m - 1} \sum_{k=1}^m a^{m-k} f(k-1) + \sum_{k=1}^n a^{n-k} f(k-1).$$

Из условия $a^m - 1 \neq 0$ следует, что однородное уравнение

$$x(n + 1) = ax(n)$$

не имеет периодических решений с периодом m . Следовательно, уравнение (2.1) имеет единственное периодическое решение с периодом m тогда и только тогда, когда однородное уравнение не имеет периодических решений с периодом m .

Упражнения.

1. Найти условия существования единственного антипериодического решения уравнения (2.1) периода m ($x(n + m) = -x(n)$).

2. Найти условия существования единственного решения уравнения (2.1), удовлетворяющего условию $x(n+m) = \rho x(n)$, где ρ — вещественное число.

2.1.4. Уравнения с переменным коэффициентом в однородной части

Перейдем теперь к линейному уравнению первого порядка с переменным коэффициентом $a(n)$

$$x(n+1) = a(n)x(n) + f(n). \quad (2.7)$$

Предположим, что $a(n) \neq 0$ при всех $n \geq 0$.

Остановимся сначала на однородном уравнении

$$x(n+1) = a(n)x(n).$$

Из цепочки равенств

$$x(1) = a(0)x(0), \quad x(2) = a(1)x(1) = a(0)a(1)x(0),$$

$$x(3) = a(2)x(2) = a(0)a(1)a(2)x(0), \dots$$

следует, что

$$x(n) = a(0)a(1)a(2) \cdots a(n-1)x(0) = \prod_{k=0}^{n-1} a(k)x(0), \quad n \geq 1. \quad (2.8)$$

В качестве первого примера рассмотрим уравнение

$$x(n+1) = \frac{(n+1)}{a}x(n), \quad x(0) = 1.$$

Используя формулу (2.8), получим

$$x(n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{a^n} = \frac{n!}{a^n}.$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$x(n+1) = \frac{r+n}{n+1}x(n), \quad x(0) = 1,$$

где r — целое число. Из формулы (2.8) следует, что

$$x(n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{r+k}{k+1} = C_{r+n-1}^n.$$

Упражнения.

1. Найти решения уравнений

a)

$$x(n+1) = \frac{1}{n+1}x(n), \quad x(0) = 1;$$

b)

$$x(n+1) = \frac{2n+1}{2n+2}x(n), \quad x(0) = 1;$$

c) $x(n+1) = e^{\frac{i\pi n}{3}}x(n)$, $x(0) = 2$;

d) $x(n+1) = (\cos 2^n \alpha)x(n)$, $x(0) = 1$.

2. Решить уравнение

$$c(n+1) = \frac{4n+2}{n+2}c(n), \quad c(0) = 1.$$

Показать, что

$$c(n) = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n,$$

т. е. $c(n)$ — числа Каталана.

Перейдем теперь к неоднородному уравнению (2.7). Введем в рассмотрение функцию

$$z(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \prod_{k=0}^{n-1} a(k), & n \geq 1. \end{cases}$$

Разделим обе части уравнения (2.7) на функцию $z(n+1)$:

$$\frac{x(n+1)}{z(n+1)} = a(n) \frac{x(n)}{z(n+1)} + \frac{f(n)}{z(n+1)}. \quad (2.9)$$

Заметим, что

$$\frac{a(n)}{z(n+1)} = \frac{1}{z(n)}.$$

Положим $y(n) = x(n)/z(n)$. Тогда уравнение (2.9) перейдет в линейное уравнение с постоянным коэффициентом относительно $y(n)$:

$$y(n+1) = y(n) + \frac{f(n)}{z(n+1)}.$$

Из формулы (2.2) следует, что

$$y(n) = y(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(k)}{z(k+1)}.$$

Поэтому решение уравнения (2.7) имеет вид

$$\begin{aligned} x(n) &= x(0)z(n) + \sum_{k=1}^n \frac{z(n)f(k-1)}{z(k)} = \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} a(k) \left[x(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(k)}{\sum_{m=0}^k a(m)} \right] = \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} a(k) \left[x(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f(k-1)}{\sum_{m=0}^{k-1} a(m)} \right], \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Формула (2.10) показывает, что решение однозначно определяется начальным условием.

Найдем решение уравнения (см. [20])

$$x(n+1) = \frac{(n+1)}{2}x(n) + \frac{3}{2}(n+1)!, \quad x(0) = 5.$$

Мы не будем пользоваться готовой формулой, а непосредственно проведем замену переменных. Легко видеть, что решение однородного уравнения

$$x(n+1) = \frac{(n+1)}{2}x(n)$$

имеет вид

$$x(n) = \frac{n!}{2^n}.$$

Введем новую переменную $y(n)$ по формуле

$$x(n) = \frac{n!}{2^n}y(n).$$

Выполняя замену переменных, приходим к уравнению

$$y(n+1) = y(n) + 3 \cdot 2^n.$$

Отметим, что $y(0) = x(0) = 5$ (мы полагаем $0! = 1$). Решение последнего уравнения имеет вид

$$y(n) = y(0) + 3 \sum_{k=1}^n 2^{k-1} = 5 + 3(2^n - 1) = 3 \cdot 2^n + 2.$$

Поэтому решение исходного уравнения имеет вид

$$x(n) = \frac{n!}{2^n} [3 \cdot 2^n + 2].$$

Иногда говорят, что $\frac{n!}{2^n}$ — суммирующий множитель для исходного уравнения.

Упражнения.

Найти решение уравнений

- а) $x(n+1) = 2^n x(n) + 2^{n^2}$, $x(0) = 3$;
- б) $x(n+1) = nx(n) + 3n^2 - n$, $n \geq 2$;
- в) $x(n+1) = 2^n x(n/2) + 2$, $x(0) = 1$;
- г) $x(n+1) = 3^n x^{2^n}(n)$, $x(0) = 2$.

2.1.5. Уравнения с периодическими коэффициентами

Рассмотрим уравнение (2.7)

$$x(n+1) = a(n)x(n) + f(n),$$

где $a(n)$ и $f(n)$ — дискретные периодические функции с периодом m (m — натуральное число), т.е. $a(n+m) = a(n)$, $f(n+m) = f(n)$, $n = 0, 1, \dots$. Выясним, когда это уравнение имеет единственное периодическое решение с периодом m . Уравнение (2.7) может иметь единственное периодическое решение только в том случае, когда однородное уравнение $x(n+1) = a(n)x(n)$ не имеет периодических решений с периодом m , кроме нулевого решения ($x(n) = 0$, $n \geq 0$). В самом деле, если бы уравнение (2.7) имело два периодических решения $x_1(n)$ и $x_2(n)$, то

$$x_1(n+1) - x_2(n+1) = a(n)(x_1(n) - x_2(n))$$

и, следовательно, функция $y(n) = x_1(n) - x_2(n)$ была бы нетривиальным периодическим решением однородного уравнения. Из периодичности функций $a(n)$ и $f(n)$ следует, что вместе с функцией $x(n)$ и функция $x(n+m)$ является решением уравнения (2.7). Эти решения совпадают, если они совпадают в начальный момент, т.е. периодичность решения ($x(n+m) = x(n)$) следует из равенства $x(m) = x(0)$. Последнее равенство дает возможность определить начальное условие периодического решения. Из формулы (2.10) следует, что

$$x(m) = \prod_{k=0}^{m-1} a(k)x(0) + \prod_{k=0}^{m-1} a(k) \sum_{k=1}^l \frac{f(k-1)}{\sum_{m=0}^{k-1} a(m)} = x(0).$$

Получили линейное алгебраическое уравнение для определения $x(0)$.

Отметим, что число $L = \prod_{k=0}^{m-1} a(k)$ не равно 1. В самом деле, если $u(n)$ —

решение однородного уравнения

$$u(n+1) = a(n)u(n),$$

то $u(m) = Lu(0)$. Если $L = 1$, то однородное уравнение имеет ненулевое периодическое решение периода m . Мы предположили, что однородное уравнение не имеет нетривиальных периодических решений. Следовательно, начальное условие $x(0)$ периодического решения уравнения (2.7) однозначно определяется.

Упражнение.

Найти периодическое решение уравнения

$$x(n+1) + (-1)^n x(n) = 3(-1)^n.$$

2.2. Линейные разностные уравнения второго порядка

2.2.1. Операторный метод решения

Рассмотрим неоднородное разностное уравнение второго порядка

$$x(n+2) + ax(n+1) + bx(n) = f(n), \quad (2.11)$$

где a, b — вещественные числа, $b \neq 0$, $f(n)$ — дискретная функция.

Найдем сначала операторное изображение решения уравнения (2.11). Из формул (1.12) и (1.13) получим изображающее уравнение

$$s^2 x(n) - s^2 x(0) - sx(1) + a[sx(n) - sx(0)] + bx(n) = f(n),$$

или

$$(s^2 + as + b)x(n) = (s^2 + as)x(0) + sx(1) + f(n).$$

Положим $p(s) = s^2 + as + b$. Тогда решение изображающего уравнения имеет вид

$$x(n) = \frac{s^2 + as}{p(s)} x(0) + \frac{s}{p(s)} x(1) + \frac{1}{p(s)} f(n). \quad (2.12)$$

Чтобы получить оригинал решения, нам необходимо сначала рассмотреть однородное разностное уравнение, т. е. уравнение (2.11) при $f(n) \equiv 0$.

Для однородного разностного уравнения второго порядка

$$x(n+2) + ax(n+1) + bx(n) = 0 \quad (2.13)$$

операторное изображение решения имеет вид

$$x(n) = \frac{s(s+a)}{p(s)}x(0) + \frac{s}{p(s)}x(1). \quad (2.14)$$

Многочлен $p(s)$ назовем характеристическим многочленом однородного уравнения (2.13). Также говорят, что уравнение $p(s) = 0$ является характеристическим уравнением для уравнения (2.13).

Простые корни характеристического многочлена

Предположим сначала, что корни s_1 и s_2 характеристического многочлена $p(s)$ различны. Тогда $p(s) = (s - s_1)(s - s_2)$.

Каждое слагаемое правой части (2.14) представляет собой дробно-рациональную функцию, знаменатель которой есть произведение $(s - s_1)(s - s_2)$. Эту функцию можно представить в виде суммы двух дробно-рациональных функций, в знаменателе которых стоит либо $s - s_1$, либо $s - s_2$. Такое разложение называется разложением на простейшие дроби.

Разложим каждое слагаемое правой части (2.14) на простейшие дроби. Для первого слагаемого получим

$$\frac{s(s+a)}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{As}{s-s_1} + \frac{Bs}{s-s_2}.$$

Коэффициенты A и B находятся следующим образом. Умножая обе части равенства на $(s - s_1)$, получим

$$\frac{s(s+a)(s-s_1)}{(s-s_1)(s-s_2)} = As + (s-s_1)\frac{Bs}{s-s_2}.$$

В этом равенстве перейдем к пределу при $s \rightarrow s_1$. Получим

$$A = \frac{s_1 + a}{s_1 - s_2}.$$

Умножая обе части равенства на $(s - s_2)$ и переходя к пределу при $s \rightarrow s_2$, получим

$$B = \frac{s_2 + a}{s_2 - s_1}.$$

Аналогично для второго слагаемого правой части (2.14) получим

$$\frac{s}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{1}{s_1-s_2} \frac{s}{s-s_1} + \frac{1}{s_2-s_1} \frac{s}{s-s_2}.$$

Поэтому из операторных формул следует, что

$$x(n) = \left(\frac{s_1 + a}{s_1 - s_2} s_1^n + \frac{s_2 + a}{s_2 - s_1} s_2^n \right) x(0) + \frac{s_2^n - s_1^n}{s_2 - s_1} x(1).$$

Учитывая, что $a = -s_1 - s_2$, получим формулу для решения однородного уравнения

$$x(n) = \frac{s_2 s_1^n - s_1 s_2^n}{s_2 - s_1} x(0) + \frac{s_2^n - s_1^n}{s_2 - s_1} x(1).$$

Таким образом, решение однородного уравнения (2.13) выражается через показательные функции s_1^n и s_2^n и начальные условия $x(0)$ и $x(1)$. Чтобы получить решение неоднородного уравнения (2.11), нужно вычислить свертку

$$\frac{1}{p(s)} \cdot f(n).$$

Из формулы (1.17) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(s)} &= \frac{1}{s_2 - s_1} \left[\frac{1}{s - s_2} - \frac{1}{s - s_1} \right] = \\ &= \frac{1}{s_2 - s_1} \left[\frac{s_2^n - 1}{s_2} - \frac{s_1^n - 1}{s_1} \right] = \frac{1}{s_2 - s_1} \frac{s_1 s_2^n - s_2 s_1^n}{s_1 - s_2} + \frac{1}{s_1 s_2}. \end{aligned}$$

Для свертки получим выражение

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(s)} \cdot f(n) &= \left[\frac{1}{s_2 - s_1} \frac{s_1 s_2^n - s_2 s_1^n}{s_1 s_2} + \frac{1}{s_1 s_2} \right] \cdot f(n) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s_2^{n-k-1} - s_1^{n-k-1}}{s_2 - s_1} f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_2^{n-k} - s_1^{n-k}}{s_2 - s_1} f(k-1). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что слагаемое при $k = n$ равно нулю.

Таким образом, решение уравнения (2.11) в случае, когда характеристический многочлен имеет простые корни, определяется формулой

$$x(n) = \frac{s_2 s_1^n - s_1 s_2^n}{s_2 - s_1} x(0) + \frac{s_2^n - s_1^n}{s_2 - s_1} x(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_2^{n-k} - s_1^{n-k}}{s_2 - s_1} f(k-1). \quad (2.15)$$

Назовем функцию

$$g_n(s_1, s_2) = \frac{s_2^n - s_1^n}{s_2 - s_1}$$

функцией Коши или функцией Грина начальной задачи. Очевидно, функция $g_n(s_1, s_2)$ — это решение однородного уравнения (2.13) с начальными условиями $x(0) = 0$, $x(1) = 1$. Формулу (2.15) можно записать в

виде

$$x(n) = -bg_{n-1}(s_1, s_2)x(0) + g_n(s_1, s_2)x(1) + \sum_{k=1}^n g_{n-k}(s_1, s_2)f(k-1). \quad (2.16)$$

Следовательно, если найдена функция Коши, то решение уравнения (2.11) определяется формулой (2.16).

Отметим еще, что в случае комплексных корней s_1, s_2 характеристического уравнения функцию Коши, а следовательно, и все решение можно представить в вещественной тригонометрической форме. Действительно, комплексные корни вещественного уравнения обязательно являются комплексно сопряженными. Поэтому можно положить

$$s_1 = a + ib = re^{-i\varphi}, \quad s_2 = (a - ib) = re^{i\varphi},$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$. Тогда

$$g_n(s_1, s_2) = \frac{r^n(e^{in\varphi} - e^{-in\varphi})}{r(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})} = r^{n-1} \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}. \quad (2.17)$$

Кратные корни характеристического многочлена

Перейдем теперь к случаю, когда корни характеристического многочлена кратные. Тогда

$$s_1 = s_2 = -\frac{a}{2}, \quad b = \frac{a^2}{4}, \quad p(s) = \left(s + \frac{a}{2}\right)^2.$$

Представим дробь

$$\frac{s + a}{\left(s + \frac{a}{2}\right)^2}$$

в виде суммы двух дробей

$$\frac{s + a}{\left(s + \frac{a}{2}\right)^2} = \frac{A}{s + \frac{a}{2}} + \frac{B}{\left(s + \frac{a}{2}\right)^2}.$$

Умножая на $\left(s + \frac{a}{2}\right)^2$ обе части последнего равенства и устремляя s к $-a/2$, получим $B = a/2$. Вычитая из

$$\frac{s + a}{\left(s + \frac{a}{2}\right)^2}$$

дробь

$$\frac{a/2}{\left(s + \frac{a}{2}\right)^2},$$

находим, что $A = 1$. Поэтому формула (2.14) для решения однородного уравнения в случае кратных корней характеристического многочлена принимает вид

$$x(n) = \left(\frac{s}{s + \frac{a}{2}} + \frac{\frac{a}{2}s}{\left(s + \frac{a}{2}\right)^2} \right) x(0) + \frac{s}{\left(s + \frac{a}{2}\right)^2} x(1).$$

Из формул (1.16) и (1.18) следует, что

$$x(n) = \left(-\frac{a}{2}\right)^n [1 - n]x(0) + n \left(-\frac{a}{2}\right)^{n-1} x(1). \quad (2.18)$$

Очевидно, функция Коши имеет вид

$$g_n(s_1) = ns_1^{n-1} = n \left(-\frac{a}{2}\right)^{n-1}.$$

Поэтому общее решение неоднородного уравнения записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} x(n) &= \left(-\frac{a}{2}\right)^n [1 - n]x(0) + n \left(-\frac{a}{2}\right)^{n-1} x(1) + \sum_{k=1}^n (n-k) \left(-\frac{a}{2}\right)^{n-k-1} f(k-1) = \\ &= -bg_{n-1}(s_1)x(0) + g_n(s_1)x(1) + \sum_{k=1}^n g_{n-k}(s_1)f(k-1). \end{aligned}$$

В практических расчетах полученные здесь формулы не должны применяться: вместо этого следует каждый раз вновь выполнять указанные выше отдельные шаги решения. Вычисление последнего слагаемого — свертки функции Коши и функции $f(n)$ — представляет собой громоздкую операцию. Ее можно избежать, если удастся представить $f(n)$ в операторной форме и найти оригинал для операторного изображения свертки.

2.2.2. Примеры неоднородных уравнений

Приведем примеры неоднородных уравнений.

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = n. \quad (2.19)$$

Найдем решение уравнения (2.19) с начальными условиями

$$x(0) = x(1) = 1.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$p(s) = s^2 - 3s + 2 = (s - 1)(s - 2) = 0.$$

Операторное изображение решения

$$x(n) = \frac{s(s-3)}{(s-1)(s-2)} + \frac{s}{(s-1)(s-2)} + \frac{1}{(s-1)(s-2)} \cdot n.$$

Учитывая, что

$$n = \frac{s}{(s-1)^2},$$

получим

$$x(n) = \frac{s(s-2)}{(s-1)(s-2)} + \frac{s}{(s-1)^3(s-2)} = \frac{s}{s-1} + \frac{s}{(s-1)^3(s-2)}.$$

Разлагаем второе слагаемое на простейшие дроби

$$\frac{1}{(s-1)^3(s-2)} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{(s-1)^2} + \frac{c}{(s-1)^3} + \frac{d}{s-2}. \quad (2.20)$$

Умножая обе части равенства (2.20) на $(s-1)^3$ и переходя к пределу при $s \rightarrow 1$, получим $c = -1$. Затем переносим слагаемое $-1/(s-1)^3$ в левую часть равенства (2.20). Получим

$$\frac{1}{(s-1)^3(s-2)} + \frac{1}{(s-1)^3} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{(s-1)^2} + \frac{d}{s-2}.$$

Далее, сложим дроби в левой части последнего равенства

$$\frac{1}{(s-1)^2(s-2)} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{(s-1)^2} + \frac{d}{s-2}. \quad (2.21)$$

Умножая обе части (2.21) на $(s-1)^2$ и переходя к пределу при $s \rightarrow 1$, получим $b = -1$. Переносим слагаемое $-1/(s-1)^2$ в левую часть равенства (2.21), получим

$$\frac{1}{(s-1)^2(s-2)} + \frac{1}{(s-1)^2} = \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{a}{s-1} + \frac{d}{s-2}.$$

Умножая последнее равенство на $s-1$ и переходя к пределу при $s \rightarrow 1$, находим, что $a = -1$. Аналогичные вычисления дают значение $d = 1$. Итак,

$$\frac{s}{(s-1)^3(s-2)} = -\frac{s}{s-1} - \frac{s}{(s-1)^2} - \frac{s}{(s-1)^3} + \frac{s}{s-2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{s}{s-1} - \frac{s}{s-1} - \frac{s}{(s-1)^2} - \frac{s}{(s-1)^3} + \frac{s}{s-2} = \\ &= -\frac{s}{(s-1)^2} - \frac{s}{(s-1)^3} + \frac{s}{s-2} = -n - \frac{n(n-1)}{2} + 2^n = \\ &= -\frac{n^2+n}{2} + 2^n = -C_{n+1}^2 + 2^n. \end{aligned}$$

Можно решить уравнение (2.19), используя производящие функции. Наметим этот путь решения задачи. Решению $x(n)$ уравнения (2.19) соответствует производящая функция

$$A(t) = x(0) + tx(1) + t^2x(2) + \dots = 1 + t + \sum_{k=2}^{\infty} t^k x(k).$$

Тогда дискретной функции $x(n+1)$ соответствует производящая функция

$$A_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)t^k = x(1) + tx(2) + \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x(k+1)t^k,$$

а $x(n+2)$ соответствует производящая функция

$$A_2(t) = x(2) + x(3)t + x(4)t^2 + \dots$$

Легко видеть, что

$$A_1(t) = \frac{A(t) - 1}{t}, \quad A_2(t) = \frac{A(t) - 1 - t}{t^2}.$$

Далее, дискретной функции $f(n) = n$ соответствует производящая функция

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t}{(1-t)^2}.$$

Умножаем обе части уравнения (2.19) на t^k и суммируем ряд для $k \geq 0$. Получим алгебраическое уравнение для определения производящей функции $A(t)$:

$$\frac{A(t) - 1 - t}{t^2} - 3\frac{A(t) - 1}{t} + 2A(t) = \frac{t}{(1-t)^2}.$$

Из этого равенства следует, что

$$A(t) \left(\frac{2t^2 - 3t + 1}{t^2} \right) = \frac{1+t}{t^2} - \frac{3}{t} + \frac{t}{(1-t)^2}.$$

В виде упражнения предлагаем читателю проделать дальнейшие вычисления, найти выражение $A(t)$ в виде суммы простейших дробей и получить формулу для решения уравнения (2.19).

Найдем решение уравнения

$$x(n+2) - 2x(n+1) + 4x(n) = n^2 2^n \quad (2.22)$$

с начальными условиями $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

Характеристический многочлен однородного уравнения

$$x(n+2) - 2x(n+1) + 4x(n) = 0$$

имеет вид

$$p(s) = s^2 - 2s + 4 = (s - 2)^2.$$

Представим функцию $n^2 2^n$ в операторной форме. Из формулы (1.21) следует, что

$$\frac{C_n^2}{4} 2^n = \frac{s}{(s-2)^3}, \quad \frac{1}{2} \frac{C_n^1}{4} 2^n = \frac{s}{4(s-2)^2}.$$

Поэтому

$$n^2 2^n = \frac{2s^2 + 4s}{(s-2)^3}.$$

Изображающее уравнение для (2.22) имеет вид

$$s^2 x(n) - s - 2s x(n) + 4x(n) = \frac{2s^2 + 4s}{(s-2)^3}.$$

Отсюда получим представление решения в операторной форме

$$x(n) = \frac{s}{(s-2)^2} + \frac{2s^2 + 4s}{(s-2)^5}.$$

Из формулы (1.21) получим оригинал решения

$$x(n) = \frac{1}{2} n 2^n + \frac{1}{4} (C_n^4 + C_{n+1}^4) 2^n.$$

Найдем решение уравнения

$$x(n+2) + 4x(n) = 2^n \sin \frac{n\pi}{2}. \quad (2.23)$$

с начальными условиями $x(0) = 2$, $x(1) = 1$. В силу формулы (1.25) операторное представление правой части имеет вид

$$2^n \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{2s}{s^2 + 4}.$$

Поэтому изображающее уравнение для (2.23) выглядит следующим образом:

$$s^2 x - sx(1) - s^2 x(0) + 4x = \frac{2s}{s^2 + 4}.$$

Учитывая начальные условия, получим операторное изображение решения уравнения (2.23)

$$x = \frac{2s^2}{s^2 + 4} + \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{2s}{(s^2 + 4)^2}. \quad (2.24)$$

Определим оригиналы для каждого из трех слагаемых правой части уравнения (2.24). Для первого и второго слагаемых из формул (1.24) и (1.25) получим

$$\frac{2s^2}{s^2 + 4} = 2^{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}, \quad \frac{s}{s^2 + 4} = 2^{n-1} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Третье слагаемое разложим на простейшие дроби. Разложение с неопределенными коэффициентами имеет вид

$$\frac{2}{(s^2 + 4)^2} = \frac{A}{(s + 2i)^2} + \frac{B}{s + 2i} + \frac{C}{(s - 2i)^2} + \frac{D}{s - 2i}. \quad (2.25)$$

Найдем коэффициент A . Умножим обе части разложения (2.25) на $(s + 2i)^2$. Получим

$$\frac{2}{(s - 2i)^2} = A + B(s + 2i) + (s + 2i)^2 \left[\frac{C}{(s - 2i)^2} + \frac{D}{s - 2i} \right].$$

Переходя к пределу при $s \rightarrow (-2i)$, находим, что $A = -1/8$. Аналогично, умножая (2.25) на $(s - 2i)^2$ и переходя к пределу при $s \rightarrow 2i$, получим $C = -1/8$. Разложение (2.25) теперь можно переписать в виде

$$\frac{2}{(s^2 + 4)^2} - \frac{1}{8(s + 2i)^2} - \frac{1}{8(s - 2i)^2} = \frac{B}{s + 2i} + \frac{D}{s - 2i}.$$

Вычисляя правую часть этого разложения, получим

$$\frac{2}{s^2 + 4} = \frac{B}{s + 2i} + \frac{D}{s - 2i}.$$

Умножая это разложение на $s + 2i$ и переходя к пределу при $s \rightarrow (-2i)$, получим $B = -1/2i$. Аналогично находим, что $D = 1/2i$. Следовательно,

$$\frac{2s}{(s^2 + 4)^2} = -\frac{1}{8(s + 2i)^2} - \frac{1}{2i(s + 2i)} - \frac{1}{8(s - 2i)^2} + \frac{1}{2i(s - 2i)}.$$

Учитывая, что $2i = 2e^{\frac{i\pi}{2}}$, из формул (1.18), (1.24) и (1.25) получим

$$\begin{aligned} \frac{2s}{(s^2 + 4)^2} &= -\frac{1}{8}n2^{n-1}e^{\frac{i(n-1)\pi}{2}} - \frac{1}{8}n2^{n-1}e^{-\frac{i(n-1)\pi}{2}} - \frac{1}{2i}e^{\frac{in\pi}{2}} + \frac{1}{2i}e^{-\frac{in\pi}{2}} = \\ &= -n2^{n-3}\cos\frac{(n-1)\pi}{2} - 2^n\sin\frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Решение уравнения (2.23) имеет вид

$$\begin{aligned} x(n) &= 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{2} + 2^{n-1}\sin\frac{n\pi}{2} - n2^{n-3}\sin\frac{n\pi}{2} - 2^n\sin\frac{n\pi}{2} = \\ &= 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{2} - 2^{n-1}\sin\frac{n\pi}{2} - n2^{n-3}\sin\frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

2.2.3. Общее решение однородного уравнения

Однородное уравнение с переменными коэффициентами

Мы сначала рассмотрим некоторые общие свойства однородного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

$$L(x) = x(n+2) + a(n)x(n+1) + b(n)x(n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.26)$$

где $b(n) \neq 0$ при всех n . Если $x_1(n)$ и $x_2(n)$ — два решения уравнения (2.26), то функция

$$y(n) = C_1x_1(n) + C_2x_2(n),$$

где C_1, C_2 — произвольные числа, также является решением этого уравнения. Это следует из очевидного равенства

$$L(C_1x_1 + C_2x_2) = C_1L(x_1) + C_2L(x_2).$$

Таким образом, решения уравнения (2.26) можно умножать на произвольные постоянные и складывать, после этих операций снова получаются решения.

Если задать значения решения $x(n)$ при $n = 0$ и $n = 1$, т. е. задать числа $x(0)$ и $x(1)$, то решение уравнения (2.26) однозначно определяется из цепочки равенств

$$x(2) = a(0)x(1) + b(0)x(0), \quad x(3) = a(1)x(2) + b(1)x(1), \dots$$

Очевидно, уравнение (2.26) имеет нулевое решение $x(n) \equiv 0$, которому соответствуют нулевые начальные условия $x(0) = x(1) = 0$. В дальнейшем будем рассматривать решения уравнения (2.26), отличные от нулевого решения.

Пусть $x_1(n)$ и $x_2(n)$ — два решения уравнения (2.26). Введем в рассмотрение определитель

$$\Delta(n) = \begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{vmatrix}. \quad (2.27)$$

Этот определитель называется казоратианом в честь итальянского математика 19 века Казорати (Casoratti), глубоко осознавшего аналогию между дифференциальными и разностными уравнениями.

Вычислим определитель (2.27). В определителе

$$\Delta(n+1) = \begin{vmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) \end{vmatrix}$$

заменяем элементы второй строки их выражениями из уравнения (2.26). Получим определитель

$$\Delta(n+1) = \begin{vmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) \\ -a(n)x_1(n+1) - b(n)x_1(n) & -a(n)x_2(n+1) - b(n)x_2(n) \end{vmatrix}.$$

Элементы первой строки этого определителя умножим на $a(n)$ и прибавим ко второй строке. Получим

$$\Delta(n+1) = \begin{vmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) \\ -b(n)x_1(n) & -b(n)x_2(n) \end{vmatrix} = b(n)\Delta(n).$$

Следовательно, казоратиан является решением линейного однородного уравнения первого порядка и определяется формулой

$$\Delta(n) = \prod_{k=0}^{n-1} b(k)\Delta(0). \quad (2.28)$$

Так как $b(n)$ отлично от нуля при всех n , то казоратиан $\Delta(n)$ или тождественно равен нулю (если $\Delta(0) = 0$), или не равен нулю ни при одном n .

Два решения $x_1(n)$ и $x_2(n)$ уравнения (2.26), отличные от нулевого, называются *линейно независимыми*, если из соотношения

$$C_1x_1(n) + C_2x_2(n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.29)$$

где C_1, C_2 — постоянные, следует, что $C_1 = C_2 = 0$. Если же соотношение (2.29) имеет место с ненулевыми постоянными C_1, C_2 , то решения $x_1(n)$ и $x_2(n)$ называются *линейно зависимыми*. Заметим, что при $C_1 = 0, C_2 \neq 0$ из (2.29) следует $x_2(n) \equiv 0$. Поэтому естественно предположить, что $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$. Из линейной зависимости решений $x_1(n), x_2(n)$ следует соотношение $x_2(n) = Cx_1(n)$, где постоянная C не равна нулю. Из этого соотношения непосредственно вытекает, что *казоратиан двух линейно зависимых решений тождественно равен нулю*.

Пусть теперь казоратиан для решений $x_1(n)$ и $x_2(n)$ тождественно равен нулю. Тогда, в частности,

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ x_1(1) & x_2(1) \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что $x_1(0)x_2(1) = x_2(0)x_1(1)$. Если $x_1(0) \neq 0$, то

$$x_2(1) = Cx_1(1),$$

где $C = x_2(0)/x_1(0)$. Решение $y(n) = x_2(n) - Cx_1(n)$ уравнения (2.26) — это решение с нулевыми начальными условиями ($y(0) = y(1) = 0$). Поэтому $y(n)$ — нулевое решение. Следовательно,

$$y(n) = x_2(n) - Cx_1(n) \equiv 0$$

и решения $x_1(n)$ и $x_2(n)$ линейно зависимы. Предоставляем читателю изучить случаи, когда первая или вторая строка определителя $\Delta(0)$ состоит из нулей.

Мы получили следующее утверждение: *равенство нулю казоратиана $\Delta(n)$ является необходимым и достаточным условием линейной зависимости решений $x_1(n)$ и $x_2(n)$* . Таким образом, *два решения $x_1(n)$ и $x_2(n)$ линейно независимы тогда и только тогда, когда казоратиан этих решений отличен от нуля*.

Пусть $x_1(n)$ и $x_2(n)$ два линейно независимых решения уравнения (2.26). Тогда любое решение $x(n)$ уравнения (2.26) можно представить в виде

$$x(n) = C_1x_1(n) + C_2x_2(n), \quad (2.30)$$

где постоянные C_1 и C_2 однозначно определяются по начальным условиям $x(0), x(1)$ решения $x(n)$. В самом деле, система уравнений

$$\begin{aligned} C_1x_1(0) + C_2x_2(0) &= x(0), \\ C_1x_1(1) + C_2x_2(1) &= x(1) \end{aligned}$$

относительно C_1, C_2 имеет единственное решение, так как определитель этой системы отличен от нуля. Говорят, что формула (2.30) дает общее решение уравнения (2.26).

Минимальное решение однородного уравнения

Ненулевое решение $x(n)$ уравнения (2.26) называется *минимальным*, если существует решение $y(n)$ уравнения (2.26) такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(n)}{y(n)} = 0.$$

Решение $y(n)$ называется *доминантным*. Решения $x(n)$ и $y(n)$ линейно независимы, так как все решения, имеющие форму $cx(n)$, где c — ненулевая постоянная, являются минимальными.

Лемма о минимальном решении. Если $x(n)$ и $y(n)$ линейно независимые решения уравнения (2.26) и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(n)}{y(n)} = R,$$

то уравнение (2.26) имеет минимальное решение.

В самом деле, если $R = \infty$, то решение $y(n)$ минимальное. Если $R \neq \infty$, то решения $z(n) = x(n) - Ry(n)$ и $y(n)$ линейно независимы и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(n)}{y(n)} = 0.$$

Следовательно, решение $z(n) = x(n) - Ry(n)$ будет минимальным.

Уравнение

$$x(n+2) + x(n) = 0$$

доставляет пример уравнения, которое не имеет минимального решения. В этом легко убедиться, если учесть, что общее решение этого уравнения представляется в виде

$$x(n) = c_1 e^{i \frac{n\pi}{2}} + c_2 e^{-i \frac{n\pi}{2}}.$$

Уравнение с постоянными коэффициентами

$$x(n+2) + ax(n+1) + bx(n) = 0$$

имеет минимальное решение в том и только в том случае, когда корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения $p(s) = s^2 + as + b = 0$ различны по модулю. Докажите это!

Однородное уравнение с постоянными коэффициентами

Операторный метод дает возможность построить общее решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$x(n+2) + ax(n+1) + bx(n) = 0, \quad b \neq 0, \quad (2.31)$$

т. е. решение, зависящее от двух произвольных постоянных, из которого любое решение получается при определенном выборе постоянных.

Пусть сначала корни характеристического многочлена $p(s)$ различны. Разложим операторное изображение решения уравнения (2.31) на простейшие дроби, не вычисляя коэффициенты при простейших дробях. Получим

$$x(n) = \frac{s(s+a)}{p(s)}x(0) + \frac{s}{p(s)}x(1) = C_1 \frac{s}{s-s_1} + C_2 \frac{s}{s-s_2},$$

где числа C_1 и C_2 зависят от начальных условий $x(0)$, $x(1)$ и коэффициентов a , b уравнения (2.31). Переходя к оригиналам, получим

$$x(n) = C_1 s_1^n + C_2 s_2^n. \quad (2.32)$$

Решения s_1^n и s_2^n линейно независимы, так как казориан этих решений

$$\Delta(n) = \begin{vmatrix} s_1^n & a_2^n \\ s_1^{n+1} & a_2^{n+1} \end{vmatrix} = s_1^n s_2^n \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Следовательно, постоянные C_1 и C_2 однозначно определяются по начальным условиям.

В случае кратных корней характеристического многочлена $p(s)$ получим

$$x(n) = C_1 \frac{s}{s + \frac{a}{2}} + C_2 \frac{s}{(s + \frac{a}{2})^2} = C_1 \left(-\frac{a}{2}\right)^n + C_2 n \left(-\frac{a}{2}\right)^{n-1}.$$

Полученную формулу можно записать в виде

$$x(n) = C_1 \left(-\frac{a}{2}\right)^n + C'_2 n \left(-\frac{a}{2}\right)^n, \quad (2.33)$$

где $C'_2 = -\frac{2}{a}C_2$. Легко показывается, что постоянные C_1 и C'_2 однозначно определяются по начальным условиям $x(0)$, $x(1)$.

Упражнение. Показать, что функции a^n и na^n линейно независимы.

Если корни s_1, s_2 — комплексные, то формула (2.32) дает комплексное представление решения $x(n)$. Чтобы получить решение в вещественной форме, нужно взять произвольные постоянные C_1 и C_2 комплексно сопряженными:

$$\begin{aligned} x(n) &= (A + iB)r^n e^{in\varphi} + (A - iB)r^n e^{-in\varphi} = \\ &= 2Ar^n \cos n\varphi - 2Br^n \sin n\varphi. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Если $s_1 = \alpha + i\beta, s_2 = \alpha - i\beta$, то $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \varphi = \arccos \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$.

Поэтому предыдущую формулу можно записать в виде

$$x(n) = 2(\alpha^2 + \beta^2)^{n/2} \left(A \cos n \arccos \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + B \sin n \arccos \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right).$$

Из формул, определяющих общее решение однородного уравнения, следует, что в случае, когда корни характеристического многочлена $p(s)$ по модулю меньше 1, общее решение $x(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Если же хотя бы один из корней характеристического многочлена по модулю больше 1, то $x(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Отметим, что казориан для двух решений уравнения (2.31) определяется формулой

$$\Delta(n) = b^n \Delta(0).$$

Упражнения

1. Найти решения следующих однородных уравнений двумя способами:

1) с помощью перехода к операторному изображению и применению операторных формул,

2) найти функцию Коши и записать решение с ее помощью.

Сравнить полученные формулы.

a) $x(n+2) + x(n) = 0, \quad x(0) = 2, \quad x(1) = 1;$

b) $x(n+2) + x(n+1) + x(n) = 0, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 1;$

c) $x(n+2) + 2x(n+1) - x(n) = 0, \quad x(0) = 1/2, \quad x(1) = 3/4;$

d) $x(n+2) + 6x(n+1) + 9x(n) = 0, \quad x(0) = 3, \quad x(1) = -1;$

e) $x(n+2) - 5x(n+1) + 6x(n) = 0, \quad x(0) = x(1) = 1;$

f) $x(n+2) - \sqrt{3}x(n+1) + x(n) = 0, \quad x(0) = x(1) = 2.$

2. Найти общее решение однородного уравнения

a) $x(n+2) + \sqrt{2}x(n+1) + x(n) = 0;$

b) $x(n+2) + 3x(n+1) + 6x(n) = 0;$

c) $x(n+2) - 6x(n+1) + 9x(n) = 0;$

d) $x(n+2) + \frac{1}{9}x(n) = 0.$

3. Найти решения неоднородных уравнений

a) $x(n+2) + x(n) = \cos n\frac{\pi}{2}, \quad x(0) = x(1) = 0;$

b) $x(n+2) - x(n) = n, \quad x(0) = x(1) = 0;$

c) $x(n+2) - x(n+1) - 6x(n) = 4^n, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 0;$

d) $x(n+2) - x(n+1) + x(n) = \cos n\alpha, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 1;$

e) $x(n+2) - 7x(n+1) + 12x(n) = n^2 - n, \quad x(0) = x(1) = 2.$

4. Найти решение уравнения

$$x(n) = 3x(n/2) - x(n/4) + n^2, \quad x(1) = 0, \quad x(2) = 0, \quad n \geq 3.$$

2.2.4. Некоторые уравнения с переменными коэффициентами

Мы опишем некоторые классы уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, для которых можно построить в явном виде решение.

Иногда удастся понизить порядок разностного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение (см. [14], [19])

$$x(n+2) - (n+2)x(n+1) + nx(n) = n, \quad n \geq 1. \quad (2.35)$$

Определим функцию $z(n)$ уравнением

$$z(n+1) - z(n) = n. \quad (2.36)$$

Тогда, как легко видеть,

$$x(n+1) - nx(n) = z(n). \quad (2.37)$$

Решение уравнения (2.36) в силу формулы (2.2) имеет вид

$$z(n) = z(1) + \sum_{k=1}^{n-1} k = z(1) + C_n^2, \quad n > 1.$$

Поэтому уравнение (2.37) принимает вид

$$x(n+1) - nx(n) = z(1) + C_n^2,$$

или

$$x(n+1) - nx(n) = x(2) - x(1) + C_n^2. \quad (2.38)$$

Решение уравнения (2.35) в силу формулы (2.10) имеет вид

$$x(n) = (n-1)! \left[x(1) + \sum_{k=1}^n \frac{C_{k-1}^2 + x(2) - x(1)}{(k-1)!} \right].$$

Последнюю формулу можно записать в виде

$$x(n) = (n-1)! \left[\left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \right) x(1) + x(2) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-3} \frac{1}{k!} \right], \quad (2.39)$$

причем полагаем $0! = 1$.

Следовательно, формула (2.39) дает решение уравнения (2.35) при $n \geq 3$.

Понизить порядок уравнения (2.35) удалось потому, что это уравнение можно записать в виде

$$\Delta(x(n+1) - nx(n)) = n,$$

где $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$. Следовательно, приходим к разностному уравнению первого порядка

$$\Delta z(n) = n.$$

Таким же методом решается и более общее уравнение

$$x(n+2) - (f(n+1) + 1)x(n+1) + f(n)x(n) = g(n),$$

где $f(n), g(n)$ — дискретные функции. (Проверьте это!).

В качестве следующего примера рассмотрим уравнение

$$(n+2)x(n+2) - (n+3)x(n+1) + 2x(n) = 0. \quad (2.40)$$

Положим

$$z(n) = (n+1)x(n+1) - 2x(n).$$

Тогда уравнение (2.40) перейдет в уравнение

$$z(n+1) - z(n) = 0.$$

Решение этого уравнения $z(n) \equiv B$, где B — постоянная. Следовательно, получим уравнение первого порядка

$$(n+1)x(n+1) - 2x(n) = B,$$

или

$$x(n+1) - \frac{2}{n+1}x(n) = \frac{B}{n+1}.$$

Легко видеть, что решение однородного уравнения

$$x(n+1) - \frac{2}{n+1}x(n) = 0$$

имеет вид

$$x(n) = A \frac{2^n}{n!},$$

где A — постоянная. Поэтому общее решение уравнения (2.40) имеет вид

$$x(n) = \frac{2^n}{n!} \left[A + B \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{2^{k+1}} \right].$$

В книге Kelley, Peterson [7] решение уравнения (2.40) получено с помощью метода производящих функций.

Понизить порядок уравнения второго порядка удастся в том случае, когда известно частное решение. Рассмотрим уравнение

$$x(n+2) + a(n)x(n+1) + b(n)x(n) = 0. \quad (2.41)$$

Пусть $Y(n)$ — решение уравнения (2.41), которое отлично от нуля при всех рассматриваемых значениях n . Следовательно, справедливо тождество

$$Y(n+2) + a(n)Y(n+1) + b(n)Y(n) \equiv 0.$$

Будем искать решение уравнения (2.41) в виде $x(n) = Y(n)z(n)$. Подставим эту формулу в уравнение (2.41) и учтем, что

$$a(n)Y(n+1) = -Y(n+2) - b(n)Y(n).$$

Получим

$$Y(n+2)(z(n+2) - z(n+1)) - b(n)Y(n)(z(n+1) - z(n)) = 0.$$

Полагая $u(n) = z(n+1) - z(n)$, приходим к уравнению первого порядка

$$Y(n+2)u(n+1) - b(n)Y(n)u(n) = 0.$$

Упражнения.

1. Найти решение уравнений

а) $x(n+2) - (2^{n+1} + 1)x(n+1) + 2^n x(n) = 4^n, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 0;$

b) $x(n+2) - (C_{n+1}^2 + 1)x(n+1) + C_n^1 x(n) = n^2 \quad x(0) = x(1) = 0;$
 c)

$$x(n+3) - (2 + (n+2)^2)x(n+2) + (1 - (n+1)^2)x(n+1) - n^2 x(n) = 2^n, \\ x(0) = 1, \quad x(1) = 3.$$

(Указание: представить уравнение в виде

$$\Delta^2 z(n) = z(n+2) - 2z(n+1) + z(n) = 2^n;$$

d)

$$(n+3)x(n+2) - (5n+7)x(n+1) + 4nx(n) = 1, \quad x(0) = x(1) = 1;$$

e)

$$x(n+2) - (n+1)x(n+1) + nx(n) = 3^n, \quad x(0) = 2, \quad x(1) = 1;$$

f)

$$nx(n+2) + (1-n)x(n+1) - 2x(n) = 0, \quad x(1) = 1, \quad x(2) = 0.$$

(Указание: уравнение имеет решение $Y(n) = n$);

g)

$$x(n+2) + nx(n+1) - (3n+9)x(n) = 1, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 3.$$

(Указание: однородное уравнение имеет решение $Y(n) = 3^n$).

Рассмотрим теперь уравнение

$$x(n+2) - 3nx(n+1) + 2n(n-1)x(n) = n!.$$

Сделаем замену переменных

$$x(n) = (n-2)!y(n), \quad n > 2.$$

Получим уравнение

$$n!y(n+2) - 3n(n-1)!y(n+1) + 2n(n-1)(n-2)!y(n) = n!.$$

Разделим обе части этого уравнения на $n!$. Получим уравнение с постоянными коэффициентами

$$y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 1.$$

Легко видеть, что частное решение неоднородного уравнения — это $y(n) = -n$. Учитывая, что характеристический многочлен имеет вид $p(s) = s^2 - 3s + 2 = (s - 1)(s - 2)$, получим общее решение

$$y(n) = C_1 + C_2 2^n - n.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$x(n) = (n - 2)! (C_1 + C_2 2^n - n), \quad n > 2.$$

Таким же способом решается более общее уравнение

$$x(n + 2) + a_1 f(n) x(n + 1) + a_2 f(n) f(n - 1) x(n) = g(n),$$

где a_1, a_2 — числа и функция $f(n)$ отлична от нуля при всех n . Это уравнение приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами, если сделать замену

$$x(n) = f(n - 2) f(n - 3) \cdots f(2) f(1) y(n).$$

После замены получим неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y(n + 2) + a_1 y(n + 1) + a_2 y(n) = \frac{g(n)}{f(n) f(n - 1) \cdots f(2) f(1)}.$$

Упражнения.

Решить уравнения

а)

$$x(n + 2) - 3 \cdot 2^n x(n + 1) - 4 \cdot 2^{2n-1} x(n) = 1, \quad x(0) = x(1) = 1;$$

б)

$$x(n + 2) + 2 \cdot 5^{n/2} x(n + 1) + 5^{n-1/2} x(n) = (-1)^n, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 2;$$

с)

$$x(n + 2) + \left(\cos n \frac{\pi}{3} \right) x(n + 1) + \left(\cos n \frac{\pi}{3} \cos(n - 1) \frac{\pi}{3} \right) x(n) = 0, \\ x(0) = 1, \quad x(1) = -1.$$

Рассмотрим уравнение

$$(n + 1)(n + 2)x(n + 2) + a(n + 1)x(n + 1) + bx(n) = f(n),$$

где a и b — некоторые числа. Сделаем замену переменных

$$x(n) = \frac{1}{n!}y(n).$$

Выполнив замену, получим

$$\frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)!}y(n+2) + a\frac{(n+1)}{(n+1)!}y(n+1) + b\frac{1}{n!}y(n) = f(n).$$

Произведем сокращения и домножим левую и правую часть на $n!$. Получим уравнение с постоянными коэффициентами

$$y(n+2) + ay(n+1) + by(n) = n!f(n).$$

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$(n+1)(n+2)x(n+2) + 8(n+1)x(n+1) - 9x(n) = 0, \quad x(0) = 2, \quad x(1) = -3.$$

После замены

$$x(n) = \frac{1}{n!}y(n)$$

получим уравнение

$$y(n+2) + 8y(n+1) - 9y(n) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = -3.$$

Корни характеристического уравнения $s^2 + 8s - 9 = 0$ равны $s_1 = 1$, $s_2 = -9$. Изображение решения этого уравнения имеет вид

$$y = \frac{2s^2 + 13s}{(s-1)(s+9)}.$$

Разлагаем изображение на простейшие дроби

$$y = \frac{2s_1 + 13}{s_1 - s_2} \frac{s}{s - s_1} - \frac{2s_2 + 13}{s_1 - s_2} \frac{s}{s - s_2}$$

Следовательно,

$$y(n) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-9)^n.$$

Отсюда следует, что

$$x(n) = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-9)^n}{n!}.$$

Упражнения.

Решить уравнения

а) $(n+1)(n+2)x(n+2) + 9x(n) = 0, \quad x(0) = -1, \quad x(1) = -1/2;$

б)

$$(n+1)(n+2)x(n+2) + (n+1)x(n+1) + 1/4x(n) = 1/n!(n^2 - 2n),$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 2;$$

с)

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}x(n+2) - \frac{1}{n+1}x(n+1) + 3x(n) = 0, \quad x(0) = 2, \quad x(1) = -4.$$

(Сделать замену $x(n) = n!y(n)$).

2.2.5. Некоторые нелинейные уравнения

К уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами иногда удается привести некоторые нелинейные уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$x(n+1) = 1 - \frac{1}{x(n)}.$$

В этом уравнении сделаем замену, положив

$$x(n) = \frac{y(n+1)}{y(n)}.$$

После замены получим линейное однородное уравнение

$$y(n+2) - y(n+1) + y(n) = 0.$$

Характеристическое уравнение $s^2 - s + 1 = 0$ имеет корни

$$s_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}.$$

Поэтому общее решение линейного уравнения имеет вид

$$y(n) = C_1 \cos \frac{\pi}{3}n + C_2 \sin \frac{\pi}{3}n,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Решение исходного нелинейного уравнения имеет вид

$$x(n) = \frac{C_1 \cos \frac{\pi}{3}(n+1) + C_2 \sin \frac{\pi}{3}(n+1)}{C_1 \cos \frac{\pi}{3}n + C_2 \sin \frac{\pi}{3}n}.$$

Таким образом, все решения нелинейного уравнения являются периодическими с периодом 6 (Проверьте это!).

Упражнение. При каких значениях параметра a все решения уравнения

$$x(n+1) = a - \frac{a}{x(n)}$$

будут периодическими?

К линейному уравнению приводится и следующее нелинейное уравнение

$$x(n+1) = \frac{ax(n) + b}{cx(n) + d},$$

где $c \neq 0$, $D = ad - bc \neq 0$. Проверьте, что замены

$$x(n) = y(n) - \frac{d}{c}, \quad y(n) = \frac{z(n+1)}{z(n)}.$$

приводят исходное уравнение к линейному разностному уравнению второго порядка.

Упражнения.

Найти решение уравнений

а)

$$x(n+1) = \frac{3x(n)}{x(n) + 4};$$

б) при каких a, b, c, d все решения уравнения

$$x(n+1) = \frac{ax(n) + b}{cx(n) + d}$$

будут периодическими;

с)

$$x(n+2) = \frac{x^\alpha(n+1)}{x^\beta(n)}, \quad x(1) = 1, \quad x(2) = 2.$$

где α и β — вещественные числа.

(Указание: прологарифмировать исходное уравнение);

д) При каких α и β все решения уравнения

$$x(n+2) = \frac{x^\alpha(n+1)}{x^\beta(n)}$$

будут периодическими.

2.3. Некоторые приложения

Рассмотрим некоторые задачи теории чисел, анализа и алгебры, в которых появляются линейные однородные разностные уравнения второго порядка.

2.3.1. Числа Фибоначчи

Рассмотрим уравнение

$$x(n+2) = x(n+1) + x(n) \quad (2.42)$$

с начальными условиями $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

Решение уравнения (2.42) с заданными начальными условиями определяет последовательность F_n чисел Фибоначчи. Эти числа впервые появились в вышедшей в 1202 году «Книге аббака», итальянского математика Леонардо Фибоначчи. Фибоначчи ввел последовательность чисел Фибоначчи, решая задачу о размножении кроликов. Числа Фибоначчи возникают в разнообразных задачах. Например, французский математик Эдуард Люка, используя некоторые свойства чисел Фибоначчи, доказал, что число $2^{127} - 1$ является простым (т.е. не имеет делителей, кроме 1 и самого себя).

Приведем значения нескольких первых чисел Фибоначчи

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

Найдем выражение чисел Фибоначчи для любого n . Решаем уравнение (2.42). Характеристическое уравнение

$$p(s) = s^2 - s - 1 = 0$$

имеет различные корни

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{s(s-1)}{(s-\alpha)(s-\beta)} x(0) + \frac{s}{(s-\alpha)(s-\beta)} x(1) = \\ &= \frac{s}{(s-\alpha)(s-\beta)} = A \frac{s}{s-\alpha} + B \frac{s}{s-\beta}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$A = \frac{1}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad B = \frac{1}{\beta - \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Следовательно, получим формулу

$$x(n) = F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad (2.43)$$

где $n = 0, 1, \dots$. Формула (2.43) дает представление чисел Фибоначчи для любого n . Она называется формулой Бине. Формула (2.43) представляется громоздкой. Однако с ее помощью можно установить ряд закономерностей для чисел Фибоначчи. Формула Бине дает ответ на вопрос, как быстро возрастают числа Фибоначчи. Нетрудно доказать, что число Фибоначчи F_n есть ближайшее целое число к

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Это утверждение следует из неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left| \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right| < \frac{1}{2}.$$

Следующее соотношение для чисел Фибоначчи

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

называется законом Кассини. Из формулы Бине следует, что закон Кассини — это следующее соотношение

$$\frac{1}{5} \left[(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) - (\alpha^n - \beta^n)^2 \right] = (-1)^n.$$

Выполняя алгебраические действия в квадратных скобках, получим, что выражение в квадратных скобках можно записать в виде

$$-\frac{1}{5}\alpha^{n-1}\beta^{n-1}(\alpha - \beta)^2.$$

Учитывая, что $\alpha\beta = -1$, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, получим соотношение Кассини.

Вычислим еще предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{[(1 + \sqrt{5})/2]^{n+1} - [(1 - \sqrt{5})/2]^{n+1}}{[(1 + \sqrt{5})/2]^n - [(1 - \sqrt{5})/2]^n} = \\ &= \frac{[(1 + \sqrt{5})/2]^{n+1} \{1 - [(1 - \sqrt{5})/(1 + \sqrt{5})]^{n+1}\}}{[(1 + \sqrt{5})/2]^n \{1 - [(1 - \sqrt{5})/(1 + \sqrt{5})]^n\}} = \\ &= [(1 + \sqrt{5})/2] \frac{\{1 - [(1 - \sqrt{5})/(1 + \sqrt{5})]^{n+1}\}}{\{1 - [(1 - \sqrt{5})/(1 + \sqrt{5})]^n\}}.\end{aligned}$$

Так как

$$\left| \frac{(1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})} \right| < 1,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

С помощью формулы Бине удобно суммировать ряды, связанные с числами Фибоначчи.

Упражнения.

1. Вычислить сумму

$$s_n(x) = F_1 x + F_2 x^2 + \dots + F_n x^n.$$

Указание: применить формулу Бине и суммировать две геометрические прогрессии.

2. Найти сумму кубов первых n чисел Фибоначчи

$$F_1^3 + F_2^3 + \dots + F_n^3.$$

3. Вычислить сумму

$$F_3 + F_6 + F_9 + \dots + F_{3n}.$$

4. Показать, что число F_{kn} делится на F_n (k — натуральное число).

5. Вычислить свертку $\sum_{k=0}^n F_{n-k} F_k$.

6. Числа Фибоначчи второго порядка \mathcal{F}_n определяются разностным уравнением

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} + F_n, \quad n \geq 1,$$

причем $\mathcal{F}_0 = 0$ и $\mathcal{F}_1 = 1$. Найти формулу для чисел \mathcal{F}_n . Выразить числа \mathcal{F}_n через числа Фибоначчи F_n и F_{n+1} .

7. В последовательности Фибоначчи отбросим первый член 0, а затем вычеркнем каждый второй член последовательности. Получим последовательность

$$1, 3, 8, 21, 55, 144, \dots$$

Показать, что члены этой последовательности удовлетворяют разностному уравнению

$$H(n) = 3H(n-1) - H(n-2).$$

Найти формулу для $H(n)$.

Числа Фибоначчи могут появиться и при решении некоторых нелинейных разностных уравнений. Рассмотрим уравнение

$$x(n+2) = x(n+1)x(n), \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 2.$$

Прологарифмируем это уравнение, используя логарифм по основанию 2. Получим

$$\log_2 x(n+2) = \log_2 x(n+1) + \log_2 x(n), \quad \log_2 x(0) = 0, \quad \log_2 x(1) = 1.$$

Это разностное уравнение определяет числа Фибоначчи. Поэтому $\log_2 x(n) = F_n$. Следовательно, $x(n) = 2^{F_n}$, $n = 0, 1, \dots$

Мы видели, что операторное изображение последовательности F_n имеет вид

$$\frac{s}{s^2 - s - 1}.$$

Часто вместо последовательности F_n рассматривают последовательность F_{n+1} , $n = 0, 1, \dots$. Ее операторное изображение имеет вид

$$\frac{s^2}{s^2 - s - 1}.$$

Полагая $s = 1/t$, получим производящую функцию для чисел Фибоначчи F_{n+1} .

$$F(t) = \frac{1}{1-t-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} F_{k+1} t^k,$$

Эту производящую функцию можно найти и непосредственно, если заметить, что

$$(t + t^2)F(t) = F(t) - 1.$$

Покажем, как с помощью производящих функций можно получить представление чисел Фибоначчи через биномиальные коэффициенты. Рассмотрим дискретную функцию

$$f(n) = \sum_{k \geq 0} C_{n-k}^k, \quad n \geq 0.$$

Вычислим производящую функцию $F(t)$ последовательности $f(n)$. Имеем

$$F(t) = \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{k \geq 0} C_{n-k}^k.$$

Переставляя порядки суммирования, получим

$$F(t) = \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} t^n C_{n-k}^k.$$

Домножим и разделим внутреннюю сумму на t^k . Тогда $F(t)$ можно записать в виде

$$F(t) = \sum_{k \geq 0} t^k \sum_{n \geq 0} t^{n-k} C_{n-k}^k.$$

Во внутренней сумме положим $r = n - k$. Тогда

$$\sum_{n \geq 0} t^{n-k} C_{n-k}^k = \sum_{r \geq 0} t^r C_r^k.$$

Производящая функция этой суммы равна $(1+t)^k$. Следовательно,

$$F(t) = \sum_{k \geq 0} t^k (1+t)^k = \sum_{k \geq 0} (t+t^2)^k = \frac{1}{1-t-t^2}.$$

Получили, что $F(t)$ является производящей функцией чисел Фибоначчи F_{n+1} . Итак, найдена формула

$$F_{n+1} = \sum_{k \geq 0} C_{n-k}^k, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.44)$$

Упражнение.

Доказать соотношение (2.44) с помощью метода математической индукции.

Числа Люка

Решение уравнения (2.42) с начальными условиями $x(0) = 2$, $x(1) = 1$ определяет последовательность L_n чисел Люка. Вот несколько первых чисел Люка

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, \dots$$

Упражнения.

1. Найти формулу Бине для чисел Люка.
2. Вычислить сумму

$$L_1 + L_2 + \dots + L_n.$$

3. Показать, что закон Кассини для чисел Люка имеет вид

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}.$$

4. Найти предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}}{L_n}.$$

5. Найти представление чисел Люка через биномиальные коэффициенты.

Пусть P и Q — целые числа. Последовательности

$$u(0) = 0, u(1) = 1, u(n) = Pu(n-1) - Qu(n-2), \quad n \geq 2,$$

$$v(0) = 2, v(1) = P, v(n) = Pv(n-1) - Qv(n-2), \quad n \geq 2$$

называются первой и второй последовательностями Люка с параметрами P и Q . При $P = 1$, $Q = -1$ первая последовательность превращается в последовательность чисел Фибоначчи, а вторая — в последовательность чисел Люка.

Упражнение.

Найти формулы Бине для первой и второй последовательностей Люка.

Многие свойства чисел Фибоначчи описываются в книге Воробьева [17]. О роли чисел Фибоначчи и Люка в теории чисел можно прочитать в книге Ribenboim [13].

2.3.2. Непрерывные дроби

Конечные непрерывные дроби

Конечной непрерывной дробью называется выражение вида

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}}}$$

Мы будем записывать такую дробь следующим образом:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \dots \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} +} \frac{a_n}{b_n}. \quad (2.45)$$

Наряду с этой дробью рассматривается последовательность непрерывных дробей

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{p_0}{q_0} = b_0, & r_1 &= \frac{p_1}{q_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1}, \\ r_2 &= \frac{p_2}{q_2} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} = \frac{b_0(b_1 b_2 + a_2) + a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2}, \\ r_3 &= \frac{p_3}{q_3} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3} = \frac{b_3(b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2) + a_3(b_0 b_1 + a_1)}{b_3(b_1 b_2 + a_2) + a_3 b_1}, \dots, \\ r_k &= \frac{p_k}{q_k} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \dots \frac{a_k}{b_k}, \quad k < n, \end{aligned}$$

которые называются подходящими дробями для непрерывной дроби (2.45). Из формул для подходящих дробей видно, что числитель и знаменатель второй и третьей подходящей дроби удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$p_2 = b_2 p_1 + a_2 p_0, \quad q_2 = b_2 q_1 + a_2 q_0, \quad p_3 = b_3 p_2 + a_3 p_1, \quad q_3 = b_3 q_2 + a_3 q_1.$$

Отметим, что мы полагаем $p_0 = b_0$, $q_0 = 1$. Если положить $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, то

$$p_1 = b_1 p_0 + a_1 p_{-1}, \quad q_1 = b_1 q_0 + a_1 q_{-1}.$$

Докажем по индукции справедливость общей закономерности

$$p_k = b_k p_{k-1} + a_k p_{k-2}, \quad (2.46)$$

$$q_k = b_k q_{k-1} + a_k q_{k-2}, \quad k \geq 1. \quad (2.47)$$

Из структуры дроби

$$r_{n+1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{b_2} \cdots \frac{a_n}{b_n} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$$

следует, что дробь r_{n+1} получается из дроби r_n заменой a_n на $a_n b_{n+1}$ и b_n на $b_n b_{n+1} + a_{n+1}$. Следовательно,

$$p_{k+1} = (b_k b_{k+1} + a_{k+1}) p_{k-1} + a_k b_{k+1} p_{k-2} = b_{k+1} (b_k p_{k-1} + a_k p_{k-1}) + a_{k+1} p_{k-1} = b_{k+1} p_k + a_{k+1} p_{k-1}.$$

Аналогично доказывается рекуррентное соотношение (2.47).

Между двумя последовательными подходящими дробями имеется простое соотношение

$$p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k+1} a_1 a_2 \cdots a_k. \quad (2.48)$$

Чтобы доказать (2.48) воспользуемся рекуррентными равенствами (2.46) и (2.47). Умножим (2.46) на q_{k-1} , а (2.47) на p_{k-1} и вычтем из первого равенства второе. Мы получим

$$p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = -a_k (p_{k-1} q_{k-2} - q_{k-1} p_{k-2}). \quad (2.49)$$

Положим $u_k = p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1}$. Тогда (2.49) можно записать в виде

$$u_k = -a_k u_{k-1}.$$

Учитывая, что $u_0 = -1$, получим формулу (2.48).

Непрерывную дробь (с помощью последовательного деления на числитель) всегда можно привести к такой, в которой все числители a_i равны 1. В этом виде мы и будем рассматривать в дальнейшем непрерывную дробь и обозначать ее

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \cdots \frac{1}{b_n}}}}. \quad (2.50)$$

Для дроби (2.50) разностные уравнения для числителей и знаменателей подходящих дробей имеют вид

$$p_k = b_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = b_k q_{k-1} + q_{k-2}, \quad (2.51)$$

причем $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_0 = b_0$, $q_0 = 1$. Формула (2.48) для непрерывной дроби (2.50) принимает вид

$$p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k+1}, \quad k \geq 1. \quad (2.52)$$

Пусть числа b_i , $i = 0, 1, \dots$ — натуральные, т. е. целые положительные числа. Из формулы (2.52) следует, что числа p_k и q_k взаимно простые (не имеют общих делителей), так как общий делитель этих чисел в свою очередь должен быть делителем единицы. Формулу (2.52) можно переписать в виде

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{q_{k-1}q_k}, \quad k \geq 1. \quad (2.53)$$

Обратимся снова к рекуррентным соотношениям (2.51). Умножая эти соотношения соответственно на p_{k-2} и q_{k-2} и вычитая из первого соотношения второе, получим

$$p_k q_{k-2} - q_k p_{k-2} = b_k (p_{k-1} q_{k-2} - q_{k-1} p_{k-2}) = (-1)^k b_k.$$

Отсюда получим

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = (-1)^k b_k, \quad k \geq 2. \quad (2.54)$$

Из полученных формул легко сделать заключения о взаимном расположении подходящих дробей данной непрерывной дроби. Из формулы (2.54) вытекает, что подходящие дроби четного порядка образуют возрастающую последовательность, а подходящие дроби нечетного порядка образуют убывающую последовательность. Из формулы (2.53) следует, что каждая дробь нечетного порядка больше дроби непосредственно следующего четного порядка. Следовательно, любая подходящая дробь нечетного порядка больше любой подходящей дроби четного порядка. В частности, для конечной непрерывной дроби α каждая подходящая дробь четного порядка меньше α , а каждая подходящая дробь нечетного порядка больше α (последняя подходящая дробь равна α). Отсюда следует, что справедливо неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Так как последовательность знаменателей q_k подходящих дробей возрастает, то имеет место неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k^2}.$$

Если числа b_i рациональные, то конечная непрерывная дробь представляет собой рациональное число. Справедливо и обратное утверждение. Каждое рациональное число можно представить конечной непрерывной дробью. Это утверждение поясним на примере. Для представления рационального числа конечной непрерывной дробью используется

известный алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел. (см., например, Дэвенпорт [22]). Мы напомним, как работает алгоритм Евклида на примерах. Найдем наибольший общий делитель чисел 153 и 69. Первый шаг алгоритма — делим большее число на меньшее. Получим

$$159 = 2 \cdot 69 + 15.$$

Затем делим 69 на остаток:

$$69 = 4 \cdot 15 + 9.$$

Продолжаем деление

$$15 = 1 \cdot 9 + 6,$$

$$9 = 1 \cdot 6 + 3,$$

$$6 = 2 \cdot 3.$$

Вычисление наибольшего общего делителя завершено. Он равен 3. Возьмем теперь числа 51 и 20. Получим

$$51 = 2 \cdot 20 + 11,$$

$$20 = 1 \cdot 11 + 9,$$

$$11 = 1 \cdot 9 + 2,$$

$$9 = 4 \cdot 2 + 1.$$

Последний остаток равен 1. Поэтому числа 51 и 20 не имеют общих делителей, кроме 1.

Представим в виде непрерывной дроби число $11/31$. Применяем алгоритм Евклида к числам 31 и 11. Число меньше 1. Поэтому первое неполное частное равно нулю и мы его опускаем.

Последовательные шаги алгоритма:

$$31 = 2 \cdot 11 + 9,$$

$$11 = 1 \cdot 9 + 2,$$

$$9 = 4 \cdot 2 + 1.$$

Последний остаток 1 указывает на то, что числа 31 и 11 взаимно просты. Представим уравнения шагов алгоритма в виде дробей:

$$\frac{31}{11} = 2 + \frac{9}{11}, \quad \frac{11}{9} = 1 + \frac{2}{9}, \quad \frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}.$$

Последняя дробь каждого из уравнений обратна первой дроби следующего уравнения. Исключая все промежуточные дроби, представим дробь $11/31$ в виде

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}}.$$

Вычислим подходящие дроби, полагая $p_0 = 0$, $q_0 = 1$. Заметим, что $p_1 = 1$, $q_1 = 2$. Из рекуррентных соотношений (2.46) и (2.47) получим

$$p_2 = p_1 + p_0 = 1, \quad q_2 = q_1 + q_0 = 3, \quad p_3 = 4p_2 + p_1 = 5, \quad q_3 = 4q_2 + q_1 = 14, \\ p_4 = 2p_3 + p_2 = 11, \quad q_4 = 2q_3 + q_2 = 31.$$

Таким образом, последовательность подходящих дробей имеет вид

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{5}{14}, \quad \frac{p_4}{q_4} = \frac{11}{31}.$$

В качестве второго примера возьмем число 3.1415, которое является приближенным значением для числа π . Последовательные шаги алгоритма Евклида:

$$31415 = 3 \cdot 10000 + 1415, \quad 10000 = 7 \cdot 1415 + 95, \quad 1415 = 14 \cdot 95 + 85, \\ 95 = 1 \cdot 85 + 10, \quad 85 = 8 \cdot 10 + 5, \quad 10 = 2 \cdot 5.$$

Получим непрерывную дробь

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{14 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \frac{1}{2}}}}}.$$

Две первые подходящие дроби

$$3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}, \quad 3\frac{14}{99} = \frac{311}{99}.$$

Отметим, что дробь $22/7$ как приближенное значение числа π была получена еще Архимедом.

Если конечная непрерывная дробь имеет вид

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots \frac{1}{b_{n-1} + \frac{1}{1}}}},$$

то эту дробь, как легко видеть, можно записать в виде

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots \frac{1}{b_{n-1} + 1}}}.$$

Таким образом, рациональное число имеет единственное представление в виде конечной непрерывной дроби, если исключить непрерывные дроби, у которых последний элемент равен 1.

Упражнения.

1. Представить следующие рациональные числа в виде конечной непрерывной дроби и вычислить подходящие дроби:

- a) 17/58;
- b) 3/44;
- c) 31/113;
- d) 79/200;
- e) 115/67.

2. Найти первые три подходящие дроби для числа 3.14159265.

Бесконечные непрерывные дроби

Рассмотрим теперь бесконечную непрерывную дробь

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots}}$$

Для этой дроби можно построить последовательность подходящих дробей $r_n = p_n/q_n$. Если последовательность подходящих дробей сходится к конечному пределу, то ее предел называется значением бесконечной непрерывной дроби. Говорят, что бесконечная непрерывная дробь сходится. Если последовательность подходящих дробей не имеет конечного предела, то говорят, что бесконечная непрерывная дробь расходится.

Пусть

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

бесконечная непрерывная дробь. Остатком α_n этой непрерывной дроби называется бесконечная непрерывная дробь, начинающаяся с элемента a_n , т. е. у α удаляются первые n элементов a_0, a_1, \dots, a_{n-1} :

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \dots}$$

Таким образом,

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n}}}$$

Если в этой формуле отбросить $1/\alpha_n$, то получим подходящую дробь p_{n-1}/q_{n-1} . В силу формул (2.46) и (2.47) получим

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_{n-2}a_{n-1} + p_{n-3}}{q_{n-2}a_{n-1} + q_{n-3}}.$$

Если в этом равенстве заменим a_{n-1} на $a_{n-1} + 1/\alpha_n$, то после простых преобразований получим

$$\alpha = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}. \quad (2.55)$$

Сходящаяся бесконечная непрерывная дробь с элементами $b_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$ обладает многими свойствами конечной непрерывной дроби. В частности, значение α сходящейся бесконечной непрерывной дроби больше любой подходящей дроби четного порядка и меньше любой подходящей дроби нечетного порядка. Из формулы (2.53) следует неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}, \quad k \geq 0. \quad (2.56)$$

Рассмотрим непрерывную дробь, у которой элементы b_1, b_2, \dots являются натуральными числами. Очевидно, для такой непрерывной дроби знаменатели подходящих дробей q_k при $k \rightarrow \infty$ стремятся к бесконечности. О порядке роста чисел q_k можно высказать более точное утверждение.

Упражнение.

Для $k \geq 2$ справедливо неравенство

$$q_k \geq 2^{\frac{k-1}{2}}.$$

Из неравенства (2.53) следует, что бесконечная непрерывная дробь, элементами которой являются натуральные числа, будет сходящейся. Ее значением будет иррациональное число.

Каждое иррациональное число α можно представить в виде бесконечной непрерывной дроби. Покажем это. Пусть a_1 — наибольшее целое число, содержащееся в α . Положим

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{r_1}.$$

Тогда $r_1 > 1$ и r_1 — иррациональное число. Далее, с числом r_1 поступаем так же, как с числом α . Представляем его в виде

$$r_1 = a_2 + \frac{1}{r_2},$$

где a_2 — целая часть числа r_1 . Этот процесс продолжится бесконечно, так как на каждом шаге будет получаться иррациональное число $r_k > 1$. В результате получим представление числа α в виде бесконечной непрерывной дроби

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$$

Подходящие дроби данного числа являются для него «наилучшими приближениями» в следующем смысле.

Теорема 2.1. Если $\frac{p_n}{q_n}$ — подходящая дробь числа α , то любая дробь $\frac{p}{q}$, знаменатель которой $q < q_n$, отстоит дальше от числа α , чем $\frac{p_n}{q_n}$.

Доказательство. Покажем сначала, что предшествующая подходящая дробь p_{n-1}/q_{n-1} лежит дальше от α , чем дробь p_n/q_n . Так как подходящая дробь p_{n+1}/q_{n+1} лежит между p_{n-1}/q_{n-1} и α , то

$$\left| \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| > \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right|.$$

Выполним вычитание дробей в правой части неравенства и в полученное выражение подставим вместо p_{n+1} , q_{n+1} их выражения из рекуррентных формул

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}, \quad q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}.$$

Получим (используем неравенство (2.56))

$$\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| = \frac{a_{n+1}}{q_{n-1}q_{n+1}} > \frac{1}{q_n q_{n+1}} > \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right|.$$

Следовательно, дробь p_{n-1}/q_{n-1} отстоит дальше от α , чем p_n/q_n . Если $p/q = p_{n-1}/q_{n-1}$, то теорема доказана. Пусть $p/q \neq p_{n-1}/q_{n-1}$. Тогда

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| = \left| \frac{pq_{n-1} - qp_{n-1}}{qq_{n-1}} \right| \geq \frac{1}{qq_{n-1}} > \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right|.$$

Из этого неравенства следует, что дробь p/q лежит вне интервала $(p_{n-1}/q_{n-1}, p_n/q_n)$, в котором лежит число α . Следовательно, дробь p/q лежит либо справа от дроби p_n/q_n , либо слева от дроби p_{n-1}/q_{n-1} . Поэтому она отстоит дальше от числа α , чем дробь p_n/q_n . \square

Периодические непрерывные дроби

Приведем примеры вычисления последовательности подходящих дробей для бесконечной непрерывной дроби, элементами которой являются натуральные числа.

Нам удобнее разностные уравнения (2.51) записывать в виде

$$p_{n+2} = b_{n+2}p_{n+1} + p_n, \quad q_{n+2} = b_{n+2}q_{n+1} + q_n.$$

Рассмотрим непрерывную дробь

$$\frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \cdots$$

Такая непрерывная дробь называется периодической с периодом 1. Для подходящих дробей получаем уравнения

$$p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n, \quad q_{n+2} = 2q_{n+1} + q_n.$$

Очевидно, $p_0 = 1$, $q_0 = 2$ и $p_1 = 2$, $q_1 = 5$, так как

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{5}.$$

Операторное изображение первого уравнения

$$(s^2 - 2s - 1)p_n = (s^2 - 2s)p_0 + sp_1 = s^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{s^2}{s^2 - 2s - 1} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(s - 1 - \sqrt{2})} + \frac{3 - 2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}(s - 1 + \sqrt{2})} = \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2})^n - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2})^n = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+2}}{2\sqrt{2}} - \frac{(1 - \sqrt{2})^{n+2}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Операторное изображение второго уравнения

$$(s^2 - 2s - 1)q_n = (s^2 - 2s)q_0 + sq_1 = 2s^2 + s.$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{2s^2 + s}{s^2 - 2s - 1} = \frac{7 + 5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(s - 1 - \sqrt{2})} + \frac{7 - 5\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}(s - 1 + \sqrt{2})} = \\ &= \frac{7 + 5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2})^n - \frac{7 - 5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2})^n = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+3}}{2\sqrt{2}} - \frac{(1 - \sqrt{2})^{n+3}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{\frac{(1+\sqrt{2})^{n+2}}{2\sqrt{2}} - \frac{(1-\sqrt{2})^{n+2}}{2\sqrt{2}}}{\frac{(1+\sqrt{2})^{n+3}}{2\sqrt{2}} - \frac{(1-\sqrt{2})^{n+3}}{2\sqrt{2}}}.$$

Вычисляя предел этого отношения, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

Следовательно, число $\sqrt{2}$ представляется в виде сходящейся бесконечной непрерывной дроби

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} \quad (2.57)$$

Отметим, что найти значение этой непрерывной дроби можно, не вычисляя предел последовательности подходящих дробей. Пусть α — значение непрерывной дроби (2.57). Легко видеть, что α удовлетворяет уравнению

$$\alpha = 1 + \frac{1}{1 + \alpha}.$$

Отсюда получим, что $\alpha^2 = 2$. Так как значение дроби (2.57) положительно, то $\alpha = \sqrt{2}$.

Рассмотрим теперь периодическую непрерывную дробь с периодом 1 следующего вида:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Значение α этой дроби удовлетворяет уравнению

$$\alpha = \frac{1}{1 + \alpha}$$

и, следовательно, равно $(\sqrt{5}-1)/2$. Для вычисления подходящих дробей получим разностные уравнения

$$p_{n+2} = p_{n+1} + p_n, \quad q_{n+2} = q_{n+1} + q_n.$$

Это уравнения, которые определяют числа Фибоначчи. Выберем начальные условия:

$$p_0 = 0, \quad q_0 = 1, \quad p_1 = 1, \quad q_1 = 1.$$

Тогда $p_n = F_n$, $q_n = F_{n+1}$. Следовательно, подходящая дробь представляется в виде отношения чисел Фибоначчи

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{F_n}{F_{n+1}}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{(1+\sqrt{5})^n}{2} - \frac{(1-\sqrt{5})^n}{2} \right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}}{2} - \frac{(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2} \right]} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Этим представлением подходящих дробей через отношение чисел Фибоначчи можно воспользоваться для приближенного вычисления числа $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$. Например,

$$\frac{F_9}{F_{10}} = \frac{34}{55} = 0.6182,$$

а $\alpha = 0.6180$ (с точностью до пятого знака).

Из рассмотренных примеров следует, что для непрерывной дроби

$$\frac{1}{b+} \frac{1}{b+} \frac{1}{b+} \cdots$$

при выборе начальных значений $p_0 = 0$, $p_1 = 1$ и $q_0 = 1$, $q_1 = b$ последовательность подходящих дробей определяется формулой

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{s_1^n - s_2^n}{s_1^{n+1} - s_2^{n+1}},$$

где s_1 и s_2 — корни квадратного уравнения

$$s^2 - bs - 1 = 0.$$

Докажите это!

Вопрос о вычислении подходящих дробей для периодических непрерывных дробей с периодом большим, чем 1, будет рассмотрен позднее. В этом случае удобно использовать системы разностных уравнений.

Упражнения.

Найти последовательность подходящих дробей и вычислить предел этой последовательности для следующих непрерывных дробей:

а)

$$4 + \frac{1}{8+} \frac{1}{8+} \frac{1}{8+} \frac{1}{8+} \cdots;$$

б)

$$\frac{1}{4+} \frac{1}{4+} \frac{1}{4+} \cdots;$$

с)

$$\frac{1}{6+} \frac{1}{6+} \frac{1}{6+} \cdots$$

Отметим, что числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$ принадлежат к классу квадратичных иррациональностей. Квадратичной иррациональностью называется иррациональное число, которое является корнем квадратного уравнения

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0, \quad a_0 \neq 0,$$

где a_0, a_1, a_2 — целые числа. Из этого определения следует, что квадратичная иррациональность является числом вида

$$p + q\sqrt{D},$$

где p и q — рациональные числа, а D — натуральное число, которое не является точным квадратом.

Связь между квадратичными иррациональностями и непрерывными дробями была изучена Эйлером и Лагранжем. Приведем их результаты.

Периодической непрерывной дробью называется бесконечная непрерывная дробь, в которой с некоторого места повторяется группа цифр. Например,

$$\sqrt{19} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{8 + \dots}}}}}},$$

$$\frac{24 - \sqrt{15}}{17} = 1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \dots}}}}}$$

Группа цифр 2, 1, 3, 1, 2, 8 в знаменателях первой непрерывной дроби повторяется. Говорят, что это чисто периодическая непрерывная дробь с периодом 6. Кратко ее можно записать в виде $[4, \overline{213128}]$. Вторая непрерывная дробь называется смешанной периодической дробью. Период этой дроби равен 2 и она записывается в виде $[1, 5, \overline{23}]$.

Эйлер доказал, что значение периодической непрерывной дроби есть квадратичная иррациональность.

Отметим, что для чисто периодической непрерывной дроби утверждение Эйлера непосредственно следует из формулы (2.55). Докажите это!

Утверждение Лагранжа состоит в том, что

$$\sqrt{N} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0}],$$

где N — натуральное число, которое не является точным квадратом. Отсюда следует, что каждая квадратичная иррациональность выражается периодической непрерывной дробью.

Критерий сходимости непрерывной дроби

Изложим критерий сходимости бесконечной непрерывной дроби, принадлежащий Пинкерле (Pincherle).

Мы здесь используем понятие минимального решения, введенное в пункте 2.2.3. Напомним, что нетривиальное решение $x(n)$ линейного

разностного уравнения второго порядка называется минимальным, если существует такое решение $y(n)$ этого уравнения, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(n)}{y(n)} = 0.$$

Для непрерывной дроби

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots}}$$

числители и знаменатели подходящих дробей удовлетворяют разностным уравнениям

$$p_k = b_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = b_k q_{k-1} + q_{k-2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

с начальными условиями $p_0 = b_0$, $q_0 = 1$, $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$. Пусть X_k и Y_k линейно независимые решения уравнения

$$z_k = b_k z_{k-1} + z_{k-2}. \quad (2.58)$$

Пусть решение X_k уравнения (2.58) является минимальным. Подходящая дробь $r_k = p_k/q_k$ имеет вид

$$r_k = \frac{p_k}{q_k} = \frac{\alpha_1 X_k + \alpha_2 Y_k}{\beta_1 X_k + \beta_2 Y_k} = \frac{\alpha_1 \frac{X_k}{Y_k} + \alpha_2}{\beta_1 \frac{X_k}{Y_k} + \beta_2}, \quad (2.59)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — постоянные, определяемые начальными условиями. Тогда существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{q_k} = \frac{\alpha_2}{\beta_2},$$

так как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{X_k}{Y_k} = 0.$$

Если $\beta_2 = 0$, то необходимо $\beta_1 \neq 0$ и $\alpha_2 \neq 0$. Тогда $r_k \rightarrow \infty$.

Теперь можно сформулировать критерий Пинкерле (см. [5, 8, 12]).

Теорема 2.2. *Непрерывная дробь*

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots}}$$

сходится к конечному или бесконечному пределу тогда и только тогда, когда уравнение (2.58) имеет минимальное решение X_n . Если $X_{-1} \neq 0$, то непрерывная дробь сходится к конечному пределу, который равен $b_0 - X_0/X_{-1}$.

Доказательство. В случае, когда существует минимальное решение уравнения (2.58), существование предела последовательности подходящих дробей $r_n = p_n/q_n$ уже было доказано, причем этот предел равен α_2/β_2 .

Предположим теперь, что непрерывная дробь сходится к конечному или бесконечному пределу, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = R.$$

Так как p_n и q_n — решения уравнения (2.58), то в силу леммы о минимальном решении, это уравнение имеет минимальное решение. Если $R = \infty$, то минимальным решением является функция $X_n = q_n$. Поэтому в этом случае $X_{-1} = q_{-1} = 0$. Если $R < \infty$, то минимальное решение $X_n = p_n - Rq_n$. Следовательно, $X_{-1} = p_{-1} - Rq_{-1} = 1$. Выразим R через значения минимального решения. Из равенства (2.59) при $k = -1$ и $k = 0$ получим

$$p_{-1} = 1 = \alpha_1 X_{-1} + \alpha_2 Y_{-1}, \quad p_0 = b_0 = \alpha_1 X_0 + \alpha_2 Y_0$$

и

$$q_{-1} = 0 = \beta_1 X_{-1} + \beta_2 Y_{-1}, \quad q_0 = 1 = \beta_1 X_0 + \beta_2 Y_0.$$

Решая две полученные системы линейных уравнений, находим, что

$$\alpha_1 = \frac{Y_0 - b_0 Y_{-1}}{\Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{b_0 X_{-1} - X_0}{\Delta}, \quad \beta_1 = \frac{-Y_{-1}}{\Delta}, \quad \beta_2 = \frac{X_{-1}}{\Delta},$$

где $\Delta = X_{-1}Y_0 - X_0Y_{-1} \neq 0$, так как решения X_n и Y_n линейно независимы. Отсюда следует, что

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = b_0 - \frac{X_0}{X_{-1}}.$$

Отметим, что величина X_0/X_{-1} определяется однозначно, так как любое минимальное решение уравнения (2.58) пропорционально X_n . \square

Замечания к теореме 2.2.

1. Можно было сформулировать теорему, используя рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей в следующем виде:

$$p_{k+2} = b_{k+2}p_{k+1} + p_k, \quad q_{k+2} = b_{k+2}q_{k+1} + q_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ p_0 = b_0, \quad p_1 = b_0b_1 + 1, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = b_1.$$

Только в этом случае получают другие значения для постоянных α_1 , α_2 , β_1 , β_2 . Будем предполагать, что $b_0 = 0$. Из равенств (2.58) при k_0 и $k = 1$ находим

$$\begin{aligned} p_0 = 0 &= \alpha_1 X_0 + \alpha_2 Y_0, & p_1 = 1 &= \alpha_1 X_1 + \alpha_2 Y_1, \\ q_0 = 1 &= \beta_1 X_0 + \beta_2 Y_0, & q_1 = b_1 &= \beta_1 X_1 + \beta_2 Y_1, \end{aligned}$$

Решая эти системы уравнений, получим

$$\alpha_2 = \frac{X_1}{\Delta_1}, \quad \beta_2 = \frac{b_1 X_0 - X_1}{\Delta_1},$$

где $\Delta_1 = X_0 Y_1 - X_1 Y_0 \neq 0$, так как решения X_n и Y_n линейно независимы. Следовательно,

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{X_1}{b_1 X_0 - X_1}. \quad (2.60)$$

Из формулы (2.60) вытекает, что непрерывная дробь

$$\frac{1}{b_1 +} \frac{1}{b_2 +} \cdots$$

сходится к бесконечному пределу, если $b_1 X_0 - X_1 = 0$. Если $b_1 X_0 - X_1 \neq 0$, то эта непрерывная дробь сходится к конечному пределу, который равен дроби

$$\frac{X_1}{b_1 X_0 - X_1}.$$

2. Легко видеть, что теорема Пинкерле справедлива для непрерывной дроби

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \cdots,$$

где $a_k \neq 0$ для всех k . Мы приведем формулу (2.60) для этой дроби, предполагая $b_0 = 0$. Формула имеет вид

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{a_1 X_0}{b_1 X_0 - X_1}.$$

Таким образом, непрерывная дробь

$$\frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \cdots$$

в случае существования минимального решения у соответствующего разностного уравнения сходится к бесконечному пределу, если $b_1 X_0 - X_1 = 0$, и к конечному пределу

$$\frac{a_1 X_0}{b_1 X_0 - X_1},$$

если $b_1X_0 - X_1 \neq 0$.

В качестве примера рассмотрим непрерывную дробь

$$\frac{2 \cdot 3b}{3a+} \frac{3 \cdot 4b}{4a+} \dots \frac{(n+2)(n+1)b}{(n+2)a+} \dots, \quad (2.61)$$

где a, b — ненулевые вещественные числа. Выясним условия сходимости этой дроби. Соответствующее разностное уравнение имеет вид

$$x(n+2) = (n+2)ax(n+1) + (n+2)(n+1)bx(n). \quad (2.62)$$

В этом уравнении положим $x(n) = n!y(n)$. После замены получим уравнение

$$(n+2)!y(n+2) - (n+2)!ay(n+1) - (n+2)!by(n) = 0.$$

Разделив на $(n+2)!$, приходим к уравнению с постоянными коэффициентами

$$y(n+2) - ay(n+1) - by(n) = 0. \quad (2.63)$$

Характеристическое уравнение для (2.63) имеет вид

$$s^2 - as - b = 0.$$

Его корни $s_{1,2} = (a \pm \sqrt{a^2 + 4b})/2$. Если выполнено неравенство

$$a^2 + 4b \geq 0, \quad (2.64)$$

то уравнение (2.63) имеет минимальное решение. При выполнении строгого неравенства корни характеристического уравнения различны по модулю. Пусть $|s_2| < |s_1|$. Тогда минимальное решение $Y_n = s_2^n$. Легко видеть, что $2aY_0 - Y_1 \neq 0$. Очевидно, исходное уравнение (2.62) имеет минимальное решение $X_n = n!s_2^n$ и $2aX_0 - X_1 \neq 0$. Следовательно, при выполнении неравенства $a^2 + 4b > 0$ непрерывная дробь (2.61) сходится к конечному пределу.

Пусть теперь $a^2 + 4b = 0$. Тогда a^n и na^n — линейно независимые решения уравнения (2.62). Очевидно, a^n — минимальное решение этого уравнения, а $X_n = n!a^n$ — минимальное решение уравнения (2.62), причем $2aX_0 - X_1 = a$. Следовательно, и в этом случае непрерывная дробь (2.61) сходится к конечному пределу.

Упражнение.

Исследовать сходимость непрерывной дроби

$$\frac{1}{\frac{a}{3} + \frac{1}{\frac{a}{4} + \frac{1}{\frac{(n+1)(n+2)}{a} + \dots}}},$$

где a — комплексное число.

Больше сведений о непрерывных дробях и их роли в теории чисел можно почерпнуть из книг Хинчина [28], Дэвенпорта [22] и Бухштаба [16] и статьи Хинчина [27]. Роль непрерывных дробей в анализе описывается в книгах Lorentzen, Waadeland [8] и Хованского [29].

2.3.3. Определители трехдиагональных матриц

Трехдиагональной или якобиевой матрицей называется вещественная квадратная трехдиагональная матрица

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix},$$

у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали, первой наддиагонали и первой поддиагонали, равны нулю.

Вычислим определитель трехдиагональной матрицы порядка n , если $a_i = a$, $i = 1, 2, \dots, n$, $b_i = b$, $i = 1, 2, \dots, n$, $c_i = c$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Обозначим определитель этой матрицы через $\Delta(n)$. Таким образом, мы будем вычислять определитель

$$\Delta(n) = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a \end{vmatrix}. \quad (2.65)$$

Будем предполагать, что $a^2 - 4bc \neq 0$. Разлагая определитель (2.65) по последней строке, получим разностное уравнение для вычисления определителя

$$\Delta(n) = a\Delta(n-1) - bc\Delta(n-2),$$

которое запишем в виде

$$\Delta(n+2) = a\Delta(n+1) - bc\Delta(n). \quad (2.66)$$

Мы полагаем $\Delta(0) = 1$. Очевидно, $\Delta(1) = a$. Тогда из уравнения (2.66) следует, что $\Delta(2) = a\Delta(1) - bc\Delta(0) = a^2 - bc$. Определитель $\Delta(2)$ легко вычисляется непосредственно и дает то же значение. Следовательно, для вычисления $\Delta(n)$ решаем уравнение (2.66) с указанными начальными условиями.

Операторное изображение рассматриваемого уравнения имеет вид

$$\Delta(n) = \frac{s^2 - as}{s^2 - as + bc} \Delta(0) + \frac{as}{s^2 - as + bc} \Delta(1) = \frac{s^2}{s^2 - as + bc}.$$

Корни характеристического уравнения $s^2 - as + bc = 0$ равны

$$s_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}.$$

Используя разложение на простейшие дроби

$$\frac{s}{s^2 - as + bc} = \frac{s_1}{\sqrt{a^2 - 4bc}} \frac{1}{s - s_1} - \frac{s_2}{\sqrt{a^2 - 4bc}} \frac{s}{s - s_2}$$

и переходя к оригиналам, получим значение определителя (2.65)

$$\Delta(n) = \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{a^2 - 4bc}} \left[(a + \sqrt{a^2 - 4bc})^{n+1} - (a - \sqrt{a^2 - 4bc})^{n+1} \right]. \quad (2.67)$$

При $a = 1$, $bc = -1$ формула (2.67) дает число Фибоначчи F_{n+1} . Следовательно, числа Фибоначчи можно представить в виде определителей якобиевой матрицы

$$F_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Формулу (2.67) можно выразить через биномиальные коэффициенты. Положим $C_n^k = 0$ при $k > n$ и $C_n^k = 0$ при $n < 0$. Справедлива формула

$$\begin{aligned} \Delta(n) &= \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{a^2 - 4bc}} \left[(a + \sqrt{a^2 - 4bc})^{n+1} - (a - \sqrt{a^2 - 4bc})^{n+1} \right] = \\ &= \sum_{k=0}^n C_{n-k}^k a^{n-2k} (-bc)^k. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Докажем эту формулу с помощью индукции. Формула справедлива при $n = 2$ и $n = 3$:

$$\Delta(2) = C_2^0 a^2 + C_1^1(-bc) = a^2 - bc, \quad \Delta(3) = C_3^0 a^3 + C_2^1 a(-bc) = a^3 - 2abc.$$

Предположим, что формула справедлива при $n = j-1$ и $n = j$. Докажем, что она справедлива при $n = j+1$. В силу рекуррентной формулы, связывающей значения $\Delta(j-1)$, $\Delta(j)$ и $\Delta(j+1)$, получим

$$\Delta(j+1) = a\Delta(j) - bc\Delta(j-1) =$$

$$a \sum_{k=0}^j C_{j-k}^k a^{j-2k} (-bc)^k + (-bc) \sum_{k=0}^{j-1} C_{j-1-k}^k a^{j-2k-1} (-bc)^k.$$

Во второй сумме сделаем замену переменных, положив $m = k+1$. Получим

$$\sum_{k=0}^{j-1} C_{j-1-k}^k a^{j-2k-2} (-bc)^k = \sum_{m=1}^j C_{j-m}^{m-1} a^{j-2m+1} (-bc)^{m-1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta(j+1) &= \sum_{k=0}^j C_{j-k}^k a^{j-2k} (-bc)^k + \sum_{m=1}^j C_{j-m}^{m-1} a^{j-2m+1} (-bc)^m = \\ &= \sum_{k=0}^j [C_{j-k}^k + C_{j-k}^{k-1}] a^{j-2m+1} (-bc)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{j+1} C_{j-k+1}^k a^{j-2m+1} (-bc)^k. \end{aligned}$$

Здесь учтено равенство

$$C_{j-k}^k + C_{j-k}^{k-1} = C_{j-k+1}^k,$$

которое проверяется непосредственно, и соглашение, что C_n^k равняется нулю при $k > n$ и $n < 0$.

Таким образом, формула (2.68) доказана.

Упражнение.

Вычислить

$$f(n) = \sum_{k=0}^n C_{n-k}^k a^{n-2k} (-bc)^k,$$

используя производящие функции.

Приведем две формулы, вытекающие из формулы (2.68). Если положить в формуле (2.68) $a = 1$, $bc = -1$, то мы получим выражение чисел Фибоначчи через биномиальные коэффициенты

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_{n-k}^k.$$

Предположим, что $a^2 - 4bc < 0$. Положим $a = 2\sqrt{bc} \cos \theta$. Тогда

$$\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} = \cos \theta \pm i \sin \theta.$$

Напомним формулу Муавра

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n.$$

В силу этой формулы

$$\Delta(n) = \frac{(bc)^{n/2} \sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad \theta = \arccos \frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

Если $a = 1$, $bc = 1$, то из формулы (2.68) вытекает, что

$$\Delta(n) = \frac{\sin \frac{(n+1)\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \sum_{k=0}^n C_{n-k}^k (-1)^k.$$

Континуанты

Величина определителя

$$(a_1 a_2 \dots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

связана с непрерывной дробью

$$a_1 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3} \dots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}. \quad (2.69)$$

Эта непрерывная дробь равна отношению определителей

$$\frac{(a_1 a_2 \dots a_n)}{(a_2 a_3 \dots a_n)}.$$

В самом деле, $a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} = \frac{(a_1 a_2)}{(a_2)}$. Далее,

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}{a_2 a_3 + 1} = \frac{(a_1 a_2 a_3)}{(a_2 a_3)}.$$

Докажем по индукции, что

$$a_1 + \frac{1}{\frac{(a_2 a_3 \dots a_n)}{(a_3 \dots a_n)}} = \frac{(a_1 a_2 \dots a_n)}{(a_2 a_3 \dots a_n)}.$$

Следовательно, нам нужно показать, что

$$a_1(a_2 a_3 \dots a_n) + (a_3 a_4 \dots a_n) = (a_1 a_2 \dots a_n).$$

Последнее равенство представляет собой рекуррентное соотношение для вычисления подходящих дробей непрерывной дроби (2.69) и рекуррентное соотношение для вычисления определителя. Следует только учесть, что $(a_1 a_2 \dots a_n) = (a_n a_{n-1} \dots a_1)$. Таким образом, конечную непрерывную дробь вида (2.69) можно представить в виде отношения двух определителей.

Многочлены $(a_1 a_2 \dots a_n)$ от переменных a_1, a_2, \dots, a_n называются континуантами. Их свойства изучал Эйлер. Нетрудно вычислить число членов континуанты. Если число членов континуанты (a_1, a_2, \dots, a_n) обозначим через $u(n)$, то

$$u(n) = u(n-1) + u(n-2).$$

Общее решение этого уравнения

$$u(n) = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Учитывая, что $u(1) = 1$ и $u(2) = 2$, получим

$$u(n) = F_{n+1},$$

т. е. число членов континуанты порядка n совпадает с $(n+1)$ -м числом Фибоначчи.

Упражнения.

1. Вычислить определители

a)

$$\begin{vmatrix} p & q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & p & q & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p & q \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & p \end{vmatrix};$$

b)

$$\begin{vmatrix} 2a & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 2a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 2a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 2a \end{vmatrix};$$

c)

$$\begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix};$$

d)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 & n+1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n & n+2 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель (2.65) при $a^2 = bc$.

3. Представить числа Люка в виде определителя. Написать выражение чисел Люка через биномиальные коэффициенты.

2.3.4. Многочлены Чебышева

Рассмотрим уравнение

$$x(n+2) - 2\rho x(n+1) + x(n) = 0, \quad (2.70)$$

где ρ — вещественное число. Найдем решение этого уравнения с начальными условиями

$$x(0) = 1, \quad x(1) = \rho. \quad (2.71)$$

Корни характеристического уравнения

$$p(s) = s^2 - 2\rho s + 1 = 0$$

равны

$$s_{1,2} = \rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}.$$

Предположим, что $|\rho| < 1$. Тогда корни s_1, s_2 комплексно сопряженные, причем $|s_1| = |s_2| = 1$. Поэтому

$$x(n) = \frac{s(s - 2\rho)}{s^2 - 2\rho s + 1} + \frac{\rho s}{s^2 - 2\rho s + 1} = \frac{s(s - \rho)}{s^2 - 2\rho s + 1} = \frac{1}{2}s_1^n + \frac{1}{2}s_2^n.$$

Следовательно,

$$x(n) = \frac{1}{2} \left[(\rho + \sqrt{\rho^2 - 1})^n + (\rho - \sqrt{\rho^2 - 1})^n \right]. \quad (2.72)$$

Положим $\rho = \cos \varphi$. Из формулы Муавра следует, что (2.72) можно записать в виде

$$x(n) = \cos n \arccos \rho.$$

Уравнение (2.70) с начальными условиями (2.71) эквивалентно тригонометрическому тождеству

$$2 \cos \varphi \cos(n+1)\varphi = \cos(n+2)\varphi - \cos n\varphi, \quad \varphi = \arccos \rho.$$

Многочлен n -го порядка

$$T_n(\rho) = \cos n \arccos \rho$$

относительно ρ ($|\rho| < 1$) называется многочленом Чебышева первого рода. Эти многочлены были введены Чебышевым в 1855 году. Его работа была мотивирована аналогией с рядами Фурье, теорией непрерывных дробей и теорией приближений.

Чтобы получить разложение многочлена Чебышева по степеням ρ , раскрываем правую часть формулы Муавра с помощью формулы бинома Ньютона. Затем приравнявая вещественные части слева и справа, получим при четном $n = 2m$

$$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + C_n^4 \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots + (-1)^m \sin^n \varphi.$$

При нечетном $n = 2m + 1$ последнее слагаемое будет равно

$$(-1)^m C_n^{n-1} \cos \varphi \sin^{n-1} \varphi.$$

Таким образом,

$$T_n(\rho) = \rho^n - C_n^2 \rho^{n-2}(1 - \rho^2) + C_n^4 \rho^{n-4}(1 - \rho^2)^2 - \dots$$

Вот первые пять многочленов Чебышева первого рода

$$T_0(\rho)=1, \quad T_1(\rho) = \rho, \quad T_2(\rho)=2\rho^2 - 1, \quad T_3(\rho)=4\rho^3 - 3\rho, \quad T_4(\rho)=8\rho^4 - 8\rho^2 + 1.$$

Итак, многочлен Чебышева $T_n(\rho)$ является решением разностного уравнения (2.70) с начальными условиями (2.68).

Возьмем теперь начальные условия $x(0) = 1$, $x(1) = 2\rho$. Из формулы (1.28) при $r = 1$, $\rho = \cos \varphi$ получим

$$x(n) = \frac{(s - 2\rho)}{s^2 - 2\rho s + 1} + \frac{2\rho s}{s^2 - 2\rho s + 1} = \frac{s^2}{s^2 - 2\rho s + 1} =$$

$$\frac{\sin(n+1) \arccos \rho}{\sin \arccos \rho} = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \sin(n+1) \arccos \rho.$$

Многочлен

$$U_n(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \sin(n+1) \arccos \rho$$

называется многочленом Чебышева второго рода.

Упражнение.

Найти разложение многочленов Чебышева второго рода по степеням ρ . Вычислить первые пять многочленов Чебышева второго рода.

Очевидно, нулям функции $\cos n\varphi$ в промежутке $[0, \pi]$ отвечают нули многочлена Чебышева $T_n(\rho)$ в промежутке $[-1, 1]$. Нули функции $\cos n\varphi$ в $[0, \pi]$ определяются формулой

$$\varphi_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Поэтому нули $T_n(\rho)$ имеют вид

$$\rho_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Из этой формулы следует, что многочлен Чебышева $T_n(\rho)$ имеет n различных нулей в промежутке $[-1, 1]$, т. е. все нули многочлена Чебышева являются простыми.

Для функции $\cos n\varphi$ элементарно проверяется соотношение

$$\int_0^\pi \cos m\varphi \cos n\varphi = 0 \quad (2.73)$$

при $m \neq n$. Мы скажем, что функции $\cos n\varphi$, $n = 1, 2, \dots$ ортогональны на промежутке $[0, \pi]$. Если в (2.73) сделать замену $x = \cos \varphi$, то получим

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \cos(m \arccos x) \cos(n \arccos x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ & = \int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) (1-x^2)^{-1/2} dx = 0, \quad m \neq n. \end{aligned}$$

Говорят, что многочлены Чебышева первого рода ортогональны на промежутке $[-1, 1]$ относительно веса $(1-x^2)^{-1/2}$.

Упражнения.

1. Найти нули многочлена $U_n(\rho)$ в промежутке $[-1, 1]$.
2. Показать, что многочлены Чебышева второго рода ортогональны на промежутке $[-1, 1]$ относительно веса $(1-x^2)^{1/2}$.

При $|\rho| > 1$ многочлен Чебышева первого рода определяется формулой

$$T_n(\rho) = \frac{1}{2} \left[(\rho + \sqrt{\rho^2 - 1})^n + (\rho - \sqrt{\rho^2 - 1})^n \right].$$

Для многочленов Чебышева второго рода при $|\rho| > 1$ получим

$$U_n(\rho) = \frac{s^2}{s^2 - 2\rho s + 1} = A \frac{s}{s - s_1} + B \frac{s}{s - s_2},$$

где

$$s_1 = \rho + \sqrt{\rho^2 - 1}, \quad s_2 = \rho - \sqrt{\rho^2 - 1}.$$

Вычисляя коэффициенты A и B , получим

$$U_n(\rho) = \frac{1}{2\sqrt{\rho^2 - 1}} \left[(\rho + \sqrt{\rho^2 - 1})^{n+1} + (\rho - \sqrt{\rho^2 - 1})^{n+1} \right].$$

Легко видеть, что решение уравнения (2.70) с произвольными начальными условиями имеет вид

$$x(n) = [T_n(\rho) - \rho U_{n-1}(\rho)]x(0) + U_{n-1}(\rho)x(1).$$

Упражнения.

1. Рассмотрим бесконечную непрерывную дробь

$$f(\rho) = \rho - \frac{1}{2\rho - \frac{1}{2\rho - \frac{1}{2\rho - \dots}}}$$

Показать, что n -я подходящая дробь $f_n(\rho)$ имеет вид

$$f_n(\rho) = \frac{T_n(\rho)}{T_{n-1}(\rho)},$$

где $T_n(\rho)$ — многочлен Чебышева порядка n .

2. Показать, что многочлен Чебышева $T_n(\rho)$ можно представить в виде определителя трехдиагональной матрицы порядка n

$$T_n(\rho) = \begin{vmatrix} \rho & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2\rho & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2\rho & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2\rho & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2\rho \end{vmatrix}.$$

3. Выразить числа Фибоначчи через многочлены Чебышева первого рода.

4. Доказать справедливость тождеств

a) $T_m(T_n(\rho)) = T_n(T_m(\rho)) = T_{mn}(\rho);$

b) $T_{m+n}(\rho) + T_{m-n}(\rho) = 2T_m(\rho)T_n(\rho);$

c) $T_{2n}(\rho) = 2T_n^2(\rho) - 1;$

d) $U_1(\rho) + U_3(\rho) + \dots + U_{2n-1}(\rho) = u_n(\rho)U_{n-1}(\rho);$

e) $2T_n(\rho)U_{n-1}(\rho) = U_{2n-1}(\rho);$

f) $T_1(\rho) + T_3(\rho) + \dots + T_{2n-1}(\rho) = \frac{1}{2}U_{2n-1}(\rho).$

5. Многочлены Чебышева третьего рода $V_n(\rho)$ определяются как решения разностного уравнения (2.70) с начальными условиями $x(0) = 1$, $x(1) = 2\rho - 1$. Многочлены Чебышева четвертого рода $W_n(\rho)$ — решения уравнения (2.70) с начальными условиями $x(0) = 1$, $x(1) = 2\rho + 1$. Получить представление многочленов Чебышева третьего и четвертого рода в тригонометрической форме. Выписать условия ортогональности многочленов Чебышева третьего и четвертого рода.

Отметим, что уравнение

$$x(n+2) - 2\rho x(n+1) + x(n) = 0$$

при $0 < \rho < 1$ является дискретным аналогом уравнения гармонического осциллятора. Полагая $\rho = \cos a$, получим общее решение этого уравнения

$$x(n) = C_1 \cos na + C_2 \sin na = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(na + \varphi),$$

где $\tan \varphi = C_1/C_2$.

2.3.5. Краевые задачи для разностных уравнений

До сих пор мы искали решение начальной задачи, т.е. находили решение, для которого задавались начальные условия — значения решения в точках 0 и 1. Эта задача всегда имеет решение. Сейчас мы рассмотрим пример краевой задачи, когда задаются два условия, связывающие значения решения в двух различных точках. В качестве примера изучим краевую задачу

$$x(n+2) - (2-\lambda)x(n+1) + x(n) = 0, \quad (2.74)$$

$$x(0) = x(b-1), \quad x(1) = x(b), \quad (2.75)$$

где λ — вещественное число. Предполагаем, что $-1 \leq n \leq b-1$. Характеристический многочлен $p(s) = s^2 - (2-\lambda)s + 1$ уравнения (2.74) имеет корни

$$s_{1,2} = \frac{2-\lambda \pm \sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}.$$

При $\lambda > 4$ и $\lambda < 0$ корни вещественные, при $0 \leq \lambda \leq 4$ корни комплексные. При $\lambda = 0$ решением краевой задачи будет функция $x(n) \equiv 1$. При $\lambda > 4$ и $\lambda < 0$ корни вещественные, различные. В этом случае краевая задача не имеет решений. Покажем это. Общее решение уравнения (2.74) имеет вид $x(n) = C_1 s_1^n + C_2 s_2^n$. Подставляя эту формулу в краевые условия, получим систему уравнений для определения постоянных C_1 и C_2 :

$$\begin{aligned} (s_1^{b-1} - 1)C_1 + (s_2^{b-1} - 1)C_2 &= 0, \\ s_1(s_1^{b-1} - 1)C_1 + s_2(s_1^{b-1} - 1)C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Эта система имеет решение, если определитель системы равен нулю. Отсюда следует, что $s_1 = s_2$, что противоречит тому, что $s_1 \neq s_2$. При $0 < \lambda < 4$ корни характеристического многочлена комплексно сопряженные. Общее решение уравнения (2.74) можно записать в виде

$$x(n) = r(A \cos n\varphi + B \sin n\varphi).$$

Подставляя это выражение в краевые условия, получим

$$\begin{aligned} A(\cos(b-1)\varphi - 1) + B \sin(b-1)\varphi &= 0, \\ A(\cos b\varphi - \cos \varphi) + B(\sin b\varphi - \sin \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Эта система имеет нетривиальное решение относительно A и B , если

$$\det \begin{vmatrix} \cos(b-1)\varphi - 1 & \sin(b-1)\varphi \\ \cos b\varphi - \cos \varphi & \sin b\varphi - \sin \varphi \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и производя простые преобразования, получим

$$\sin b\varphi = 0.$$

Следовательно, краевая задача (2.74), (2.75) имеет нетривиальное решение, если $\varphi = k\pi/b$. Если b — четное число, то мы положим $b = 2l+2$, если b — нечетное число, то положим $b = 2l+1$. Тогда при

$$\lambda = 2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{b}, \quad 1 \leq k \leq l$$

функции $\cos 2kl\pi/b$ и $\sin 2kl\pi/b$ являются решениями краевой задачи. Если $\lambda = 4$ и b — четное число, то функция $\cos n\pi$ также является решением краевой задачи.

Таким образом, только для конечного числа значений λ при заданном значении b краевая задача (2.74), (2.75) имеет решение. Значения λ , при которых краевая задача имеет решение, называются *собственными значениями* краевой задачи. Нетривиальные решения краевой задачи называются *собственными функциями* краевой задачи.

Упражнение.

При каких значениях параметра λ краевая задача

$$x(n+2) + (\lambda - 2)x(n+1) + x(n) = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(4) = 0$$

имеет решение. Найти собственные функции краевой задачи.

2.4. Однородные уравнения k -го порядка

Рассмотрим однородное разностное уравнение k -го порядка

$$L(x) = x(n+k) + a_1x(n+k-1) + \dots + a_{k-1}x(n+1) + a_kx(n) = 0, \quad (2.76)$$

где a_1, \dots, a_k — вещественные или комплексные числа, причем $a_k \neq 0$. Если все начальные условия $x(0), \dots, x(k-1)$ решения уравнения (2.76) равны нулю, то существует только тривиальное решение $x(n) \equiv 0$, $n = 0, 1, \dots$

Отметим некоторые общие свойства решений уравнения (2.76).

Если $x_1(n)$ и $x_2(n)$ — два решения уравнения (2.76), то их сумма $x_1(n) + x_2(n)$ также является решением. В самом деле, так как $L[x_1] = 0$ и $L[x_2] = 0$, то $L[x_1 + x_2] = L[x_1] + L[x_2] = 0$.

Если $x(n)$ — решение уравнения (2.76), то дискретная функция $Cx(n)$, где C — произвольное число, также является решением. Это следует из равенства

$$L[Cx] = CL[x].$$

Таким образом, если $x_1(n), \dots, x_k(n)$ — решения однородного уравнения (2.76), то функция

$$C_1 x_1(n) + \dots + C_k x_k(n),$$

где C_1, \dots, C_k — ненулевые числа, является решением уравнения (2.76).

Пусть $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ — решения уравнения (2.76). Следующий определитель

$$\Delta(n) = \begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \dots & x_k(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \dots & x_k(n+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1(n+k-1) & x_2(n+k-1) & \dots & x_k(n+k-1) \end{vmatrix}$$

называется казоратианом решений $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$. Вычислим казоратиан. Для этого рассмотрим определитель $\Delta(n+1)$:

$$\Delta(n+1) = \begin{vmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & \dots & x_k(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & \dots & x_k(n+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1(n+k) & x_2(n+k) & \dots & x_k(n+k) \end{vmatrix}.$$

Элементы последней строки $x_i(n+k)$, $i = 1, \dots, k$ заменим их выражениями из уравнения (2.76), т. е.

$$x_i(n+k) = -a_1 x_i(n+k-1) - a_2 x_i(n+k-2) - \dots - a_k x_i(n), \quad i = 1, \dots, k.$$

Займемся преобразованием определителя $\Delta(n+1)$. Прибавим к последней строке элементы $(k-1)$ -й строки умноженной на a_1 , затем прибавим элементы $(k-2)$ -й строки умноженной на a_2 и т. д. Величина определителя при этом не изменится. Получим определитель

$$\Delta(n+1) = \begin{vmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & \dots & x_k(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & \dots & x_k(n+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_k x_1(n) & -a_k x_2(n) & \dots & -a_k x_k(n) \end{vmatrix}.$$

Переставляем последнюю k -ю строку определителя с $(k-1)$ -й, затем с $(k-2)$ -й и т. д. Переставляем до тех пор, пока последняя строка не станет первой строкой. Получим определитель

$$\Delta(n+1) = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} -a_k x_1(n) & -a_k x_2(n) & \dots & -a_k x_k(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \dots & x_k(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & \dots & x_k(n+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1(n+k-1) & x_2(n+k-1) & \dots & x_k(n+k-1) \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\Delta(n+1) = (-1)^{k-1}(-a_k)\Delta(n).$$

Решая полученное разностное уравнение первого порядка, получим формулу, которая называется формулой Абеля

$$\Delta(n) = (-1)^{kn} a_k^n \Delta(0).$$

Из этой формулы следует, что казориан уравнения (2.76) либо при всех n равен нулю, либо при всех n отличен от нуля.

Перейдем к построению решения уравнения (2.76). Будем искать решение, удовлетворяющее произвольным начальным условиям $x(0), \dots, x(k-1)$. Используя формулу (1.14), получим изображающее уравнение

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^k x(n) - \mathbf{s}^k x(0) - \dots - \mathbf{s}x(k-1) + a_1(\mathbf{s}^{k-1}x(n) - \mathbf{s}^{k-1}x(0) - \dots - \mathbf{s}x(k-2)) + \\ + \dots + a_{k-1}(\mathbf{s}x(n) - \mathbf{s}x(0)) + a_k x(n) = 0. \end{aligned}$$

Его решение

$$\begin{aligned} x(n) = \frac{\mathbf{s}^k + a_1 \mathbf{s}^{k-1} + \dots + a_{k-1} \mathbf{s}}{p(\mathbf{s})} x(0) + \frac{\mathbf{s}^{k-1} + a_1 \mathbf{s}^{k-2} + \dots + a_{k-2} \mathbf{s}}{p(\mathbf{s})} x(1) + \\ + \dots + \frac{\mathbf{s}^2 + a_1 \mathbf{s}}{p(\mathbf{s})} x(k-2) + \frac{\mathbf{s}}{p(\mathbf{s})} x(k-1), \end{aligned} \quad (2.77)$$

где

$$p(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^k + a_1 \mathbf{s}^{k-1} + \dots + a_{k-1} \mathbf{s} + a_k$$

характеристический многочлен уравнения (2.76). Каждое слагаемое правой части (2.77) является дробно-рациональной функцией оператора \mathbf{s} . Поэтому после разложения каждого слагаемого на простейшие дроби и перехода к оригиналу оно приводится к многочленам, показательным и тригонометрическим функциям дискретного аргумента.

Таким образом, каждое решение уравнения (2.76) есть некоторая комбинация многочленов, показательных и тригонометрических функций дискретного аргумента.

Чтобы вычислить решение, если порядок разностного уравнения (2.76) высок, удобно воспользоваться следующим способом.

Возьмем начальные условия

$$x(0) = \dots = x(k-2) = 0, \quad x(k-1) = 1.$$

Тогда формула (2.77) принимает вид

$$x(n) = \frac{\mathbf{s}}{p(\mathbf{s})}.$$

Обозначим через $g(n)$ дискретную функцию, которая является оригиналом для изображения $\mathbf{s}/p(\mathbf{s})$. Функция $g(n)$ называется функцией Коши или функцией Грина начальной задачи для уравнения (2.76). Отметим, что

$$g(0) = \dots = g(k-2) = 0, \quad g(k-1) = 1.$$

Из равенства

$$\frac{\mathbf{s}}{p(\mathbf{s})} = g(n)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{s}^2}{p(\mathbf{s})} &= \mathbf{s}g(n) = g(n+1) + \mathbf{s}g(0) = g(n+1), \\ \frac{\mathbf{s}^3}{p(\mathbf{s})} &= \mathbf{s}^2g(n) = g(n+2) + \mathbf{s}^2g(0) + \mathbf{s}g(1) = g(n+2), \\ &\dots \\ \frac{\mathbf{s}^k}{p(\mathbf{s})} &= \mathbf{s}^{k-1}g(n) = g(n+k-1) + \mathbf{s}^{k-1}g(0) + \mathbf{s}^{k-2}g(1) + \dots + \\ &\quad + \mathbf{s}^2g(k-3) + \mathbf{s}g(k-2) = g(n+k-1). \end{aligned}$$

Следовательно, оригинал решения можно составить из функции $g(n)$ и функций $g(n+1), \dots, g(n+k-1)$.

В результате получим

$$\begin{aligned} x(n) &= x(0)[g(n+k-1) + a_1g(n+k-2) + \dots + a_{k-2}g(n+1) + a_{k-1}g(n)] + \\ &\quad + x(1)[g(n+k-2) + a_1g(n+k-3) + \dots + a_{k-2}g(n)] + \dots + \\ &\quad + x(k-2)[g(n+1) + a_1g(n)] + x(k-1)g(n). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Для вычисления $g(n)$ нужно разложить ее изображение на простейшие дроби, а затем найти оригиналы для этих дробей. Если, например, все нули $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ многочлена $p(\mathbf{s})$ различны, то

$$\frac{1}{p(\mathbf{s})} = \sum_{l=1}^k \frac{d_l}{\mathbf{s} - \alpha_l}. \quad (2.79)$$

Коэффициенты d_1, \dots, d_k могут быть найдены следующим образом. Умножим равенство (2.79) на $\mathbf{s} - \alpha_1$ и перейдем к пределу $\mathbf{s} \rightarrow \alpha_1$. Тогда в правой части останется только коэффициент d_1 . Поэтому

$$d_1 = \lim_{\mathbf{s} \rightarrow \alpha_1} \frac{\mathbf{s} - \alpha_1}{p(\mathbf{s})} = \lim_{\mathbf{s} \rightarrow \alpha_1} \frac{1}{\frac{p(\mathbf{s}) - p(\alpha_1)}{\mathbf{s} - \alpha_1}} = \frac{1}{p'(\alpha_1)}.$$

Аналогичным образом найдем все остальные коэффициенты

$$d_2 = \frac{1}{p'(\alpha_2)}, \dots, d_k = \frac{1}{p'(\alpha_k)}.$$

Следовательно,

$$g(n) = \sum_{l=1}^k \frac{1}{p'(\alpha_l)} \frac{s}{s - \alpha_l} = \sum_{l=1}^k \frac{1}{p'(\alpha_l)} \alpha_l^n. \quad (2.80)$$

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$x(n+6) + 4x(n+4) - x(n+2) - 4x(n) = 0 \quad (2.81)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x(1) = x(2) = x(5) = 0, \quad x(3) = 1, \quad x(4) = -1. \quad (2.82)$$

Характеристический многочлен уравнения (2.81) имеет вид

$$p(s) = s^6 + 4s^4 - s^2 - 4 = (s^4 - 1)(s^2 + 4).$$

Его корни $s_1 = 1$, $s_2 = -1$, $s_3 = i$, $s_4 = -i$, $s_5 = 2i$, $s_6 = -2i$. Операторное изображение решения уравнения (2.81) имеет вид

$$\begin{aligned} x(n) = & \frac{s^6 + 4s^4 - s^2}{p(s)} x(0) + \frac{s^5 + 4s^3 - s}{p(s)} x(1) + \frac{s^4 + 4s^2}{p(s)} x(2) + \\ & + \frac{s^3 + 4s}{p(s)} x(3) + \frac{s^2}{p(s)} x(4) + \frac{s}{p(s)} x(5). \end{aligned}$$

Учитывая начальные условия (2.82), получим

$$x(n) = \frac{s^3 - s^2 + 4s}{p(s)}. \quad (2.83)$$

Найдем функцию Коши $g(n)$. Так как

$$\begin{aligned} p'(1) = 20, \quad p'(-1) = -20, \quad p'(i) = -12i, \quad p'(-i) = 12i, \\ p'(2i) = 60i, \quad p'(-2i) = -60i, \end{aligned}$$

то по формуле (2.80)

$$\begin{aligned} g(n) = & \frac{1}{20} \frac{s}{s-1} - \frac{1}{20} \frac{s}{s+1} - \frac{1}{12i} \frac{s}{s-i} + \frac{1}{12i} \frac{s}{s+i} + \frac{1}{60i} \frac{s}{s-2i} - \\ & - \frac{1}{60i} \frac{s}{s+2i} = \frac{1}{20} [1 - (-1)^n] - \frac{1}{6} \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{15} \frac{s}{s^2+4}. \end{aligned}$$

Из формулы (1.25) при $r = 1$, $\varphi = \pi/2$ и $r = 2$, $\varphi = \pi/2$ следует, что

$$\frac{s}{s^2 + 1} = \sin n \frac{\pi}{2}, \quad \frac{s}{s^2 + 4} = 2^{n-1} \sin n \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$g(n) = \frac{1}{20} [1 - (-1)^n] + \left[\frac{2^{n-1}}{15} - \frac{1}{6} \right] \sin n \frac{\pi}{2}.$$

Из формулы (2.83) получим представление решения через функцию Коши

$$x(n) = \frac{s^3}{p(s)} - \frac{s^2}{p(s)} + \frac{4s}{p(s)} = g(n+2) - g(n+1) + 4g(n).$$

Легко видеть, что

$$g(n+1) = \frac{1}{20} [1 + (-1)^n] + \left[\frac{2^n}{15} - \frac{1}{6} \right] \cos n \frac{\pi}{2},$$

а

$$g(n+2) = \frac{1}{20} [1 - (-1)^n] - \left[\frac{2^{n+1}}{15} - \frac{1}{6} \right] \sin n \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$x(n) = \frac{1}{5} - \frac{3}{10}(-1)^n - \frac{1}{2} \sin n \frac{\pi}{2} + \left[\frac{1}{6} - \frac{2^n}{15} \right] \cos n \frac{\pi}{2}.$$

Отметим, что при $n = 2m$

$$x(2m) = -\frac{1}{10} + \left[\frac{1}{6} - \frac{2^{2m}}{15} \right] (-1)^m,$$

а при $n = 2m + 1$

$$x(2m+1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^m.$$

Упражнения.

Найти решение уравнений

а) $x(n+3) - 4x(n+2) + 6x(n+1) - 4x(n) = 0$, $x(0) = 0$,
 $x(1) = x(2) = 1$;

б) $x(n+5) + x(n) = 0$, $x(0) = 1$, $x(1) = 2$, $x(3) = x(4) = 0$;

с) $x(n+4) - 2x(n+3) - x(n+2) + 2x(n+1) + x(n) = 0$,
 $x(0) = x(1) = x(2) = 0$, $x(3) = 1$.

(Указание: $p(s) = (s^2 - s - 1)^2$);

д) $x(n+5) - 6x(n+4) + 11x(n+3) + 10x(n+2) - 12x(n+1) - 4x(n) = 0$,
 $x(0) = x(1) = 0$, $x(2) = 1$, $x(3) = 2$, $x(4) = 0$.

(Указание: корни характеристического многочлена являются целыми числами, если они делители числа 4).

2.4.1. Построение общего решения

Случай простых корней характеристического уравнения

Пусть корни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ характеристического многочлена являются простыми. Чтобы получить общее решение уравнения (2.76), нужно провести разложение на простейшие дроби в правой части равенства (2.77), но при этом не нужно вычислять коэффициенты, стоящие при простейших дробях, а достаточно взять эти коэффициенты в качестве произвольных постоянных. Таким образом, получим

$$\begin{aligned} x(n) = & x(0) \sum_{m=1}^k A_m^0 \alpha_m^n + x(1) \sum_{m=1}^k A_m^1 \alpha_m^n + \dots + \\ & + x(k-2) \sum_{m=1}^k A_m^{k-2} \alpha_m^n + x(k-1) \sum_{m=1}^k A_m^{k-1} \alpha_m^n. \end{aligned}$$

Соберем коэффициенты при функциях α_m^n , ($m = 1, \dots, k$) и обозначим их через C_m . Получим формулу

$$x(n) = C_1 \alpha_1^n + C_2 \alpha_2^n + \dots + C_k \alpha_k^n. \quad (2.84)$$

Решение, определенное формулой (2.84), является общим в том смысле, что каждое решение уравнения (2.76) может быть получено из формулы (2.84) при надлежащем выборе постоянных C_1, C_2, \dots, C_k . Постоянные C_1, C_2, \dots, C_k однозначно определяются для каждого решения $x(n)$ по начальным значениям этого решения. Покажем это. Из формулы (2.84) следуют равенства

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 + C_2 + \dots + C_k, \\ x(1) &= C_1 \alpha_1 + C_2 \alpha_2 + \dots + C_k \alpha_k, \\ &\dots \\ x(k-1) &= C_1 \alpha_1^{k-1} + C_2 \alpha_2^{k-1} + \dots + C_k \alpha_k^{k-1}. \end{aligned}$$

Определитель этой системы линейных неоднородных уравнений

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \dots & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix} \quad (2.85)$$

представляет собой известный определитель Вандермонда. Он равен

$$\prod_{1 \leq j < i \leq k} (\alpha_i - \alpha_j).$$

Отсюда следует, что он отличен от нуля, если все числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ различны. Поэтому существует единственное решение этой системы.

Отметим, что каждая из функций α_i^n , ($i = 1, 2, \dots, k$) является решением уравнения (2.76). Подставляя α_i в левую часть уравнения (2.76), получим

$$L(\alpha_i) = \alpha_i^n (\alpha_i^k + a_1 \alpha_i^{k-1} + \dots + a_{k-1} \alpha_i + a_k) = p(\alpha_i) \alpha_i^n = 0.$$

Следовательно, формула (2.84) представляет собой решение уравнения (2.76) при любых комплексных постоянных C_1, C_2, \dots, C_k .

Если коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_k уравнения (2.76) вещественны, то каждое решение этого уравнения можно представить в вещественной форме. В этом случае характеристический многочлен $p(s)$ имеет комплексно сопряженные корни. Пусть $p(s)$ имеет $2m$ комплексных корней

$$s_1 = \gamma_1 + i\delta_1, \dots, s_m = \gamma_m + i\delta_m, \quad s_{m+1} = \gamma_1 - i\delta_1, \dots, s_{2m} = \gamma_m - i\delta_m$$

и $(k - 2m)$ вещественных корней $\alpha_{2m+1}, \dots, \alpha_k$. Функция Коши $g(n)$ определяется формулой

$$g(n) = \frac{s}{p(s)} = \sum_{l=1}^m \frac{1}{p'(s_l)} \frac{s}{s - s_l} + \sum_{l=1}^m \frac{1}{p'(\bar{s}_l)} \frac{s}{s - \bar{s}_l} + \sum_{l=2m+1}^k \frac{1}{p'(s_l)} \frac{s}{s - s_l},$$

где \bar{s}_l комплексно сопряжено с s_l , а $p'(s_l)$ — производная многочлена $p(s)$ в точке s_l . Очевидно, постоянные $1/p'(s_l)$ и постоянные $1/p'(\bar{s}_l)$ комплексно сопряжены. Положим

$$\frac{1}{p'(s_l)} = a_l + ib_l, \quad \frac{1}{p'(\bar{s}_l)} = a_l - ib_l.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m \left[(a_l + ib_l) \frac{s}{s - \gamma_l - i\delta_l} + (a_l - ib_l) \frac{s}{s - \gamma_l + i\delta_l} \right] = \\ = \sum_{l=1}^m (a_l + ib_l)(\gamma_l + i\delta_l)^n + (a_l - ib_l)(\gamma_l - i\delta_l)^n. \end{aligned}$$

Представим $\gamma_l + i\delta_l$ и $\gamma_l - i\delta_l$ в тригонометрической форме

$$\gamma_l + i\delta_l = r_l e^{i\varphi_l}, \quad \gamma_l - i\delta_l = r_l e^{-i\varphi_l}.$$

Получим

$$\sum_{l=1}^m [(a_l + ib_l) r_l^n e^{in\varphi_l} + (a_l - ib_l) r_l^n e^{-in\varphi_l}] = \sum_{l=1}^m [2a_l r_l^n \cos n\varphi_l - 2b_l r_l^n \sin n\varphi_l].$$

Таким образом,

$$g(n) = 2 \sum_{l=1}^m r_l^n (a_l \cos n\varphi_l - b_l \sin n\varphi_l) + \sum_{l=2m+1}^k \frac{1}{p'(\alpha_l)} \alpha_l^n.$$

Из формулы (2.84) следует, что и решение имеет такую же форму. Эта форма решения показывает, что каждая мнимая часть $\delta_l \neq 0$ корня s_l придает решению колебательный характер при $n \rightarrow \infty$, а каждая вещественная часть γ_l корня дает решению либо рост, если $|\gamma_l| > 1$, либо убывание, если $|\gamma_l| < 1$. Из всего вышесказанного следует, что общее решение уравнения (2.76) в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$x(n) = \sum_{l=1}^m r_l^n (C_l \cos n\varphi_l + D_l \sin n\varphi_l) + \sum_{l=2m+1}^k A_k \alpha_l^n,$$

где

$$r_l = \sqrt{\gamma_l^2 + \delta_l^2}, \quad \varphi_l = \arctan \frac{\delta_l}{\gamma_l}.$$

Другой путь представления решения в вещественной форме состоит в следующем. В общей формуле (2.84) взять коэффициенты при комплексно сопряженных решениях комплексно сопряженными. Третий путь получения решения в вещественной форме опирается на лемму.

Лемма 2.1. Если $x(n)$ — комплексное решение

$$x(n) = u(n) + iv(n)$$

уравнения (2.76) с вещественными коэффициентами a_1, \dots, a_k , где $u(n)$ и $v(n)$ — вещественные дискретные функции, тогда $u(n)$ и $v(n)$ являются вещественными решениями уравнения (2.76).

Лемма следует из равенства

$$L[u(n) + iv(n)] = L[u] + iL[v].$$

Из леммы вытекает, что каждому комплексному решению вида $(a + ib)^n = r^n e^{in\varphi}$ соответствуют два вещественных решения уравнения (2.76)

$$u(n) = r^n \cos n\varphi, \quad v(n) = r^n \sin n\varphi.$$

Паре комплексно сопряженных корней характеристического уравнения соответствует два вещественных решения указанного выше вида.

Рассмотрим уравнение

$$x(n+3) - 2x(n+2) + x(n+1) - 2x(n) = 0.$$

Характеристический многочлен $p(s) = s^3 - 2s^2 + s - 2 = (s - 2)(s^2 + 1)$ имеет корни $s_1 = 2$, $s_2 = i$, $s_3 = -i$. Общее решение в комплексной форме имеет вид

$$x(n) = C_1 2^n + C_2 (i)^n + C_3 (-i)^n = C_1 2^n + c_2 e^{in\pi} + C_3 e^{-in\pi}.$$

В вещественной форме общее решение имеет вид

$$x(n) = C_1 2^n + A \cos n\pi + B \sin n\pi.$$

Остановимся еще на вопросе о линейной независимости функций $x_i(n) = \alpha_i^n$, $i = 1, \dots, k$.

Определение. *Функции $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ называются линейно независимыми, если тождество*

$$C_1 x_1(n) + C_2 x_2(n) + \dots + C_k x_k(n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

выполняется в том и только том случае, когда постоянные C_1, C_2, \dots, C_k равны нулю.

В противном случае эти функции называются линейно зависимыми.

Вопрос о линейной независимости функций α_i^n , $i = 1, \dots, k$ сводится к вопросу об отличии от нуля определителя Вандермонда (2.85). (Докажите это!).

Случай кратных корней характеристического уравнения

Предположим теперь, что характеристический многочлен $p(s)$ имеет кратные корни. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — совокупность всех различных корней многочлена $p(s)$, причем корень α_j имеет кратность r_j , так что

$$r_1 + r_2 + \dots + r_m = k.$$

Теперь правую часть операторного представления решения (2.77) разлагаем на простейшие дроби. При этом коэффициенты в простейших дробях выберем в качестве произвольных постоянных. Получим операторное изображение общего решения

$$\begin{aligned} x(n) = & A_1^1 \frac{s}{s - \alpha_1} + A_1^2 \frac{s}{(s - \alpha_1)^2} + \dots + A_1^{r_1} \frac{s}{(s - \alpha_1)^{r_1}} + \\ & + A_2^1 \frac{s}{s - \alpha_2} + A_2^2 \frac{s}{(s - \alpha_2)^2} + \dots + A_2^{r_2} \frac{s}{(s - \alpha_2)^{r_2}} + \dots + \\ & + A_m^1 \frac{s}{s - \alpha_m} + A_m^2 \frac{s}{(s - \alpha_m)^2} + \dots + A_m^{r_m} \frac{s}{(s - \alpha_m)^{r_m}}. \end{aligned}$$

Из формул (1.16) и (1.21) следует, что

$$\begin{aligned} x(n) = & A_1^1 \alpha_1^n + A_2^1 C_n^1 \alpha_1^{n-1} + \dots + A_1^{r_1} C_n^{r_1-1} \alpha_1^{n-r_1+1} + \\ & + A_2^1 \alpha_2^n + A_2^2 C_n^1 \alpha_2^{n-1} + \dots + A_2^{r_2} C_n^{r_2-1} \alpha_2^{n-r_2+1} + \dots + \\ & + A_m^1 \alpha_m^n + A_m^2 C_n^1 \alpha_m^{n-1} + \dots + A_m^{r_m} C_n^{r_m-1} \alpha_m^{n-r_m+1}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Решение, определенное формулой (2.86), является общим решением уравнения

$$L[x] = x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + \dots + a_k x(n) = 0 \quad (2.87)$$

в том смысле, что каждое решение этого уравнения может быть получено по формуле (2.86) при надлежащем выборе постоянных A_i^j . При этом постоянные A_i^j однозначно определяются по начальным условиям решения.

Каждая из функций $C_n^r \alpha^{n-r}$, входящая в правую часть формулы (2.86), сама является решением. В самом деле, если число α является корнем уравнения $p(s) = 0$ кратности m , то оно является также корнем уравнений

$$p'(s) = 0, p''(s) = 0, \dots, p^{(m-1)}(s) = 0,$$

где $p^{(k)}(s)$ — производная порядка k многочлена $p(s)$. Легко видеть, что $L[\alpha^n] = p(\alpha)\alpha^n$. Далее,

$$L[C_n^r \alpha^{n-r}] = L\left[\frac{1}{r!} \frac{\partial^r}{\partial \alpha^r} \alpha^n\right] = \frac{1}{r!} \frac{\partial^r}{\partial \alpha^r} L[\alpha^n] = \frac{1}{r!} \frac{\partial^r}{\partial \alpha^r} (p(\alpha)\alpha^n).$$

Применяя формулу Лейбница для вычисления производной произведения функций, получим

$$\begin{aligned} L[C_n^r \alpha^{n-r}] = & \frac{1}{r!} \left[p^{(r)}(\alpha) \alpha^n + C_r^1 p^{(r-1)}(\alpha) n \alpha^{n-1} + C_r^2 p^{(r-2)}(\alpha) n(n-1) \alpha^{n-2} + \right. \\ & + \dots + C_r^{r-1} p'(\alpha) n(n-1) \dots (n-r+2) \alpha^{n-r+1} + \\ & \left. + p(\alpha) n(n-1) \dots (n-r+1) \alpha^{n-r} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$L[C_n^r \alpha^{n-r}] = 0, \quad r = 0, \dots, m-1.$$

Тем самым доказано, что функции

$$C_n^{q_i} \alpha^{n-q_i}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad q_i = 0, 1, \dots, r_{i-1}$$

являются решениями уравнения (2.87). Следовательно, формула (2.86) дает решение уравнения (2.87) при любых комплексных постоянных A_i^j .

Очевидно, вместо функций $C_n^r \alpha^{n-r}$ можно взять линейные комбинации функций

$$n(n-1) \cdots (n-r+1) \alpha^{n-r}$$

или

$$n(n-1) \cdots (n-r+1) \alpha^n,$$

которые также являются решениями уравнения (2.87).

Множество линейных комбинаций функций

$$\alpha^n, n\alpha^n, n(n-1)\alpha^n, \dots, n(n-1) \cdots (n-r+1)\alpha^n$$

совпадает с множеством функций $P_r(n)\alpha^n$, где $P_r(n)$ — произвольный многочлен степени r . Это следует из того факта, что каждый многочлен степени r можно однозначно представить в виде

$$P_r(n) = A_0 + A_1 n + A_2 n(n-1) + \dots + A_{r-1} n(n-1) \cdots (n-r+1).$$

Поэтому вместо решений

$$x_0(n) = \alpha^n, x_1(n) = n\alpha^n, \dots, x_r(n) = n(n-1) \cdots (n-r+1)\alpha^n, \quad (2.88)$$

отвечающих корню характеристического уравнения α кратности r , можно взять функции

$$x_1(n) = \alpha^n, x_2(n) = n\alpha^n, x_3(n) = n^2\alpha^n, \dots, x_r(n) = n^{r-1}\alpha^n. \quad (2.89)$$

Можно показать, что каждая функция из системы (2.89) является решением уравнения (2.87) (каждая из функций системы (2.89) является линейной комбинацией функций из системы (2.88)). Часто выбор системы (2.89) вместо системы (2.88) является более удобным.

Покажем, что решения

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \alpha_1^n, \quad x_2(n) = n\alpha_1^n, \dots, \quad x_{r_1}(n) = n^{r_1-1}\alpha_1^n, \\ x_{r_1+1}(n) &= \alpha_2^n, \quad x_{r_1+2}(n) = n\alpha_2^n, \dots, \quad x_{r_1+r_2}(n) = n^{r_2-1}\alpha_2^n, \\ &\dots \\ x_{r_1+r_2+\dots+r_{m-1}+1}(n) &= \alpha_m^n, \dots, \quad x_k(n) = n^{r_m-1}\alpha_m^n \end{aligned} \quad (2.90)$$

уравнения (2.87) являются линейно независимыми. Предположим противное. Тогда существует такой набор чисел C_1, C_2, \dots, C_k , из которых по крайней мере одно отлично от нуля, что справедливо тождество

$$\begin{aligned} (C_1 + C_2 n + \dots + C_{r_1} n^{r_1-1}) \alpha_1^n + \dots + (C_{r_1+r_2+\dots+r_{m-1}+1} + \\ + C_{r_1+r_2+\dots+r_{m-1}+2} n + \dots + C_k n^{r_m-1}) \alpha_m^n \equiv 0 \end{aligned}$$

или

$$\sum_{i=1}^m P_i(n) \alpha_i^n \equiv 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.91)$$

где $P_i(n)$ — многочлены по n степени не выше, чем $r_i - 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Без ограничения общности можно предположить, что в многочлене $P_m(n)$ по крайней мере один коэффициент отличен от нуля.

Запишем тождество (2.91) в виде

$$P_1(n) \alpha_1^n + \sum_{i=2}^m P_i(n) \alpha_i^n \equiv 0. \quad (2.92)$$

Очевидно, справедливо тождество

$$P(n+1) \alpha_1^{n+1} + \sum_{i=2}^m P_i(n+1) \alpha_i^{n+1} \equiv 0. \quad (2.93)$$

Умножим тождество (2.92) на α_1 и вычтем его из (2.93). Получим

$$(P_1(n+1) - P_1(n)) \alpha_1 \alpha_1^n + \sum_{i=2}^m [P_i(n+1) \alpha_i - P_i(n) \alpha_1] \alpha_i^n \equiv 0. \quad (2.94)$$

Тождество (2.94) аналогично тождеству (2.92), но многочлен при α_1^n имеет степень на единицу меньше, чем многочлен $P_1(n)$, а старший коэффициент многочлена при α_m^n отличен от нуля. Многочлены при $\alpha_2^n, \dots, \alpha_{m-1}^n$ имеют ту же степень, что и в тождестве (2.92). Продолжая такие преобразования тождества (2.94), мы добьемся того, что многочлен при α_1^n станет нулевым. Получим тождество

$$\sum_{i=2}^m Q_i(n) \alpha_i^n \equiv 0, \quad (2.95)$$

где степени многочленов $Q_2(n), \dots, Q_m(n)$ совпадают со степенями многочленов $P_2(n), \dots, P_m(n)$ соответственно. Продолжая такие же преобразования тождества (2.95), придем к тождеству

$$R_m(n) \alpha_m^n \equiv 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.96)$$

где $R_m(n)$ многочлен по n , у которого по крайней мере один коэффициент отличен от нуля. Из тождества (2.96) следует, что

$$R_m(n) \equiv 0.$$

Отсюда вытекает, что многочлен $R_m(n)$ обращается в нуль при всех $n = 1, 2, \dots$. Получаем противоречие с предположением, что функции (2.90) линейно зависимы. Следовательно, функции (2.90) линейно независимы.

Как и в случае простых корней характеристического уравнения $p(s) = 0$, если коэффициенты a_1, \dots, a_k уравнения (2.87) вещественны, то линейно независимые решения можно записать в вещественной форме. Пары кратных корней $\alpha_1, \alpha_2 = \bar{\alpha}_1$ кратности r соответствует $2r$ вещественных решений

$$\begin{aligned} & r^n \cos n\varphi, nr^n \cos n\varphi, \dots, n^{r-1}r^n \cos n\varphi, \\ & r^n \sin n\varphi, nr^n \sin n\varphi, \dots, n^{r-1}r^n \sin n\varphi. \end{aligned}$$

В качестве примера рассмотрим задачу. Найти решение уравнения

$$x(n+4) + 2x(n+3) + 3x(n+2) + 2x(n+1) + x(n) = 0, \quad (2.97)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x(1) = x(3) = 0, \quad x(2) = 1,$$

в частности, вычислить $x(100)$ (эта задача заимствована из книги Маркова [24]).

Характеристический многочлен уравнения (2.97) имеет вид

$$\begin{aligned} p(s) &= s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 1 = (s^2 + s + 1)^2 = \\ &= \left(s - \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^2 \left(s - \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, общее решение уравнения (2.97) выглядит следующим образом:

$$x(n) = (C_1 + C_2 n) \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^n + (C_3 + C_4 n) \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^n.$$

Представляя решение в вещественной форме, получим

$$x(n) = (q_1 + q_2 n) \cos \frac{2n\pi}{3} + (q_3 + q_4 n) \sin \frac{2n\pi}{3}.$$

Вещественные постоянные q_1, q_2, q_3, q_4 определяются из системы четырех уравнений

$$\begin{aligned} x(0) &= q_1 = 0, \quad x(1) = (q_1 + q_2) \cos \frac{2\pi}{3} + (q_3 + q_4) \sin \frac{2\pi}{3} = 0, \\ x(2) &= (q_1 + 2q_2) \cos \frac{4\pi}{3} + (q_3 + 2q_4) \sin \frac{4\pi}{3} = -1, \quad x(3) = q_1 + 3q_2 = 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, находим

$$q_1 = q_2 = 0, \quad q_3 = q_4 = -\frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$x(n) = \frac{2(n-1)}{\sqrt{3}} \sin \frac{2n\pi}{3}.$$

Отсюда следует, что $x(n) = 0$ при $n = 3m$ (m — натуральное число), $x(n) = n - 1$ при $n = 3m + 1$, $x(n) = 1 - n$ при $n = 3m - 1$. Поэтому

$$x(100) = \frac{198}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi}{3} = 99.$$

Упражнения.

Найти общее решение уравнений

- a) $x(n+3) - x(n) = 0$;
- b) $x(n+4) - 4x(n+2) + 4x(n) = 0$;
- c) $x(n+4) + 4x(n+2) + 4x(n) = 0$;
- d) $x(n+6) - x(n+5) + x(n+1) - x(n) = 0$;
- e) $x(n+5) + 2x(n) = 0$.

2.5. Неоднородные уравнения k -го порядка

Рассмотрим неоднородное линейное разностное уравнение k -го порядка

$$L[x] = x(n+k) + a_1x(n+k-1) + \dots + a_{k-1}x(n+1) + a_kx(n) = f(n), \quad (2.98)$$

где $f(n)$ — дискретная функция, определенная при $n = 0, 1, \dots$. Пусть функции $v_1(n)$ и $v_2(n)$ являются решениями уравнения (2.98), т. е.

$$L[v_1] = f(n), \quad L[v_2] = f(n).$$

Отсюда следует, что

$$L[v_1] - L[v_2] = L[v_1 - v_2] = 0,$$

т. е. функция $u(n) = v_1(n) - v_2(n)$ является решением однородного уравнения. Следовательно, общее решение неоднородного уравнения (2.98) представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и некоторого (частного) решения неоднородного уравнения.

2.5.1. Решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями

Изложим методы нахождения частного решения неоднородного уравнения (2.98).

Начнем с определения решения уравнения (2.98) с нулевыми начальными условиями. Если $x(0) = x(1) = \dots = x(k-1) = 0$, то изображающее уравнение будет иметь вид

$$s^k x(n) + a_1 s^{k-1} x(n) + \dots + a_k x(n) = p(s)x(n) = f(n).$$

Его решение определяется формулой

$$x(n) = \frac{1}{p(s)} f(n).$$

Напомним, что функция Коши $g(n)$ — это решение однородного уравнения с начальными условиями $g(0) = g(1) = \dots = g(k-2) = 0$, $g(k-1) = 1$. Операторное изображение функции $g(n)$ имеет вид $s/p(s)$. Поэтому из формулы

$$g(n) = sg(n-1) - sg(-1) = \frac{s}{p(s)}$$

следует, что

$$g(n-1) - g(-1) = \frac{1}{p(s)}.$$

Следовательно,

$$x(n) = [g(n-1) - g(-1)]f(n) = \sum_{l=0}^n g(n-l-1)f(l) - g(-1)f(n)$$

или

$$x(n) = \sum_{l=0}^{n-1} g(n-l-1)f(l).$$

Учитывая, что $g(0) = \dots = g(k-2) = 0$, окончательно получим формулу для частного решения уравнения (2.98)

$$x(n) = \sum_{l=1}^{n-k+1} g(n-l)f(l-1). \quad (2.99)$$

Практическое отыскание частного решения уравнения (2.98) разбивается на следующие операции:

- 1) вычисление нулей функции $p(s)$;
- 2) разложение функции $1/p(s)$ на простейшие дроби;
- 3) определение оригинала функции Коши $g(n)$ по разложению ее изображения на простейшие дроби;
- 4) вычисление суммы (2.99).

Последней операции можно избежать, если найти в явном виде изображение $f(s)$ функции $f(n)$, а затем найти оригинал для изображения $f(s)/p(s)$.

Упражнения.

Найти частное решение неоднородных уравнений с нулевыми начальными условиями

- a) $x(n+3) - 8x(n) = 2^n$;
- b) $x(n+4) - 2x(n+2) + x(n) = \sin n\frac{\pi}{3}$;
- c) $x(n+4) - x(n) = (-1)^n 3^n$;
- d) $x(n+3) + x(n+2) + x(n+1) + x(n) = (-1)^n n$;
- e) $x(n+5) - x(n+3) + x(n+2) - x(n) = 3 + n$.

2.5.2. Вычисление частного решения, когда правая часть уравнения является квазимногочленом

Вычисление решения уравнения (2.98) с нулевыми начальными условиями было проведено без каких-либо предположений о виде функции $f(n)$. Сейчас мы рассмотрим методы нахождения частного решения уравнения (2.98) в предположении, что $f(n)$ имеет некоторый специальный вид.

Квазимногочленом будем называть функцию $F(n)$, которую можно записать в виде

$$F(n) = f_1(n)\alpha_1^n + f_2(n)\alpha_2^n + \dots + f_m(n)\alpha_m^n,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — некоторые комплексные числа, а $f_1(n), f_2(n), \dots, f_m(n)$ — многочлены по n . Обратимся к разностному уравнению

$$L[x] = (n+k) + a_1x(n+k-1) + \dots + a_{k-1}x(n+1) + a_kx(n) = F(n). \quad (2.100)$$

Отметим сначала следующее. Если задано разностное уравнение

$$L[x] = f_1(n) + f_2(n),$$

то его решение является суммой решений разностных уравнений

$$L[x] = f_1(n), \quad L[x] = f_2(n).$$

Поэтому решение уравнения (2.100) получается как сумма решений для правых частей вида $F(n) = f(n)\alpha^n$. Будем предполагать, что $f(n)$ — многочлен степени r , т. е.

$$f(n) = b_0 n^r + b_1 n^{r-1} + \dots + b_{r-1} n + b_r.$$

Чтобы получить операторное изображение многочлена, нам нужно выразить степени n^k через биномиальные коэффициенты. Соответствующие формулы имеют вид

$$n^k = \sum_{m=1}^k S(k, m) C_n^m m!, \quad k > 0,$$

где $S(k, m)$ — числа Стирлинга второго рода (см., например, Риордан [26]). Следовательно,

$$n^k = S(k, 1)n + S(k, 2)C_n^2 2! + \dots + S(k, q)C_n^q q! + \dots + S(k, k)C_n^k k!. \quad (2.101)$$

Из формулы (2.101) следует, что $S(k, 0) = 0$ и $S(k, k+m) = 0$, если $m > 0$. Полагая в формуле (2.101) $n = 1$, получим $S(k, 1) = 1$. Выведем рекуррентное соотношение, связывающее числа Стирлинга второго рода. Учитывая, что

$$C_n^{m+1}(m+1)! = (n-m)C_n^m m!,$$

получим

$$n^{k+1} = \sum_{m=1}^{k+1} S(k+1, m) C_n^m m! = n n^k = n \sum_{m=1}^k S(k, m) C_n^m m!$$

Последнее выражение можно представить в виде

$$\sum_{m=1}^k S(k, m) [C_n^{m+1}(m+1)! + m C_n^m m!].$$

Сравнивая слагаемые при C_n^m , получим рекуррентное соотношение

$$S(k+1, m) = S(k, m-1) + m S(k, m),$$

позволяющее последовательно вычислить числа Стирлинга второго рода. Теперь функцию $f(n)$ можно представить в виде

$$f(n) = b_0 \sum_{m=1}^r S(r, m) C_n^m m! + b_1 \sum_{m=1}^{r-1} S(r-1, m) C_n^m m! + \dots + b_{r-1} C_n^1 + b_r.$$

Из формулы (1.21) следует, что

$$\alpha^m(\alpha^{n-m}C_n^m) = \alpha^m \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - \alpha)^{m+1}}. \quad (2.102)$$

Поэтому, собирая коэффициенты при C_n^m , $m = 1, 2, \dots, r$, получим операторное изображение функции $f(n)\alpha^n$:

$$\begin{aligned} f(n)\alpha^n = & b_0\alpha^r r! S(r, r) \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - \alpha)^{r+1}} + \alpha^{r-1}(r-1)!(b_0 S(r, r-1) + \\ & + b_1 S(r-1, r-1)) \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - \alpha)^r} + \alpha^{r-2}(r-2)!(b_0 S(r, r-2) + b_1 S(r-1, r-2) + \\ & + b_2 S(r-2, r-2)) \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - \alpha)^{r-2}} + \dots + \alpha(b_0 S(r, 1) + b_1 S(r-1, 1) + \dots + \\ & + b_{r-1}) \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - \alpha)^2} + b_r \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s} - \alpha}. \end{aligned}$$

Общее решение неоднородного уравнения (2.98), которое складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, в операторном изображении выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} x(n) = & A_1^1 \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s} - \alpha_1} + A_1^2 \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - \alpha_1)^2} + \dots + A_1^{r_1} \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - \alpha_1)^{r_1}} + \dots + A_m^1 \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s} - \alpha_m} + \dots + \\ & + A_m^{r_m} \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - \alpha_m)^{r_m}} + \frac{1}{p(\mathbf{s})} \left[b_0\alpha^r S(r, r)r! \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - \alpha)^{r+1}} + \dots + b_r \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s} - \alpha} \right], \quad (2.103) \end{aligned}$$

где A_i^j — произвольные постоянные и

$$p(\mathbf{s}) = (\mathbf{s} - \alpha_1)^{r_1} (\mathbf{s} - \alpha_2)^{r_2} \dots (\mathbf{s} - \alpha_m)^{r_m}$$

является характеристическим многочленом однородного уравнения.

Рассмотрим отдельно два случая.

Число α не является корнем характеристического многочлена $p(\mathbf{s})$

В этом случае $p(\alpha) \neq 0$. Разлагаем последнее слагаемое правой части на простейшие дроби. Затем выбираем произвольные постоянные A_i^j таким образом, чтобы обратились в нуль все коэффициенты при дробях

$$\frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - \alpha_i)^j}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, r_i.$$

При таком выборе постоянных A_i^j изображающее уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} x(n) = & a_0\alpha^r r! \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - \alpha)^{r+1}} + a_1\alpha^{r-1}(r-1)! \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - \alpha)^r} + \\ & + a_2\alpha^{r-2}(r-2)! \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - \alpha)^{r-1}} + \dots + a_{r-1} \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} - \alpha)^2} + a_r \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s} - \alpha}. \end{aligned}$$

Обращаясь снова к формуле (2.102), получим, что уравнение (2.98) имеет частное решение

$$x(n) = (a_0 r! C_n^r + a_1 (r-1)! C_n^{r-1} + \dots + a_{r-1} C_n^1 + a_r) \alpha^n,$$

где значения постоянных a_0, \dots, a_r зависят от чисел Стирлинга второго рода $S(r, j)$, $j = 1, \dots, r$ и коэффициентов разложения на простейшие дроби последнего слагаемого в (2.103). Собираем коэффициенты при степенях n^m , $m = 1, 2, \dots, r$. Тогда получим, что уравнение (2.98) имеет частное решение

$$x(n) = (q_0 n^r + q_1 n^{r-1} + \dots + q_{r-1} n + q_r) \alpha^n.$$

Число α — кратный корень многочлена $p(s)$

Пусть для определенности $\alpha = \alpha_1$ и, следовательно, α — корень кратности r_1 многочлена $p(s)$. В этом случае разложение последнего слагаемого правой части (2.103) на простейшие дроби имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(s - \alpha_1)^{r_1} (s - \alpha_2)^{r_2} \dots (s - \alpha_m)^{r_m}} \left[b_0 \alpha_1^r S(r, r) r! \frac{s}{(s - \alpha_1)^{r+1}} + \right. \\ & + \alpha_1^{r-1} (r-1)! (b_0 S(r, r-1)! + b_1 S(r-1, r-1)) \frac{s}{(s - \alpha_1)^r} + \dots + \\ & \left. + b_{r-1} \frac{s}{(s - \alpha_1)^2} + b_r \frac{s}{s - \alpha_1} \right] = B_1^1 \frac{s}{s - \alpha_1} + \dots + B_1^{r_1+r+1} \frac{s}{(s - \alpha_1)^{r_1+r+1}} + \\ & + B_2^1 \frac{s}{s - \alpha_2} + \dots + B_2^{r_2} \frac{s}{(s - \alpha_2)^{r_2}} + \dots + B_m^{r_m} \frac{s}{(s - \alpha_m)^{r_m}}. \end{aligned}$$

Поэтому, выбираем постоянные A_i^j таким образом, чтобы обратилось в нуль наибольшее число коэффициентов при дробях

$$\frac{s}{(s - \alpha_i)^j}$$

в выражении (2.103). Тогда изображающее уравнение примет вид

$$x(n) = B_1^{r_1} \frac{s}{(s - \alpha_1)^{r_1+1}} + B_1^{r_1+1} \frac{s}{(s - \alpha_1)^{r_1+2}} + \dots + B_1^{r_1+r} \frac{s}{(s - \alpha_1)^{r_1+r+1}}.$$

Коэффициенты $B_1^{r_1+j}$, $j = 0, 1, \dots, r$ определяются формулами

$$B_1^{r_1+j} = c_j \alpha_1^j j!,$$

где c_j выражаются через числа Стирлинга второго рода и коэффициенты разложения на простейшие дроби. Перейдем к оригиналам, используя формулу (2.102). Получим, что уравнение (2.98) имеет частное решение

$$x(n) = (c_r r! C_n^{r_1+r} + c_{r-1} (r-1)! C_n^{r_1+r-1} + \dots + c_1 C_n^{r_1+1} + c_0 C_n^{r_1}) \alpha_1^{n-r_1}.$$

Собираем коэффициенты при степенях n^m , $m = 1, 2, \dots, r$. Тогда получим, что уравнение (2.98) имеет частное решение

$$x(n) = n^{r_1} (q_0 n^r + q_1 n^{r-1} + \dots + q_{r-1} n + q_r) \alpha_1^n.$$

Мы получили следующий результат. Неоднородное уравнение

$$L[x] = x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + \dots + a_k x(n) = f(n) \alpha^n,$$

в котором $f(n)$ есть многочлен степени r по n , а α — комплексное или вещественное число, имеет частное решение

$$x(n) = n^m y(n) \alpha^n, \quad (2.104)$$

где $y(n)$ — многочлен степени r по n , m — кратность α как корня характеристического многочлена $p(s)$ (если $p(\alpha) \neq 0$, то $m = 0$). Коэффициенты многочлена $y(n)$ можно найти *методом неопределенных коэффициентов*, т. е. искать решение в виде (2.104). Нужно подставить эту формулу в уравнение и для определения коэффициентов многочлена $y(n)$ приравнять нулю коэффициенты при степенях n^m , $m = 1, \dots, r$ в полученном выражении.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$x(n+4) - 8x(n+2) + 16x(n) = n2^n.$$

Характеристический многочлен $p(s) = s^4 - 8s^2 + 16 = (s^2 - 4)^2$ имеет корни $s_{1,2} = \pm 2$ кратности 2. Поэтому частное решение этого уравнения ищем в виде

$$x(n) = n^2 2^n (A + Bn) = 2^n (An^2 + Bn^3),$$

где постоянные A и B нужно определить. Подставим последнее выражение в уравнение и разделим обе части равенства на 2^n . Получим

$$16[A(n+4)^2 + B(n+4)^3] - 32[A(n+2)^2 + B(n+2)^3] + 16(An^2 + Bn^3) - n = 0.$$

Приравниваем нулю коэффициенты при степенях n, n^0 (коэффициенты при n^3, n^2 равны нулю). Получим систему уравнений

$$128A + 768B - 128A - 384B = 1, \quad 256A + 1024B - 128A - 256B = 0.$$

Отсюда следует, что $A = -1/64, B = -1/384$. Частное решение имеет вид

$$x(n) = -\frac{1}{64}n^2 + \frac{1}{384}n^3.$$

Упражнения.

Найти частное решение неоднородного уравнения

- а) $x(n+2) - x(n) = n^2$;
- б) $x(n+3) - 6x(n+2) + 12x(n+1) - 4x(n) = n2^n$;
- в) $x(n+4) - 6x(n+2) + 9x(n) = 3^{n/2}$;
- г) $x(n+2) - x(n+1) - x(n) = n5^n$;
- е) $x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) = 5 + 3n$.

Пусть правая часть уравнения (2.98) имеет вид $f(n)\alpha^n \cos n\beta$ или $f(n)\alpha^n \sin n\beta$, где $f(n)$ — многочлен степени r , α и β — вещественные числа. Этот случай приводится к предыдущему. Для этого заметим, что функции $\alpha^n \cos n\beta$ и $\alpha^n \sin n\beta$ линейно выражаются через функции $(a+ib)^n$ и $(a-ib)^n$, где $a = \alpha \cos \beta$, $b = \alpha \sin \beta$.

Так как $\cos n\beta$ и $\sin n\beta$ выражаются через одни и те же показательные функции, то естественно рассматривать правую часть более общего вида:

$$\alpha^n [f_1(n) \cos n\beta + f_2(n) \sin n\beta], \quad (2.105)$$

где $f_1(n)$ и $f_2(n)$ — многочлены по n . После замены тригонометрических функций показательными получим выражение

$$\frac{1}{2}(a+ib)^n(f_1(n) - if_2(n)) + \frac{1}{2}(a-ib)^n(f_1(n) + if_2(n)).$$

Поэтому частное решение уравнения (2.98) нужно искать в виде

$$(a+ib)^n Q_1(n) + (a-ib)^n Q_2(n), \quad (2.106)$$

если числа $a \pm ib$ не являются корнями характеристического многочлена $p(s)$. Здесь $Q_1(n)$ и $Q_2(n)$ — многочлены по n . Если числа $a \pm ib$ являются корнями характеристического многочлена $p(s)$ кратности m , то выражение (2.106) должно быть умножено на n^m . Из способа определения коэффициентов многочленов $Q_1(n)$ и $Q_2(n)$ легко следует, что коэффициенты многочлена $Q_2(n)$ комплексно сопряжены коэффициентам многочлена $Q_1(n)$. Поэтому

$$Q_1(n) = Q_1^*(n) + iQ_1^*(n), \quad Q_2(n) = Q_1^*(n) - iQ_1^*(n).$$

Подставляя эти многочлены в выражение (2.106) и переходя снова от показательных функций к тригонометрическим, получим, что частное решение уравнения (2.98) с правой частью (2.105) можно искать в виде

$$\alpha^n [2Q_1^*(n) \cos n\beta - 2Q_1^*(n) \sin n\beta],$$

если $a \pm ib$ не является корнем характеристического многочлена $p(s)$. Если $a \pm ib$ корни характеристического многочлена кратности m , то предыдущее выражение нужно умножить на n^m .

Частное решение уравнения (2.98) с правой частью

$$\alpha^n [P_1(n) \cos n\beta + P_2(n) \sin n\beta]$$

можно искать в виде

$$n^m \alpha^n [Q_1(n) \cos n\beta + Q_2(n) \sin n\beta],$$

где многочлены $Q_1(n)$ и $Q_2(n)$ той же степени, что и многочлены $P_1(n)$ и $P_2(n)$ (или наибольшей степени, если степени многочленов $P_1(n)$ и $P_2(n)$ различны), а $m \geq 0$ есть кратность корня $a \pm ib$ характеристического уравнения $p(s) = 0$, где

$$a = \alpha \cos \beta, \quad b = \alpha \sin \beta.$$

Часто все же удобно представить правую часть

$$\alpha^n [P_1(n) \cos n\beta + P_2(n) \sin n\beta]$$

уравнения (2.98) в виде

$$\alpha^n \left[\frac{1}{2}(P_1(n) - iP_2(n))e^{in\beta} + \frac{1}{2}(P_1(n) + iP_2(n))e^{-in\beta} \right]$$

и найти частные решения уравнений

$$L[x] = \alpha^n \left[\frac{1}{2}(P_1(n) - iP_2(n))e^{in\beta} \right]$$

и

$$L[x] = \alpha^n \left[\frac{1}{2}(P_1(n) + iP_2(n))e^{-in\beta} \right],$$

а затем сложить полученные решения.

В качестве примера найдем частное решение уравнение

$$x(n+2) + x(n+1) + x(n) = \cos \frac{2n\pi}{3} + \sin \frac{2n\pi}{3}. \quad (2.107)$$

Корни характеристического уравнения $p(s) = s^2 + s + 1 = 0$ имеют вид

$$s_{1,2} = \cos \frac{2\pi}{3} \pm i \sin \frac{2\pi}{3} = e^{\pm i \frac{2\pi}{3}}.$$

Правую часть уравнения (2.107) можно записать в виде

$$\frac{1-i}{2}e^{i\frac{2n\pi}{3}} + \frac{1+i}{2}e^{-i\frac{2n\pi}{3}}.$$

Сначала найдем частное решение уравнения

$$x(n+2) + x(n+1) + x(n) = \frac{1-i}{2}e^{i\frac{2n\pi}{3}}. \quad (2.108)$$

Ищем частное решение этого уравнения в виде

$$x(n) = Ane^{i\frac{2n\pi}{3}}, \quad A = \text{const}, \quad (2.109)$$

так как $e^{i\frac{2n\pi}{3}}$ — корень характеристического уравнения кратности 1. Подставляя выражение (2.109) в уравнение (2.108), получим

$$A(n+2)e^{i\frac{2(n+2)\pi}{3}} + A(n+1)e^{i\frac{2(n+1)\pi}{3}} + Ane^{i\frac{2n\pi}{3}} = \frac{1-i}{2}e^{i\frac{2n\pi}{3}}.$$

Учитывая, что

$$e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{3}} = -e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{3}} = -e^{-i\frac{\pi}{3}},$$

получим

$$An(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} + 1) + A(2e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}) = \frac{1-i}{2}.$$

Легко видеть, что выражение в первой скобке равно нулю. Это следствие того факта, что число $\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ является корнем характеристического уравнения.

Второе слагаемое дает возможность определить постоянную A :

$$A = -\frac{1-i}{3+i\sqrt{3}}.$$

Поэтому частное решение уравнения (2.108) имеет вид

$$x(n) = -\frac{1-i}{3+i\sqrt{3}}ne^{i\frac{2n\pi}{3}}. \quad (2.110)$$

Аналогичные вычисления для уравнения

$$x(n+2) + x(n+1) + x(n) = \frac{1+i}{2}e^{-i\frac{2n\pi}{3}}$$

дают его частное решение

$$x(n) = -\frac{1+i}{3-i\sqrt{3}}ne^{-i\frac{2n\pi}{3}}. \quad (2.111)$$

Складывая решения (2.110) и (2.111), получим частное решение уравнения (2.107):

$$x(n) = -\frac{n}{6} \left[(3 - \sqrt{3}) \cos \frac{2n\pi}{3} + (3 + \sqrt{3}) \sin \frac{2n\pi}{3} \right].$$

Упражнения.

Найти частное решение неоднородного уравнения

a) $x(n+4) + 2x(n+3) + 3x(n+2) + 2x(n+1) + x(n) = \cos \frac{2n\pi}{3} - \sin \frac{2n\pi}{3};$

b) $x(n+2) + 4x(n) = n2^n \sin \frac{n\pi}{2};$

c) $x(n+4) + x(n) = n(-1)^n.$

d) $x(n+3) - 3x(n+2) + 3x(n+1) - x(n) = n;$

e) $x(n+2) - 4x(n) = 3(-2)^n.$

2.5.3. Вычисление конечных сумм

Применим полученные результаты к вычислению конечных сумм. Как мы видели (см. формулу (1.3)), вопрос о вычислении конечных сумм сводится к задаче о разрешимости неоднородного разностного уравнения

$$x(n+1) - x(n) = f(n),$$

причем

$$\sum_{k=0}^n f(k) = x(n+1) - x(0).$$

Рассмотрим примеры.

1. Вычислим сумму $\sum_{k=1}^{n-1} k^4$. Положим $f(n) = n^4$. Рассмотрим уравнение

$$x(n+1) - x(n) = n^4. \quad (2.112)$$

Правая часть этого уравнения есть квазимногочлен с показателем $\alpha = 1$. Характеристическое уравнение имеет вид $s - 1 = 0$, т.е. 1 — корень характеристического уравнения кратности 1. Поэтому частное решение уравнения (2.112) ищем в виде

$$x(n) = n(C_1 + C_2n + C_3n^2 + C_4n^3 + C_5n^4), \quad (2.113)$$

где коэффициенты C_i , $i = 1, \dots, 5$ подлежат определению. Подставляя формулу (2.113) в уравнение (2.112), получим уравнения для определения коэффициентов C_i , $i = 1, \dots, 5$:

$$\begin{aligned} 5C_5 &= 1, & 10C_5 + 4C_4 &= 0, & 10C_5 + 6C_4 + 3C_3 &= 0, \\ 5C_5 + 4C_4 + 3C_3 + 2C_2 &= 0, & C_5 + C_4 + C_3 + C_2 + C_1 &= 0, \end{aligned}$$

откуда находим:

$$C_5 = \frac{1}{5}, \quad C_4 = -\frac{1}{2}, \quad C_3 = \frac{1}{3}, \quad C_2 = 0, \quad C_1 = -\frac{1}{30}.$$

Общее решение уравнения (2.112) имеет вид

$$x(n) = C_0 + \frac{n^5}{5} - \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}.$$

Так как $x(0) = 0$, то $C_0 = 0$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^4 = \frac{n^5}{5} - \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} = \frac{(6n^3 - 9n^2 + n + 1) n(n-1)}{30}. \quad (2.114)$$

Другой путь вычисления решения уравнения (2.112) состоит в следующем. Выпишем представление функции n^4 через биномиальные коэффициенты с помощью чисел Стирлинга второго рода

$$n^4 = C_n^1 + 7C_n^2 2! + 6C_n^3 3! + C_n^4 4! = C_n^1 + 14C_n^2 + 36C_n^3 + 24C_n^4. \quad (2.115)$$

Для уравнения

$$x(n+1) - x(n) = C_n^k$$

изображающее уравнение имеет вид

$$(s-1)x(n) = \frac{s}{(s-1)^{k+1}} + sx(0).$$

Отсюда

$$x(n) = \frac{s}{(s-1)^{k+2}} + \frac{s}{s-1}x(0).$$

Следовательно, $x(n) = C_n^{k+1} + x(0)$. Поэтому решение уравнения (2.112) с правой частью (2.115) имеет вид

$$x(n) = C_n^2 + 14C_n^3 + 36C_n^4 + 24C_n^5,$$

что дает ту же формулу (2.114).

2. Перейдем теперь к сумме $\sum_{k=1}^n (-1)^k k$. Рассмотрим уравнение

$$x(n) - x(n-1) = (-1)^n n, \quad n \geq 1. \quad (2.116)$$

Найдем решение этого уравнения с начальным условием $x(0) = 0$. Так как -1 не является решением однородного уравнения, то частное решение уравнения (2.116) ищем в виде

$$x(n) = C_1(-1)^n + C_2(-1)^n n.$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.116), получим

$$C_1(-1)^n + C_2(-1)^n - C_1(-1)^{(n-1)} - C_2(n-1)(-1)^{(n-1)} = n(-1)^n.$$

Отсюда следует, что

$$-2C_1 + C_2 = 0, \quad 2C_2 = 1.$$

Следовательно,

$$C_1 = \frac{1}{4}, \quad C_2 = \frac{1}{2}.$$

Поэтому общее решение уравнения (2.116) имеет вид

$$x(n) = C_0 + \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{2}n(-1)^n.$$

Так как должно быть $x(0) = 0$, то

$$x(n) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{2}n(-1)^n.$$

Мы получили формулу

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{2}n(-1)^n.$$

3. Вычислим сумму $\sum_{k=1}^n (-1)^k k^3$. Рассмотрим уравнение

$$x(n) - x(n-1) = (-1)^n n^3, \quad x(0) = 0.$$

Частное решение этого уравнения ищем в виде

$$x(n) = C_1(-1)^n + C_2n(-1)^n + C_3(-1)^n n^2 + C_4(-1)^n n^3.$$

Подставляя это выражение в уравнение, получим

$$C_1(-1)^n + C_2n(-1)^n + C_3(-1)^n n^2 + C_4(-1)^n n^3 - C_1(-1)^{(n-1)} - C_2(n-1)(-1)^{(n-1)} - C_3(n-1)^2(-1)^{(n-1)} - C_4(n-1)^3(-1)^{(n-1)} = (-1)^n n^3.$$

Отсюда выводим равенства

$$-2C_1 + C_2 - C_3 + C_4 = 0, \quad -2C_2 + 2C_3 - 3C_4 = 0, \quad -2C_3 + 3C_4 = 0, \quad -2C_4 = -1.$$

Из этих уравнений находим, что

$$C_1 = -\frac{1}{8}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{3}{4}, \quad C_4 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$x(n) = C_0 - \frac{1}{8}(-1)^n + \frac{3}{4}(-1)^n n^2 + \frac{1}{2}(-1)^n n^3.$$

Так как $x(0) = 0$, то $C_0 = \frac{1}{8}$. Получим формулу

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}(-1)^n [4n^3 + 6n^2 - 1].$$

Перейдем теперь к суммам, содержащим тригонометрические функции.

4. Вычислим сумму $\sum_{k=1}^n k \cos k\beta$. Рассмотрим уравнение

$$x(n+1) - x(n) = n \cos n\beta. \quad (2.117)$$

В силу изложенного выше частное решение этого уравнения будем искать в виде

$$x(n) = (A + Cn) \cos n\beta + (B + Dn) \sin n\beta.$$

Коэффициенты A, B, C, D определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} C(\cos \beta - 1) + D \sin \beta &= 1, & A(\cos \beta - 1) + C \cos \beta + B \sin \beta + D \sin \beta &= 0, \\ D(\cos \beta - 1) - C \sin \beta &= 0, & -A \sin \beta - C \sin \beta + B(\cos \beta - 1) + D \cos \beta &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получим

$$C = \frac{1}{2}, \quad D = \frac{\sin \beta}{2(1 - \cos \beta)}, \quad A = \frac{1}{2(1 - \cos \beta)}, \quad B = 0.$$

Следовательно,

$$x(n) = \sum_{k=1}^{n-1} k \cos k\beta = \frac{\left(1 - 2n \sin^2 \frac{\beta}{2}\right) \cos n\beta + n \sin \beta \sin n\beta - 1}{4 \sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

5. Вычислим сумму

$$\sum_{k=1}^n 2r^k \cos k\theta, \quad (2.118)$$

где r и θ — вещественные числа. Учитывая, что $2 \cos k\theta = e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}$, найдем формулы для сумм

$$\sum_{k=1}^n r^k e^{ik\theta}, \quad \sum_{k=1}^n r^k e^{-ik\theta}.$$

Решаем уравнение

$$x(n+1) - x(n) = r^n e^{in\theta}, \quad x(1) = r e^{i\theta}. \quad (2.119)$$

Ищем решение уравнения (2.119) в виде

$$x(n) = C_0 + C_1 r^n e^{in\theta}.$$

Подставляя эту формулу в уравнение (2.119) и приравнявая коэффициенты при $r^n e^{in\theta}$, получим

$$C_1 = \frac{1}{r e^{i\theta} - 1}.$$

Следовательно,

$$x(n) = C_0 + \frac{r^n e^{in\theta}}{r e^{i\theta} - 1}.$$

Учитывая начальное значение $x(1)$, находим C_0 . В результате получим

$$x(n) = r e^{i\theta} - \frac{r e^{i\theta}}{r e^{i\theta} - 1} + \frac{r^n e^{in\theta}}{r e^{i\theta} - 1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n r^k e^{ik\theta} &= x(n+1) - x(1) = r e^{i\theta} - \frac{r e^{i\theta}}{r e^{i\theta} - 1} + \frac{r^{(n+1)} e^{i(n+1)\theta}}{r e^{i\theta} - 1} - r e^{i\theta} = \\ &= \frac{r e^{i\theta}}{r e^{i\theta} - 1} + \frac{r^{(n+1)} e^{i(n+1)\theta}}{r e^{i\theta} - 1}. \end{aligned}$$

Сумма

$$\sum_{k=1}^n r^k e^{-ik\theta}$$

комплексно сопряжена сумме

$$\sum_{k=1}^n r^k e^{ik\theta}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^n r^k e^{-ik\theta} = \frac{re^{-i\theta}}{re^{-i\theta} - 1} + \frac{r^{(n+1)}e^{-i(n+1)\theta}}{re^{-i\theta} - 1}.$$

Для суммы (2.118) получим формулу

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 2r^k \cos k\theta &= \sum_{k=1}^n r^k e^{ik\theta} + \sum_{k=1}^n r^k e^{-ik\theta} = \frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta} - 1} + \frac{r^{(n+1)}e^{i(n+1)\theta}}{re^{i\theta} - 1} + \\ &+ \frac{re^{-i\theta}}{re^{-i\theta} - 1} + \frac{r^{(n+1)}e^{-i(n+1)\theta}}{re^{-i\theta} - 1}. \end{aligned}$$

Складывая первый и третий члены этой суммы и второй и четвертый, получим

$$\sum_{k=1}^n 2r^k \cos k\theta = \frac{-2r^2 + 2r \cos \theta}{r^2 - 2r \cos \theta + 1} + \frac{2r^{(n+2)} \cos n\theta - 2r^{(n+1)} \cos(n+1)\theta}{r^2 - 2r \cos \theta + 1}.$$

Отсюда получим формулу

$$1 + \sum_{k=1}^n 2r^k \cos k\theta = \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r \cos \theta + 1} + \frac{2r^{(n+2)} \cos n\theta - 2r^{(n+1)} \cos(n+1)\theta}{r^2 - 2r \cos \theta + 1}. \quad (2.120)$$

Предположим, что $|r| < 1$. В формуле (2.120) перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$. Получим формулу

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2r^k \cos k\theta = \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r \cos \theta + 1}.$$

Эта формула называется формулой Пуассона.

Предлагаемый в этом пункте метод позволяет также вычислять некоторые кратные суммы. В качестве примера рассмотрим сумму

$$\sum_{n_1=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n_1} k^2.$$

Из этой двукратной суммы с помощью формулы (1.8) получаем однократные суммы

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-k+1}^1 k^2 = (n+1) \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^3.$$

Упражнения.

1. Вычислить суммы

a)

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k k^5;$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)^2;$$

c)

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \cos 2k\beta;$$

d)

$$\sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{k_1} (-1)^{k_2} k_2^3;$$

e)

$$\sum_{k=1}^{n-1} k 2^k;$$

f)

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k k^2 3^k;$$

g)

$$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k \cos^2 k\alpha.$$

2. Показать, что справедлива формула

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \sin k\beta = \frac{\left(1 - 2n \sin^2 \frac{\beta}{2}\right) \sin n\beta - n \sin \beta \cos n\beta}{4 \sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

2.5.4. Метод комплексных амплитуд

Рассмотрим отдельно случай, когда в уравнении

$$L[x] = f(n) \tag{2.121}$$

функция $f(n) = r \cos(n\omega + \alpha)$, где r, ω, α — вещественные числа. Решение уравнения (2.121) с такой правой частью можно искать, используя метод, описанный в пункте 2.5.2, так как эта функция представляет собой квазимногочлен

$$r \cos(n\omega + \alpha) = \frac{r}{2} \left(e^{i(n\omega + \alpha)} + e^{-i(n\omega + \alpha)} \right).$$

Однако в случае, когда коэффициенты разностного уравнения (2.121) вещественны, можно воспользоваться методом, который для обыкновенных дифференциальных уравнений носит название *метод комплексных амплитуд*.

Наряду с вещественной функцией $f(n) = r \cos(n\omega + \alpha)$ рассмотрим соответствующую ей комплексную функцию

$$F(n) = \rho e^{in\omega},$$

где $\rho = re^{i\alpha}$. Вещественная часть этой комплексной функции совпадает с $f(n)$. Частное решение уравнения

$$L[x] = \rho e^{in\omega}$$

ищем в виде

$$x(n) = \sigma e^{in\omega}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.121) и сравнивая коэффициенты при $e^{in\omega}$, получим

$$\sigma = \frac{\rho}{p(e^{i\omega})}.$$

Чтобы последняя формула имела смысл, необходимо предположить, что

$$p(e^{i\omega}) \neq 0,$$

т. е. число $e^{i\omega}$ не должно быть корнем характеристического многочлена $p(s)$. Если это условие выполняется, то частное решение уравнения (2.121) имеет вид

$$x(n) = \frac{\rho}{p(e^{i\omega})} e^{in\omega}. \quad (2.122)$$

Легко видеть, что вещественная часть решения (2.122) является решением уравнения (2.121) с функцией $f(n)$ в качестве правой части. Представим комплексное число $1/p(i\omega)$ в виде

$$\frac{1}{p(i\omega)} = \frac{1}{|p(i\omega)|} e^{i\psi(\omega)}.$$

Решение (2.122) записывается следующим образом:

$$x(n) = \frac{re^{i\alpha}}{|p(i\omega)|} e^{i\psi(\omega)} = \frac{r}{|p(i\omega)|} e^{i(n\omega + \alpha + \psi(\omega))}.$$

Тогда частное решение уравнения (2.121) с правой частью $f(n) = r \cos(n\omega + \alpha)$ имеет вид

$$x(n) = \frac{r}{|p(i\omega)|} \cos(n\omega + \alpha + \psi(\omega)). \quad (2.123)$$

Последняя формула интересна тем, что она позволяет определить частное решение непосредственно по характеристическому многочлену $p(s)$.

Напомним, что формула (2.123) получена при условии $p(e^{i\omega}) \neq 0$. Последнее условие будет, например, выполнено, если все корни характеристического многочлена по модулю меньше 1. Общее решение уравнения (2.121) с указанной выше правой частью имеет вид

$$x(n) = y(n) + \frac{r}{|p(i\omega)|} \cos(n\omega + \alpha + \psi(\omega)), \quad (2.124)$$

где $y(n)$ — общее решение однородного уравнения. Если корни характеристического многочлена по модулю меньше 1, то общее решение однородного уравнения стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Поэтому каждое решение уравнения (2.121) стремится к решению (2.123) при $n \rightarrow \infty$. Решению (2.123) соответствует установившееся состояние системы, к которому система приходит через достаточно большой промежуток времени после возбуждения. Можно сказать, что решение (2.123) описывает установившийся процесс. Решение (2.124) описывает переходной процесс, т. е. поведение системы при небольших значениях n . Отметим еще, что решение (2.123) — это единственное периодическое решение уравнения (2.121) с периодом l , если $\omega = \frac{2\pi}{l}$, а $l > 0$ — целое число.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$x(n+2) - 2(\alpha \cos \beta)x(n+1) + \alpha^2 x(n) = H_0 \cos(n\omega + \varphi_0), \quad (2.125)$$

где $\alpha, \beta, H_0, \omega, \varphi_0$ — вещественные постоянные. Предполагается, что

$$0 < \alpha < 1, \quad \cos \beta > 0.$$

В данном случае $p(s) = s^2 - 2\alpha s \cos \beta + \alpha^2$ и, следовательно,

$$s_{1,2} = \alpha(\cos \beta + i \sin \beta).$$

Решение однородного уравнения имеет вид

$$x(n) = \alpha^n (A_1 \cos n\beta + A_2 \sin n\beta),$$

где A_1, A_2 — произвольные постоянные. При $\alpha = 1$ все решения однородного уравнения будут периодическими с периодом l , если $\beta = \frac{2\pi}{l}$ и $l > 0$ — целое число.

Найдем частное решение неоднородного уравнения с помощью описанного выше метода. Имеем

$$\frac{1}{p(e^{i\omega})} = \frac{1}{e^{2i\omega} - 2\alpha \cos \beta e^{i\omega} + \alpha^2}. \quad (2.126)$$

Выражение (2.126) можно записать в виде

$$\frac{1}{(\cos 2\omega - 2\alpha \cos \beta \cos \omega + \alpha^2) + i(\sin 2\omega - 2\alpha \cos \beta)}.$$

Домножая числитель и знаменатель на число, комплексно сопряженное знаменателю, получим

$$\frac{(\cos 2\omega - 2\alpha \cos \beta \cos \omega + \alpha^2) - i(\sin 2\omega - 2\alpha \cos \beta)}{(\cos 2\omega - 2\alpha \cos \beta \cos \omega + \alpha^2)^2 + (\sin 2\omega - 2\alpha \cos \beta)^2}. \quad (2.127)$$

Выражение (2.127) представим в форме

$$\frac{1}{\sqrt{(\cos 2\omega - 2\alpha \cos \beta \cos \omega + \alpha^2)^2 + (\sin 2\omega - 2\alpha \cos \beta)^2}} (\cos \psi(\omega) + i \sin \psi(\omega)),$$

где

$$\cos \psi(\omega) = \frac{\cos 2\omega - 2\alpha \cos \beta \cos \omega + \alpha^2}{\sqrt{(\cos 2\omega - 2\alpha \cos \beta \cos \omega + \alpha^2)^2 + (\sin 2\omega - 2\alpha \cos \beta)^2}},$$

$$\sin \psi(\omega) = \frac{-\sin 2\omega - 2\alpha \cos \beta \sin \omega}{\sqrt{(\cos 2\omega - 2\alpha \cos \beta \cos \omega + \alpha^2)^2 + (\sin 2\omega - 2\alpha \cos \beta)^2}}.$$

Комплексное решение, которое получается с помощью разностного аналога метода комплексных амплитуд, имеет вид

$$\frac{H_0 e^{i(n\omega + \alpha + \psi(\omega))}}{\sqrt{(\cos 2\omega - 2\alpha \cos \beta \cos \omega + \alpha^2)^2 + (\sin 2\omega - 2\alpha \cos \beta)^2}}.$$

Поэтому частное решение уравнения (2.125) представляется в виде

$$x(n) = \frac{H_0 \cos(n\omega + \alpha + \psi(\omega))}{\sqrt{(\cos 2\omega - 2\alpha \cos \beta \cos \omega + \alpha^2)^2 + (\sin 2\omega - 2\alpha \cos \beta \sin \omega)^2}}. \quad (2.128)$$

Вычислим максимум амплитуды

$$N(\omega) = \frac{H_0}{\sqrt{(\cos 2\omega - 2\alpha \cos \beta \cos \omega + \alpha^2)^2 + (\sin 2\omega - 2\alpha \cos \beta \sin \omega)^2}}$$

решения (2.128) как функции от ω . Будем предполагать, что выполнено неравенство

$$-\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}.$$

Нам достаточно найти минимум функции

$$f(\omega) = (\cos 2\omega - 2\alpha \cos \beta \cos \omega + \alpha^2)^2 + (\sin 2\omega - 2\alpha \cos \beta \sin \omega)^2.$$

Вычисляя решения уравнения

$$\frac{df(\omega)}{d\omega} = 0,$$

находим, что при выполнении неравенства

$$\frac{1 + \alpha^2}{2\alpha} \cos \beta \leq 1$$

максимум амплитуды достигается при

$$\cos \omega = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha} \cos \beta$$

и равен

$$N_{max} = \frac{H_0}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + (3\alpha^2 - 1) \cos^2 \beta}}.$$

В этом случае кривая $N(\omega)$ имеет характерный пик. Если же

$$\frac{1 + \alpha^2}{2\alpha} \cos \beta > 1,$$

то кривая $N(\omega)$ не имеет пика (нет точки локального максимума).

При $\beta = \pi/2$ максимум достигается в точке $\omega = \pi/2$ и равен

$$N_{max} = \frac{H_0}{1 - \alpha^2}.$$

При $\alpha = 1$ получим $N_{max} = \infty$. Заметим, что при $\beta = \omega = \pi/2$, $\alpha = 1$ уравнение (2.125) превращается в уравнение

$$x(n+2) + x(n) = H_0 \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \varphi_0\right). \quad (2.129)$$

Так как число

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

является корнем характеристического многочлена $p(s) = s^2 + 1$ однородного уравнения

$$x(n+2) + x(n) = 0,$$

то частное решение уравнения (2.129) ищем в виде

$$x(n) = An \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \varphi\right) + Bn \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \varphi\right),$$

где постоянные A, B подлежат определению. Подставляя эту формулу в уравнение (2.129) и сравнивая коэффициенты при $\cos(\frac{n\pi}{2} + \varphi)$ и $\sin(\frac{n\pi}{2} + \varphi)$, получим

$$A = -\frac{H_0}{2}, \quad B = 0.$$

Поэтому частное решение уравнения (2.129) имеет вид

$$x(n) = -\frac{H_0}{2}n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \varphi\right).$$

В качестве второго примера возьмем уравнение

$$x(n+4) - 2x(n+2) + 2x(n) = 3 \sin \frac{n\pi}{4}. \quad (2.130)$$

Правая часть этого уравнения является периодической функцией с периодом 8. Наряду с уравнением (2.130) рассмотрим уравнение

$$x(n+4) - 2x(n+2) + 2x(n) = 3e^{\frac{in\pi}{4}}. \quad (2.131)$$

Характеристический многочлен этого уравнения $p(s) = s^4 - 2s^2 + 2$. Поэтому

$$p(e^{\frac{i\pi}{4}}) = e^{i\pi} - 2e^{\frac{i\pi}{2}} + 2 = 1 - 2i \neq 0.$$

Следовательно, метод комплексных амплитуд применим для вычисления периодического решения уравнения (2.130). Ищем решение уравнения (2.131) в виде

$$x(n) = \sigma e^{\frac{in\pi}{4}}.$$

Получим, что периодическое решение уравнения (2.131) имеет вид

$$x(n) = \frac{3}{p(e^{\frac{in\pi}{4}})} = \frac{3}{1-2i} e^{\frac{in\pi}{4}}.$$

Мнимая часть этого решения представляет собой периодическое решение с периодом 8 уравнения (2.130):

$$x(n) = \frac{6}{5} \cos \frac{n\pi}{4} + \frac{3}{5} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

Упражнения.

Найти периодическое решение с помощью метода комплексных амплитуд для следующих уравнений:

- a) $x(n+2) - 2x(n+1) + 2x(n) = \cos \frac{n\pi}{2}$;
- b) $x(n+3) + 2x(n) = 1 + \sin \frac{n\pi}{6}$;
- c) $x(n+5) + x(n+1) + x(n) = 2 \cos \frac{n\pi}{3} - \sin \frac{n\pi}{6}$;
- d) $x(n+8) + x(n+4) + x(n+1) + x(n) = \sin \frac{n\pi}{2}$.

2.5.5. Некоторые уравнения высокого порядка с переменными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} x(n+k) + a_1 f(n) x(n+k-1) + a_2 f(n) f(n-1) x(n+k-2) + \\ + a_3 f(n) f(n-1) f(n-2) x(n+k-3) + \dots + \\ + a_k f(n) f(n-1) \dots f(n-k+1) x(n) = g(n). \end{aligned} \quad (2.132)$$

Здесь a_1, a_2, \dots, a_{k-1} — постоянные, а $f(n)$ — известная функция, которая не обращается в нуль при всех n . Уравнение (2.132) может быть преобразовано в уравнение с постоянными коэффициентами, если сделать замену

$$x(n) = f(n-k) f(n-k-1) \dots f(2) f(1) y(n).$$

Выполняя эту подстановку, получим

$$\begin{aligned} x(n+k) &= f(n) f(n-1) \dots f(1) y(n+k), \\ x(n+k-1) &= f(n-1) \dots f(1) y(n+k-1), \dots, \\ x(n+1) &= f(n-k-1) \dots f(1), \\ x(n) &= f(n-k) \dots f(1) y(n). \end{aligned}$$

Подставим эти формулы в уравнение (2.132). Затем разделим все слагаемые на произведение $\prod_{k=1}^n f(k)$, получим неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y(n+k) + a_1 y(n+k-1) + a_2 y(n+k-2) + \dots + a_{k-1} y(n) = \frac{g(n)}{\prod_{k=1}^n f(k)}.$$

В рассматриваемый класс уравнений включаются уравнения формы

$$x(n+k) + a_1 b^n x(n+k-1) + a_2 b^{2n} x(n+k-2) + \dots + a_k b^{kn} x(n) = c(n), \quad (2.133)$$

где a_1, a_2, \dots, a_k — постоянные. В самом деле, положим $f(n) = b^n$. Тогда уравнение (2.133) можно записать в виде

$$\begin{aligned} x(n+k) + a_1 f(n) x(n+k-1) + a_2 b f(n) f(n-1) x(n+k-2) + \\ + a_3 b^{1+2} f(n) f(n-1) f(n-2) x(n+k-3) + \dots + \\ + a_{k-1} b^{1+2+3+\dots+(k-1)} x(n) = c(n). \end{aligned} \quad (2.134)$$

Замена

$$x(n) = b^{1+2+3+\dots+(n-k)} y(n)$$

переводит уравнение (2.134) в уравнение

$$\begin{aligned} x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + a_2 b x(n+k-2) + \\ + a_3 b^3 x(n+k-3) + \dots + a_k b^{1+2+\dots+(k-1)} x(n) = 0 \end{aligned}$$

с постоянными коэффициентами.

Упражнения.

Найти общее решение уравнений

а) $x(n+3) + 3^n x(n) = 0$;

б) $x(n+4) - 2 \cdot 2^n x(n+2) + \frac{1}{16} \cdot 2^{4n} x(n) = n$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2) \cdots (n+k-1) x(n+k) + a_1 n(n+1) \cdots (n+k-2) x(n+k-1) + \dots + \\ + a_{k-1} n x(n+1) + a_k x(n) = 0, \end{aligned}$$

где a_1, a_2, \dots — постоянные. Сделаем замену $y(n) = (n-1)! x(n)$. Получим уравнение

$$y(n+k) + a_1 y(n+k-1) + a_2 y(n+k-2) + \dots + a_{k-1} y(n+1) + a_k y(n) = 0$$

с постоянными коэффициентами.

Упражнение.

Преобразовать уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n+1)(n+2) \cdots (n+k-1)} x(n+k) + \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+k-2)} x(n+k-1) + \\ + \dots + \frac{1}{n} a_{k-1} x(n+1) + a_k x(n) = 0 \end{aligned}$$

в уравнение с постоянными коэффициентами.

2.6. Системы разностных уравнений

2.6.1. Схема применения операторного метода для решения системы разностных уравнений

Излагаемый операторный метод упрощает вычислительную работу нахождения решения в случае линейного разностного уравнения высокого порядка. Однако в полной мере преимущества этого метода проявляются при решении систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

Для ясного представления о формальной стороне метода мы рассмотрим систему трех разностных уравнений первого порядка. Следовательно, рассмотрим систему

$$\begin{aligned}(a_{11}y_1(n+1)+b_{11}y_1(n))+(a_{12}y_2(n+1)+b_{12}y_2(n))+(a_{13}y_3(n+1)+b_{13}y_3(n))&=f_1(n), \\(a_{21}y_1(n+1)+b_{21}y_1(n))+(a_{22}y_2(n+1)+b_{22}y_2(n))+(a_{23}y_3(n+1)+b_{23}y_3(n))&=f_2(n), \\(a_{31}y_1(n+1)+b_{31}y_1(n))+(a_{32}y_2(n+1)+b_{32}y_2(n))+(a_{33}y_3(n+1)+b_{33}y_3(n))&=f_3(n).\end{aligned}$$

Предполагается, что определители матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

отличны от нуля.

Изображающая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}[a_{11}(sy_1(n) - sy_1(0)) + b_{11}y_1(n)] + [a_{12}(sy_2(n) - sy_2(0)) + b_{12}y_2(n)] + \\ + [a_{13}(sy_3(n) - sy_3(0)) + b_{13}y_3(n)] &= f_1(n), \\[a_{21}(sy_1(n) - sy_1(0)) + b_{21}y_1(n)] + [a_{22}(sy_2(n) - sy_2(0)) + b_{22}y_2(n)] + \\ + [a_{23}(sy_3(n) - sy_3(0)) + b_{23}y_3(n)] &= f_2(n), \\[a_{31}(sy_1(n) - sy_1(0)) + b_{31}y_1(n)] + [a_{32}(sy_2(n) - sy_2(0)) + b_{32}y_2(n)] + \\ + [a_{33}(sy_3(n) - sy_3(0)) + b_{33}y_3(n)] &= f_3(n).\end{aligned}$$

Введем для сокращения записи обозначения

$$a_{ik}s + b_{ik} = p_{ik}(s), \quad r_i(s) = a_{i1}sy_1(0) + a_{i2}y_2(0) + a_{i3}y_3(0).$$

Тогда систему изображающих уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned}p_{11}y_1(n) + p_{12}y_2(n) + p_{13}y_3(n) &= f_1(n) + r_1(s), \\p_{21}y_1(n) + p_{22}y_2(n) + p_{23}y_3(n) &= f_2(n) + r_2(s), \\p_{31}y_1(n) + p_{32}y_2(n) + p_{33}y_3(n) &= f_3(n) + r_3(s).\end{aligned}$$

Получили систему линейных алгебраических уравнений относительно функций $y_1(n), y_2(n), y_3(n)$. Определитель этой системы

$$D(s) = \begin{vmatrix} p_{11}(s) & p_{12}(s) & p_{13}(s) \\ p_{21}(s) & p_{22}(s) & p_{23}(s) \\ p_{31}(s) & p_{32}(s) & p_{33}(s) \end{vmatrix}$$

в раскрытом виде представляет собой в общем случае многочлен третьего порядка по s . Применяя правило Крамера, мы получим формулы, которые представляют изображение решений $y_1(n), y_2(n), y_3(n)$. Остановимся только на вычислении изображения функции $y_1(n)$. Применив правило Крамера, получим

$$y_1(n) = \frac{1}{D(s)} \begin{vmatrix} f_1(n) + r_1(s) & p_{12}(s) & p_{13}(s) \\ f_2(n) + r_2(s) & p_{22}(s) & p_{23}(s) \\ f_3(n) + r_3(s) & p_{32}(s) & p_{33}(s) \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель на сумму четырех определителей, получим

$$y_1(n) = \frac{1}{D(s)} \left[\begin{vmatrix} f_1(n) & p_{12}(s) & p_{13}(s) \\ f_2(n) & p_{22}(s) & p_{23}(s) \\ f_3(n) & p_{32}(s) & p_{33}(s) \end{vmatrix} + sy_1(0) \begin{vmatrix} a_{11} & p_{12}(s) & p_{13}(s) \\ a_{21} & p_{22}(s) & p_{23}(s) \\ a_{31} & p_{32}(s) & p_{33}(s) \end{vmatrix} + \right. \\ \left. + sy_2(0) \begin{vmatrix} a_{12} & p_{12}(s) & p_{13}(s) \\ a_{22} & p_{22}(s) & p_{23}(s) \\ a_{32} & p_{32}(s) & p_{33}(s) \end{vmatrix} + sy_3(0) \begin{vmatrix} a_{13} & p_{12}(s) & p_{13}(s) \\ a_{23} & p_{22}(s) & p_{23}(s) \\ a_{33} & p_{32}(s) & p_{33}(s) \end{vmatrix} \right].$$

Каждый из этих определителей при раскрытии дает многочлен второго порядка по s . Делим соответствующие выражения на $D(s)$ и разлагаем на простейшие дроби. Затем применяем операторные формулы и получаем решение в явном виде.

Отметим преимущества излагаемого метода. Во-первых, для решения системы разностных уравнений нужно решить только одну систему алгебраических уравнений, во-вторых, начальные условия входят в эту систему и поэтому учитываются автоматически, в-третьих, каждая неизвестная функция может быть вычислена сама по себе, независимо от вычисления остальных неизвестных функций.

2.6.2. Решение системы двух разностных уравнений

В качестве примера найдем решение системы двух разностных уравнений

$$\begin{aligned} x(n+1) + ax(n) + by(n) &= f_1(n), \\ y(n+1) + cx(n) + dy(n) &= f_2(n), \end{aligned} \quad (2.135)$$

где a, b, c, d — вещественные постоянные, удовлетворяющие неравенству $ad - bc \neq 0$, $f_1(n), f_2(n)$ — дискретные функции. Изображающая линейная система алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} (s + a)x(n) + by(n) &= sx(0) + f_1(n), \\ cx(n) + (s + d)y(n) &= sy(0) + f_2(n). \end{aligned}$$

Вычисляя определитель этой системы, получим

$$D(s) = s^2 + (a + d)s + ad - bc.$$

Предположим сначала, что корни s_1, s_2 уравнения $D(s) = 0$ различны. Следовательно, $D(s) = (s - s_1)(s - s_2)$. Чтобы применить правило Крамера, вычислим определители

$$D_1(s) = \begin{vmatrix} sx(0) + f_1(n) & b \\ sy(0) + f_2(n) & (s + d) \end{vmatrix}, \quad D_2(s) = \begin{vmatrix} (s + a) & sx(0) + f_1(n) \\ c & sx(0) + f_2(n) \end{vmatrix}.$$

Изображение решения $x(n)$ имеет вид

$$\begin{aligned} x(n) = \frac{D_1(s)}{D(s)} &= \frac{s(s + d)}{(s - s_1)(s - s_2)}x(0) - \frac{bs}{(s - s_1)(s - s_2)}y(0) + \\ &+ \frac{s + d}{(s - s_1)(s - s_2)}f_1(n) - \frac{b}{(s - s_1)(s - s_2)}f_2(n). \end{aligned}$$

Две дроби разлагаем на простейшие

$$\begin{aligned} \frac{s + d}{(s - s_1)(s - s_2)} &= \frac{s_1 + d}{s_1 - s_2} \frac{1}{s - s_1} + \frac{s_2 + d}{s_2 - s_1} \frac{1}{s - s_2}, \\ \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} &= \frac{1}{s_1 - s_2} \frac{1}{s - s_1} + \frac{1}{s_2 - s_1} \frac{1}{s - s_2}. \end{aligned}$$

Используя операторные формулы, получим решение $x(n)$:

$$\begin{aligned} x(n) &= \left[\frac{s_1 + d}{s_1 - s_2} s_1^n + \frac{s_2 + d}{s_2 - s_1} s_2^n \right] x(0) - \frac{b}{s_1 - s_2} [s_1^n - s_2^n] y(0) + \\ &+ \frac{1}{s_1 - s_2} \sum_{k=0}^n \left[(s_1 + d) \frac{s_1^{n-k} - 1}{s_1} - (s_2 + d) \frac{s_2^{n-k} - 1}{s_2} \right] f_1(k) - \\ &- \frac{b}{s_1 - s_2} \sum_{k=0}^n \left[\frac{s_1^{n-k} - 1}{s_1} - \frac{s_2^{n-k} - 1}{s_2} \right] f_2(k). \end{aligned}$$

Эту формулу можно записать в виде

$$\begin{aligned} x(n) = & \frac{1}{s_1 - s_2} [(s_1 + d)s_1^n - (s_2 + d)s_2^n] x(0) - \frac{b}{s_1 - s_2} [s_1^n - s_2^n] y(0) + \\ & + \frac{1}{s_1 - s_2} \sum_{k=1}^n [(s_1 + d)s_1^{n-k} - (s_2 + d)s_2^{n-k}] f_1(k-1) - \\ & - \frac{b}{s_1 - s_2} \sum_{k=1}^n [s_1^{n-k} - s_2^{n-k}] f_2(k-1), \end{aligned}$$

где $n \geq 1$.

Изображение решения $y(n)$ имеет вид

$$\begin{aligned} y(n) = & -c \frac{s}{(s - s_1)(s - s_2)} x(0) + \frac{s(s + a)}{(s - s_1)(s - s_2)} y(0) - \\ & - c \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} f_1(n) + \frac{s + a}{(s - s_1)(s - s_2)} f_2(n). \end{aligned}$$

Разлагаем изображение на простейшие дроби и переходим к оригиналам с помощью операторных формул. Получим при $n \geq 1$

$$\begin{aligned} y(n) = & -\frac{c}{s_1 - s_2} (s_1^n - s_2^n) x(0) + \frac{1}{s_1 - s_2} [(s_1 + a)s_1^n - (s_2 + a)s_2^n] y(0) - \\ & - \frac{c}{s_1 - s_2} \sum_{k=1}^n (s_1^{n-k} - s_2^{n-k}) f_1(k-1) + \frac{1}{s_1 - s_2} \sum_{k=1}^n [(s_1 + a)s_1^{n-k} - \\ & - (s_2 + a)s_2^{n-k}] f_2(k-1). \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$G(n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_1 - s_2} [(s_1 + d)s_1^n - (s_2 + d)s_2^n] & -\frac{b}{s_1 - s_2} (s_1^n - s_2^n) \\ -\frac{c}{s_1 - s_2} (s_1^n - s_2^n) & \frac{1}{s_1 - s_2} [(s_1 + a)s_1^n - (s_2 + a)s_2^n] \end{pmatrix}.$$

Назовем матрицу $G(n)$ фундаментальной матрицей для системы (2.135). Введем векторы $z(n) = (x(n), y(n))$ и $f(n) = (f_1(n), f_2(n))$. Решение системы (2.135) можно записать в векторном виде

$$z(n) = G(n)z(0) + \sum_{k=1}^n G(n-k)f(k-1), \quad n \geq 1.$$

Предположим теперь, что корни характеристического многочлена

$$s^2 + (a + d)s + ad - bc$$

являются кратными, т. е. $s_1 = s_2$. Легко видеть, что в этом случае

$$s_1 = s_2 = -\frac{a+d}{2}.$$

Рассмотрим сначала однородную систему, т. е. положим $f_1(n)=f_2(n)=0$. Перейдем к изображающей системе и разложим соответствующие дроби на простейшие. Получим

$$\begin{aligned}\frac{s(s+d)}{(s+\frac{a+d}{2})^2} &= \frac{s}{s+\frac{a+d}{2}} + \frac{\frac{d-a}{2}s}{(s+\frac{a+d}{2})^2}, \\ \frac{s(s+a)}{(s+\frac{a+d}{2})^2} &= \frac{s}{s+\frac{a+d}{2}} + \frac{\frac{a-d}{2}s}{(s+\frac{a+d}{2})^2}.\end{aligned}$$

Запишем с учетом этих формул изображающие уравнения для $x(n)$ и $y(n)$ и перейдем с помощью операторных формул к оригиналам (проделайте соответствующие вычисления!). Получим

$$\begin{aligned}x(n) &= \left[\left(\frac{-(a+d)}{2} \right)^n + n \frac{d-a}{2} \left(\frac{-(a+d)}{2} \right)^{n-1} \right] x(0) - bn \left(\frac{-(a+d)}{2} \right)^{n-1}, \\ y(n) &= -cn \left(\frac{-(a+d)}{2} \right)^{n-1} x(0) + \left[\left(\frac{-(a+d)}{2} \right)^n + n \frac{a-d}{2} \left(\frac{-(a+d)}{2} \right)^{n-1} \right] y(0).\end{aligned}$$

Отметим важный частный случай. Если $b = c = 0$, то корни будут кратными при условии, что $a = d$. При выполнении этих условий решение не будет содержать слагаемых с множителем n .

Фундаментальная матрица имеет вид

$$G(n) = \begin{pmatrix} \left[\left(\frac{-(a+d)}{2} \right)^n + n \frac{d-a}{2} \left(\frac{-(a+d)}{2} \right)^{n-1} \right] & -bn \left(\frac{-(a+d)}{2} \right)^{n-1}, \\ -cn \left(\frac{-(a+d)}{2} \right)^{n-1} & \left[\left(\frac{-(a+d)}{2} \right)^n + n \frac{a-d}{2} \left(\frac{-(a+d)}{2} \right)^{n-1} \right] \end{pmatrix}.$$

С помощью фундаментальной матрицы решение неоднородной системы записывается в виде

$$z(n) = G(n)z(0) + \sum_{k=1}^n G(n-k)f(k-1), \quad n \geq 1,$$

где $z(n) = (x(n), y(n))$ и $f(n) = (f_1(n), f_2(n))$.

Упражнение. Пусть корни s_1, s_2 характеристического уравнения являются комплексными. В силу вещественности коэффициентов системы

эти корни будут комплексно сопряженными. Представить решение однородной системы в вещественной форме.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} u(n+1) &= u(n) + 3v(n), \\ v(n+1) &= u(n) + v(n). \end{aligned} \quad (2.136)$$

Переходя к изображению, получим систему

$$\begin{aligned} su(n) - su(0) &= u(n) + 3v(n), \\ sv(n) - sv(0) &= u(n) + v(n). \end{aligned}$$

Запишем полученную систему в виде

$$\begin{aligned} (s-1)u(n) - 3v(n) &= su(0), \\ -u(n) + (s-1)v(n) &= sv(0). \end{aligned}$$

Вычисляем характеристический многочлен системы (2.136). Получим

$$\begin{vmatrix} s-1 & -3 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix} = (s-1)^2 - 3 = s^2 - 2s - 2 = 0.$$

Следовательно, $s_1 = 1 + \sqrt{3}$, $s_2 = 1 - \sqrt{3}$. Вычислим определители $D_1(s)$ и $D_2(s)$:

$$\begin{aligned} D_1(s) &= \begin{vmatrix} su(0) & -3 \\ sv(0) & s-1 \end{vmatrix} = s(s-1)u(0) + 3sv(0), \\ D_2(s) &= \begin{vmatrix} s-1 & su(0) \\ -1 & sv(0) \end{vmatrix} = s(s-1)v(0) + su(0). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что изображение решений имеет вид

$$\begin{aligned} u(n) &= \frac{s(s-1)}{s^2 - 2s - 2}u(0) + \frac{3s}{s^2 - 2s - 2}v(0), \\ v(n) &= \frac{s}{s^2 - 2s - 2}u(0) + \frac{s(s-1)}{s^2 - 2s - 2}v(0). \end{aligned}$$

Разлагая на простейшие дроби выражения

$$\frac{s-1}{s^2 - 2s - 2}, \quad \frac{1}{s^2 - 2s - 2},$$

получим

$$\frac{s-1}{s^2 - 2s - 2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-s_1} + \frac{1}{s-s_2} \right], \quad \frac{1}{s^2 - 2s - 2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s-s_2} \right].$$

Таким образом, формулы для решений системы имеют вид

$$\begin{aligned} u(n) &= \frac{1}{2} \left[(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n \right] u(0) + \frac{3}{2\sqrt{3}} \left[(1 + \sqrt{3})^n - (1 - \sqrt{3})^n \right] v(0), \\ v(n) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[(1 + \sqrt{3})^n - (1 - \sqrt{3})^n \right] u(0) + \frac{1}{2} \left[(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n \right] v(0). \end{aligned}$$

Положим $u(0) = v(0) = 1$. Тогда решение принимает вид

$$\begin{aligned} u(n) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{3}} \right) (1 + \sqrt{3})^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{3}} \right) (1 - \sqrt{3})^n, \\ v(n) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) (1 + \sqrt{3})^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) (1 - \sqrt{3})^n. \end{aligned}$$

Легко подсчитать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(n)}{v(n)} = \sqrt{3}.$$

Таким образом, систему (2.136) можно использовать для приближенного вычисления $\sqrt{3}$, так как последовательность $u(n)/v(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ сходится к $\sqrt{3}$. Легко подсчитать, что $u(5)/v(5) = 1.733$, а $\sqrt{3} = 1.732$ с точностью до четырех знаков.

Теперь вместо однородной системы (2.136) рассмотрим неоднородную систему

$$\begin{aligned} u(n+1) &= u(n) + 3v(n) + n, \\ v(n+1) &= u(n) + v(n) + n^2. \end{aligned} \quad (2.137)$$

Фундаментальная матрица однородной системы имеет вид

$$G(n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n \right] & \frac{3}{2\sqrt{3}} \left[(1 + \sqrt{3})^n - (1 - \sqrt{3})^n \right] \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[(1 + \sqrt{3})^n - (1 - \sqrt{3})^n \right] & \frac{1}{2} \left[(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n \right] \end{pmatrix}. \quad (2.138)$$

Поэтому частное решение неоднородной системы можно записать в виде

$$z(n) = \sum_{k=1}^n G(n-k) f(k-1), \quad n \geq 1, \quad (2.139)$$

где $z(n) = (u(n), v(n))$, $f(n) = (n, n^2)$.

Для вычисления компонент вектора $z(n)$ нам необходимо найти формулы для сумм

$$\sum_{k=1}^n a^{n-k} (k-1), \quad \sum_{k=1}^n a^{n-k} (k-1)^2,$$

где $a = 1 + \sqrt{3}$ или $a = 1 - \sqrt{3}$. Для первой суммы получаем

$$\sum_{k=1}^n a^{n-k}(k-1) = \sum_{k=1}^n a^{n-k}k - \sum_{k=1}^n a^{n-k} = \sum_{k=0}^n a^{n-k}k - \sum_{k=1}^n a^{n-k}.$$

Учитывая коммутативность свертки, последнее выражение можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^n (n-k)a^k - \sum_{k=1}^n a^{n-k} = n \sum_{k=0}^n a^k - \sum_{k=0}^k a^k - \sum_{k=1}^n a^{n-k}.$$

Вычисление последних трех сумм предоставляем читателю. Аналогично

$$\sum_{k=1}^n a^{n-k}(k-1)^2 = \sum_{k=1}^n a^{n-k}k^2 - 2 \sum_{k=1}^n a^{n-k}k - \sum_{k=1}^n a^{n-k}.$$

Далее,

$$\sum_{k=1}^n a^{n-k}k^2 = \sum_{k=0}^n a^{n-k}k^2 = \sum_{k=0}^n (n-k)^2 a^k.$$

Упражнения.

Закончить вычисление сумм и получить явные выражения для компонент вектора (2.139).

а) найти решение системы уравнений

$$\begin{aligned} u(n+1) &= 3u(n) + v(n), \\ v(n+1) &= -4u(n) + 7v(n), \end{aligned}$$

с начальными условиями $u(0) = 1$, $v(0) = 3$;

б) найти решение системы

$$\begin{aligned} u(n+1) &= 3u(n) + v(n) + 5^n, & u(0) &= 1, \\ v(n+1) &= -4u(n) + 7v(n) - 3, & v(0) &= 1; \end{aligned}$$

с) рассмотрим систему

$$\begin{aligned} u(n+1) &= au(n) + 3v(n), & u(0) &= a, \\ v(n+1) &= u(n) + av(n), & v(0) &= 1. \end{aligned}$$

Показать, что при $a > 0$ последовательность $u(n)/v(n)$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к $\sqrt{3}$;

д) рассмотрим систему

$$\begin{aligned} u(n+1) &= u(n) + Nv(n), & u(0) &= 1, \\ v(n+1) &= u(n) + v(n), & v(0) &= 1, \end{aligned}$$

где N — натуральное число. Показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(n)}{v(n)} = \sqrt{N};$$

е) найти решение системы

$$\begin{aligned} x(n+1) &= 2x(n) + 4y(n) - 5z(n) - \cos \frac{n\pi}{3}, & x(0) &= 1, \\ y(n+1) &= y(n) + z(n) + n, & y(0) &= 3, \\ z(n+1) &= -y(n) + 3z(n) - 3^n, & z(0) &= 1; \end{aligned}$$

ф) найти решение системы и исследовать поведение решений при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} x(n+1) &= -x(n) + y(n) + z(n), & x(0) &= -1, \\ y(n+1) &= -3y(n) + z(n), & y(0) &= 1, \\ z(n+1) &= -4y(n) + z(n), & z(0) &= -1; \end{aligned}$$

г) найти решение системы

$$\begin{aligned} x(n+2) + x(n) + y(n) &= 0, & x(0) &= x(1) = 2, \\ y(n+2) - x(n) + y(n) &= 0, & y(0) &= -1, y(1) = 1; \end{aligned}$$

h) рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x(n+1) &= 2x(n) - y(n), & x(0) &= -1 \\ y(n+1) &= 13x(n) - 2y(n), & y(0) &= 3. \end{aligned}$$

Найти $x(100)$.

2.6.3. Вычисление матрицы A^n

Рассмотрим подробнее свойства решений однородной системы

$$\begin{aligned} x(n+1) &= ax(n) + by(n), \\ y(n+1) &= cx(n) + dy(n), \end{aligned}$$

которую можно записать в векторном виде

$$z(n+1) = Az(n), \tag{2.140}$$

где $z(n) = (x(n), y(n))$ и

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что определитель матрицы A не равен нулю. Пусть $z_1(n) = (x_1(n), y_1(n))$ и $z_2(n) = (x_2(n), y_2(n))$ — решения системы (2.140).

Тогда непосредственно проверяется, что линейная комбинация $c_1 z_1(n) + c_2 z_2(n)$, где c_1 и c_2 — произвольные числа, является решением системы (2.140).

Решения $z_1(n)$ и $z_2(n)$ называются линейно независимыми, если из равенства

$$c_1 z_1(n) + c_2 z_2(n) = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой вектор, следует, что $c_1 = c_2 = 0$. Система (2.140) имеет два линейно независимых решения. Этими решениями являются столбцы $u(n)$ и $v(n)$ фундаментальной матрицы $G(n)$. В самом деле, первый столбец — это решение с начальными условиями $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Второй столбец — это решение с начальными условиями $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ (Проверьте это!). Решение $z(n)$ системы (2.140) с начальными условиями $x(0) = c_1$, $y(0) = c_2$ представляется в виде

$$z(n) = c_1 u(n) + c_2 v(n).$$

Следовательно, каждое решение системы (2.140) является линейной комбинацией линейно независимых решений.

Непосредственно проверяется, что решение системы (2.140) можно записать в виде

$$z(n) = A^n z(0),$$

где $z(0)$ — вектор начальных условий. Следовательно, фундаментальная матрица системы (2.140) определяется формулой

$$G(n) = A^n.$$

Поэтому вычислить матрицу A^n по матрице A можно следующим образом. Записать соответствующую этой матрице систему разностных уравнений. Найти решение системы с помощью операторного метода. Фундаментальная матрица и будет представлять собой матрицу A^n .

Например, пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая система имеет вид

$$\begin{aligned} u(n+1) &= u(n) + 3v(n), \\ v(n+1) &= u(n) + v(n). \end{aligned}$$

Выше мы показали, что фундаментальная матрица этой системы определяется формулой (2.138). Поэтому

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n] & \frac{3}{2\sqrt{3}} [(1 + \sqrt{3})^n - (1 - \sqrt{3})^n] \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} [(1 + \sqrt{3})^n - (1 - \sqrt{3})^n] & \frac{1}{2} [(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n] \end{pmatrix}.$$

Упражнения.1. Вычислить A^n , если

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix};$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$

c) $A = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}.$

2. Вычислить A^{50} , если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$ **2.6.4. Вычисление подходящих дробей
для периодической непрерывной дроби
с периодом $l \geq 2$**

Рассмотрим периодическую непрерывную дробь с периодом 2

$$\frac{1}{2+} \frac{1}{4+} \frac{1}{2+} \frac{1}{4+} \frac{1}{2+} \frac{1}{4+} \dots = (\overline{24}).$$

Здесь $(\overline{24})$ обозначает, что непрерывная дробь периодическая с периодом 2 и повторяются числа 2 и 4. Пусть α — значение этой дроби. Тогда число α является решением уравнения

$$\alpha = \frac{1}{2+} \frac{1}{4+ \alpha}$$

или

$$\alpha = \frac{4 + \alpha}{9 + 2\alpha}.$$

Отсюда получим, что $\alpha = -2 + \sqrt{6}$. Построим последовательность p_n/q_n подходящих дробей для этой дроби. Рекуррентные уравнения для числителей и знаменателей подходящих дробей имеют вид

$$\begin{aligned} p_{2n+2} &= 2p_{2n+1} + p_{2n}, & p_{2n+1} &= 4p_{2n} + p_{2n-1}, \\ q_{2n+2} &= 2q_{2n+1} + q_{2n}, & q_{2n+1} &= 4q_{2n} + q_{2n-1}. \end{aligned}$$

Положим $u(n) = p_{2n}$, $v(n) = p_{2n+1}$. Тогда первые два рекуррентных уравнения принимают вид

$$u(n+1) = 2v(n) + u(n), \quad v(n) = 4u(n) + v(n-1).$$

Второе уравнение можно записать в виде

$$v(n+1) = 4u(n+1) + v(n) = 4u(n) + 9v(n).$$

Заметим еще, что $u(0) = p(0) = 1$, $v(0) = p(1) = 4$. Следовательно, для отыскания функций p_{2n} , p_{2n+1} получим систему уравнений

$$u(n+1) = 2v(n) + u(n), \quad v(n+1) = 4u(n) + 9v(n), \quad u(0) = 1, \quad v(0) = 4.$$

Аналогично, для отыскания функций $u_1(n) = q_{2n}$, $v_1(n) = q_{2n+1}$ получим систему уравнений, которая отличается от предыдущей только начальными условиями

$$u_1(n+1) = 2v_1(n) + u_1(n), \quad v_1(n+1) = 4u_1(n) + 9v_1(n), \quad u_1(0) = 2, \quad v_1(0) = 9.$$

Решаем первую систему уравнений. Изображающая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} (s-1)u(n) - 2v(n) &= s, \\ -4u(n) + (s-9)v(n) &= 4s. \end{aligned}$$

Вычисляем характеристический многочлен

$$\Delta(s) = \det \begin{vmatrix} s-1 & -2 \\ -4 & s-9 \end{vmatrix} = s^2 - 10s + 1.$$

Следовательно, корни характеристического многочлена равны

$$s_1 = 5 + 2\sqrt{6}, \quad s_2 = 5 - 2\sqrt{6}.$$

Вычислим определители $D_1(s)$ и $D_2(s)$. Получим

$$D_1(s) = \begin{vmatrix} s & -2 \\ 4s & s-9 \end{vmatrix} = s^2 - s, \quad D_2(s) = \begin{vmatrix} s-1 & s \\ -4 & 4s \end{vmatrix} = 4s^2.$$

Таким образом,

$$u(n) = \frac{s(s-1)}{s^2 - 10s + 1}, \quad v(n) = \frac{4s^2}{s^2 - 10s + 1}.$$

Разлагаем на простейшие дроби

$$\begin{aligned} \frac{s-1}{(s-s_1)(s-s_2)} &= \frac{s_1-1}{s_1-s_2} \frac{1}{s-s_1} + \frac{s_1-1}{s_2-s_1} \frac{1}{s-s_2} = \\ &= \frac{2+\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \frac{1}{s-s_1} - \frac{2-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \frac{1}{s-s_2}, \\ \frac{4s}{(s-s_1)(s-s_2)} &= \frac{4s_1}{s_1-s_2} \frac{1}{s-s_1} + \frac{4s_1}{s_2-s_1} \frac{1}{s-s_2} = \\ &= \frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \frac{1}{s-s_1} - \frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \frac{1}{s-s_2}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в изображения функций $u(n)$ и $v(n)$ и переходя к оригиналам, получим

$$u(n) = \frac{2 + \sqrt{6}}{2\sqrt{6}}(5 + 2\sqrt{6})^n - \frac{2 - \sqrt{6}}{2\sqrt{6}}(5 - 2\sqrt{6})^n$$

и

$$v(n) = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{6}}(5 + 2\sqrt{6})^n - \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{6}}(5 - 2\sqrt{6})^n.$$

Изображение функции $u_1(n)$ имеет вид

$$u_1(n) = \frac{2s^2}{s^2 - 10s + 1}.$$

Разлагая на простейшие дроби и переходя к оригиналам, получим

$$u_1(n) = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}(5 + 2\sqrt{6})^n - \frac{5 - 2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}(5 - 2\sqrt{6})^n.$$

Вычислим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(n)}{u_1(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2+\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}(5+2\sqrt{6})^n - \frac{2-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}(5-2\sqrt{6})^n}{\frac{5+2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}(5+2\sqrt{6})^n - \frac{5-2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}(5-2\sqrt{6})^n}.$$

Разделив на $(5 + 2\sqrt{6})^n$ и устремляя $n \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(n)}{u_1(n)} = \frac{2 + \sqrt{6}}{5 + 2\sqrt{6}} = \frac{(2 + \sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})}{25 - 24} = -2 + \sqrt{6}.$$

Следовательно, последовательность подходящих дробей p_{2n}/q_{2n} построена.

Упражнения.

1. Найти $v_1(n)$ и показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v(n)}{v_1(n)} = -2 + \sqrt{6}.$$

2. Построить последовательность подходящих дробей для следующих непрерывных дробей

а)

$$\frac{1}{3+} \frac{1}{6+} \frac{1}{3+} \frac{1}{6+} \cdots = (\overline{36});$$

b)

$$\frac{1}{2+} \frac{1}{3+} = (\overline{23});$$

c)

$$\frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \cdots = (\overline{12});$$

d)

$$\frac{1}{a+} \frac{1}{b+} \cdots = (\overline{ab}),$$

где a и b — различные натуральные числа.

Рассмотрим периодическую непрерывную дробь с периодом 3

$$\alpha = \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \cdots = (\overline{122}). \quad (2.141)$$

Вычислим сначала величину α . Из равенства

$$\alpha = \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{2+\alpha}$$

находим, что

$$\alpha = \frac{5 + 2\alpha}{7 + 3\alpha}.$$

Следовательно,

$$3\alpha^2 + 5\alpha - 5 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения и дает значение α :

$$\alpha = \frac{-5 + \sqrt{85}}{6}.$$

Построим последовательность подходящих дробей p_n/q_n . Рекуррентные уравнения для подходящих дробей имеют вид

$$\begin{aligned} p_{3n+1} &= p_{3n} + p_{3n-1}, & q_{3n+1} &= q_{3n} + q_{3n-1}, \\ p_{3n+2} &= 2p_{3n+1} + p_{3n}, & q_{3n+2} &= 2q_{3n+1} + q_{3n}, \\ p_{3n+3} &= 2p_{3n+2} + p_{3n+1}, & q_{3n+3} &= 2q_{3n+2} + q_{3n+1}. \end{aligned}$$

Положим

$$x(n) = p_{3n-1}, \quad y(n) = p_{3n}, \quad z(n) = p_{3n}.$$

Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} z(n) &= x(n) + y(n), \\ x(n+1) &= 2z(n) + y(n), \\ y(n+1) &= 2x(n+1) + z(n). \end{aligned}$$

Подставляем значение $z(n)$ из первого уравнения во второе и третье уравнения. Получим систему из двух уравнений

$$\begin{aligned}x(n+1) &= 2x(n) + 3y(n), \\y(n+1) &= 5x(n) + 7y(n).\end{aligned}$$

Нам удобно в качестве начальных условий взять значения $x(1) = p_2 = 2$, $y(1) = p_3 = 5$. Поэтому положим $u(n) = x(n+1)$, $v(n) = y(n+1)$. Получим систему

$$\begin{aligned}u(n+1) &= 2u(n) + 3v(n), \\v(n+1) &= 5u(n) + 7v(n), \\u(0) &= 2, \quad v(0) = 5.\end{aligned}\tag{2.142}$$

Изображающая система для (2.142) имеет вид

$$\begin{aligned}(\mathbf{s} - 2)u - 3v &= \mathbf{s}u(0) = 2\mathbf{s}, \\-5u + (\mathbf{s} - 7)v &= 5\mathbf{s}.\end{aligned}\tag{2.143}$$

Характеристический многочлен этой системы $p(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^2 - 9\mathbf{s} - 1$. Его корни

$$s_1 = \frac{9 + \sqrt{85}}{2}, \quad s_2 = \frac{9 - \sqrt{85}}{2}.$$

Решая систему (2.143), получим изображение функций $u(n)$ и $v(n)$:

$$u(n) = \frac{\mathbf{s}(\mathbf{s} - 7)2 + 15\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2 - 9\mathbf{s} - 1}, \quad v(n) = \frac{\mathbf{s}(\mathbf{s} - 2)5 - 10\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2 - 9\mathbf{s} - 1}.$$

Продолжим вычисление только функции $u(n)$. Разложение на простейшие дроби имеет вид

$$u(n) = \mathbf{s} \frac{(\mathbf{s} - 7)2 + 15}{\mathbf{s}^2 - 9\mathbf{s} - 1} = \frac{(s_1 - 7)2 + 15}{s_1 - s_2} \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s} - s_1} + \frac{(s_2 - 7)2 + 15}{s_2 - s_1} \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s} - s_1}.$$

Переходя к оригиналам, получим

$$u(n) = x(n+1) = p(3n+1) = \frac{10 + \sqrt{85}}{2\sqrt{85}}(9 + \sqrt{85})^n - \frac{10 - \sqrt{85}}{2\sqrt{85}}(9 - \sqrt{85})^n.$$

Проводя аналогичные вычисления со знаменателями подходящих дробей, получим

$$q_{3n+1} = \frac{1}{2} \left[\frac{3(9 + \sqrt{85})}{2\sqrt{85}}(9 + \sqrt{85})^n - \frac{3(9 - \sqrt{85})}{2\sqrt{85}}(9 - \sqrt{85})^n \right].$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{3n+1}}{q_{3n+1}} = \frac{-5 + \sqrt{85}}{6}.$$

Следовательно, последовательность подходящих дробей p_{3n+1}/q_{3n+1} построена.

Упражнения.

1. Найти p_{3n+2} , q_{3n+2} , p_{3n+3} , q_{3n+3} для непрерывной дроби (2.141).
2. Построить последовательности подходящих дробей для следующих периодических непрерывных дробей с периодом 3

a)

$$\frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \dots = (\overline{211});$$

b)

$$\frac{1}{4+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \dots = (\overline{421});$$

c)

$$\frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \dots = (\overline{212});$$

d)

$$\frac{1}{a+} \frac{1}{b+} \frac{1}{c+} \dots = (\overline{abc}),$$

где a , b и c — натуральные числа, причем по крайней мере два числа различны.

Литература

- [1] Boole, G. Calculus of Finite Differences, 4th ed. / G. Boole. — New York: Chelsea, 1958.
- [2] Brand, L. A Division Algebra for Sequences and Its Associated Operational Calculus / L. Brand // Amer. Math. Monthly. — 1964. — V. 71, №7. — P. 719–728.
- [3] Brand, L. Differential and Difference Equations / L. Brand. — New York: Wiley, 1966.
- [4] Cheng, S. S. Partial Difference Equations / S. S. Cheng. — New York: Taylor and Francis, 2003.
- [5] Elaydi, S. An Introduction to Difference Equations / S. Elaydi. — New York: Springer-Verlag, 2005.
- [6] Jordan, C. Calculus of Finite Differences, 3rd ed. / C. Jordan. — New York: Chelsea, 1965.
- [7] Kelley, W. G. Difference equations: An Introduction with Applications, 2nd ed. / W. G. Kelley, A. S. Peterson. — San Diego: Academic Press, 2001.
- [8] Lorentzen, L. Continued Fractions with Applications / L. Lorentzen, H. Waadeland. — Amsterdam: North-Holland, 1992.
- [9] Lueker, G. S. Some Techniques for Solving Recurrences / G. S. Lueker // Computing Surveys. — 1980. — V. 12, №4. — P. 419–436.
- [10] Miller, K. Linear Difference Equations / K. Miller. — New York: W. A. Benjamin Inc, 1968.
- [11] Moore, D. H. Convolution Products and Quotients and Algebraic Derivatives of Sequences / D. H. Moore // Amer. Math. Monthly. — 1962. — V. 69. — P. 132–138.

- [12] Pincherle, S. Delle Funzioni ipergeometriche e di varie questioni ad esse attinenti / S. Pincherle // Giorn. Mat. Battaglini. — 1894. — V. 32. — P. 209–291.
- [13] Ribenboim, P. My Numbers, My Friends / P. Ribenboim. — New York: Springer-Verlag, 2000.
- [14] Spiegel, M. Calculus of Finite Differences and Difference Equations / M. Spiegel. — New York: McGraw-Hill, 1971.
- [15] Wilf, H.S. Generatingfunctionology / H.S. Wilf. — Wellesley: A K Peters, Ltd., 2006.
- [16] Бухштаб, А. А. Теория чисел / А. А. Бухштаб. — М.: Просвещение, 1966. — 380 с.
- [17] Воробьев, Н. Н. Числа Фибоначчи / Н. Н. Воробьев. — М.: Наука, 1978. — 144 с.
- [18] Гельфонд, А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. — М.: Физматгиз, 1959. — 400 с.
- [19] Грин, Д. Математические методы анализа алгоритмов / Г. Грин, Д. Кнут. — М.: Мир, 1987. — 120 с.
- [20] Грэхем, Р. Конкретная математика / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. — М.: Мир, 1998. — 704 с.
- [21] Деч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z -преобразования / Г. Деч. — М.: Физматлит, 1971. — 288 с.
- [22] Дэвенпорт, Г. Высшая арифметика. Введение в теорию чисел / Г. Дэвенпорт. — М.: Физматлит, 1965. — 176 с.
- [23] Ландо, С. К. Лекции о производящих функциях / С. К. Ландо. — М.: МЦМНО, 2007. — 144 с.
- [24] Марков, А. А. Исчисление конечных разностей / А. А. Марков. — Одесса: Матезис, 1910. — 240 с.
- [25] Микусинский, Я. Операторное исчисление / Я. Микусинский. — М.: ИЛ, 1956. — 367 с.
- [26] Риордан, Дж. Введение в комбинаторный анализ / Дж. Риордан. — М.: ИЛ, 1963. — 288 с.

- [27] Хинчин, А. Я. Элементы теории чисел / А. Я. Хинчин // Энциклопедия элементарной математики. Кн. 1: Арифметика. М.: Гостехиздат, 1951. — С. 255–353.
- [28] Хинчин, А. Я. Цепные дроби / А. Я. Хинчин. — М.: Физматгиз, 1961. — 112 с.
- [29] Хованский, А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа / А. Н. Хованский. — М.: Гостехиздат, 1956. — 204 с.

Учебное издание

Бурд Владимир Шепселевич

**Дискретное операторное исчисление
и линейные разностные уравнения**

Учебное пособие

Редактор, корректор М. В. Никулина
Компьютерный набор В. Ш. Бурд
Компьютерная верстка П. Н. Нестеров

Подписано в печать 14.01.10. Формат 60 × 84/16.
Бумага офсетная. Гарнитура «Octavian».
Усл. печ. л. 9,07. Уч.-изд. л. 6,3.
Тираж 200 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.

Отпечатано на ризографе.

ООО «Ремдер» ЛР ИД №06151 от 26.10.2001.
150049, Ярославль, пр. Октября, 94, оф. 37.
Тел. (4852) 73-35-03, 58-03-48, факс 58-03-49.