

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
Кафедра микроэлектроники и общей физики

С. Б. Московский  
И.А. Кузнецова  
Д.Н. Романов  
А. Н. Сергеев

# УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

*Учебно-методическое пособие*

Ярославль  
ЯрГУ  
2021

УДК

ББК

*Рекомендовано*

*Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2021 года.*

*Рецензент*

*А.Д. Смирнов, доктор физико-математических наук, профессор,  
профессор кафедры теоретической физики  
ФГБОУ ВО ЯрГУ им. П.Г. Демидова*

## **Московский, Сергей Борисович.**

Уравнения Максвелла и электромагнитные волны : учебно-методическое пособие / С. Б. Московский, И. А. Кузнецова, Д. Н. Романов, А. Н. Сергеев ; Ярсл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль : ЯрГУ, 2021. — 36 с.

Уравнения Максвелла в интегральной форме представлены как математические выражения фундаментальных эмпирических законов электромагнетизма с учетом гипотезы Максвелла о токах смещения.

Даны определения линейных дифференциальных операторов, используемых в электродинамике Максвелла, и доказаны связанные с ними теоремы. Рассмотрены свойства потенциальных и вихревых векторных полей.

Рассмотрен переход от уравнений электродинамики в интегральной форме к уравнениям в дифференциальной форме. Доказана эквивалентность этих форм представления уравнений электромагнетизма.

Рассмотрено решение уравнений Максвелла в отсутствии зарядов и токов проводимости. Получен волновой вид решения. Рассмотрены свойства электромагнитных волн в вакууме и изотропной среде.

В электромагнитном поле получены выражения для объемной плотности энергии, плотности потока энергии (вектор Пойнтинга), объемной плотности импульса. Рассмотрена связь объемных плотностей энергии и импульса.

Предназначено для студентов очной формы обучения всех направлений подготовки на физическом факультете (уровень бакалавриата, дисциплины в учебном плане: "Электричество и магнетизм", "Оптика").

УДК

ББК

© ЯрГУ, 2021

# 1. Уравнения Максвелла в интегральной форме

Интегральная форма уравнений Максвелла может рассматриваться как математическая формализация фундаментальных эмпирических законов электромагнетизма, дополненных гипотезой Максвелла о токах смещения.

## 1.1 Закон Кулона

Интегральной формой представления закона Кулона является теорема Гаусса для электрического поля

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV, \quad (1.1)$$

утверждающая, что поток вектора электрического смещения  $\mathbf{D}$  через любую замкнутую поверхность  $S$  равен суммарному электрическому заряду в объеме  $V$ , ограниченном этой поверхностью ( $\rho$  — объемная плотность заряда). Здесь и всюду далее используется система единиц СИ.

Аналогичная теорема для магнитного поля математически выражается равенством

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции. Уравнение соответствует экспериментальному факту отсутствия в природе магнитных зарядов.

## 1.2 Закон электромагнитной индукции

В соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея в замкнутом проводящем контуре  $L$ , пронизываемом магнитным полем с индукцией  $\mathbf{B}$  при изменении потока магнитной индукции  $\Phi$  через любую поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $L$ , возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i$ , пропорциональная скорости изменения магнитного потока  $\Phi$ :

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Магнитный поток

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}, \quad (1.3)$$

его производная по времени

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (1.4)$$

Линейность операций интегрирования и дифференцирования позволяет поменять местами их последовательность, но при этом при внесении операции дифференцирования по времени под знак интеграла оператор полной производной по времени  $t$  преобразуется в оператор частной производной, поскольку магнитный поток (1.3) после интегрирования по пространственным координатам является функцией одной переменной  $t$ , а магнитная индукция  $\mathbf{B}$  под знаком интеграла — функция четырех переменных  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z, t)$ .

Тождественность равенства (1.4) иногда вызывает сомнения, поскольку магнитный поток  $\Phi$  может изменяться не только за счет явной зависимости магнитной индукции от времени, но и за счет изменения контура  $L$  и опирающейся на него площадки  $S$ . Однако эти сомнения не имеют оснований.

В электродинамике пространственные координаты  $x, y, z$  и время  $t$  являются *независимыми переменными*. Поэтому изменение последовательности операций дифференцирования по времени и интегрирования по координатам в (1.4) (вычисления потока) осуществляется в *фиксированный момент времени*. Точно такая же операция может быть произведена в любой другой момент времени, когда контур  $L$  и опирающейся на него площадки  $S$  могут измениться. Таким образом, тождество (1.4) учитывает как возможность явной зависимости  $\mathbf{B}(t)$ , так и возможность изменения контура в (1.3).

Наличие ЭДС индукции в замкнутом проводящем контуре  $L$  означает наличие циркуляции электрического поля по этому контуру, которая будет иметь место как в присутствии проводящего контура, так и без него, поэтому

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (1.5)$$

С учетом (1.4) и (1.5) закон электромагнитной индукции принимает вид

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (1.6)$$

За положительное направление вектора  $d\mathbf{S}$  принимается направление, находящееся в правовинтовой ориентации по отношению к направлению обхода контура  $L$ .

### 1.3 Теорема о циркуляции магнитного поля. Ток смещения

Теорема о циркуляции магнитного поля в первоначальном варианте утверждала, что циркуляция вектора магнитной напряженности  $\mathbf{H}$  по любому замкнутому контуру  $L$  равна суммарному току, пронизывающему этот контур:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}, \quad (1.7)$$

где  $\mathbf{j}$  — плотность тока. Связь направления обхода контура  $L$  и положительного направления  $d\mathbf{S}$  такая же, как в (1.6).

Уравнение (1.7) представляет собой современную интерпретацию закона полного тока, установленного Ампером на основании обобщения экспериментальных данных. Если в левой части уравнения вычисляется циркуляция вектора магнитной напряженности  $\mathbf{H}$ , то в правую часть дают вклад только макроскопические токи проводимости (без учета молекулярных микротоков в среде).

Максвелл, не имея на тот момент экспериментальных оснований, обобщил теорему в виде (1.7), введя наряду с макротоками проводимости  $\mathbf{j}$  так называемые *токи смещения*. Это обобщение основывалось на ряде противоречий, связанных с применением (1.7) к переменным токам.

Рассмотрим одно из таких противоречий на примере тока зарядки конденсатора (см. рис. 1).

Пусть плоский конденсатор (площадь пластин  $S$ , ширина зазора  $d$ ) заряжается (сила тока зарядки  $I$ ). Площадку  $S_1$ , ограниченную контуром  $L$ , пронизывает ток зарядки  $I(t)$ , что в соответствии с (1.7) означает

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I,$$

то есть циркуляция и, следовательно, магнитная напряженность в точках контура отличны от нуля. Однако уравнение (1.7) должно выполняться *для любой* площадки, опирающейся на контур  $L$ .

Деформируем площадку следующим образом. Сместим ее в направлении тока и дополним боковой поверхностью образовавшегося параллелепипеда, чтобы деформированная площадка опиралась на тот же контур. Пока смещенная площадка пересекает проводник, пронизывающий ее ток остается равным  $I$ , то есть циркуляция  $\mathbf{H}$  по контуру  $L$  не изменяется. Но как только торцевая часть деформированной площадки окажется в пределах зазора конденсатора (положение  $S_2$  на рис. 1), пронизывающий ее ток проводимости станет равен нулю, что в соответствии с (1.7) означает

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0.$$

Поскольку вклады в циркуляцию на всех участках контура  $L$  имеют одинаковый знак, это возможно только при  $\mathbf{H} = 0$  на всем контуре.

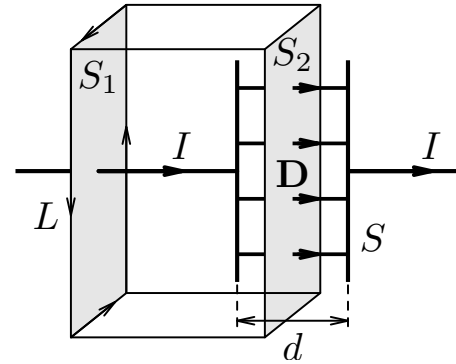


Рис. 1

Таким образом, теорема о циркуляции в виде (1.7) в рассмотренном случае дает неоднозначный результат определения магнитной напряженности на контуре  $L$  в зависимости от выбора поверхности, опирающейся на контур.

Устранить эту неоднозначность можно, предположив, что в зазоре конденсатора протекает *ток смещения*, который в каждый момент времени равен току зарядки.

Модуль вектора  $\mathbf{D}$  для электрического поля в плоском конденсаторе равен  $D = q/S$ , его производная по времени

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{S} \frac{dq}{dt} = \frac{I}{S} \quad (1.8)$$

( $q$  — заряд на конденсаторе,  $S$  — площадь пластин) имеет размерность плотности тока. Если предположить, что внутри конденсатора протекает ток смещения и его плотность

$$j_{\text{см}} = \frac{dD}{dt}, \quad (1.9)$$

то суммарный ток смещения в плоском конденсаторе

$$I_{\text{см}} = j_{\text{см}} S = \frac{dD}{dt} S = I,$$

то есть суммарные токи, пронизывающие площадки  $S_1$  и  $S_2$  на рис. 1, равны, что снимает неоднозначность определения циркуляции  $\mathbf{H}$  по контуру  $L$  и значений самой магнитной напряженности в точках контура.

Для конденсатора произвольной формы поле вектора  $\mathbf{D}$  будет неоднородным (в отличие от плоского конденсатора), поэтому в общем случае полную производную по времени в (1.8) и (1.9) нужно заменить на частную производную. Тогда определение плотности тока смещения в векторной форме примет вид

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.10)$$

Максвелл предположил, что ток смещения, плотность которого определяется равенством (1.10), является фундаментальной характеристикой электромагнитного поля и существует всюду, где электрическое поле явно зависит от времени. В дальнейшем это предположение получило прямое экспериментальное подтверждение.

Токи смещения в отличие от токов проводимости не связаны с перемещением электрических зарядов, но дают вклад в возбуждение магнитного поля, эквивалентный вкладу токов проводимости. Теорема о циркуляции (1.7) с учетом токов смещения принимает обобщенный вид

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}. \quad (1.11)$$

Данное уравнение называют обобщенным законом полного тока или обобщенной теоремой о циркуляции Ампера–Максвелла.

Уравнения (1.1), (1.2), (1.6), (1.11) представляют собой систему уравнений Максвелла в интегральной форме:

$$\begin{aligned}\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, & \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= \int_V \rho dV, \\ \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= \int_S \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}, & \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Данная система должна быть дополнена материальными уравнениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \tag{1.13}$$

выражающими связь векторных функций, входящих в (1.12), в материальной среде. Здесь  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные,  $\varepsilon$  и  $\mu$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды,  $\sigma$  — удельная проводимость.

Производную  $-\partial \mathbf{B} / \partial t$  в законе электромагнитной индукции можно интерпретировать как плотность *магнитного тока смещения*. В отличие от электрических токов, магнитных токов проводимости не существует, так как не существует магнитных зарядов.

## 2. Дифференциальные операторы

Для перехода к дифференциальной форме уравнений Максвелла нужно рассмотреть определения стандартных операторов дифференцирования по координатам и связанные с ними интегральные теоремы.

### 2.1 Градиент и оператор Лапласа

Градиентом функции координат  $f(x, y, z)$  называется вектор

$$\text{grad} f(x, y, z) \equiv \nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}. \tag{2.1}$$

Вычисление градиента скалярной функции  $f(x, y, z)$  можно представить как результат применения к ней векторного дифференциального оператора  $\nabla$  (набла)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}. \tag{2.2}$$

Оператор набла, примененный к скалярной функции  $f$ , ставит в соответствие этой функции векторную функцию  $\nabla f$  (векторное поле).

Скалярное произведение оператора набла на самого себя

$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.3)$$

называется оператором Лапласа. Оператор Лапласа, примененный к скалярной функции  $f$ , ставит ей в соответствие скалярную функцию

$$\Delta f(x, y, z) = \varphi(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad (2.4)$$

действие оператора Лапласа на векторное поле  $\mathbf{F}$  преобразует его в другое векторное поле

$$\Delta \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial z^2}. \quad (2.5)$$

## 2.2 Дивергенция

Дивергенцией векторной функции  $\mathbf{A}(x, y, z)$  (векторного поля) в точке с координатами  $x, y, z$  называется предел отношения потока этой функции (поля) через замкнутую поверхность, охватывающую точку, к объему внутри поверхности при стремлении объема к нулю:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} d\mathbf{S}}{V}. \quad (2.6)$$

Здесь  $\oint \mathbf{A} d\mathbf{S}$  — поток поля  $\mathbf{A}$  через любую замкнутую поверхность, охватывающую точку  $x, y, z$ ,  $V$  — объем внутри этой поверхности.

Получим выражение для дивергенции в прямоугольной системе координат, то есть выразим  $\operatorname{div} \mathbf{A}(x, y, z)$  через производные по декартовым координатам.

Построим вокруг точки  $x, y, z$  прямоугольный параллелепипед со сторонами  $dx, dy, dz$ , параллельными соответствующим осям так, чтобы точка оказалась в центре параллелепипеда. Объем параллелепипеда  $dV = dxdydz$ .

Вычислим вклад  $d\Phi_x$  в поток поля  $\mathbf{A}$  через поверхность параллелепипеда от граней, перпендикулярных оси  $x$ . Площади граней равны  $dydz$ , внешние нормали к ним:  $\mathbf{n}_1$  направлена против оси  $x$ ,  $\mathbf{n}_2$  — вдоль оси  $x$  (см. рис 2).

Вклад в поток

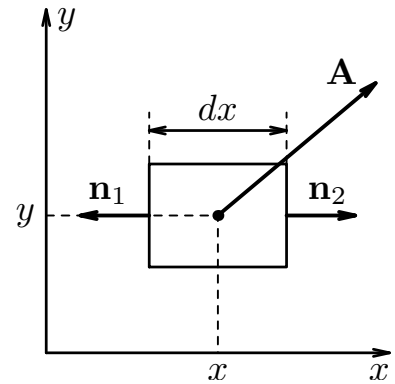


Рис. 2

$$d\Phi_x = [A_x(x + dx/2, y, z) - A_x(x - dx/2, y, z)]dydz = \frac{\partial A_x}{\partial x} dxdydz.$$



Аналогично

$$d\Phi_y = \frac{\partial A_y}{\partial y} dx dy dz, \quad d\Phi_z = \frac{\partial A_z}{\partial z} dx dy dz.$$

Суммарный поток

$$d\Phi = d\Phi_x + d\Phi_y + d\Phi_z = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

С учетом этого дивергенция векторного поля  $\mathbf{A}(x, y, z)$  (2.6) в каждой его точке равна

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV}{dV} = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right). \quad (2.7)$$

Дивергенцию поля  $\mathbf{A}$  можно представить как скалярное произведение векторного оператора набла (2.2) на вектор  $\mathbf{A}$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}. \quad (2.8)$$

Оператор дивергенции, примененный к векторному полю, ставит ему в соответствие скалярную функцию

$$\varphi(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbf{A}(x, y, z).$$

Для дивергенции векторной функции имеет место интегральная теорема Остроградского–Гаусса:

***интеграл по объему от дивергенции векторного поля равен потоку этого поля через поверхность, ограничивающую объем.***

Доказательство.

Разобьем конечный объем  $V$  на бесконечно малые объемы  $dV$ . Для каждого элементарного объема в соответствии с определением (2.6)

$$\operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint_{dS} \mathbf{A} d\mathbf{S}.$$

При интегрировании по объему  $V$  потоки через соприкасающиеся части элементарных объемов внутри области  $V$  взаимно компенсируются (см. рис. 3). Нескомпенсированными окажутся только потоки на границах области  $V$ , поэтому

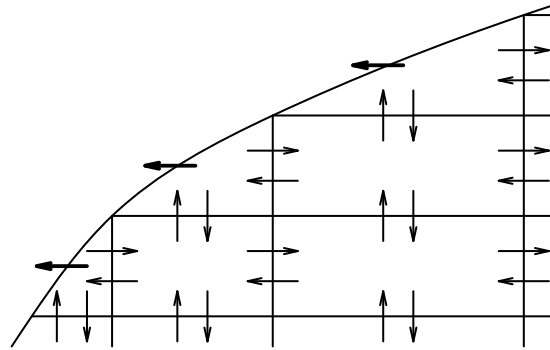


Рис. 3

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S}. \quad (2.9)$$

Теорема доказана.

## 2.3 Ротор

Ротором векторного поля  $\mathbf{A}(x, y, z)$  в точке  $(x, y, z)$  называется вектор, проекция которого на заданное направление равна пределу отношения циркуляции вектора  $\mathbf{A}$  по любому замкнутому контуру, охватывающему эту точку в плоскости, перпендикулярной выбранному направлению, к площади поверхности  $S$ , ограниченной данным контуром при стремлении  $S$  к нулю (вычисление циркуляции должно производиться в правовинтовой ориентации по отношению к выбранному направлению):

$$(\text{rot } \mathbf{A})_{\mathbf{n}} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} d\mathbf{l}}{S}. \quad (2.10)$$

Здесь  $\oint \mathbf{A} d\mathbf{l}$  — циркуляция вектора  $\mathbf{A}$ , вычисленная по произвольному замкнутому контуру, охватывающему точку  $(x, y, z)$  в плоскости, перпендикулярной направлению  $\mathbf{n}$ , направление обхода контура должно подчиняться правилу правого винта по отношению к направлению  $\mathbf{n}$ ,  $S$  — площадь внутри контура.

Найдем составляющие вектора  $\text{rot } \mathbf{A}$  в декартовой системе координат.

Для нахождения составляющей ротора на ось  $x$  в точке  $(x, y, z)$  вычислим циркуляцию  $\mathbf{A}$  по контуру в виде бесконечно малого прямоугольника с центром в точке  $(x, y, z)$ , в плоскости, перпендикулярной оси  $x$ . Стороны прямоугольника  $dy$  и  $dz$ , направление обхода в правовинтовой ориентации к оси  $x$ , площадь  $dS = dydz$ . Циркуляция  $\mathbf{A}$  по такому контуру

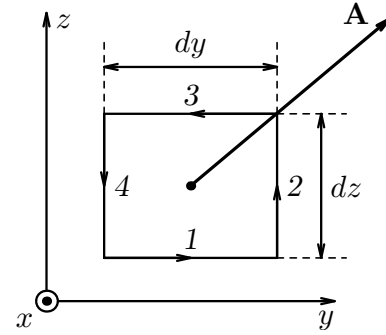


Рис. 4

$$\oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = (A_{y1} - A_{y3})dy + (A_{z2} - A_{z4})dz.$$

Разности составляющих  $\mathbf{A}$  на противоположных сторонах прямоугольника

$$A_{y1} - A_{y3} = -\frac{\partial A_y}{\partial z} dz \quad A_{z2} - A_{z4} = \frac{\partial A_z}{\partial y} dy.$$

В результате

$$\oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dydz, \quad (\text{rot } \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}. \quad (2.11)$$

Аналогично определяются составляющие  $\text{rot } \mathbf{A}$  на оси  $y$  и  $z$ . Они отличаются от  $(\text{rot } \mathbf{A})_x$  последовательными циклическими перестановками в тройке  $x, y, z$ :

$$(\text{rot } \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad (\text{rot } \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (2.12)$$

В соответствии с (2.11) и (2.12) применение векторного оператора  $\text{rot}$  к векторному полю  $\mathbf{A}(x, y, z)$  можно символически представить в виде векторного произведения

$$\text{rot } \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}]. \quad (2.13)$$

Действительно, в декартовых координатах

$$[\mathbf{a} \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k},$$

тогда

$$\begin{aligned} [\nabla \mathbf{A}] &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

что совпадает с (2.11) и (2.12).

Векторный оператор  $\text{rot}$  ставит в соответствие векторному полю  $\mathbf{A}$  векторное поле  $\text{rot } \mathbf{A}$ .

Для ротора векторного поля справедлива интегральная теорема Стокса:

**поток ротора векторного поля через поверхность равен циркуляции этого поля по контуру, ограничивающему поверхность.**

Доказательство.

Разобьем конечную поверхность  $S$ , ограниченную замкнутым контуром  $L$ , на бесконечно малые участки  $dS$ , охваченные контурами  $dL$ . Для каждого участка в соответствии с определением ротора  $\mathbf{A}$  (2.10) в точке внутри участка  $dS$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_{\mathbf{n}} dS = \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} = \oint_{dL} \mathbf{A} d\mathbf{l}.$$

При интегрировании по конечной поверхности  $S$  вклады в циркуляции соприкасающихся участков контуров  $dL$  внутри поверхности скомпенсируются, а на границе, то есть на контуре  $L$ , суммируются (см. рис. 5). В результате

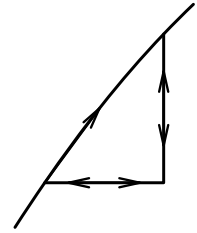


Рис. 5

$$\int_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l}. \quad (2.14)$$

Теорема доказана.

### 3. Потенциальные и вихревые поля

Векторное поле, которое может быть представлено градиентом скалярной функции:

$$\mathbf{P} = \nabla\varphi, \quad (3.1)$$

является потенциальным. К таким полям относятся, в частности, электростатическое и гравитационное.

Поле, представленное ротором векторной функции:

$$\mathbf{W} = \text{rot } \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}], \quad (3.2)$$

называется вихревым (в частности — магнитное поле).

Выясним некоторые свойства потенциальных и вихревых полей.

*Циркуляция потенциального поля (3.1) по любому контуру равна нулю.* Действительно,

$$\oint \nabla\varphi d\mathbf{l} = \oint \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz \right) = \oint d\varphi = 0,$$

так как интеграл от полного дифференциала не зависит от пути и на замкнутом контуре дает нуль. Для потенциальных полей произведение  $\mathbf{P}d\mathbf{l} = \nabla\varphi d\mathbf{l}$  является полным дифференциалом, в случае силового поля этот дифференциал пропорционален элементарной работе силы. Таким образом, в потенциальных силовых полях работа не зависит от пути и на замкнутом контуре дает нуль. Это означает отсутствие замкнутых силовых линий.

*Ротор потенциального поля (3.1) в любой точке равен нулю.*

Это следует непосредственно из определения ротора (2.10) с учетом рассмотренного выше свойства циркуляции. Однако убедимся в справедливости утверждения непосредственным вычислением:

$$\text{rot } \mathbf{P} = [\nabla \nabla\varphi] = [\nabla \nabla]\varphi = 0,$$

так как векторное произведение одинаковых векторов равно нулю.

*Дивергенция потенциального поля (3.1) в любой точке равна*

$$\text{div } \mathbf{P} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = \Delta\varphi,$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа (2.3). Действительно,  $\text{div } \mathbf{P} = \nabla \cdot \nabla\varphi = \Delta\varphi$ .

То, что  $\text{div } \mathbf{P} = \Delta\varphi$ , с учетом теоремы Остроградского–Гаусса (2.9) означает, в частности, что поток потенциального поля через замкнутую поверхность может быть отличен от нуля, то есть силовые линии могут пронизывать поверхность только в одном направлении. Тогда внутри поверхности они будут начинаться либо заканчиваться.

*Дивергенция вихревого поля (3.2) в любой точке равна нулю.*

Убедимся прямым вычислением:

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \cdot [\nabla \mathbf{A}].$$

Циклическая перестановка дает

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \cdot [\nabla \mathbf{A}] = [\nabla \nabla] \mathbf{A} = 0.$$

В соответствии с теоремой Остроградского–Гаусса (2.9) это означает, что поток вихревого поля через любую замкнутую поверхность равен нулю, то есть силовые линии могут пронизывать поверхность только насвозь — входя и выходя из нее. Таким образом, силовые линии вихревого поля могут быть только замкнутыми. Если силовая линия исходит из бесконечности и уходит на бесконечность, как в случае однородного магнитного поля, то она считается замкнутой на бесконечности, так как любой исходящей линии можно поставить в соответствие уходящую.

*Циркуляция вихревого поля (3.2) может быть отлична от нуля.*

Действительно, из теоремы Стокса (2.14)

$$\oint_L \mathbf{W} d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{W} d\mathbf{S},$$

но ротор вихревого поля не может быть равен нулю *всюду* как в случае потенциального поля, поэтому, если поле не равно тождественному нулю, всегда найдутся поверхности, через которые поток ротора вихревого поля отличен от нуля. Следовательно отличны от нуля будут и циркуляции по контурам, ограничивающим эти поверхности.

Для силового поля это означает, что отлична от нуля может быть работа по замкнутому контуру. Например, вихревое электрическое поле, порожденное электромагнитной индукцией, создает ЭДС индукции в замкнутом проводящем контуре, которая равна работе по перемещению единичного положительного заряда по этому контуру.

## 4. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Уравнения Максвелла в интегральной форме (1.12) преобразуются к дифференциальной форме с помощью интегральных теорем Остроградского–Гаусса (2.9) и Стокса (2.14).

Рассмотрим уравнения Максвелла для циркуляций

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, \quad \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}.$$

Согласно теореме Стокса (2.14)

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{S}, \quad \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{H} d\mathbf{S}.$$

С учетом этого уравнения для циркуляций принимают вид

$$\int_S \left( \text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d\mathbf{S} = 0, \quad \int_S \left( \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S} = 0.$$

Эти равенства должны быть выполнены для любых поверхностей  $S$ , поэтому

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$$

или

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (4.1)$$

Это уравнения Максвелла в дифференциальной форме для вихревых электрического и магнитного полей. Первое из них выражает закон электромагнитной индукции, второе — закон полного тока с учетом токов смещения.

Уравнения Максвелла для потоков через замкнутые поверхности

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV, \quad \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$$

с учетом теоремы Остроградского–Гаусса (2.9):

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{D} dV, \quad \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{B} dV$$

приводятся к виду

$$\int_V (\text{div } \mathbf{D} - \rho) dV = 0, \quad \int_V \text{div } \mathbf{B} dV = 0.$$

Данные равенства будут справедливы для любых ограниченных объемов только при условиях

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (4.2)$$

Это уравнения Максвелла в дифференциальной форме для потенциальных составляющих электрического и магнитного полей. В случае электрического поля уравнение является дифференциальной формой теоремы Гаусса, эквивалентной закону Кулона, в случае магнитного поля уравнение указывает на отсутствие у него потенциальной составляющей ввиду отсутствия магнитных зарядов.

Напишем полную систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме, включающую (4.1), (4.2) и материальные уравнения (1.13):

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, & \mathbf{B} &= \mu \mu_0 \mathbf{H}, & \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Это система линейных уравнений, устанавливающая связи между векторными функциями  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{j}$  и их производными, а также скалярными функциями  $\rho$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  в каждой точке пространства в любой момент времени. Отметим, что уравнения содержат только первые производные по координатам и времени.

Из линейности уравнений Максвелла следуют, в частности, принципы суперпозиции для электрических и магнитных полей.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме эквивалентны уравнениям (1.12) в интегральной форме. Мы получили систему (4.3) как следствие системы (1.12), но можно провести рассуждения наоборот — из уравнений в дифференциальной форме получить уравнения в интегральной форме. Покажем это на примере закона электромагнитной индукции.

Будем исходить из уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Вычислим поток левой и правой части через *любую* поверхность  $S$  в *любой* момент времени  $t$ :

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Используя теорему Стокса, приходим к равенству

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S},$$

которое представляет собой уравнение закона электромагнитной индукции в интегральной форме.

Обратим внимание, что зафиксировав при вычислении потоков площадку  $S$ , мы не ограничиваем общность наших рассуждений, поскольку, как было отмечено, в заданный момент времени это может быть *любая* площадка.

Поскольку координаты и время для функций, входящих в уравнения Максвелла, *независимые переменные*, в различные моменты времени мы можем рассматривать как одну и ту же (но при этом любую), так и разные площадки, в том числе таким образом, чтобы эти площадки по отношению к выбранной в момент  $t$  в дальнейшем произвольным образом перемещались и деформировались.

В частности, учитывая линейность уравнений и независимость переменных, мы можем изменить последовательность дифференцирования по времени и интегрирования по координатам в правой части последнего равенства:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Оператор дифференцирования по времени под интегралом применяется к функции  $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ , поэтому является оператором частной производной. Вне интеграла это будет оператор полной производной, так как после вычисления магнитного потока  $\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$ , то есть после интегрирования по координатам (*в данный момент времени*), функция  $\Phi$  оказывается функцией одной переменной  $t$ . Поток  $\Phi$  здесь может изменяться как за счет явной зависимости магнитной индукции от времени, так и за счет изменения площадки  $S$  (перемещения, вращения, деформации) поскольку  $S$  и охватывающий ее контур  $L$  в уравнении соответствуют их размерам и положению в пространстве *в данный момент времени*.

Таким образом, переход от дифференциальной формы уравнения к интегральной происходит без ограничения общности. Аналогичные рассуждения можно провести для всех остальных уравнений Максвелла.

## 5. Электромагнитные волны

Уравнения Максвелла в пустом пространстве, а также в среде при отсутствии свободных зарядов и токов проводимости имеют волновое решение. Прежде чем приступить к получению этого решения, рассмотрим некоторые общие свойства волн и их математического описания.

### 5.1 Плоская волна. Волновое уравнение

Волной называется возмущение (механическое в упругой среде, электромагнитное), распространяющееся в пространстве с течением времени.

Плоская монохроматическая волна это волна, в которой возмущения имеют характер гармонических колебаний фиксированной частоты  $\omega$ , а сами колебания имеют одинаковую амплитуду и фазу в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.



Такая волна описывается уравнениями

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (5.1)$$

или

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (5.2)$$

Здесь  $\mathbf{A}$  — вектор, характеризующий возмущение в точке, заданной радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , в момент  $t$ ,  $\mathbf{A}_0$  — амплитуда колебаний в волне,  $\omega$  — частота,  $\mathbf{k}$  — волновой вектор — постоянный вектор, смысл которого выяснится ниже.

Функция  $\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}$  называется фазой волны. При фиксированном  $\mathbf{r}$ , то есть в заданной точке пространства вектор  $\mathbf{A}$  совершает гармонические колебания с частотой  $\omega$  и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Рассмотрим так называемую волновую поверхность, то есть поверхность постоянной фазы, задаваемую уравнением  $\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} = \text{const}$ . При постоянном  $\mathbf{k}$  это, очевидно, уравнение плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{k}$ . Отсюда и название "плоская волна" — волна, у которой волновая поверхность является плоскостью.

Постоянный вектор  $\mathbf{k}$  всегда можно совместить с одной из координатных осей, например, с осью  $x$  (рис. 6). Тогда уравнение волновой поверхности примет вид  $\omega t - kx = \text{const}$ .

Продифференцируем уравнение волновой поверхности по времени:

$$\omega - kv = 0,$$

где  $v = dx/dt$  — скорость движения точки с координатой  $x$ , то есть скорость движения поверхности постоянной фазы (*фазовая скорость*).

Поскольку  $\omega = kv$ ,

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (5.3)$$

Фазовая скорость, как видно из рис. 6, направлена вдоль вектора  $\mathbf{k}$ .

Обратим внимание, что скорость  $v$  зависит не от частоты и волнового числа по отдельности, а от их отношения, поэтому, если

$$k \sim \omega, \quad (5.4)$$

то скорость для всех частот будет одинаковой.

В фиксированный момент времени плоская волна вида

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos(\omega t - kx) \quad \text{или} \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \sin(\omega t - kx)$$

является синусоидальной функцией  $x$  с периодом

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega} = vT,$$

называемым длиной волны.

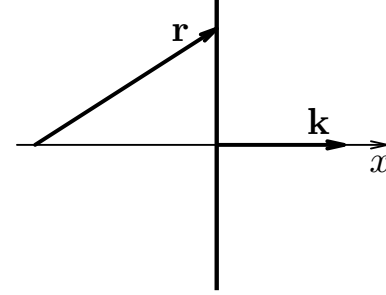


Рис. 6

Фазовая скорость имеет однозначный физический смысл только как *скорость распространения волновой поверхности в направлении волнового вектора  $\mathbf{k}$* . Интерпретация ее как *вектора*, модуль которого определяется соотношением (5.3), а направление совпадает с направлением  $\mathbf{k}$ , некорректна.

Действительно, в случае, когда направление волнового вектора находится под произвольным углом  $\alpha \neq 0$  к выделенному направлению (оси  $x$  на рис. 10), расстояние, пройденное волновой поверхностью за время  $dt$  вдоль выделенного направления, как видно из рисунка,

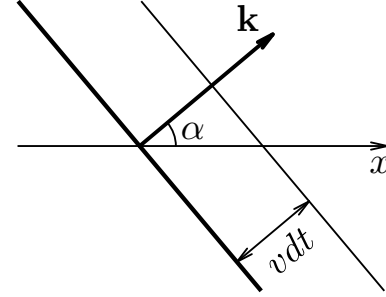


Рис. 7

$$dx = \frac{vdt}{\cos \alpha},$$

а не  $v \cos \alpha dt$ , как должно быть для проекции вектора перемещения точки волновой поверхности. Скорость распространения заданной фазы вдоль направления  $\mathbf{k}$ , таким образом, минимальна по отношению ко всем остальным направлениям, а не максимальна, как должно быть для вектора и его проекций. Более того, скорость перемещения фазы вдоль выделенного направления может быть больше скорости света, так как при  $\alpha \rightarrow \pi/2$   $v/\cos \alpha \rightarrow \infty$ . Это не противоречит теории относительности, так как скорость распространения фазы вдоль заданного направления (если это не направление  $\mathbf{k}$ ) не связана со скоростью движения какого-либо материального объекта и не является проекцией "вектора" фазовой скорости.

Направление вектора возмущения  $\mathbf{A}$  по отношению к волновому вектору может быть произвольным. Если  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{k}$  лежат на одной линии, волна называется продольной, если они ортогональны — поперечной, в других случаях — продольно-поперечной.

Продифференцируем функцию (5.1)

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \sin(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$$

дважды по  $x$ :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} = -k_x^2 \mathbf{A}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r}), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} = -k_x^2 \mathbf{A}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r}) = -k_x^2 \mathbf{A}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} = -k_y^2 \mathbf{A}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} = -k_z^2 \mathbf{A}.$$

В сумме

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} = \Delta \mathbf{A} = -k^2 \mathbf{A}.$$

Теперь продифференцируем дважды по времени:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \omega \mathbf{A}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r}), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{A}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r}) = -\omega^2 \mathbf{A}.$$

Можно видеть, что

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

или

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \quad (5.5)$$

Это волновое уравнение. Его решениями являются плоские волны (5.1) с любыми амплитудами, частотами и начальными фазами (постоянными слагаемыми в аргументе синуса), а также направлениями распространения при условии, что

$$\frac{\omega}{k} = v = \text{const}.$$

Волны в физике имеют скорость, зависящую от условий, в которых они распространяются, в частности, свойств среды, но не зависящую от частоты, поэтому волновое число для них всегда равно  $k = \omega/v$  при  $v = \text{const}$ , то есть поставленное выше условие (5.4) всегда выполняется.

Нетрудно убедиться, что волновому уравнению (5.5) удовлетворяет волна (5.2), отличающаяся от (5.1) сдвигом фазы на  $\pi/2$ , а также любая линейная комбинация волн плоских волн с различными амплитудами, частотами, начальными фазами и направлениями распространения.

В теории рядов и интегралов Фурье доказывается, что любая периодическая функция может быть представлена суммой функций, описывающих гармонические колебания с дискретно меняющимися частотами и определенными для каждой частоты амплитудами и начальными фазами, а непериодическая функция — интегральным разложением по гармоническим колебаниям с непрерывно изменяющимися частотами.

В применении к волнам это означает, что любая волна, являющаяся решением уравнения (5.5), может быть представлена суперпозицией (дискретной или непрерывной) плоских волн различных частот, амплитуд, направлений и начальных фаз. В этом смысле плоскую волну называют фундаментальным решением волнового уравнения. На основании этого в дальнейшем мы будем рассматривать волновые процессы только в применении к плоским волнам.

Необходимо отметить, что еще одним фундаментальным решением волнового уравнения, то есть позволяющим представить произвольное решение в виде разложения по множеству фундаментальных, является сферическая волна. Это волна, распространяющаяся от точечного источника. Ее волновыми поверхностями являются концентрические сферы, а амплитуда убывает обратно пропорционально расстоянию от источника.

## 5.2 Символическое представление плоской волны

В электродинамике, волновой оптике и технических науках, основывающихся на электродинамике, принято символическое представление плоской волны в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}. \quad (5.6)$$

Здесь  $i$  — мнимая единица, амплитуда  $A_0$  в общем случае комплексная:

$$\mathbf{A}_0 = |\mathbf{A}_0| e^{i\varphi_0},$$

где  $\varphi_0$  — начальная фаза.

Смысл использования такого представления плоской волны заключается в следующем. С одной стороны, вещественная и мнимая части (5.6) — функции вида (5.2) и (5.1) — при применении к ним линейных операторов преобразуются независимо, поэтому, придя к конечному результату в решении той или иной задачи в качестве окончательного решения можно выбрать вещественную либо мнимую часть комплексного решения. С другой стороны, применение линейных дифференциальных и интегральных операторов к функции вида (5.6) значительно проще, чем к функциям (5.1) и (5.2).

Действительно, при подстановке (5.6) в волновое уравнение (5.5) имеем

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = -ik_x \mathbf{A}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} = -k_x^2 \mathbf{A},$$

аналогично

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} = -k_y^2 \mathbf{A}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} = -k_z^2 \mathbf{A}.$$

В результате

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \mathbf{A} = -k^2 \mathbf{A}.$$

Дифференцирование (5.6) по времени дает

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = i\omega \mathbf{A}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{A}. \quad (5.7)$$

Подстановка в (5.5) приводит к тождеству

$$-k^2 \mathbf{A} = -\frac{1}{v^2} \omega^2 \mathbf{A}, \quad \frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{v^2}.$$

Таким образом, плоская волна (5.6) удовлетворяет волновому уравнению.

Отметим, что, согласно (5.7), дифференцирование по времени функции вида (5.6) сводится к ее умножению на  $i\omega$ .

Вычислим градиенты составляющих вектора (5.6):

$$\nabla A_x = \frac{\partial A_x}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \mathbf{k} = -i(k_x \mathbf{i} + k_y \mathbf{j} + k_z \mathbf{k}) A_x = -i \mathbf{k} A_x,$$

Таким образом,

$$\nabla A_x = -i \mathbf{k} A_x, \quad \nabla A_y = -i \mathbf{k} A_y, \quad \nabla A_z = -i \mathbf{k} A_z \quad (5.8)$$

— вычисление градиента скалярной функции вида (5.6) сводится к умножению этой функции на вектор  $-i \mathbf{k}$ .

Вычисление дивергенции поля (5.6) согласно (2.7)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = -i(k_x A_x + k_y A_y + k_z A_z), \\ \operatorname{div} \mathbf{A} &= -i \mathbf{k} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (5.9)$$

сводится к скалярному умножению вектора  $\mathbf{A}$  на вектор  $-i \mathbf{k}$ .

Применение оператора  $\operatorname{rot}$  к вектору (5.6)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}] &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \\ &= -i [(k_y A_z - k_z A_y) \mathbf{i} + (k_z A_x - k_x A_z) \mathbf{j} + (k_x A_y - k_y A_x) \mathbf{k}], \\ \operatorname{rot} \mathbf{A} &= -i [\mathbf{k} \mathbf{A}] \end{aligned} \quad (5.10)$$

эквивалентно векторному умножению вектора  $\mathbf{A}$  на вектор  $-i \mathbf{k}$  слева.

Эти простые правила вычисления результатов применения дифференциальных операторов к функции  $\mathbf{A}$  оправдывают использование представления плоской волны в символическом виде (5.6).

### 5.3 Уравнения Максвелла в отсутствие зарядов и токов проводимости. Волновое решение. Электромагнитное поле

Рассмотрим уравнения Максвелла (4.3) при отсутствии электрических зарядов ( $\rho(x, y, z) = 0$ ) и токов проводимости ( $\mathbf{j}(x, y, z) = 0$ ):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, & \mathbf{B} &= \mu \mu_0 \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Материальные уравнения далее будем считать линейными и однозначными, что означает отсутствие в рассматриваемой области пространства сегнетоэлектриков и ферромагнетиков, а также не слишком сильные поля, неспособные сделать материальные константы  $\varepsilon$  и  $\mu$  зависящими от амплитуды полей.

Симметрия системы уравнений (4.3) частично нарушена наличием электрических зарядов и токов проводимости и отсутствием их магнитных аналогов, в то время как система (5.11) полностью симметрична.

До введения Максвеллом токов смещения считалось, что электрические и магнитные поля не могут существовать в отсутствие источников, то есть зарядов и токов проводимости. С точки зрения уравнений Максвелла это действительно было бы так, если бы в уравнении для ротора  $\mathbf{H}$  не было плотности тока смещения:  $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$ . Тогда уравнения  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$  и  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  означали бы отсутствие у магнитного поля соответственно вихревой и потенциальной составляющих, то есть магнитное поле без токов проводимости вообще не могло бы существовать. Но в этом случае и производная  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  была бы равна нулю, что означало бы отсутствие также и электрического поля:  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  — отсутствует вихревая часть,  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  — отсутствует потенциальная часть.

Наличие в природе токов смещения делает возможным существование электромагнитного поля при отсутствии источников ( $\rho$  и  $\mathbf{j}$ ), то есть система (5.11) имеет ненулевые решения.

Вычислим ротор от ротора  $\mathbf{E}$ :

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = [\nabla[\nabla \mathbf{E}]] = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \text{div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}.$$

Здесь учтено правило раскрытия двойного векторного произведения, а также то, что в системе (5.11)  $\text{div } \mathbf{D} = 0$ , следовательно,

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\text{div } \mathbf{D}}{\varepsilon \varepsilon_0} = 0.$$

Теперь применим оператор  $\text{rot}$  к правой части уравнения для ротора  $\mathbf{E}$ :

$$-\text{rot } \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{H}) = -\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

где учтены материальные уравнения, а также уравнение  $\text{rot } \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t$ .

В результате из (5.11) получаем уравнение для вектора  $\mathbf{E}$

$$\Delta \mathbf{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

представляющее собой волновое уравнение (5.5) для волны, скорость распространения которой

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}}. \quad (5.12)$$

Вычислим значение этой скорости в вакууме ( $\varepsilon = \mu = 1$ )

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} \approx 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

что соответствует скорости света в вакууме, которая на момент опубликования работы Максвелла была известна с достаточной точностью.

Преобразования, аналогичные проведенным выше, в применении к уравнению  $\text{rot } \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t$  дают: в левой части

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H},$$

в правой части

$$\text{rot } \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{E} = -\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2},$$

где учтены остальные уравнения системы (5.11). В результате приходим к волновому уравнению для вектора  $\mathbf{H}$

$$\Delta \mathbf{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2},$$

с той же скоростью распространения волны (5.12).

Векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  отличаются соответственно от векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  постоянными множителями, поэтому для них будут иметь место такие же волновые уравнения.

Таким образом, уравнения Максвелла при отсутствии зарядов и токов проводимости *допускают* волновое решение. То есть в зависимости от начальных условий возможно волновое решение, но возможно и тривиальное решение, когда поля равны нулю.

Система уравнений Максвелла приводит к выводу о том, что электрическое и магнитное поля могут существовать по отдельности только в стационарном случае, когда  $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$  и  $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ . При переменных полях они являются частями единого *электромагнитного поля*, в котором электрическая и магнитная составляющие взаимосвязаны.

Отметим, что в соответствии с полной системой уравнений Максвелла (4.3) в общем случае

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho,$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0,$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

электрическое поле имеет потенциальную составляющую ( $\text{div } \mathbf{D} \neq 0$ ) и вихревую составляющую ( $\text{rot } \mathbf{E} \neq 0$ ), а магнитное поле всегда является вихревым ( $\text{rot } \mathbf{H} \neq 0$ ,  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ). В стационарных полях ( $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$  и  $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ ) электрическое поле является потенциальным ( $\text{div } \mathbf{D} \neq 0$ ,  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ ), а магнитное поле остается вихревым ( $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} \neq 0$ ).

## 5.4 Свойства электромагнитных волн

Рассмотрим плоские электромагнитные волны в символическом представлении (5.6)

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})},$$

где в качестве вектора  $\mathbf{A}$  можно использовать любой вектор:  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ . Поскольку в парах векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  отличие векторов сводится к постоянным множителям, фазы волн  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ , а также волн  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  будут в каждой паре равны.

Вначале предположим, что фазы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  отличаются:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi_1)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi_2)}.$$

Подставим эти функции в (5.11) и используем для производных по времени, а также для ротора и дивергенции соотношения (5.7)–(5.10):

$$\text{rot } \mathbf{E} = -i[\mathbf{k} \mathbf{E}] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{B} = -i\omega \mu \mu_0 \mathbf{H}$$

или

$$[\mathbf{k} \mathbf{E}] = \omega \mu \mu_0 \mathbf{H}.$$

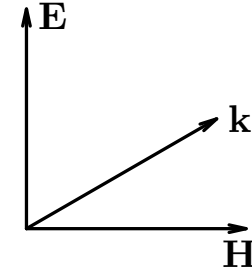


Рис. 8

Из полученного равенства можно сделать следующие выводы.

1. В электромагнитной волне векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  колеблются в одинаковой фазе (одновременно достигают максимума и минимума):  $\varphi_1 = \varphi_2$ , поэтому далее

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})},$$

аналогично для векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ .

2. Вектор  $\mathbf{H}$  перпендикулярен плоскости, содержащей векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{k}$ , то есть магнитное поле в волне поперечно.
3. Тройка векторов в последовательности  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  составляет правую тройку (см. рис. 8).

Подстановка плоской волны вида (5.6) в уравнение для ротора  $\mathbf{H}$  (5.11) с учетом (5.7)–(5.10) дает

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i[\mathbf{k} \mathbf{H}] = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = i\omega \mathbf{D} = i\omega \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

или

$$[\mathbf{k} \mathbf{H}] = -\omega \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

Отсюда следуют еще два вывода.

1. Вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен плоскости, содержащей векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{k}$ , то есть электрическое поле в волне поперечно.



2. С учетом перпендикулярности векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{k}$

$$kH = \omega\varepsilon\varepsilon_0 E, \quad H = \frac{\omega\varepsilon\varepsilon_0}{k} E.$$

Отсюда, учитывая (5.3) ( $\omega/k = v$ ) и (5.12) ( $v = 1/\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}$ ), получаем

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E$$

или для амплитуд полей

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_0, \quad \sqrt{\mu\mu_0} H_0 = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E_0. \quad (5.13)$$

На рис. 9 представлена мгновенная картина электромагнитного поля в волне.

Здесь нужно отметить, что система уравнений Максвелла при  $\mathbf{j} = 0$  и  $\rho = 0$  принимает вид (5.11) только в вакууме или *непроводящей* изотропной среде. При наличии в среде электропроводности ( $\sigma \neq 0$ ) в соответствии с материальным уравнением  $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$  уравнение для  $\text{rot } \mathbf{H}$  при отсутствии токов проводимости *от внешних источников* примет вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

то есть в нем появится дополнительное слагаемое, соответствующее плотности индукционных токов в среде.

Все рассмотренные нами результаты, являющиеся следствиями (5.11), таким образом, справедливы только для непроводящих сред. В проводящих средах также могут существовать электромагнитные волны, но они будут затухающими и кроме того фазы векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в этих волнах будут отличаться.

Тем не менее, если для электрического и магнитного полей в волне использовать символическое представление (5.6), то соотношение (5.13) в поглощающей среде остается справедливым для комплексных амплитуд  $E_0$  и  $H_0$ , отличающихся начальными фазами.

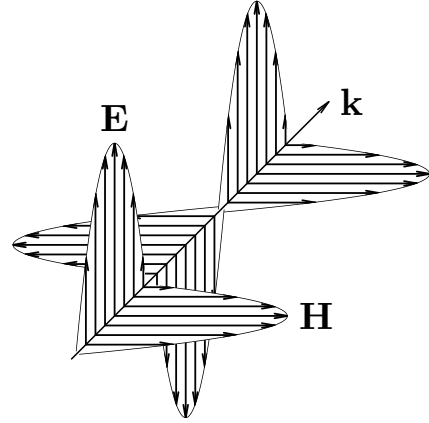


Рис. 9

Максвелл теоретически предсказал возможность существования электромагнитных волн и описал их основные свойства. Кроме того, его открытие позволило интерпретировать свет как электромагнитную волну.

## 5.5 Экспериментальные исследования электромагнитных волн

Экспериментальные исследования, в которых впервые удалось целенаправленно генерировать электромагнитную волну и осуществить ее прием, то есть преобразование в электромагнитные колебания, были проведены Герцем в 1886–88 годах.

Герц использовал устройство (вibrator Герца — прообраз современной антенны), представляющее собой колебательный контур, в котором конденсатор выполнен в виде двух металлических шаров с зазором, закрепленных на медных стержнях, расположенных на одной линии. При подаче высокого напряжения в зазоре между шарами проскакивает искра и возникают электрические колебания. Собственная частота контура подбиралась таким образом, чтобы время горения искры соответствовало нескольким периодам колебаний. В отличие от обычных конденсаторов система из двух шаров обеспечивает возможность создания переменного поля вне объема конденсатора.

В качестве приемника использовался такой же вибратор с той же собственной частотой колебаний. При параллельной ориентации излучателя и приемника в последнем регистрировались электрические колебания, при скрещенной ориентации колебания в приемнике не возбуждались.

Герц провел серию исследований, в которых не только показал возможность излучения и приема электромагнитных волн, но и изучил их основные свойства. Результаты экспериментов полностью подтвердили теорию Максвелла.

## 6. Энергия и импульс электромагнитной волны

Движущийся материальный объект переносит в пространстве энергию и импульс. Причем между переносимыми энергией и импульсом существует однозначная связь, характеризующая свойства объекта (закон дисперсии). Электромагнитное поле в теории Максвелла впервые было интерпретировано как вид материи. Рассмотрим вопросы, относящиеся к энергии и импульсу электромагнитной волны, а также их связи.

### 6.1 Энергия электромагнитной волны. Вектор Пойнтинга

Плотность энергии электромагнитного поля  $w$  является суммой плотностей энергии электрического и магнитного полей  $w_E = \varepsilon\varepsilon_0 E^2/2$  и  $w_H = \mu\mu_0 H^2/2$ :

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (6.1)$$

Для напряженностей электрического и магнитного полей в волне, распространяющейся в непроводящей среде,

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad H = H_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$$

выполняется такое же соотношение, как и для их амплитуд (5.13):

$$\sqrt{\mu\mu_0} H_0 = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E_0, \quad \sqrt{\mu\mu_0} H = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E,$$

С учетом этого

$$\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \varepsilon\varepsilon_0 E \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} H = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} EH = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} H^2 = \mu\mu_0 H^2,$$

то есть вклады электрического и магнитного полей в плотность энергии электромагнитного поля равны

$$w_E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = w_H = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} EH}{2},$$

а полная плотность энергии поля (6.1) в электромагнитной волне равна

$$w = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} EH = \frac{EH}{v}, \quad (6.2)$$

где в соответствии с (5.12)  $v = 1/\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}$  — скорость волны.

За время  $dt$  через площадку единичного сечения пройдет энергия  $dW$ , соответствующая энергии волны в объеме  $dV_{\text{ед. сеч.}} = vdt$ :

$$dW = wvdt = EHdt.$$

Плотность потока энергии (энергия, переносимая через единичную площадь в единицу времени), таким образом, равна

$$S = \frac{dW}{dt} = EH$$

или, с учетом направлений векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и направления распространения волны (см. рис. 8, 9),

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (6.3)$$

Вектор  $\mathbf{S}$ , указывающий направление переноса энергии и равный плотности ее потока, называется вектором Пойнтинга. Следует отметить, что понятия объемной плотности энергии и плотности потока энергии впервые были введены Н.А. Умовым для упругой механической волны, поэтому в применении к плотности потока энергии произвольной волны ее вектор называют вектором Умова–Пойнтинга.

В отношении выражений (6.1)–(6.3) необходимо отметить, что, поскольку они квадратично зависят от множителя  $e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$  в символическом представлении плоской волны (5.6), это представление, предназначенное только для линейных соотношений, к ним неприменимо. Действительно, при формальной подстановке волны типа (5.6) в выражение для плотности энергии, например, электрического поля, получим

$$w_E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2}{2} e^{2i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}.$$

Вещественная и мнимая части этого выражения в фиксированной точке ( $\mathbf{kr} = \text{const}$ ) будут периодическими знакопеременными функциями времени типа:

$$w_E = w_{0E}(r) \cos 2\omega t.$$

Аналогично для плотности энергии магнитного поля. Но энергия и плотность энергии электрического и магнитного полей не могут быть отрицательными величинами.

Для преодоления этого противоречия вернемся к вещественному представлению волны (5.1)–(5.2). Тогда

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx), \quad E^2 = E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

и в любой точке

$$w_E = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E_0^2}{2} \cos^2(\omega t - \varphi_0),$$

где  $\varphi_0 = kx$ .

Выражения для объемной плотности энергии и вектора Пойнтинга с учетом равенства

$$w_E = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} = w_H = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} = \frac{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} EH}{2}$$

для вещественного представления волны примут вид

$$w = \frac{EH}{v} = \frac{E_0 H_0}{v} \cos^2(\omega t - \varphi_0), \quad (6.4)$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \mathbf{H}] = [\mathbf{E}_0 \mathbf{H}_0] \cos^2(\omega t - \varphi_0). \quad (6.5)$$

Плотность энергии и модуль  $\mathbf{S}$  — периодические неотрицательные функции с удвоенной частотой и периодом  $\pi/\omega = T/2$ .

В фиксированный момент времени переменные множители в (6.4), (6.5) будут иметь вид  $\cos^2(kx - \varphi_0)$ , где  $x$  — координата в направлении волнового вектора,  $\varphi_0 = \omega t$ . Это неотрицательная периодическая функция с периодом  $\pi/k = \lambda/2 = vT/2$ .

Таким образом, плотность энергии электромагнитной волны и модуль вектора Пойнтинга — периодические во времени и пространстве функции, изменяющиеся от нуля до максимального значения:  $E_0 H_0 / v$  для плотности энергии и  $E_0 H_0$  для модуля  $\mathbf{S}$ .

Плотность энергии и ее потока в волне можно охарактеризовать также их средними значениями. При усреднении по времени за период колебаний

$$\langle \cos^2(\omega t - \varphi_0) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - \varphi_0) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T [1 + \cos(2\omega t - 2\varphi_0)] dt = \frac{1}{2}$$

для любой начальной фазы  $\varphi_0$ . Такой же результат получится при усреднении по координате  $x$  в пределах длины волны.

С учетом этого

$$\langle w \rangle = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle + \mu\mu_0 \langle H^2 \rangle}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 + \mu\mu_0 H_0^2}{4} = \frac{E_0 H_0}{2v}, \quad (6.6)$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{[\mathbf{E}_0 \mathbf{H}_0]}{2}. \quad (6.7)$$

Следует отметить, что выражения для плотности энергии (6.2) и вектора Пойнтинга (6.3), полученные нами для электромагнитной волны в непроводящей среде, будут справедливы в общем случае произвольного электромагнитного поля в любой среде с линейной зависимостью  $\mathbf{D}$  от  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  от  $\mathbf{H}$ , то есть при отсутствии ферромагнетиков и сегнетоэлектриков, а также в полях, амплитуды которых недостаточны для изменения значений материальных констант  $\varepsilon$  и  $\mu$ .

## 6.2 Импульс электромагнитной волны. Давление света

Рассмотрим небольшой объем тела в окрестности точки, в которой плотности заряда и тока проводимости, а также магнитная индукция равны соответственно  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{B}$ . Магнитная сила Лоренца, отнесенная к единице объема, при скорости зарядов  $\mathbf{v}'$  равна

$$\mathbf{f} = \rho[\mathbf{v}' \mathbf{B}].$$

За время  $dt$  через единичную площадку в направлении тока пройдет заряд  $\rho v' dt$ , то есть плотность тока при движении зарядов со скоростью  $\mathbf{v}'$

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}'.$$

С учетом этого выражение для объемной плотности силы Лоренца примет вид

$$\mathbf{f} = [\mathbf{j} \mathbf{B}] = \mu\mu_0 [\mathbf{j} \mathbf{H}]. \quad (6.8)$$

Отметим, что сила Лоренца будет отлична от нуля не только в проводящей среде, но и в диэлектрике при наличии в нем переменного электрического поля. Действительно, даже при отсутствии свободных зарядов электрическое поле будет вызывать периодические смещения положительных и отрицательных связанных зарядов, входящих в состав молекул, причем положительные и отрицательные заряды будут смещаться в противоположных направлениях, что приведет к появлению периодических токов, плотность которых в каждой точке будет пропорциональна и сонаправлена вектору  $\mathbf{E}$ .

При падении на поверхность тела электромагнитной волны в нем будут возбуждаться периодические токи плотности  $\mathbf{j}$ , которые, взаимодействуя с магнитным полем волны, будут создавать силу вида (6.8). Эта

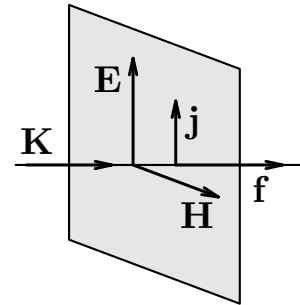


Рис. 10

сила, как видно из рис. 10, совпадает по направлению с направлением распространения волны и может интерпретироваться как сила давления волны на тело.

Для того, чтобы выразить плотность силы Лоренца через векторы, характеризующие поле, и материальные константы, характеризующие среду, в которой распространяется волна, нужно исключить из (6.8) плотность тока  $\mathbf{j}$ . Среда будем считать электрически нейтральной:  $\rho = 0$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ .

Используем уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Подстановка этого выражения в (6.8) дает

$$\mathbf{f} = \mu\mu_0 \left( [\operatorname{rot} \mathbf{H} \mathbf{H}] - \left[ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathbf{H} \right] \right). \quad (6.9)$$

Выразим отдельно

$$[\operatorname{rot} \mathbf{H} \mathbf{H}] = -[\mathbf{H} [\nabla \mathbf{H}]] = -\nabla H^2 + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{H} = -\nabla H^2,$$

так как  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ .

Произведение

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathbf{H} \right] &= \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{D} \mathbf{H}] - \left[ \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] = \\ &= \varepsilon\varepsilon_0 \left( \frac{\partial [\mathbf{E} \mathbf{H}]}{\partial t} - \left[ \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] \right) = \varepsilon\varepsilon_0 \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \frac{1}{\mu\mu_0} [\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}] \right), \end{aligned}$$

так как  $\partial \mathbf{H} / \partial t = -\operatorname{rot} \mathbf{E} / \mu\mu_0$ . Далее

$$[\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}] = [\mathbf{E} [\nabla \mathbf{E}]] = \nabla E^2 - \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla E^2.$$

В итоге

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathbf{H} \right] = \varepsilon\varepsilon_0 \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \frac{1}{\mu\mu_0} \nabla E^2 \right).$$

Подстановка полученных результатов в (6.9) даст

$$\mathbf{f} = -\mu\mu_0 \nabla H^2 - \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} - \varepsilon\varepsilon_0 \nabla E^2.$$

Преобразуем полученное равенство к виду

$$\mathbf{f} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = -\mu\mu_0 \nabla H^2 - \varepsilon\varepsilon_0 \nabla E^2 = -2\nabla w, \quad (6.10)$$

где  $w = (\varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2)/2$  — плотность энергии поля (6.1),  $v = 1/\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0}$  — скорость волны в среде.

Представим плотность силы Лоренца как производную по времени плотности импульса частиц среды  $\mathbf{K}$ :  $\mathbf{f} = \partial \mathbf{K} / \partial t$ . Производная должна

быть частной, так как по  $\mathbf{K}$  понимается плотность импульса в фиксированной точке. Это приведет (6.10) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{K} + \frac{\mathbf{S}}{v^2} \right) = -2\nabla w. \quad (6.11)$$

Отметим, что вектор  $\mathbf{S}/v^2$  имеет размерность объемной плотности импульса.

При распространении плоской волны вдоль оси  $x$  в непоглощающей среде  $E = E_0 \cos(\omega t - kx)$ ,  $H = H_0 \cos(\omega t - kx)$ , плотность энергии поля (6.2)

$$w = \frac{EH}{v} = \frac{E_0 H_0}{v} \cos^2(\omega t - kx),$$

ее градиент

$$\begin{aligned} \nabla w &= \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{i} = \frac{2\mathbf{k}E_0 H_0}{v} \cos(\omega t - kx) \sin(\omega t - kx) = \\ &= \frac{\mathbf{k}E_0 H_0}{v} \sin[2(\omega t - kx)]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Вектор Пойнтинга (6.3)

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \mathbf{H}] = [\mathbf{E}_0 \mathbf{H}_0] \cos^2(\omega t - kx).$$

Второе слагаемое в левой части (6.11)

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} &= -\frac{2\omega [\mathbf{E}_0 \mathbf{H}_0]}{v^2} \cos(\omega t - kx) \sin(\omega t - kx) = \\ &= -\frac{\omega [\mathbf{E}_0 \mathbf{H}_0]}{v^2} \sin[2(\omega t - kx)] = -\frac{\mathbf{k}E_0 H_0}{v} \sin[2(\omega t - kx)]. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Подстановка (6.12) и (6.13) в (6.11) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} - \frac{\mathbf{k}E_0 H_0}{v} \sin[2(\omega t - kx)] &= -\frac{2\mathbf{k}E_0 H_0}{v} \sin[2(\omega t - kx)], \\ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} &= -\frac{\mathbf{k}E_0 H_0}{v} \sin[2(\omega t - kx)], \end{aligned}$$

то есть слагаемые в левой части (6.11) для незатухающей электромагнитной волны равны.

В вакууме равенства (6.12) и (6.13) принимают вид

$$\begin{aligned} \nabla w &= \frac{\mathbf{k}E_0 H_0}{c} \sin[2(\omega t - kx)], \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{S}}{c^2} \right) &= -\frac{\mathbf{k}E_0 H_0}{c} \sin[2(\omega t - kx)], \end{aligned}$$

где  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  — скорость света в вакууме. Как можно видеть,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{S}}{c^2} \right) = -\nabla w$$

Это равенство означает, что объемная плотность некой силы  $\mathbf{f}_{em} = -\nabla w$  равна производной по времени плотности импульса

$$\mathbf{K}_{em} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}. \quad (6.14)$$

Этот импульс, очевидно, является импульсом электромагнитного поля.

В частности, при распространении в вакууме локализованной волны ее энергия  $W = (\int E H dV)/c$  и модуль импульса  $p_{em} = (\int E H dV)/c^2$  связаны соотношением

$$W = c p_{em}. \quad (6.15)$$

В таком соотношении, в частности, находятся энергия  $W = h\nu$  и импульс фотона  $p_{\text{фот}} = h\nu/c$ . Это следует непосредственно из релятивистского инварианта энергии–импульса для частицы с нулевой массой:

$$W^2 - c^2 p_{\text{част}}^2 = m^2 c^4.$$

При распространении электромагнитной волны в среде согласно (6.11) к импульсу волны добавляется импульс частиц среды.

Если электромагнитная волна падает нормально на плоскую поверхность тела (см. рис. 10) и полностью им поглощается, то ее импульс передается телу. Единицей площадке поверхности при этом за время  $dt$  передается импульс

$$K_{em} c dt = \frac{E H}{c} dt.$$

Это означает, что при нормальном падении и полном поглощении волна оказывает на тело давление

$$p = \frac{E H}{c} = w. \quad (6.16)$$

Обычно это давление называют давлением света, хотя оно имеет место для электромагнитных волн всех частотных диапазонов.

Среднее по времени давление (6.16)

$$\langle p \rangle = \frac{E_0 H_0}{2c} = \langle w \rangle.$$

При нормальном падении и полном отражении волна передает телу удвоенный импульс и оказывает удвоенное давление, при частичном отражении передаваемый импульс и давление находятся в интервале от значения (6.16) до удвоенного значения. При наклонном падении давление света соответствует изменению нормальной составляющей импульса.

Давлением света обусловлено, в частности, появление хвостов у комет при их прохождении вблизи Солнца. Хвосты комет в любой точке их траектории ориентированы в противоположном направлении по отношению к направлению на Солнце.

Первые успешные эксперименты по регистрации и количественному измерению давления света были проведены П.Н. Лебедевым в 1900-1910 годах. Они дали удовлетворительное согласие с теорией Максвелла.



## Приложение 1

Погрешность современных измерений скорости света составляет величину порядка 1 м/с и дальнейшее ее уменьшение оказалось принципиально невозможным из-за ограничения точности воспроизводства эталона метра. В связи с этим Генеральная конференция по мерам и весам в 1983 г. признала, что наилучшая точность воспроизводства эталона метра обеспечивается, если принять его равным расстоянию, которое свет в вакууме проходит за время, равное  $1/299792458$  секунды.

В связи с этим в 2018-19 годах в Международную систему СИ внесены изменения, согласно которым приняты точные значения электрической и магнитной постоянных:  $\varepsilon_0 = 8,8541878128 \cdot 10^{-12}$  Ф/м и  $\mu_0 = 1,25663706212 \cdot 10^{-6}$  Гн/м ( $\approx 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м).

Скорость света в вакууме, определяющая современный эталон метра, таким образом, в точности равна  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 299792458$  м/с.

## Приложение 2

Рассмотрим давление изотропного электромагнитного излучения на стенки полости, в которой заключено это излучение.

На площадку стенки  $\sigma$  под углом  $\theta$  за время  $dt$  падает излучение, несущее энергию  $\sigma w c \cos \theta dt$  и импульс  $\sigma w \cos \theta dt$  (см. рис. 11). Вначале будем считать, что излучение полностью зеркально отражается. Тогда площадке  $\sigma$  за время  $dt$  передается удвоенная нормальная составляющая импульса  $2\sigma w \cos^2 \theta dt$ .

В интервале углов падения от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$  на площадку  $\sigma$  падает излучение из телесного угла  $d\Omega$  — области пространства, ограниченной боковыми поверхностями круговых конусов с углами полураствора  $\theta$  и  $\theta + d\theta$  (см. рис. 12). Мерой телесного угла является величина площади, отсекаемой им на поверхности сферы единичного радиуса с центром в вершине угла:  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ .

Используя данное выражение можно вычислить телесный угол в пределах кругового конуса с углом полураствора  $\theta$ :

$$\Omega(\theta) = 2\pi \int_0^\theta \sin \theta' d\theta' = 2\pi(1 - \cos \theta). \text{ В частности, при } \theta = \pi/2$$

телесный угол для полупространства  $\Omega_{1/2} = 2\pi$ , для всех возможных направлений в пространстве ( $\theta = \pi$ )  $\Omega_0 = 4\pi$ .

Для изотропного излучения доля его импульса, приходящаяся на бесконечно малый телесный угол  $d\Omega$  для интервала углов падения  $(\theta, \theta + d\theta)$  равна отношению  $d\Omega$  к  $\Omega_0 = 4\pi$ , соответствующему всем возможным направлениям в пространстве. Таким образом, импульс, передаваемый площадке  $\sigma$  за время  $dt$  излучением с углами падения в интервале  $(\theta, \theta + d\theta)$  при полном зеркальном отражении равен  $2\sigma w \cos^2 \theta d\Omega dt / 4\pi = \sigma w \cos^2 \theta \sin \theta d\theta dt$ , что соответствует силе  $df = \sigma w \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$ , действующей по нормали к стенке и дающей вклад в давление  $dp = w \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$ . Полное давление получается интегрированием по  $\theta$  в пределах

$$\text{от } 0 \text{ до } \pi/2. \text{ Учитывая, что } \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 1/3, \text{ для полного давления имеем}$$

$$p = \frac{1}{3} w.$$

Условие полного зеркального отражения не ограничивает общность рассуждений, если речь идет об излучении, находящемся в равновесии со стенками непрозрачной полости. Равновесие предполагает статистическую компенсацию поглощенного излучения отраженным, рассеянным и испущенным стенками полости. Причем эта компенсация должна быть *детальной* — для любого интервала частот  $(\nu, \nu + d\nu)$  и углов падения  $(\theta, \theta + d\theta)$ . Последнее условие эквивалентно полному зеркальному отражению.

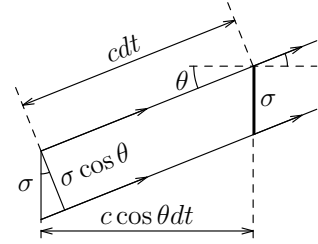


Рис. 11

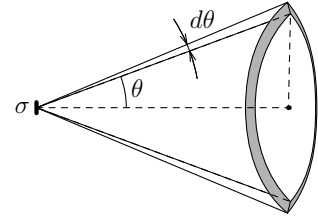


Рис. 12

## Литература

- [1] Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учебное пособие для вузов : в 5 т. Т. 3 : Электричество / Д. В. Сивухин. — 4-е изд., стереотип. — М. : Физматлит ; МФТИ, 2009. — 656 с.
- [2] Савельев, И. В. Курс физики : учебное пособие : в 3 т. Т. 2 : Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика / И. В. Савельев. — 5-е изд., стереотип. — СПб. : Лань, 2018. — 468 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).
- [3] Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учебное пособие для вузов : в 10 т. Т. 2 : Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — 8-е изд., стереотип. — М. : Физматлит, 2003. — 536 с.
- [4] Матвеев, А. Н. Электродинамика : учебное пособие / А. Н. Матвеев. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Высш. школа, 1980. — 383 с.
- [5] Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. — М. : Наука, 1970. — 855 с.

# Оглавление

1. Уравнения Максвелла в интегральной форме . . . . .	3
1.1 Закон Кулона . . . . .	3
1.2 Закон электромагнитной индукции . . . . .	3
1.3 Теорема о циркуляции магнитного поля. Ток смещения	4
2. Дифференциальные операторы . . . . .	7
2.1 Градиент и оператор Лапласа . . . . .	7
2.2 Дивергенция . . . . .	8
2.3 Ротор . . . . .	10
3. Потенциальные и вихревые поля . . . . .	12
4. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме	13
5. Электромагнитные волны . . . . .	16
5.1 Плоская волна. Волновое уравнение . . . . .	16
5.2 Символическое представление плоской волны . . . . .	20
5.3 Уравнения Максвелла в отсутствие зарядов и токов проводимости. Волновое решение. Электромагнитное поле . . . . .	21
5.4 Свойства электромагнитных волн . . . . .	24
5.5 Экспериментальные исследования электромагнитных волн . . . . .	26
6. Энергия и импульс электромагнитной волны . . . . .	26
6.1 Энергия электромагнитной волны. Вектор Пойнтинга	26
6.2 Импульс электромагнитной волны. Давление света . .	29
Приложение 1 . . . . .	33
Приложение 2 . . . . .	33
Литература . . . . .	34

Учебное издание

**Московский** Сергей Борисович

**Кузнецова** Ирина Александровна

**Романов** Дмитрий Николаевич

**Сергеев** Александр Николаевич

## **УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ**

Учебно-методическое пособие

Редактор, корректор

Компьютерный набор, верстка С. Б. Московский

Подписано в печать Х.ХХ.2021. Формат  $60 \times 84^{1/16}$ .

Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 2 экз.

Оригинал-макет подготовлен

в редакционно-издательском отделе ЯрГУ

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.

150003, Ярославль, ул. Советская, 14.