

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

Н. В. Тимофеева

**Линейная алгебра.  
Современная алгебра**

**Часть 2**

*Учебное пособие*

Ярославль  
ЯрГУ  
2017

УДК 512.64(075)  
ББК В143я73  
Т41

*Рекомендовано  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2017 года.*

Рецензенты:

М. Е. Сорокина, кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры геометрии и алгебры ЯГПУ им. К. Д. Ушинского;  
кафедра математики Ярославского высшего военного училища  
противовоздушной обороны

**Тимофеева, Надежда Владимировна.**

Т 41      Линейная алгебра. Современная алгебра. Часть 2 :  
учебное пособие / Н. В. Тимофеева ; Яросл. гос. ун-т  
им. П. Г. Демидова. — Ярославль : ЯрГУ, 2017. — 136 с.

ISBN 978-5-8397-1118-1

Пособие содержит материалы по полилинейной алгебре, а также теории конечномерных векторных пространств с дополнительной структурой и их линейных отображений.

Предназначено для студентов, изучающих дисциплины «Линейная алгебра», «Линейная алгебра и геометрия», «Фундаментальные алгебраические структуры».

УДК 512.64(075)  
ББК В143я73

ISBN 978-5-8397-1118-1

© ЯрГУ, 2017

# Оглавление

<b>Введение</b> .....	7
<b>Глава 1. Билинейные формы</b> .....	11
1.1. Начальные понятия .....	11
1.1.1. Билинейное отображение. Билинейная форма .....	11
1.1.2. Симметрические и кососимметрические билинейные формы .....	13
1.1.3. Билинейные формы в координатах .....	14
1.1.4. Преобразование матрицы билинейной формы при смене базиса. Конгруэнтные матрицы .....	15
1.1.5. Матрицы симметрических и кососимметрических билинейных форм. Размерности подпространств симметрических и кососимметрических форм .....	17
1.1.6. Левый и правый радикалы билинейной формы. Ранг билинейной формы .....	17
1.1.7. Замечания о полилинейных формах валентности выше 2 ....	18
1.2. Квадратичные формы .....	19
1.2.1. Основные понятия .....	19
1.2.2. Квадратичная форма в координатах и ее матрица .....	21
1.2.3. Канонический (диагональный) вид квадратичной формы ...	22
1.2.4. Замечания об ортогональности. Первое понятие об ортогональных разложениях .....	23
1.2.5. Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду в координатах (метод Лагранжа) .....	25
1.2.6. Вещественный случай: сигнатура и нормальный вид квадратичной формы .....	27
1.2.7. Знакоопределенность .....	29
1.2.8. Закон инерции квадратичных форм .....	30
1.2.9. Приведение квадратичной формы к каноническому виду: метод Якоби .....	32
1.3. Кососимметрические формы .....	33
1.3.1. Редукция к невырожденному случаю .....	33
1.3.2. Структура симплектического пространства .....	34
1.3.3. Приведение кососимметрической формы к каноническому виду	

в координатах (метод Лагранжа) .....	37
<b>Глава 2.</b> Векторные пространства со скалярными произведениями .	38
2.1. Евклидовы пространства .....	38
2.1.1. Основные определения .....	38
2.1.2. Основные метрические соотношения .....	39
2.1.3. Ортонормированный базис .....	40
2.1.4. Алгоритм ортогонализации Грама – Шмидта .....	42
2.1.5. Классификация евклидовых векторных пространств .....	43
2.1.6. Двойственное евклидово пространство .....	44
2.1.7. Ортогональная группа .....	45
2.2. Симплектические преобразования симплектических пространств	47
2.2.1. Отступление: пфаффиан .....	47
2.2.2. Симплектическая группа .....	48
2.2.3. Спектр симплектического оператора .....	49
2.3. Эрмитовы векторные пространства .....	50
2.3.1. Полуторалинейные и эрмитовы формы .....	50
2.3.2. Эрмитово скалярное произведение .....	51
2.3.3. Эрмитово пространство: основные результаты .....	52
2.3.4. Ортогональность и ортонормированные базисы .....	54
2.3.5. Унитарная группа .....	57
2.4. Псевдоевклидовы пространства .....	59
2.4.1. Основные понятия .....	59
2.4.2. Классификация псевдоевклидовых пространств .....	60
2.4.3. Псевдоортогональная группа .....	61
<b>Глава 3.</b> Линейная алгебра в евклидовых и эрмитовых пространствах .....	62
3.1. Линейные операторы vs $\theta$ -линейные формы .....	62
3.1.1. Линейные операторы и $\theta$ -линейные формы. Сопряжение ....	62
3.1.2. Матрица линейного оператора, сопряженного данному .....	64
3.1.3. Эрмитовы и косоэрмитовы линейные операторы .....	65
3.1.4. Изометрии .....	67
3.1.5. Канонический вид самосопряженных операторов: инвариантность и ортогональные разложения .....	68
3.1.6. Приведение квадратичной формы к главным осям .....	71
3.1.7. Алгоритм приведения эрмитовой квадратичной формы к каноническому виду .....	72
3.1.8. Канонический вид пары квадратичных форм .....	72
3.1.9. Канонический вид изометрий .....	73
3.2. Специальные классы линейных операторов .....	75
3.2.1. Нормальные операторы .....	75

3.2.2. Перестановочные операторы .....	77
3.2.3. Положительно определенные операторы .....	78
3.2.4. Полярное разложение невырожденного линейного оператора	80
3.3. Комплексификация и о веществ ление .....	82
3.3.1. Оператор комплексной структуры на вещественном векторном пространстве .....	82
3.3.2. О веществ ление .....	84
3.3.3. Комплексификация .....	88
3.3.4. Комплексификация – о веществ ление – комплексификация ..	90
<b>Глава 4. Элементы линейной геометрии .....</b>	<b>93</b>
4.1. Аффинное пространство .....	93
4.1.1. Основные понятия .....	93
4.1.2. Аффинные отображения .....	94
4.1.3. Аффинные координаты .....	96
4.1.4. Линейные подмногообразия .....	97
4.1.5. Пересечение и параллельность в $\mathbb{A}^n$ .....	99
4.1.6. Аффинно-линейные функции и задание подпространств уравнениями .....	99
4.1.7. Аффинная независимость и аффинная оболочка .....	101
4.1.8. Взаимное расположение двух подпространств .....	102
4.1.9. Отрезок и простое отношение .....	103
4.1.10. Аффинные преобразования и аффинная группа .....	104
4.2. Евклидово точечное пространство .....	106
4.2.1. Отступление: метрическое пространство .....	106
4.2.2. Евклидово точечное пространство: основные понятия .....	106
4.2.3. Перпендикуляр к подпространству .....	108
4.2.4. Расстояние между подпространствами .....	109
4.2.5. Матрица Грама системы векторов. Определитель Грама системы векторов .....	110
4.2.6. Объем $n$ -мерного параллелепипеда .....	112
4.2.7. Изометрии точечного евклидова пространства. Группа изометрий .....	114
4.2.8. Обзор классификации движений в малых размерностях ....	114
4.2.9. Аффинные преобразования евклидова пространства .....	115
4.3. Квадратичные функции и квадратики .....	116
4.3.1. Биаффинные и квадратичные функции .....	116
4.3.2. Центры квадратичной функции. Центральные квадратичные функции .....	118
4.3.3. Аффинная классификация квадратичных функций .....	119
4.3.4. Метрическая классификация квадратичных функций .....	121

4.3.5. Вещественные квадрики. Их аффинная и метрическая классификации .....	122
4.3.6. Цилиндры и конусы .....	125
4.3.7. Дополнение: матричная запись аффинных преобразований и классификация квадрик .....	127
4.4. Элементы геометрии в пространстве Минковского .....	129
4.4.1. Пространство Минковского .....	129
4.4.2. Преобразования Лоренца .....	130
<b>Литература</b> .....	134

# Введение

Данное пособие является продолжением работы «Линейная алгебра. Современная алгебра» (2012 г.) и охватывает большой блок теоретического материала по билинейным и квадратичным формам и их приложениям в линейной алгебре и линейных геометриях. Материал сгруппирован таким образом, чтобы проследить однотипные сюжетные ходы в развитии теорий *евклидовых, эрмитовых, симплектических и псевдоевклидовых векторных пространств*. Как и в пособии 2012 года, мы предпочитаем, где это возможно, смотреть на изучаемые объекты «с высоты птичьего полета», что позволяет уложить частности конкретных теорий в единую весьма стройную картину, и периодически «снижаться» для рассмотрения деталей.

Философия рассматриваемого материала заключается в следующем. Предметом нашего интереса являются в основном векторные пространства, каждое из которых снабжено фиксированной функцией двух векторных аргументов. Подразумевается, что эта функция наделена достаточно хорошими свойствами симметрии в некотором обобщенном смысле и фиксирована для данного пространства. *Векторное пространство с зафиксированной на нем функцией рассматривается как единый объект*. По-прежнему, как и в первой части, мы будем интересоваться морфизмами (т. е. линейными отображениями, сохраняющими функцию) и классификацией таких объектов, которые в математической литературе иногда называются *векторными пространствами с дополнительной структурой*. Морфизмы пространств с дополнительной структурой для каждого типа структур ведут себя при композициях совершенно привычным образом; математики в этом случае говорят, что пространства с дополнительной структурой для каждого типа структур образуют *категорию*.

Для развития теории вначале необходимо сконцентрироваться на исследовании классов «хороших» функций, поставляющих дополнительные структуры. Этому посвящена первая глава. Затем для каждого из таких классов будет изложена своя теория «пространства с дополни-

тельной структурой». После этого мы обратим свое внимание на линейные операторы, действующие в таких пространствах. Наконец, будут рассмотрены геометрические пространства, основанные на построенных алгебраических теориях и соответствующих им симметриях, и получены многие результаты многомерной аналитической геометрии. Также мы коснемся некоторых приложений либо самих алгебро-геометрических теорий, либо их очевидных бесконечномерных обобщений. Выбор освещаемой области приложений – а это теоретическая физика – продиктован в первую очередь вкусовыми пристрастиями автора настоящего пособия. Эти приложения, если не вдаваться в детали их реализации, принципиально несложны, весьма наглядны и оттого становятся еще более впечатляющими. Учитывая снижение роли естественнонаучных знаний в общественном сознании и подмену научных знаний ненаучными умонастроениями, автор считает небольшой «крен» в область физики весьма полезным.

Еще одной существенной чертой излагаемого материала является большая доля геометрии. Геометрические понятия и результаты являются основным полигоном использования алгебраической теории. Вместе с тем по мере развития математики границы между различными отраслями математики и особенно между алгеброй и геометрией становятся все более и более условными: геометрия оперирует образами, все более далекими от наглядности, а алгебраические методы становятся все более универсальными и работают во все более широком классе ситуаций.

В связи с линейной алгеброй мы будем комбинировать два основных направления: общеалгебраические методы конструирования доказательств и происхождение вычислительных алгоритмов. Где можно, будем избегать частных приемов в пользу стандартных универсальных рассуждений. Акцент делается на общую схему («механизм») доказательства. Таких общих схем очень немного, и каждая такая схема применяется в различных формально однотипных ситуациях.

Общеалгебраические методы в нашей ситуации – это коммутативные диаграммы, фильтрации и кофильтрации. В целом востребованность диаграмм существенно меньше, чем в первой части. Зато велика роль ортогональных прямых разложений в самом широком смысле (являющихся одновременно фильтрациями и кофильтрациями), а также повсюду видна определяющая роль симметрии. Отступления отмечены звездочкой \*. При первом чтении отступления можно пропустить.

Вычислительные аспекты – это базисы, разнообразные приложения



матричной алгебры, алгоритмы преобразования форм. Приятным бонусом студенту является психологическая естественность и простота их применения.

Подразумевается наличие у студентов общеалгебраической подготовки в объеме первых полутора курсов университета. Считается, что читатель знаком с понятиями абелевой/неабелевой группы, подгруппы и факторгруппы, коммутативного/некоммутативного кольца, имеет навыки матричных вычислений, понимает, что такое векторное пространство и линейное отображение векторных пространств, а также свободно оперирует с начальными понятиями теории линейных операторов. Автор по-прежнему стремился сделать так, чтобы чтение пособия не было трудным, но при этом стараясь не жертвовать содержательной стороной в пользу легкости восприятия. Подразумевается, что работающий с пособием студент имеет мотивацию к самостоятельной работе и профессиональному саморазвитию.

Наконец, несколько слов об упражнениях. Среди них нет задач вычислительного характера, направленных на оттачивание владения алгоритмами. Таких (очень важных!) задач много в классических сборниках, и поэтому нет особого смысла копировать их типы. Упражнения этого пособия – «теоретического» характера; они содержат фрагменты рассуждений, подлежащие самостоятельной проработке, либо рассуждения, которые нужно сконструировать, используя ранее показанные приемы. Часть задач носит иллюстративный характер: они демонстрируют, «что и как работает» в конструкциях и доказательствах и что происходит, если отменить или ослабить то или иное ограничение. Упражнения возникают по ходу повествования и «вморожены» в логику текста, поэтому решать их необходимо. Они составлены с целью дать студенту понимание различных структурных аспектов изучаемой теории на таком уровне, чтобы свести к минимуму нагрузку на память (меньше шансов возникновения ситуации «не понимаешь – выучи»). Как правило, этого можно достичь вскрытием большого числа причинно-следственных связей. Задачи в основном нетрудны, и часто их решение занимает одну строчку. Однако они призваны понемногу учить творческому делу – получению и доказательству новых математических результатов и прививать привычку самостоятельного поиска решений.

Пособие ориентировано в первую очередь на студентов второго года обучения на математическом факультете, осваивающих курсы линейной алгебры. Вместе с работой «Линейная алгебра. Современная алгебра»

(2012 г.) оно предназначено для обслуживания потребностей именно этих курсов, однако не без отступлений от обязательной программы, обозначающих некоторые возможные «точки роста» и призванных хоть немного показать студенту богатство, мощь и гармонию предмета. Кроме того, пособие отчасти может быть полезно студентам последующих годов обучения, слушающих различные алгебраические курсы, в частности «Фундаментальные алгебраические структуры», а также для систематизации знаний при подготовке к государственной аттестации.

Пособие разбито на главы, главы – на разделы, разделы – на пункты. Номер пункта  $m.n.k$  означает пункт  $k$  раздела  $n$  в главе  $m$ . Для удобства ориентирования в тексте принята следующая нумерация формул (а также определений, лемм, теорем и т. п.): номер  $m.n.k$  означает формулу (соответственно, определение, лемму, теорему и т. п.) с номером  $k$  раздела  $n$  главы  $m$ . Нумерация формул (определений, лемм, теорем и т. п.) *не отслеживает* номера пунктов. Все теоремы, предложения, леммы снабжены названиями.

# Глава 1

## Билинейные формы

В этой главе мы дадим определения базовых понятий и разовьем основные средства исследования, с ними связанные.

Прежде всего обсудим конструкцию исходных объектов: а именно выясним, почему имеет смысл рассматривать функции вполне определенного вида. Особенность математики как области интеллектуального творчества состоит в том, что, с одной стороны, можно конструировать и изучать объекты с широчайшим разнообразием свойств. В этом плане простор для фантазии ограничивается лишь требованиями логики. С другой стороны, построенная теория будет лишь тогда иметь ценность и развиваться далее, когда она будет иметь актуальные или потенциальные приложения внутри самой математики и/или в других науках.

Ареной наших действий является конечномерное векторное пространство  $V$  над полем  $k$ , имеющее размерность  $\dim_k V = n$ . Если не оговорено противное (в некоторых случаях будут вводиться ограничения), характеристика поля  $k$  подразумевается произвольной.

### 1.1. Начальные понятия

#### 1.1.1. Билинейное отображение. Билинейная форма

Пусть  $V$  – абелева группа, записываемая аддитивно, а  $f : V \rightarrow k$  –  $k$ -значная функция.

**Определение 1.1.1.** Функция  $f : V \rightarrow k$  называется *аддитивной*, если для любых элементов  $v_1, v_2 \in V$  выполнено  $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ .

Согласно определению векторного пространства, аддитивная абелева группа  $V$  несет действие поля скаляров  $k$ , обычно записываемое как «умножение вектора на скаляр»:  $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ .

**Определение 1.1.2.** Будем говорить, что функция  $f : V \rightarrow k$  векторного аргумента  $k$ -однородна степени  $d$ , если для любых  $\lambda \in k$  и  $v \in V$  выполнено равенство  $f(\lambda v) = \lambda^d f(v)$ .

*Замечание 1.1.3.* Функции, однородные степени 1, часто называют просто *однородными*.

*Замечание 1.1.4.*  $k$ -однородную функцию степени  $d$  называют *формой степени  $d$* .

Пусть  $V$  – векторное пространство над полем  $k$ .

**Определение 1.1.5.** Функция  $f : V \rightarrow k$  называется *линейной*, если она аддитивна и  $k$ -однородна, то есть для любых векторов  $v_1, v_2 \in V$  и любых скаляров  $\lambda_1, \lambda_2 \in k$  выполнено равенство

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2).$$

Также можно рассматривать функции нескольких векторных аргументов. Областью значений функции при этом необязательно должно быть поле скаляров  $k$ . Поскольку нас интересуют линейные операции (т. е. бинарная операция в абелевой группе и «умножение на скаляры»), то мы будем рассматривать отображения, областью значений которых является векторное пространство  $W$  над тем же полем  $k$ .

**Определение 1.1.6.**  $k$ -полилинейным отображением называется функция

$$f : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{m \text{ раз}} \rightarrow W$$

такая, что для всех  $i = 1, \dots, m$ , для любых  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \in V$ ,  $v_i, v'_i \in V$  и для любых  $\lambda, \lambda' \in k$  выполнено равенство

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i + \lambda' v'_i, v_{i+1}, \dots, v_m) = \\ = \lambda f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_m) + \lambda' f(v_1, \dots, v_{i-1}, v'_i, v_{i+1}, \dots, v_m). \end{aligned}$$

*Замечание 1.1.7.* Требование, сформулированное в определении полилинейного отображения, словесно формулируют так: *отображение должно быть линейно по каждому из своих аргументов*.

*Замечание 1.1.8.* При  $m = 2$  получаем *билинейное отображение*. Если к тому же  $W = k$ , то возникает один из основных объектов нашего интереса – билинейная форма.

Итак,

**Определение 1.1.9.** Билинейная форма на  $k$ -векторном пространстве  $V$  – это функция  $f : V \times V \rightarrow k$ , линейная по каждому из своих аргументов.

Нетрудно проверить, что множество всех билинейных форм на векторном пространстве  $V$  над полем  $k$  составляет векторное пространство над тем же полем относительно «поточечного» сложения  $(f_1 + f_2)(v, v') = f_1(v, v') + f_2(v, v')$  и «поточечного» умножения на скаляр  $(\lambda f)(v, v') = \lambda f(v, v')$ . Будем обозначать это векторное пространство символом  $Bilin_k(V)$ .

### 1.1.2. Симметрические и кососимметрические билинейные формы

Рассмотрим прямое произведение  $V \times V$  и отображение

$$\tau : V \times V \rightarrow V \times V,$$

переставляющее сомножители, то есть такое, что для любой упорядоченной пары  $(v_1, v_2) \in V \times V$   $\tau(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$ . Понятно, что  $\tau \circ \tau$  – тождественное отображение.

*Замечание 1.1.10.* Преобразование, обратное к самому себе, называется *инволюцией*. Всякая инволюция  $\tau$ , очевидно, порождает циклическую группу порядка 2:  $C_2 = \langle \tau \rangle = \{e, \tau | \tau^2 = e\}$ .

**Определение 1.1.11.** Билинейная форма  $f \in Bilin_k(V)$  называется *симметрической*, если она инвариантна относительно перестановки сомножителей, т. е. для любых векторов  $v_1, v_2 \in V$  выполнено равенство  $f(v_2, v_1) = f(v_1, v_2)$ .

**Упражнение 1.1.12.** Является ли множество  $Bilin_k^+(V)$  всех симметрических билинейных форм, определенных на данном векторном пространстве  $V$ , подпространством в  $Bilin_k(V)$ ? Докажите вашу гипотезу.

Пусть теперь *характеристика поля  $k$  отлична от 2*.

**Определение 1.1.13.** Билинейная форма  $f \in Bilin_k(V)$  называется *кососимметрической*, если она меняет знак при перестановке сомножителей, т. е. для любых векторов  $v_1, v_2 \in V$  выполнено равенство  $f(v_2, v_1) = -f(v_1, v_2)$ .

**Упражнение 1.1.14.** Является ли множество  $Bilin_k^-(V)$  всех кососимметрических билинейных форм, определенных на данном векторном пространстве  $V$ , подпространством в  $Bilin_k(V)$ ? Докажите вашу гипотезу.

Введем вспомогательное обозначение:  $f^\tau(v_1, v_2) := f(v_2, v_1)$ . Оно позволит избегать явного написания аргументов там, где оно не является необходимым.

**Теорема 1.1.15.** (*Разложение пространства билинейных форм*) *Над полем  $k$  характеристики, отличной от 2, пространство  $Bilin_k(V)$  обладает прямым разложением*

$$Bilin_k(V) = Bilin_k^+(V) \oplus Bilin_k^-(V).$$

*Доказательство.* Пусть  $f \in Bilin_k(V)$  – билинейная форма на  $k$ -векторном пространстве  $V$ . Поскольку характеристика поля коэффициентов  $k$  предполагается отличной от 2, то имеет смысл запись

$$f = \frac{1}{2}(f + f^\tau) + \frac{1}{2}(f - f^\tau).$$

Первое слагаемое представляет собой симметрическую билинейную форму, второе – кососимметрическую. Таким образом, произвольная билинейная форма  $f$  может быть представлена в виде суммы симметрической и кососимметрической билинейных форм, и имеет место разложение векторного пространства  $Bilin_k(V)$  в сумму подпространств

$$Bilin_k(V) = Bilin_k^+(V) + Bilin_k^-(V).$$

Убедимся в том, что сумма прямая. Пусть  $f \in Bilin_k^+(V) \cap Bilin_k^-(V)$ ; тогда  $f^\tau = f = -f$ , откуда  $2f = 0$ . Поскольку характеристика основного поля отлична от 2, то заключаем, что  $f = 0$ .  $\square$

Таким образом, каждая билинейная форма над полем характеристики, отличной от 2, может быть представлена единственным образом в виде суммы симметрической и кососимметрической билинейных форм. Процедура перехода от данной билинейной формы к соответствующей симметрической (соответственно, кососимметрической) билинейной форме называется *симметризацией*, или *симметрированием* (соответственно, *антисимметризацией*, или *альтернированием*) билинейной формы.

### 1.1.3. Билинейные формы в координатах

Выберем и зафиксируем в векторном пространстве  $V$  какой-нибудь базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$ ; пусть векторы  $v_1$  и  $v_2$  имеют в нем координатные представления  $v_1 = \sum_i e_i x_i$  и  $v_2 = \sum_j e_j y_j$  соответственно. Пользуясь

линейностью билинейной формы по обоим аргументам, преобразуем выражение для ее значения на упорядоченной паре векторов  $v_1, v_2$ :

$$f(v_1, v_2) = f\left(\sum_i e_i x_i, \sum_j e_j y_j\right) = \sum_{i,j} x_i f(e_i, e_j) y_j.$$

Таким образом, сама билинейная форма  $f$  в фиксированном базисе определяется набором своих значений на базисных векторах  $f_{ij} = f(e_i, e_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , а вычисление ее значения на паре произвольно выбранных векторов  $v_1 = \sum_i e_i x_i$  и  $v_2 = \sum_j e_j y_j$  может быть записано в матричной форме

$$f\left(\sum_i e_i x_i, \sum_j e_j y_j\right) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

или, сокращенно,  $f(\sum_i e_i x_i, \sum_j e_j y_j) = X^T F Y$ , где координаты вектора записываются в виде матрицы-столбца, а  $F = (f_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  — матрица билинейной формы  $f$  в выбранном базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

Таким образом, выбор базиса в векторном пространстве  $V$  осуществляет отображение  $\epsilon : \text{Bilin}_k(V) \rightarrow \text{Mat}_k(n)$ , ставящее в соответствие каждой билинейной форме  $f$  ее матрицу  $F$  в фиксированном базисе.

**Упражнение 1.1.16.** Является ли это отображение инъективным? Сюръективным? Линейным?

**Упражнение 1.1.17.** Вычислите размерность векторного пространства  $\text{Bilin}_k(V)$ .

#### 1.1.4. Преобразование матрицы билинейной формы при смене базиса.

##### Конгруэнтные матрицы

Отображение  $\epsilon : \text{Bilin}_k(V) \rightarrow \text{Mat}_k(n) : f \mapsto F$ , ставящее в соответствие каждой билинейной форме  $f$  ее матрицу  $F$  в выбранном базисе, зависит от выбора базиса. В этом пункте мы получим правило преобразования матрицы билинейной формы при смене базиса.

Пусть векторы базиса  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  связаны с векторами базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$  соотношениями  $e'_r = \sum_i e_i h_{ir}$ ,  $r = 1, \dots, n$ . Вычислим элементы матрицы  $F'$  билинейной формы  $f$  в базисе  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  (обратите внимание на порядок следования индексов!):

$$f'_{rs} = f(e'_r, e'_s) = f\left(\sum_i e_i h_{ir}, \sum_j e_j h_{js}\right) = \sum_i \sum_j h_{ir} f(e_i, e_j) h_{js}.$$

Введем очевидное обозначение  $h_{ri}^T := h_{ir}$ ; если  $h_{ir}$  – элементы матрицы перехода  $H = (h_{ir})$  от базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$  к базису  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ , то  $h_{ri}^T$  – элементы матрицы  $H^T$ , полученной из  $H$  транспонированием. Тогда

$$f'_{rs} = f(e'_r, e'_s) = \sum_i \sum_j h_{ri}^T f(e_i, e_j) h_{js} = \sum_{i,j} h_{ri}^T f_{ij} h_{js}$$

или, в матричной форме,  $F' = H^T F H$ . При этом матрицы  $F$  и  $F'$  называют *конгруэнтными*.

*Замечание 1.1.18.* Поскольку матрица перехода  $H$  невырожденная, то конгруэнтные матрицы  $F$  и  $F'$  имеют равные ранги. Поэтому имеет смысл определить ранг билинейной формы  $f$  следующим образом.

**Определение 1.1.19.** Рангом билинейной формы  $f$  называется ранг ее матрицы  $F$  в любом базисе:  $\text{rank } f := \text{rank } F$ .

*Замечание 1.1.20.* Преобразования координат, матриц и т. п. при смене базисов устроены таким образом, что сами выражаемые ими объекты (векторы, функции, отображения) не меняются при этих преобразованиях. В частности, столбцы координат векторов преобразуются по известному правилу  $X' = H^{-1}X$ ,  $Y' = H^{-1}Y$ ; тогда значение билинейной формы  $f$  на упорядоченной паре векторов  $v_1 = \sum_i e_i x_i = \sum_r e'_r x'_r$ ,  $v_2 = \sum_j e_j y_j = \sum_s e'_s y'_s$  может быть вычислено двумя различными способами

$$f(v_1, v_2) = X^T F Y = X^T (H^{-1})^T H^T F H H^{-1} Y = X'^T F' Y'$$

и не зависит от выбора базиса.

**Определение 1.1.21.** Билинейные формы  $f$  и  $f'$  на одном и том же векторном пространстве  $V$  называются *эквивалентными*, если существует автоморфизм  $\mathcal{H} \in \text{Aut}_k(V)$  такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{f} & k \\ (\mathcal{H}, \mathcal{H}) \downarrow & \nearrow f' & \\ V \times V & & \end{array}$$

Коммутативность диаграммы означает, что для любой упорядоченной пары векторов  $(v_1, v_2)$  выполнено равенство  $f(v_1, v_2) = f'(\mathcal{H}v_1, \mathcal{H}v_2)$  (невырожденный линейный оператор  $\mathcal{H}$  отождествляет билинейные формы  $f$  и  $f'$ ).

Иными словами, формы  $f$  и  $f'$  эквивалентны, если в любом базисе найдется невырожденная матрица  $H$  такая, что для матриц  $F$  и  $F'$ , задающих формы  $f$  и  $f'$  в том же базисе, выполнено соотношение  $F = H^T F' H$ .



**1.1.5. Матрицы симметрических и кососимметрических форм.**  
**Размерности подпространств симметрических**  
**и кососимметрических форм**

Выясним связь свойств симметрии билинейной формы со свойствами симметрии ее матрицы в фиксированном базисе. Пусть  $F$  – матрица билинейной формы  $f$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Свойства формы  $f$  быть симметрической (кососимметрической) могут быть одновременно выражены формулой  $f^T = \pm f$ . При этом условимся считать, что верхний знак относится к симметрическому случаю, а нижний – к кососимметрическому.

Итак, для любой упорядоченной пары векторов  $v_1, v_2$

$$\begin{aligned} f^T(v_1, v_2) &= f(v_2, v_1) \\ &= Y^T F X = (Y^T F X)^T = X^T F^T Y = \pm X^T F Y = \pm f(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Выбирая в качестве  $v_1, v_2$  всевозможные пары базисных векторов  $e_i, e_j$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , приходим к соотношениям

$$f^T(e_i, e_j) = f(e_j, e_i) = f_{ji} = \pm f_{ij} = \pm f(e_i, e_j),$$

то есть, в матричной записи,  $F^T = \pm F$ .

Итак, независимо от выбора базиса, симметрические билинейные формы задаются симметрическими матрицами, кососимметрические билинейные формы – кососимметрическими матрицами.

При этом любую матрицу  $F$  над полем, характеристика которого отлична от 2, можно представить в виде суммы симметрической  $F^+$  и кососимметрической  $F^-$  матриц, полагая

$$F = F^+ + F^-, \quad F^+ := \frac{1}{2}(F + F^T), \quad F^- := \frac{1}{2}(F - F^T).$$

**Упражнение 1.1.22.** Используя представимость симметрических билинейных форм симметрическими матрицами, а кососимметрических билинейных форм – кососимметрическими матрицами, вычислите размерности подпространств  $Bilin_k^+(V)$  и  $Bilin_k^-(V)$ . Убедитесь в том, что сумма вычисленных размерностей составляет  $n^2$ .

**1.1.6. Левый и правый радикалы билинейной формы.**  
**Ранг билинейной формы**

**Определение 1.1.23.** *Левым радикалом*, или *левым ядром*, билинейной формы  $f$  называется подмножество

$$L_f = \{x \in V \mid \forall v \in V f(x, v) = 0\}.$$

Аналогично, *правым радикалом*, или *правым ядром*, билинейной формы  $f$  называется подмножество

$$R_f = \{y \in V \mid \forall v \in V f(v, y) = 0\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что левое и правое ядра билинейной формы суть подпространства в  $V$ . В силу линейности формы  $f$  по каждому аргументу для вычисления левого и правого ядер достаточно выбрать какой-нибудь базис  $e_1, \dots, e_n$  и решить системы однородных линейных уравнений

$$f(x, e_i) = 0, i = 1, \dots, n, \text{ для левого ядра и}$$

$$f(e_i, y) = 0, j = 1, \dots, n, \text{ для правого ядра.}$$

В матричной форме эти системы имеют вид  $X^T F = 0$  и  $F Y = 0$  соответственно. Применив теорему о размерности пространства решений системы однородных линейных уравнений, получим следующие соотношения:  $\dim L_f = n - \text{rank } F = n - \text{rank } f = \dim R_f$ .

*Замечание 1.1.24.* Несмотря на равенство размерностей, сами подпространства  $L_f$  и  $R_f$  для одной и той же билинейной формы не обязаны совпадать. Однако такое совпадение имеет место, если форма  $f$  является симметрической или кососимметрической (докажите!).

### 1.1.7. Замечания о полилинейных формах валентности выше 2

Некоторые задачи математики и ее приложений побуждают рассматривать полилинейные отображения с большим, чем два, числом аргументов: трилинейные  $V \times V \times V \rightarrow W$ , quadriлинейные  $V \times V \times V \times V \rightarrow W$ , ...,  $m$ -линейные  $\underbrace{V \times \dots \times V}_{m \text{ раз}} \rightarrow W$ . Примером трилинейного отображения может служить тройное (смешанное) произведение векторов трехмерного пространства евклидовой геометрии, примером  $n$ -линейного — определитель матрицы размера  $n$ , если ее строки (столбцы) интерпретировать как векторы. Оба примера поставляют кососимметрические полилинейные отображения в поле коэффициентов. Однако, если мы желаем исследовать свойства симметрии  $m$ -линейного отображения

$$g : \underbrace{V \times \dots \times V}_{m \text{ раз}} \rightarrow W,$$

нам необходимо рассмотреть действие группы перестановок  $m$  элементов  $S_m$  на произведении  $\underbrace{V \times \dots \times V}_{m \text{ раз}}$ . Будем считать, что характеристика

основного поля не делит никакое из чисел  $1, 2, \dots, m$ . Пусть

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(m) \end{pmatrix} \in S_m$$

– перестановка; тогда ее действие на упорядоченном наборе векторов  $(v_1, v_2, \dots, v_m) \in V \times V \times \dots \times V$  имеет вид

$$(v_1, v_2, \dots, v_m) \mapsto (v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(m)}).$$

По-прежнему будем использовать обозначение

$$g^\sigma(v_1, v_2, \dots, v_m) := g(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(m)}).$$

Отображение  $g$  называется *симметрическим*, если  $g^\sigma = g$ . Отображение  $g$  называется *кососимметрическим*, если  $g^\sigma = \text{sgn}(\sigma)g$ , где  $\text{sgn}(\sigma)$  – знак перестановки  $\sigma$ . Операции симметризации и антисимметризации определяются очевидным образом:

$$g^+ := \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} g^\sigma, \quad g^- := \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) g^\sigma.$$

Отличительной особенностью полилинейных отображений валентности более 2 является тот факт, что существуют отображения, не представимые в виде суммы симметрического и кососимметрического.

**Пример 1.1.25.** Рассмотрим отображение  $g : k^3 \times k^3 \times k^3 \rightarrow k$ , определенное по следующему правилу. Упорядоченной тройке векторов

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

поставим в соответствие произведение  $x_1 y_2 z_3$  (проверьте, что это трилинейная форма!). Читателю предлагается выполнить симметризацию и кососимметризацию этой формы и убедиться в том, что сумма ее симметрической  $g^+$  и кососимметрической  $g^-$  частей отлична от  $g$  и определяется выражением  $(g^+ + g^-)(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{3}(x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2)$ .

## 1.2. Квадратичные формы

### 1.2.1. Основные понятия

**Определение 1.2.1.** *Квадратичной формой* на векторном пространстве  $V$  называется функция  $q : V \rightarrow k$  такая, что

1. Функция  $q$  четная, т. е. для любого  $v \in V$   $q(-v) = q(v)$ ;

## 2. Функция

$$\begin{aligned} f_q : V \times V &\rightarrow k, \\ (v_1, v_2) &\mapsto \frac{1}{2}(q(v_1 + v_2) - q(v_1) - q(v_2)), \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

– билинейная форма.

При этом форма  $f$ , построенная по данной квадратичной форме  $q$ , называется *билинейной формой, полярной к квадратичной форме  $q$* . Процедура перехода от квадратичной формы к полярной билинейной форме называется *поляризацией*.

*Замечание 1.2.2.* Понятно, что при поляризации квадратичной формы всегда получается симметрическая билинейная форма.

Обратно, пусть  $f$  – симметрическая билинейная форма на векторном пространстве  $V$ . Рассмотрим функцию  $q : V \rightarrow k$ , определяемую для каждого  $v \in V$  соотношением  $q(v) = f(v, v)$ . Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что  $q(-v) = f(-v, -v) = q(v)$  и что функция  $f_q$ , построенная из  $q$  по правилу (1.2.1), равна

$$\begin{aligned} f_q(v_1, v_2) &= \frac{1}{2}(q(v_1 + v_2) - q(v_1) - q(v_2)) \\ &= \frac{1}{2}(f(v_1 + v_2, v_1 + v_2) - f(v_1, v_1) - f(v_2, v_2)) \\ &= \frac{1}{2}(f(v_1, v_2) + f(v_2, v_1)) = f(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Последний знак равенства верен в силу симметрии билинейной формы  $f$ . Итак, *любая симметрическая билинейная форма определяет квадратичную форму, при поляризации которой получается исходная билинейная форма*.

Теперь пусть  $q$  – квадратичная форма и  $f_q$  – полярная к ней билинейная форма. Рассмотрим функцию  $q_f : V \rightarrow k$ , определяемую соотношением  $q_f(v) := f_q(v, v)$ . Покажем, что  $q_f = q$ . Четность следует непосредственно из билинейности функции  $f_q$ . Выполним подстановку в выражение (1.2.1) пары  $(v, -v)$ :

$$f_q(v, -v) = -f_q(v, v) = -q_f(v) = \frac{1}{2}(q(0) - 2q(v)).$$

Поскольку  $f_q$  – билинейная форма, то  $f_q(0, 0) = 0 = q_f(0) = \frac{1}{2}q(0)$ , откуда  $q(0) = 0$ . Таким образом,  $q_f = q$ . Итак, *любая квадратичная форма однозначно восстанавливается по своей полярной билинейной форме*.

Таким образом, имеет место биективное соответствие между симметрическими билинейными формами на векторном пространстве над полем характеристики, отличной от 2, и квадратичными формами на том же векторном пространстве.

Поэтому любые структурные результаты, полученные для квадратичных форм, могут быть интерпретированы в терминах симметрических билинейных форм, и наоборот.

### 1.2.2. Квадратичная форма в координатах и ее матрица

Выбрав в пространстве  $V$  базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , получим координатное представление вектора  $v = \sum_i e_i x_i$ . Выразив квадратичную форму  $q$  через полярную к ней симметрическую билинейную форму

$$f_q(v, w) = \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w)),$$

придем к выражению квадратичной формы  $q$  в координатах:

$$q(v) = f(v, v) = f\left(\sum_i e_i x_i, \sum_j e_j x_j\right) = \sum_{i,j} x_i f(e_i, e_j) x_j.$$

В матричной записи имеем  $q(v) = X^T F X$ , где  $F$  – матрица полярной симметрической билинейной формы для квадратичной формы  $q$  в том же базисе. Таким образом,

1. Квадратичная форма в координатах представляет собой однородную функцию степени 2;
2. Квадратичная форма в координатах в данном базисе задается той же матрицей, что и ее полярная симметрическая билинейная форма в том же базисе.

*Замечание 1.2.3.* В частности, для вычисления элементов  $f_{ij}$  матрицы квадратичной формы  $q$  в любом предложенном базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  можно воспользоваться формулой  $f_{ij} = \frac{1}{2}(q(e_i + e_j) - q(e_i) - q(e_j))$ .

*Замечание 1.2.4.* Для решения задач полезно отследить поведение коэффициентов координатного представления симметрической билинейной формы и соответствующей квадратичной формы при формировании одного объекта из другого. Дано координатное представление симметрической билинейной формы в некотором базисе:

$$f(x, y) = f_{11}x_1y_1 + f_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + \dots + f_{ij}(x_iy_j + x_jy_i) + \dots + f_{nn}x_ny_n. \quad (1.2.2)$$

По этому представлению легко выписать матрицу рассматриваемой билинейной формы в том же базисе:

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{12} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1n} & f_{2n} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.2.3)$$

Теперь выпишем координатное представление квадратичной формы, соответствующей билинейной форме (1.2.2):

$$q_f(x) = f(x, x) = f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2 + \cdots + 2f_{ij}x_ix_j + \cdots + f_{nn}x_n^2. \quad (1.2.4)$$

Читателю следует обратить внимание на то обстоятельство, что *все внедиагональные коэффициенты билинейной формы (1.2.2) вошли в квадратичную форму (1.2.4) с удвоением*. При этом матрицей квадратичной формы (1.2.4) является матрица ее полярной билинейной формы, т. е. (1.2.3).

### 1.2.3. Канонический (диагональный) вид квадратичной формы

**Определение 1.2.5.** Если в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  квадратичная форма  $q$  задана выражением  $q(x) = \sum_i f_{ii}x_i^2$ , то говорят, что в этом базисе *квадратичная форма  $q$  имеет канонический, или диагональный, вид*. Базис, в котором данная квадратичная форма имеет канонический вид, называется *каноническим*.

*Замечание 1.2.6.* На языке матриц данное определение примет вид: *квадратичная форма имеет канонический, или диагональный, вид* в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , если ее матрица в этом базисе диагональна. При этом сам базис называется *каноническим*.

*Замечание 1.2.7.* В силу биективного соответствия между квадратичными и симметрическими билинейными формами и равенства матриц для квадратичной формы и ее полярной билинейной формы, аналогичные понятия имеют место для симметрической билинейной формы.

*Замечание 1.2.8.* Из дальнейшего станет понятно, что для данной квадратичной формы  $q$  канонический базис и канонический вид самой формы определены неоднозначно. Одним из инвариантов квадратичной формы является ее ранг. Он равен количеству ненулевых диагональных элементов в *любом* каноническом виде этой квадратичной формы.

**Определение 1.2.9.** *Ядром  $\ker q$  квадратичной формы  $q$  называется левое ядро ее полярной билинейной формы  $f_q$ .*

*Замечание 1.2.10.* Поскольку  $f_q$  – симметрическая билинейная форма, то ее левое и правое ядра совпадают.

Рассмотрев матричное уравнение  $FX = 0$  ядра квадратичной формы  $q$ , имеем соотношение для ее ранга:  $\text{rank } q = \text{rank } F = n - \dim \ker q$ .

**Теорема 1.2.11.** *(Приведение квадратичной формы к каноническому виду) Всякая квадратичная форма  $q$  может быть приведена к каноническому виду.*

Теорема имеет следующую матричную интерпретацию:  
*для всякой симметрической матрицы найдется конгруэнтная ей диагональная матрица.*

*Доказательство.* Индукция по  $n$ . При  $n = 1$  либо при  $q = 0$  и произвольном  $n$  любой базис является каноническим. Поэтому будем считать, что  $q \neq 0$ . В качестве индуктивного предположения примем, что на пространствах размерности  $n - 1$  любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду. Пусть  $e_1$  – такой вектор, что  $q(e_1) \neq 0$ . Тогда рассмотрим полярную к  $q$  билинейную форму  $f_q$  и линейное уравнение  $f_q(x, e_1) = 0$ . Подпространство  $L$  его решений имеет размерность, равную  $n - 1$ , и, следовательно, для ограничения  $q|_L$  квадратичной формы  $q$  на это подпространство существует канонический базис  $e_2, \dots, e_n$ . Таким образом,  $f_q(e_i, e_j) = 0$  при  $i \neq j$  и  $2 \leq i, j \leq n$ .

Утверждается, что  $e_1, e_2, \dots, e_n$  – канонический базис для квадратичной формы  $q$ . По построению подпространства  $L$  имеем  $f_q(e_1, e_i) = f_q(e_i, e_1) = 0$  для всех  $1 < i \leq n$ . Остается убедиться в том, что векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейно независимы. Предположим противное; пусть  $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$ . Поскольку векторы  $e_2, \dots, e_n$  линейно независимы, предположим, что  $\alpha_1 \neq 0$ . Тогда вектор  $e_1$  имеет линейное представление  $e_1 = \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$ . Вычислим с его помощью значение  $q(e_1) \neq 0$ :  $q(e_1) = f_q(e_1, e_1) = f_q(\beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n, e_1) = 0$ . Полученное противоречие доказывает линейную независимость векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и завершает доказательство теоремы.  $\square$

#### 1.2.4. Замечания об ортогональности.

##### Первое понятие об ортогональных разложениях

В теореме 1.2.11 и в ее доказательстве впервые в этом курсе в игру вступает один из основных инструментов линейной алгебры – ортогональное разложение. Наряду с фильтрациями, кофильтрациями и прямыми разложениями векторных пространств без дополнительной струк-

туры, ортогональное разложение является наиболее востребованным инструментом построения индуктивных рассуждений в векторных пространствах, наделенных билинейными формами.

**Определение 1.2.12.** Пусть  $V$  –  $k$ -векторное пространство, наделенное симметрической или кососимметрической билинейной формой  $f$ . Векторы  $v, v' \in V$  называются  *$f$ -ортогональными* (обозначение:  $v \perp v'$ ), если  $f(v, v') = 0$ . Если форма  $f$  кососимметрическая, то часто говорят о *косоортогональности*.

*Замечание 1.2.13.* Отношение ортогональности в том виде, как оно определено выше, симметрично. Однако, если билинейная форма  $f$  не является ни симметрической, ни кососимметрической, можно определить аналогичное отношение, но оно может не обладать свойством симметрии: если  $f(v, v') = 0$ , то вектор  $v$  называется  *$f$ -левоортогональным к вектору  $v'$* , а вектор  $v'$  –  *$f$ -правоортогональным к вектору  $v$* . Все отношения ортогональности, встречающиеся в этом курсе, будут симметричными.

Пусть  $W \subset V$  – подпространство  $k$ -пространства  $V$ ,  $f$  – симметрическая (кососимметрическая) билинейная форма, определенная на  $V$ .

**Определение 1.2.14.**  *$f$ -ортогональным дополнением подпространства  $W$*  называется подмножество

$$W^\perp = \{v \in V \mid \forall w \in W \quad f(v, w) = 0\}.$$

Поскольку  $f$  – билинейная форма, то  $W^\perp$  является подпространством пространства  $V$  (убедитесь в этом!). Если  $V = W + W^\perp$ , то говорят, что имеет место  *$f$ -ортогональное разложение* пространства  $V$ . Если при этом сумма прямая (в частности, так случается, когда справедлива импликация  $f(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0$ ), то имеет место  *$f$ -ортогональное прямое разложение*  $V = W \oplus W^\perp$  пространства  $V$ .

**Упражнение 1.2.15.** Пусть подпространство  $W$  задано как линейная оболочка своего подмножества  $M$ :  $W = \langle M \rangle$ ,  $f$  – симметрическая либо кососимметрическая билинейная форма. Докажите, что  $f$ -ортогональное дополнение  $W^\perp$  определяется системой уравнений  $f(x, m) = 0, m \in M$ . В частности, это позволяет вычислять ортогональное дополнение подпространства, используя базис этого подпространства.

**Упражнение 1.2.16.** Пусть  $f$  – невырожденная билинейная форма. Докажите, что если  $f$  симметрическая, то  $V = W \oplus W^\perp$ . Почему аналогичное утверждение неверно для кососимметрической формы? Приве-



дите пример ситуации, когда сумма подпространства и его косоортogonalного дополнения не является прямой.

В доказательстве теоремы 1.2.11 подпространство  $L$  определено как ортогональное дополнение подпространства  $\langle e_1 \rangle$ . Поскольку вектор  $e_1$  выбран так, что  $q(e_1) = f_q(e_1, e_1) \neq 0$ , то полученное разложение оказалось прямым. Итерация процедуры, описанной в доказательстве, приводит к ортогональному прямому разложению из  $n$  (попарно ортогональных) слагаемых

$$V = \langle e_1 \rangle \overset{\perp}{\oplus} \langle e_2 \rangle \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} \langle e_n \rangle.$$

Иными словами, доказательство теоремы 1.2.11 приводит к существованию такого разложения для пространства с симметрической билинейной формой любого ранга.

**Теорема 1.2.17.** (*Рефлексивность ортогональных дополнений*) Пусть  $L$  – подпространство векторного пространства  $V$ , наделенного такой симметрической билинейной формой  $f$ , что  $f(v, v) = 0$  только при  $v = 0$ . Тогда  $L^{\perp\perp} = L$ .

*Доказательство.* Поскольку  $V = L \oplus L^\perp$ , то всякий вектор  $v \in V$  представим в виде  $v = l + l^\perp$ , где  $l \in L$ ,  $l^\perp \in L^\perp$ . Тогда справедливы равенства:

$$\begin{aligned} f(v, l) &= f(l, l) + f(l^\perp, l) = f(l, l), \\ f(v, l^\perp) &= f(l, l^\perp) + f(l^\perp, l^\perp) = f(l^\perp, l^\perp). \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Если при этом  $v \in L^{\perp\perp}$ , то  $f(v, l^\perp) = 0$ , откуда и из (1.2.5) заключаем, что  $f(l^\perp, l^\perp) = 0$ , и  $l^\perp = 0$ . Поэтому  $L^{\perp\perp} \subset L$ . Поскольку подпространство  $L$  является  $f$ -ортогональным к подпространству  $L^\perp$ , то  $l \subset L^{\perp\perp}$ . Таким образом,  $L^{\perp\perp} = L$ .  $\square$

### 1.2.5. Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду в координатах (метод Лагранжа)

Дано выражение квадратичной формы в координатах:

$$\begin{aligned} q(x) &= f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2 + 2f_{13}x_1x_3 + \cdots + 2f_{1n}x_1x_n \\ &\quad + f_{22}x_2^2 + 2f_{23}x_2x_3 + \cdots + 2f_{2n}x_2x_n \\ &\quad \dots \\ &\quad + f_{n-1,n-1}x_{n-1}^2 + 2f_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\ &\quad + f_{nn}x_n^2. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

0. Если в нем все диагональные коэффициенты  $f_{ii}$  равны 0, то необходимо выбрать отличный от нуля внедиагональный коэффициент; пусть это  $2f_{ij}$ , и выполнить замену переменных  $x_i = x'_i + x'_j$ ,  $x_j = x'_i - x'_j$ ,  $x'_l = x_l$  при  $l \neq i, l \neq j$ . Теперь опустим штрих в обозначении введенной системы переменных и будем считать после, быть может, смены порядка их нумерации, что  $f_{11} \neq 0$ .

1. Сгруппируем в отдельную («рабочую») строку все слагаемые, содержащие  $x_1$ . В (1.2.6) они собраны в первой строке.

2. Дополним сумму, находящуюся в рабочей строке, до полного квадрата, прибавляя недостающие слагаемые, а затем вычитая их так, чтобы полученное выражение было тождественно равно исходному:

$$\begin{aligned}
q(x) &= \mathbf{f}_{11}\mathbf{x}_1^2 + 2\mathbf{f}_{12}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 + 2\mathbf{f}_{13}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 + \cdots + 2\mathbf{f}_{1n}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_n \\
&\quad + f_{22}x_2^2 + 2f_{23}x_2x_3 + \cdots + 2f_{2n}x_2x_n \\
&\quad \quad \quad \dots \\
&\quad \quad \quad + f_{n-1,n-1}x_{n-1}^2 + 2f_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\
&\quad \quad \quad \quad \quad \quad + f_{nn}x_n^2 \\
&= \mathbf{f}_{11}(\mathbf{x}_1 + (\mathbf{f}_{12}/\mathbf{f}_{11})\mathbf{x}_2 + \cdots + (\mathbf{f}_{1n}/\mathbf{f}_{11})\mathbf{x}_n)^2 \\
&\quad - (\mathbf{f}_{12}^2/\mathbf{f}_{11})\mathbf{x}_2^2 - \cdots - (\mathbf{f}_{1n}^2/\mathbf{f}_{11})\mathbf{x}_n^2 \\
&\quad - 2(\mathbf{f}_{12}\mathbf{f}_{13}/\mathbf{f}_{11})\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 - \cdots - 2(\mathbf{f}_{1n-1}\mathbf{f}_{1n}/\mathbf{f}_{11})\mathbf{x}_{n-1}\mathbf{x}_n \\
&\quad + f_{22}x_2^2 + 2f_{23}x_2x_3 + \cdots + 2f_{2n}x_2x_n \quad (1.2.7) \\
&\quad \quad \quad \dots \\
&\quad \quad \quad + f_{n-1,n-1}x_{n-1}^2 + 2f_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\
&\quad \quad \quad \quad \quad \quad + f_{nn}x_n^2.
\end{aligned}$$

Читателю следует обратить внимание на то, что слагаемые, добавляемые при дополнении первой строки (1.2.6) до полного квадрата и затем вычитаемые, не содержат  $x_1$ .

3. Введя новую переменную

$$x'_1 = x_1 + (f_{12}/f_{11})x_2 + \cdots + (f_{1n}/f_{11})x_n$$

и приведя подобные слагаемые в (1.2.7), приходим к выражению

$$\begin{aligned}
q(x) &= f_{11}x_1'^2 + f'_{22}x_2^2 + 2f'_{23}x_2x_3 + \cdots + 2f'_{2n}x_2x_n \\
&\quad \quad \quad \dots \\
&\quad \quad \quad + f'_{n-1,n-1}x_{n-1}^2 + 2f'_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\
&\quad \quad \quad \quad \quad \quad + f'_{nn}x_n^2.
\end{aligned}$$

Тем самым квадратичная форма  $q$  приведена к виду

$$q(x) = f_{11}x_1'^2 + q'(x_2, \dots, x_n),$$

где  $q'(x_2, \dots, x_n)$  – квадратичная функция от меньшего числа переменных.

Теперь весь алгоритм следует применить к ней, заменив в описании диапазон индексов на  $2, \dots, n$ ,  $f_{11}$  на  $f'_{22}$  и  $f_{ij}$  на  $f'_{ij}$ ; будет выделена новая переменная

$$x'_2 = x_2 + (f'_{23}/f'_{22})x_3 + \dots + (f'_{2n}/f'_{22})x_n,$$

и т. д.

После  $\leq n - 1$  применений алгоритма получится невырожденная замена переменных

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

с матрицей треугольного вида

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_{12}/f_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ f_{13}/f_{11} & f'_{23}/f'_{22} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{1n}/f_{11} & f'_{2n}/f'_{22} & f''_{3n}/f''_{33} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом некоторые из поддиагональных элементов могут обратиться в 0. Матрица перехода от исходного базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$  к тому каноническому базису  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ , в котором построен канонический вид квадратичной формы, получается обращением:

$$(e'_1, e'_2, \dots, e'_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)H^{-1}$$

(справа от знака равенства записано произведение строки базисных векторов на матрицу).

#### 1.2.6. Вещественный случай: сигнатура и нормальный вид квадратичной формы

Ввиду разнообразия приложений сосредоточимся на частном случае, когда в качестве поля коэффициентов выступает поле вещественных чисел  $k = \mathbb{R}$ .

Пусть квадратичная форма  $q$  приведена к каноническому виду:

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

При этом не исключен случай, когда некоторые коэффициенты  $\lambda_i$  равны 0. Выберем такую нумерацию переменных, в которой первые  $r = \text{rang } q$  коэффициентов отличны от 0, из них первые  $s$  положительны, а затем следуют  $r - s$  отрицательных коэффициентов. Таким образом,

$$q(x) = |\lambda_1|x_1^2 + \cdots + |\lambda_s|x_s^2 - |\lambda_{s+1}|x_{s+1}^2 - \cdots - |\lambda_r|x_r^2. \quad (1.2.8)$$

*Замечание 1.2.18.* Выражение (1.2.8) квадратичной формы  $q$  и реализующий его базис  $e_1, \dots, e_s, e_{s+1}, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n$  определяют связанное с ними  $f_q$ -ортогональное прямое разложение

$$V = V^+ \oplus V^- \oplus V^0,$$

где очевидным образом введены *положительное*  $V^+ = \langle e_1, \dots, e_s \rangle$ , *отрицательное*  $V^- = \langle e_{s+1}, \dots, e_r \rangle$  и *нулевое*, или *изотропное*  $V^0 = \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle$ , подпространства.

**Определение 1.2.19.** Число  $s$  положительных слагаемых в каноническом виде квадратичной формы  $q$  называется *положительным индексом инерции* формы  $q$ ; число  $r - s$  отрицательных слагаемых – *отрицательным индексом инерции*, пару  $(s, r - s)$  либо разность  $s - (r - s) = 2s - r$  – *сигнатурой* формы  $q$ . Ранг  $r$  иногда называют *индексом инерции* квадратичной формы  $q$ .

*Замечание 1.2.20.* В то время как независимость ранга матрицы квадратичной формы от выбора базиса доказана, независимость положительного (и, следовательно, отрицательного) индекса инерции от выбора канонического базиса пока что нуждается в проверке. Это утверждается *законом инерции квадратичных форм*, который будет доказан в одном из следующих пунктов.

Выполним в (1.2.8) замену переменных  $x'_i = \sqrt{|\lambda_i|}x_i$  при  $i = 1, \dots, r$ ,  $x'_j = x_j$  при  $j = r + 1, \dots, n$ . Квадратичная форма в новых координатах примет вид

$$q(x) = x_1'^2 + \cdots + x_s'^2 - x_{s+1}'^2 - \cdots - x_r'^2. \quad (1.2.9)$$

**Определение 1.2.21.** Представление вида (1.2.9) называется *нормальным видом* квадратичной формы  $q$ .

Таким образом, при  $k = \mathbb{R}$  имеем следствия теоремы 1.2.11:

**Следствие 1.2.22.** (*Приведение вещественной квадратичной формы к нормальному виду*) Любая вещественная квадратичная форма может быть приведена к нормальному виду.

**Следствие 1.2.23.** (Классификация вещественных квадратичных форм) Класс эквивалентных вещественных квадратичных форм на векторном пространстве  $V$  размерности  $n$  полностью определяется любой из пар чисел: ранг  $r$  и положительный индекс инерции  $s$ , ранг  $r$  и отрицательный индекс инерции  $s$ , сигнатура  $(s, n - s)$ , ранг  $r$  и разность положительного и отрицательного индексов инерции  $2s - r$ .

### 1.2.7. Знакоопределенность

**Определение 1.2.24.** Квадратичная форма  $q$  называется *невыврожденной*, если  $r = n$ .

**Определение 1.2.25.** Квадратичная форма  $q$  называется *неотрицательной*, или *положительно полуопределенной*, если для всех  $v \in V$   $q(v) \geq 0$ . Квадратичная форма  $q$  называется *положительно определенной*, если для всех  $v \neq 0$   $q(v) > 0$ .

Таким образом, квадратичная форма  $q$  положительно определена тогда и только тогда, когда она невырождена и неотрицательна.

**Определение 1.2.26.** Квадратичная форма  $q$  называется *неположительной*, или *отрицательно полуопределенной*, если для всех  $v \in V$   $q(v) \leq 0$ . Квадратичная форма  $q$  называется *отрицательно определенной*, если для всех  $v \neq 0$   $q(v) < 0$ .

Таким образом, квадратичная форма  $q$  отрицательно определена тогда и только тогда, когда она невырождена и неположительна.

**Определение 1.2.27.** Если квадратичная форма принимает как положительные, так и отрицательные значения, то она называется *неопределенной*.

Нормальные формы для классов знакоопределенности квадратичных форм суть следующие:

положительно определенная  $q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ ;

положительно полуопределенная  $q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2$ ,  $r \leq n$ ;

отрицательно определенная  $q(x) = -x_1^2 - \dots - x_n^2$ ;

отрицательно полуопределенная  $q(x) = -x_1^2 - \dots - x_r^2$ ,  $r \leq n$ ;

неопределенная  $q(x) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2$ ,  $1 \leq s < r \leq n$ .

Заметим, что неопределенная форма, даже если она невырожденная, может обращаться в нуль на некоторых ненулевых векторах. Векторы, аннулирующие неопределенную квадратичную форму, не образуют подпространства, но их подмножество содержит ядро формы (убедитесь в этом!).

Билинейная форма  $f_q$ , полярная к квадратичной форме  $q$ , называется *положительно определенной* (соответственно, *положительно полуопределенной*, *отрицательно определенной*, *отрицательно полуопределенной*, *неопределенной*), если такова квадратичная форма  $q$ .

Теперь обратимся к положительно определенной квадратичной форме. В произвольном базисе ей соответствует матрица  $F$ , которую тоже называют *положительно определенной*. В нормальном виде матрица положительно определенной квадратичной формы равна единичной. Таким образом, симметрическая положительно определенная матрица  $F$  конгруэнтна единичной, то есть существует вещественная невырожденная матрица  $H$  такая, что  $F = H^T H$ .

Обратно, пусть  $H$  – вещественная невырожденная матрица. Тогда матрица  $H^T H$  определяет положительно определенную квадратичную форму. Действительно,  $q(x) = X^T H^T H X$  – квадратичная форма. Преобразование координат  $X = H^{-1} X'$  приводит к выражению  $q(x) = X'^T X'$ , представляющему собой нормальный вид положительно определенной квадратичной формы. Тем самым, матрица  $H^T H$  является положительно определенной. Мы доказали следующий результат.

**Теорема 1.2.28.** *(Квадратный корень из положительной матрицы) Симметрическая матрица  $F$  является положительно определенной тогда и только тогда, когда найдется вещественная невырожденная матрица  $H$  такая, что  $F = H^T H$ .*

**Упражнение 1.2.29.** Сформулируйте и докажите обобщение теоремы 1.2.28 на случай положительно полуопределенной матрицы.

### 1.2.8. Закон инерции квадратичных форм

За этим исторически закрепившимся названием скрывается теорема об инвариантности ранга и положительного индекса инерции квадратичной формы. Ее традиционная формулировка следующая.

**Теорема 1.2.30.** *(Закон инерции) Для любой квадратичной формы  $q$  числа  $r$  и  $s$  зависят только от  $q$ .*

*Доказательство.* Инвариантность ранга  $r$  квадратичной формы известна и следует из постоянства ранга на классах конгруэнтных матриц. Для положительного индекса инерции предположим, что нашлось два представления формы  $q$  в различных базисах с числами  $s$  и  $t$  положи-

тельных слагаемых. Пусть

$$\begin{aligned} V &= W^+ \overset{\perp}{\oplus} W^- \overset{\perp}{\oplus} W^0 \\ V &= U^+ \overset{\perp}{\oplus} U^- \overset{\perp}{\oplus} U^0 \end{aligned}$$

– соответствующие им  $f_q$ -ортогональные прямые разложения пространства  $V$ , причем  $\dim W^+ = s$ ,  $\dim W^+ \overset{\perp}{\oplus} W^- = \dim U^+ \overset{\perp}{\oplus} U^- = r$ ,  $\dim U^+ = t$ ,  $t \leq s$ .

Рассмотрим сумму подпространств  $W^+ + (U^- \oplus U^0) \subset V$  и оценим ее размерность  $n \geq \dim (W^+ + (U^- \oplus U^0)) = s + (n - t) - \dim (W^+ \cap (U^- \oplus U^0))$ . Отсюда заключаем, что  $\dim (W^+ \cap (U^- \oplus U^0)) \geq s - t$ . Если  $s - t > 0$ , то найдется вектор  $w \in W^+ \cap (U^- \oplus U^0)$ ,  $w \neq 0$ , что неизбежно приведет к противоречию: поскольку  $w \in W^+$ , то  $q(w) > 0$ , а так как  $w \in U^- \oplus U^0$ , то  $q(w) \leq 0$ . Таким образом,  $W^+ \cap (U^- \oplus U^0) = 0$ ,  $s = t$ , следовательно, сумма  $W^+ + (U^- \oplus U^0)$  прямая.  $\square$

*Замечание 1.2.31.* Хотя ранг и сигнатура квадратичной формы инвариантны, ортогональное прямое разложение на положительное, отрицательное и нулевое подпространства таковым не является и зависит от способа приведения формы к каноническому виду. Рассуждение в доказательстве закона инерции поставляет лишь нулевое пересечение подпространств, а не их ортогональность. Инвариантным является множество векторов  $x$ , удовлетворяющих уравнению  $q(x) = 0$ , (так называемый *изотропный конус*) и связанное с ним разбиение всех остальных векторов пространства  $V$  на подмножества *положительных* ( $q(x) > 0$ ) и *отрицательных* ( $q(x) < 0$ ) векторов. Эти подмножества не являются векторными подпространствами, и положительное  $V^+$ , отрицательное  $V^-$  и нулевое  $V^0$  подпространства выбираются в некоторой степени произвольно, в «положительном», «отрицательном» и «нулевом» (изотропном конусе) подмножествах соответственно. Рассмотрим квадратичную форму  $q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ . Реализуем алгоритм приведения к каноническому виду дважды. Начав с переменной  $x_1$ , получим  $q(x) = (x_1 + 2x_2)^2 - 3x_2^2$  и ортогональное прямое разложение  $V = \langle e_2 \rangle^\perp \overset{\perp}{\oplus} \langle e_2 \rangle$ . Аналогично, начав с переменной  $x_2$ , придем к виду  $q(x) = (x_2 + 2x_1)^2 - 3x_1^2$  и ортогональному прямому разложению  $V = \langle e_1 \rangle^\perp \overset{\perp}{\oplus} \langle e_1 \rangle$ . В обоих разложениях на первом месте стоит положительное, а на втором – отрицательное подпространства. Очевидно, разложения различны, хотя и имеют равные размерности соответствующих прямых слагаемых.

### 1.2.9. Приведение квадратичной формы к каноническому виду: метод Якоби

Излагаемый в этом пункте метод хотя и имеет более сложное обоснование по сравнению с ранее изложенным методом, но в ряде вычислительных приложений оказывается более удобным. Это касается задач, в которых не нужно вычислять канонический базис. Кроме того, в качестве следствия мы легко получим знаменитый критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

**Теорема 1.2.32.** (Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду) Пусть матрица  $F$  квадратичной формы  $q(x) = X^T F X$  такова, что все ее главные миноры  $\Delta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , отличны от 0. Положим  $\Delta_0 = 1$ . Тогда существует базис  $e'_1, \dots, e'_n$ , в котором форма  $q(x)$  примет вид

$$q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n'^2.$$

*Доказательство.* Индукция по размерности пространства  $V$ . Для  $n = 1$  теорема очевидна. Предположим, что она верна для квадратичных форм на пространствах, имеющих размерность ниже  $n$ . Для шага индукции возьмем первоначальный базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , в котором квадратичная форма  $q$  представлена матрицей  $F$ , и рассмотрим подпространство  $L = \langle e_1, e_2, \dots, e_{n-1} \rangle$ . Ограничение  $q|_L$  квадратичной формы  $q$  на это подпространство представлено в его базисе  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  матрицей  $\hat{F}$ , полученной из матрицы  $F$  удалением строки и столбца с номером  $n$ . Ее главные миноры порядков от первого до  $n-1$ -го равны соответствующим минорам матрицы  $F$ :  $\hat{\Delta}_i = \Delta_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . По условию теоремы они отличны от 0. По предположению индукции в подпространстве  $L$  существует базис  $e'_1, \dots, e'_{n-1}$  такой, что в нем квадратичная форма  $q|_L$  имеет вид

$$q|_L(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}} x_n'^2.$$

Теперь сформируем  $f_q$ -ортогональное дополнение  $L^\perp$  подпространства  $L$ . Оно представлено пространством решений системы однородных уравнений:

[illegible]

Поскольку  $f_q$  невырождена, то система имеет ранг, равный  $n - 1$ , и пространство решений размерности 1. Пусть  $\widehat{e}_n$  – его базисный вектор. На-



бор  $e'_1, \dots, e'_{n-1}, \widehat{e}_n$  составляет базис пространства  $V$ . Домножим вектор  $\widehat{e}_n$  на подходящий ненулевой скаляр  $\lambda$  так, чтобы матрица  $H$  перехода от базиса  $e_1, \dots, e_n$  к базису  $e'_1, \dots, e'_{n-1}, e'_n = \lambda \widehat{e}_n$  имела определитель, равный  $\Delta_n^{-1}$ . Тогда

$$\prod_{i=1}^n f_q(e'_i, e'_i) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \cdots \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}} f_q(e'_n, e'_n) = \det H^T F H = (\det H)^2 \Delta_n = \frac{1}{\Delta_n},$$

откуда  $f(e'_n, e'_n) = \Delta_{n-1}/\Delta_n$ .  $\square$

**Следствие 1.2.33.** (Правило знаков) Если  $k = \mathbb{R}$ , то отрицательный индекс инерции формы  $q(x)$  равен числу перемен знака в последовательности  $\Delta_0 = 1, \Delta_1, \dots, \Delta_n$ .

**Следствие 1.2.34.** (Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы) Вещественная квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры ее матрицы в каком-либо базисе положительны.

*Доказательство.* Согласно следствию 1.2.33, положительность главных миноров влечет положительность формы  $q$ . Для доказательства обратной импликации используем индукцию по размерности пространства  $n$ . При  $n = 1$  импликация верна. Предположим, что она верна для квадратичных форм на пространствах размерности  $n - 1$ . Пусть  $e_1, \dots, e_n$  – базис пространства  $V$ ,  $F$  – матрица квадратичной формы  $q$  в этом базисе. Рассмотрим подпространство  $L = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$  и ограничение  $q|_L$  формы  $q$  на него. Форма  $q|_L$  положительно определена и, по предположению индукции, главные миноры  $\widehat{\Delta}_i$  ее матрицы  $\widehat{F}$  в базисе  $e_1, \dots, e_{n-1}$  положительны:  $\widehat{\Delta}_i = \Delta_i > 0$ . Выясним знак определителя  $\Delta_n = \det F$ . Известно, что матрица  $F$  положительно определена. Тогда существует невырожденная матрица  $H$  такая, что  $F = H^T H$ . Отсюда  $\Delta_n = \det F = (\det H)^2 > 0$ , что и завершает доказательство.  $\square$

### 1.3. Кососимметрические формы

#### 1.3.1. Редукция к невырожденному случаю

Пусть  $f(x, y)$  – кососимметрическая билинейная форма на  $k$ -векторном пространстве  $V$ ,  $V_0 = \ker f$  – ее ядро.

**Предложение 1.3.1.** (Редукция к невырожденной кососимметрической форме) Пусть  $V_1$  – любое прямое дополнение подпространства  $V_0$ ,

$f_1 := f|_{V_1}$  – ограничение формы  $f$  на  $V_1$ , определяемое диаграммой

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{f} & k \\ \uparrow & \nearrow f_1 & \\ V_1 \times V_1 & & \end{array}$$

Тогда  $f_1$  – невырожденная билинейная форма на подпространстве  $V_1$ .

*Доказательство.* Во-первых, любое прямое дополнение  $V_1$  ядра  $V_0$  является  $f$ -ортогональным к  $V_0$ . Действительно, для любого вектора  $v_1 \in V_1$  и для любого  $v_0 \in V_0$  имеем  $f(v_0, v_1) = 0$ . Во-вторых, пусть  $v_1 \in \ker f_1$  – ненулевой вектор; тогда для всех  $v'_1 \in V_1$  выполнено  $f_1(v, v'_1) = 0$ . Но при этом  $f_1(v, v'_1) = f(v, v'_1) = 0$ . Рассмотрим произвольный вектор  $v \in V$ ; в силу прямого разложения  $V = V_0 \oplus V_1$  имеет место единственное представление  $v = v_0 + v_1$ ,  $v_i \in V_i$ ,  $i = 0, 1$ . Подстановка в  $f(-, v'_1)$  дает  $f(v, v'_1) = f(v_0 + v_1, v'_1) = 0$ , т. е.  $v'_1 \in V_0$ . Таким образом,  $v'_1 \in V_0 \cap V_1 \neq 0$ , что противоречит факту прямого разложения  $V = V_0 \oplus V_1$ .  $\square$

Таким образом, для исследования любой кососимметрической формы  $f$  достаточно рассмотреть ограничение этой формы на любое прямое дополнение ее ядра. Сосредоточим внимание на невырожденных кососимметрических билинейных формах.

**Определение 1.3.2.** *Симплектическим (или гиперболическим) векторным пространством* называется  $k$ -векторное пространство  $V$  с определенной на нем невырожденной кососимметрической формой  $f$ .

### 1.3.2. Структура симплектического пространства

Пусть  $(V, f)$  – симплектическое пространство. Зафиксировав какой-нибудь базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , придем к координатному представлению формы  $f$ :

$$f(x, y) = \sum_{i,j} x_i f_{ij} y_j = \sum_{i < j} f_{ij} (x_i y_j - x_j y_i),$$

где  $f_{ij} = f(e_i, e_j) = -f(e_j, e_i) = -f_{ji}$  – элементы (кососимметрической) матрицы билинейной формы  $f$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

**Определение 1.3.3.** *Симплектической, или гиперболической, плоскостью* называется двумерное подпространство  $W \subset V$  такое, что  $f|_W \neq 0$ .

**Лемма 1.3.4.** *(Существование симплектической плоскости) Всякое гиперболическое пространство содержит симплектическую плоскость.*

*Доказательство.* Поскольку  $f$  невырождена, то для любого ненулевого вектора  $e_1$  найдется вектор  $e_2$  такой, что  $f(e_1, e_2) \neq 0$ . Тогда  $\langle e_1, e_2 \rangle$  – искомая гиперболическая плоскость.  $\square$

**Упражнение 1.3.5.** Пусть  $W$  – симплектическая плоскость в симплектическом пространстве  $(V, f)$ . Докажите, что  $V = W \oplus W^\perp$ .

**Теорема 1.3.6.** (*Косоортогональное разложение симплектического пространства*) Всякое симплектическое пространство  $(V, f)$  может быть разложено в  $f$ -ортогональную прямую сумму симплектических плоскостей. В частности, всякое симплектическое пространство имеет четную размерность.

*Доказательство.* Индукция по размерности пространства с применением  $f$ -ортогонального разложения. База индукции представлена симплектической плоскостью (размерность 2). Предположим, что теорема верна для симплектических пространств, имеющих размерность меньшую, чем  $n$ . Пусть  $(V, f)$  – симплектическое пространство размерности  $n$ . Согласно лемме 1.3.4,  $V$  содержит симплектическую плоскость; пусть это  $\langle e_1, e_2 \rangle$ . Рассмотрим ее  $f$ -ортогональное дополнение  $\langle e_1, e_2 \rangle^\perp$ , заданное системой однородных линейных уравнений:

$$\begin{cases} f(e_1, x) = 0, \\ f(e_2, x) = 0. \end{cases}$$

Система имеет ступенчатый вид и потому ее ранг равен 2. Таким образом,  $\dim \langle e_1, e_2 \rangle^\perp = n - 2$ , что позволяет применить к  $\langle e_1, e_2 \rangle^\perp$  индуктивное предположение. Итак,  $\langle e_1, e_2 \rangle^\perp$  –  $f$ -ортогональная прямая сумма симплектических плоскостей. Тогда пространство  $V = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \langle e_1, e_2 \rangle^\perp$  тоже разложено в  $f$ -ортогональную прямую сумму симплектических плоскостей.  $\square$

Пусть  $W = \langle e_1, e_2 \rangle$  – симплектическая плоскость в симплектическом пространстве  $(V, f)$ . Тогда ограничение  $f|_W$  в базисе  $e_1, e_2$  задается выражением  $f(x, y) = f_{12}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$ , где  $f_{12} \neq 0$ . Домножив один из базисных векторов на подходящий коэффициент, например  $e_2$  на  $f_{12}^{-1}$ , добьемся представления  $f(e_1, e_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1$  или, в матричной форме,

$$f(x, y) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом имеем

**Следствие 1.3.7.** (Классы конгруэнтности кососимметрических матриц) Любая невырожденная кососимметрическая матрица имеет четный размер и конгруэнтна блочно-диагональной матрице вида

$$J = \left[ \begin{array}{cc|cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{array} \right].$$

Иными словами, для всякой невырожденной кососимметрической матрицы  $F$  найдется невырожденная матрица  $H$  такая, что  $H^T F H = J$ .

**Замечание 1.3.8.** Переупорядочим базис, поместив сначала все векторы с нечетными номерами  $e_1, e_3, \dots, e_{2m-1}$ , а затем – векторы с четными номерами  $e_2, e_4, \dots, e_{2m}$ , стандартную матрицу невырожденной кососимметрической формы иногда приводят к виду

$$J_0 = \left( \begin{array}{c|c} 0 & E_m \\ \hline -E_m & 0 \end{array} \right).$$

**Определение 1.3.9.** Базис симплектического пространства, в котором матрица кососкалярного произведения имеет стандартный вид, называется *симплектическим*.

**Определение 1.3.10.** *Изоморфизмом симплектических пространств* называется изоморфизм соответствующих им векторных пространств  $\phi : V \xrightarrow{\sim} V'$ , отождествляющий кососимметрические формы, т. е. включаемый в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{f} & k \\ (\phi, \phi) \downarrow & \nearrow f' & \\ V' \times V' & & \end{array}$$

Введенное понятие изоморфизма симплектических пространств позволяет сформулировать еще одно

**Следствие 1.3.11.** (Классификация симплектических пространств) Все симплектические пространства одной и той же размерности над одним и тем же полем изоморфны. Класс эквивалентных кососимметрических форм на  $k$ -векторном пространстве  $V$  размерности  $n$  однозначно определяется размерностью  $n_0$  ядра так, что разность  $n - n_0$  – четное число.

### 1.3.3. Приведение кососимметрической формы к каноническому виду в координатах (метод Лагранжа)

Здесь описан алгоритм перегруппировки переменных, позволяющий выделить гиперболические плоскости, косоортогональные друг другу.

Дана ненулевая кососимметрическая форма

$$f(x, y) = f_{12}(x_1y_2 - x_2y_1) + f_{13}(x_1y_3 - x_3y_1) + \cdots + f_{n-1,n}(x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}). \quad (1.3.1)$$

После, быть может, подходящей перенумерации переменных условимся считать, что  $f_{12} \neq 0$ .

1. Сгруппируем в рабочую строку все слагаемые, содержащие  $x_1$ , и все слагаемые, содержащие  $y_1$ . В силу антисимметрии формы  $f$  получим следующее выражение:

$$x_1(f_{12}y_2 + f_{13}y_3 + \cdots + f_{1n}y_n) - (f_{12}x_2 + f_{13}x_3 + \cdots + f_{1n}x_n)y_1.$$

2. Введем новые переменные:

$$x'_2 = f_{12}x_2 + f_{13}x_3 + \cdots + f_{1n}x_n, \quad (1.3.2)$$

$$y'_2 = f_{12}y_2 + f_{13}y_3 + \cdots + f_{1n}y_n. \quad (1.3.3)$$

В силу антисимметрии формы выражения для  $x'_2$  и для  $y'_2$  должны быть аналогичными. Выражая  $x_2$  и  $y_2$  из (1.3.2) и (1.3.3) соответственно и выполняя подстановку в (1.3.1), после приведения подобных слагаемых получим

$$f(x, y) = x_1y'_2 - x'_2y_1 + f'_{23}(x'_2y_3 - y'_2x_3) + \cdots + f'_{2n}(x'_2y_n - y'_2x_n) + f_{34}(x_3y_4 - x_4y_3) + \cdots + f_{n-1,n}(x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}). \quad (1.3.4)$$

3. Сгруппируем в рабочую строку слагаемые, содержащие  $x'_2$ , и слагаемые, содержащие  $y'_2$ . Это приведет к выражению

$$-x'_2(y_1 - f'_{23}y_3 - \cdots - f'_{2n}y_n) + (x_1 - f'_{23}x_3 - \cdots - f'_{2n}x_n)y'_2.$$

4. Введем новые переменные:

$$x'_1 = x_1 - f'_{23}x_3 - \cdots - f'_{2n}x_n, \quad (1.3.5)$$

$$y'_1 = y_1 - f'_{23}y_3 - \cdots - f'_{2n}y_n. \quad (1.3.6)$$

После подстановки (1.3.5) и (1.3.6) в (1.3.4) придем к выражению

$$f(x, y) = (x'_1y'_2 - x'_2y'_1) + f_{34}(x_3y_4 - x_4y_3) + \cdots + f_{n-1,n}(x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}).$$

Далее выбирается следующий ненулевой коэффициент, скажем  $f_{34}$ . Пункты 1-4 выполняются с очевидной заменой  $x_1$  на  $x_3$ ,  $x_2$  на  $x_4$  и т. д.

## Глава 2

# Векторные пространства со скалярными произведениями

В этой главе будут рассмотрены наиболее часто применяемые виды пространств с дополнительными структурами. При этом естественно возникают специальные классы невырожденных линейных операторов, сохраняющих дополнительную структуру. Эти классы составляют группы относительно композиции – так называемые классические группы, имеющие разнообразные приложения в математике и физике.

### 2.1. Евклидовы пространства

#### 2.1.1. Основные определения

**Определение 2.1.1.** *Евклидовым векторным пространством* называется вещественное векторное пространство  $V$  с фиксированной положительно определенной симметрической билинейной формой  $(\cdot|\cdot)$ . Для любой пары векторов  $(v_1, v_2)$  значение  $(v_1|v_2)$  билинейной формы  $(\cdot|\cdot)$  называется *скалярным произведением векторов*  $v_1, v_2$ .

**Пример 2.1.2.** Рассмотрим координатное пространство  $k^n$  с билинейной формой  $(\cdot|\cdot)$ , задаваемой в стандартном базисе выражением

$$(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Очевидно, это положительно определенная симметрическая билинейная форма в нормальном виде. При  $n = 2$  получаем «школьное» скалярное произведение векторов на плоскости, для которого длина вектора вычисляется по формуле  $\|x\|^2 = (x|x) = x_1^2 + x_2^2$ .

**Определение 2.1.3.** *Длиной, или нормой, вектора*  $x$  в евклидовом векторном пространстве  $V, (\cdot|\cdot)$  называется неотрицательное действительное число

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

*Замечание 2.1.4.* Для определения нормы важна положительная определенность билинейной формы  $(\cdot|\cdot)$ , задающей скалярное произведение.

*Замечание 2.1.5.* Поскольку форма  $(\cdot|\cdot)$  невырождена, то нулевой вектор и только он имеет нулевую норму. Итак, в евклидовом пространстве

$$||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

**Определение 2.1.6.** Вектор длины 1 называется *нормированным*.

*Замечание 2.1.7.* Любой ненулевой вектор  $x$  можно нормировать, умножив на скаляр, равный  $||x||^{-1}$ . Действительно, вычислим норму вектора  $||x||^{-1}x$ :  $|| ||x||^{-1}x || = (||x||^{-1}x | ||x||^{-1}x)^{1/2} = ||x|| (x|x)^{1/2} = 1$ .

**Определение 2.1.8.** *Подпространством евклидова векторного пространства  $(V, (\cdot|\cdot))$  называется любое векторное подпространство  $U \subset V$  с билинейной формой  $(\cdot|\cdot)_U$ , полученной ограничением на  $U$  билинейной формы  $(\cdot|\cdot)$ .*

Скалярное произведение, заданное на данном пространстве, иногда называют *метрикой*. Свойства математических объектов и результаты, связанные со скалярным произведением и определяемые его видом, называются *метрическими*.

### 2.1.2. Основные метрические соотношения

В этом пункте мы докажем знаменитое неравенство Коши–Буняковского для евклидова векторного пространства. Именно благодаря этому неравенству абстрактное евклидово пространство обладает свойствами, очень похожими на свойства привычного нам физического пространства.

**Теорема 2.1.9.** *(Неравенство Коши – Буняковского) Для любых векторов  $x, y$  евклидова пространства справедливо неравенство*

$$|(x|y)| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

*Знак равенства имеет место в том и только том случае, когда векторы  $x$  и  $y$  линейно зависимы.*

*Доказательство.* Сформируем линейную комбинацию  $\lambda x - y$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , и вычислим скалярный квадрат полученного вектора:

$$(\lambda x - y | \lambda x - y) = \lambda^2 ||x||^2 - 2\lambda(x|y) + ||y||^2. \quad (2.1.1)$$

Во-первых,  $(\lambda x - y | \lambda x - y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x$  и  $y$  линейно зависимы. Квадратный трехчлен в правой части выражения

(2.1.1) неотрицателен. Это значит, что его дискриминант неположителен:  $(x|y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$ , откуда следует первое утверждение теоремы. Рассматриваемый трехчлен может иметь лишь кратный корень, что соответствует равенству  $(x|y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 = 0$ . При этом  $(\lambda x - y|\lambda x - y) = 0$ , откуда  $\lambda x - y = 0$ , что доказывает второе утверждение.  $\square$

**Следствие 2.1.10.** *(Возможность измерения углов) Неравенство Коши – Буняковского позволяет ввести величину  $\widehat{(x, y)}$  угла между векторами  $x$  и  $y$ , полагая*

$$0 \leq \widehat{(x, y)} \leq \pi \quad \text{и} \quad \cos \widehat{(x, y)} = \frac{(x|y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

**Следствие 2.1.11.** *(Неравенство треугольника) Для любой пары векторов  $x, y$  выполнено неравенство*

$$\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

*Доказательство.* Оценим скалярный квадрат выражения  $x \pm y$ :

$$\|x \pm y\|^2 = (x \pm y|x \pm y) = (x|x) + (y|y) \pm 2(x|y) \leq (x|x) + (y|y) + 2|(x|y)|.$$

Применив неравенство Коши – Буняковского, получим  $\|x \pm y\|^2 \leq (x|x) + (y|y) + 2|(x|y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$ .  $\square$

**Следствие 2.1.12.** *(Многомерный аналог теоремы Пифагора) Пусть векторы  $x_1, \dots, x_m$  евклидова пространства попарно ортогональны, т. е.  $(x_i|x_j) = 0$  при  $i \neq j$ . Тогда справедливо равенство*

$$\|x_1 + \dots + x_m\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_m\|^2.$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \|x_1 + \dots + x_m\|^2 &= (x_1 + \dots + x_m|x_1 + \dots + x_m) \\ &= (x_1|x_1) + \dots + (x_m|x_m) \\ &\quad + 2(x_1|x_2) + \dots + 2(x_1|x_m) + 2(x_2|x_3) + \dots + 2(x_{m-1}|x_m) \\ &= \|x_1\|^2 + \dots + \|x_m\|^2. \end{aligned}$$

$\square$

### 2.1.3. Ортонормированный базис

Согласно теореме о приведении квадратичной формы к каноническому виду, в пространстве  $V$  существуют канонические базисы, в которых форма  $(\cdot|\cdot)$ , задающая скалярное произведение, имеет диагональную



матрицу. Поскольку эта форма положительно определена, умножением векторов канонического базиса на подходящие скаляры можно добиться того, чтобы матрица билинейной формы  $(\cdot|\cdot)$  стала единичной.

**Определение 2.1.13.** Канонический базис пространства  $V$  для формы  $(\cdot|\cdot)$  называется *ортogonalным*. Базис, в котором форма  $(\cdot|\cdot)$  имеет нормальный вид, называется *ортонормированным*.

*Замечание 2.1.14.* Если  $e_1, \dots, e_n$  – ортogonalный базис, то для любых  $i \neq j$  соответствующий внедиагональный элемент матрицы билинейной формы  $(e_i|e_j)$  равен нулю. Таким образом, *векторы ортogonalного базиса ортogonalны друг другу*. Если  $e_1, \dots, e_n$  – ортонормированный базис, то диагональные элементы  $(e_i|e_i)$  равны 1. Таким образом, *векторы ортонормированного базиса ортogonalны друг другу и нормированы*.

В действительности ортogonalные и ортонормированные системы можно получать, составляя наборы из попарно ортogonalных векторов.

**Теорема 2.1.15.** (*Независимость ортogonalных векторов*) Любая система попарно ортogonalных ненулевых векторов  $e_1, \dots, e_m$  евклидова пространства линейно независима. Ортogonalная система из  $n = \dim V$  векторов составляет базис пространства  $V$ .

*Доказательство.* Составим линейную комбинацию векторов  $e_1, \dots, e_m$ :  $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m = 0$ . Выполнив скалярное умножение на  $e_i$ , получим

$$\alpha_1(e_i|e_1) + \dots + \alpha_i(e_i|e_i) + \dots + \alpha_m(e_i|e_m) = 0.$$

В силу попарной ортogonalности векторов системы  $e_1, \dots, e_m$  имеем  $(e_i|e_j) = 0$  при  $i \neq j$ , откуда  $\alpha_i \|e_i\|^2 = 0$ , и  $\alpha_i = 0$ . Рассмотрев все  $i = 1, \dots, m$ , приходим к выводу о том, что  $\alpha_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Это доказывает невозможность нетривиальной равной нулю линейной комбинации. Таким образом, векторы  $e_1, \dots, e_m$  линейно независимы. Если их число равно размерности пространства  $V$ , то они составляют базис.  $\square$

Пусть  $e$  – нормированный вектор.

**Определение 2.1.16.** *Проекцией вектора  $x$  на направление нормированного вектора  $e$*  называется вещественное число  $pr_e x := (x|e)$ .

**Теорема 2.1.17.** (*Координаты как проекции*) Координаты вектора в ортонормированном базисе евклидова пространства суть его проекции на направления базисных векторов.

*Доказательство.* Пусть  $e_1, \dots, e_n$  – ортонормированный базис,  $x = \sum_i e_i x_i$  – вектор. Вычисляя скалярные произведения, получим  $pr_{e_j} x = (x|e_j) = \sum_i (e_i|e_j) x_i = x_j$  для каждого  $j = 1, \dots, n$ .  $\square$

#### 2.1.4. Алгоритм ортогонализации Грама – Шмидта

В первой части настоящего пособия наряду с базисами рассматривались фильтрации векторного пространства подпространствами. Обсуждалась взаимосвязь этих понятий, в частности построение фильтрации по базису и наоборот. Если результат первой процедуры определен однозначно, то результат второй – нет. В евклидовом векторном пространстве по данной фильтрации максимальной длины можно построить базис, являющийся ортогональным. Этот результат и составляет содержание следующей теоремы. Прием, используемый в ее доказательстве, порождает очевидный алгоритм преобразования произвольного базиса в ортогональный. Этот алгоритм носит название *процесса ортогонализации Грама – Шмидта* и широко применяется в разнообразных вычислительных задачах.

**Теорема 2.1.18.** *(Об ортогонализации) Пусть  $e_1, \dots, e_n$  – базис евклидова векторного пространства  $V$ . Тогда существует ортонормированный базис  $e'_1, \dots, e'_n$  такой, что  $\langle e_1, \dots, e_i \rangle = \langle e'_1, \dots, e'_i \rangle$  для всех  $i = 1, \dots, n$ .*

*Доказательство.* Построение искомого базиса проводится по следующей наглядной индуктивной схеме, в которой последовательность действий соответствует движению сверху вниз:

$$\begin{array}{lll}
 \langle e_1 \rangle = \langle e'_1 \rangle & & e'_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1; \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \langle e_1, e_2 \rangle = \langle e'_1, e'_2 \rangle & e''_2 = e_2 - \alpha_1^{(2)} e'_1, & e'_2 = \frac{1}{\|e''_2\|} e''_2; \\
 \downarrow & \dots & \dots \\
 \vdots & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \langle e_1, e_2, \dots, e_i \rangle = \langle e'_1, e'_2, \dots, e'_i \rangle & e''_i = e_i - \sum_{j=1}^i \alpha_j^{(i)} e'_j, & e'_i = \frac{1}{\|e''_i\|} e''_i; \\
 \downarrow & \dots & \dots \\
 \vdots & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle = \langle e'_1, e'_2, \dots, e'_n \rangle & e''_n = e_n - \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(n)} e'_j, & e'_n = \frac{1}{\|e''_n\|} e''_n.
 \end{array}$$

Коэффициенты  $\alpha_j^{(i)}$  вычисляются на шаге с номером  $i$ , исходя из требования ортогональности: при всех  $j = 1, \dots, i$

$$(e_i'' | e_j') = (e_i - \sum_{\ell=1}^i \alpha_\ell e_\ell' | e_j') = (e_i | e_j') - \alpha_j (e_j' | e_j') = (e_i | e_j') - \alpha_j = 0.$$

Во втором знаке равенства учтена попарная ортогональность векторов  $e_1', \dots, e_j'$ .  $\square$

**Следствие 2.1.19.** *(Дополняемость до ортонормированного базиса) Любая ортонормированная система векторов может быть дополнена до ортонормированного базиса.*

*Доказательство.* Поскольку попарно ортогональные векторы линейно независимы, то любую ортогональную систему  $e_1, \dots, e_m$  можно дополнить до базиса  $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n$ . Затем необходимо применить ортогонализацию, начиная с шага с номером  $m + 1$ .  $\square$

### 2.1.5. Классификация евклидовых векторных пространств

**Определение 2.1.20.** Евклидовы пространства  $(V, (\cdot | \cdot))$  и  $(V', (\cdot | \cdot)')$  называются *изоморфными*, если существует изоморфизм векторных пространств  $\phi : V \xrightarrow{\sim} V'$ , отождествляющий билинейные формы, т. е. включаемый в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{(\cdot | \cdot)} & \mathbb{R} \\ (\phi, \phi) \downarrow & \nearrow (\cdot | \cdot)' & \\ V' \times V' & & \end{array} \quad (2.1.2)$$

*Замечание 2.1.21.* Коммутативность диаграммы (2.1.2) означает, что для любых векторов  $x, y \in V$  выполнено равенство  $(x | y) = (\phi(x) | \phi(y))'$ . Иными словами, *изоморфизм  $\phi$  сохраняет скалярное произведение.*

**Теорема 2.1.22.** *(Классификация евклидовых пространств) Любые два евклидовых векторных пространства равных размерностей изоморфны.*

*Доказательство.* Пусть  $(V, (\cdot | \cdot))$  и  $(V', (\cdot | \cdot)')$  – евклидовы пространства, имеющие равные размерности. Выберем в них ортонормированные базисы  $e_1, \dots, e_n$  в  $V$  и  $e_1', \dots, e_n'$  в  $V'$ . Биективное соответствие на базисных векторах  $e_i \mapsto e_i', i = 1, \dots, n$ , определяет искомый изоморфизм.  $\square$

Доказанная теорема классификации позволяет переносить любые метрические результаты, полученные для стандартного евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  (со скалярным произведением, задаваемым в стандартном базисе единичной матрицей) на произвольное евклидово пространство той же размерности.

### 2.1.6. Двойственное евклидово пространство

Пусть  $(V, (\cdot|\cdot))$  – евклидово векторное пространство. Тогда каждому вектору  $v \in V$  ставится в соответствие линейная форма  $(v|\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(v|\cdot) \in V^\vee$ .

**Теорема 2.1.23.** *(Двойственность евклидовых пространств) Соответствие  $v \mapsto (v|\cdot)$  определяет канонический изоморфизм  $\mathbb{R}$ -векторных пространств  $\psi : V \rightarrow V^\vee$ , отождествляющий любой ортонормированный базис пространства  $V$  с двойственным к нему базисом в  $V^\vee$ . Изоморфизм  $\psi$  наделяет двойственное пространство  $V^\vee$  структурой евклидова пространства, в которой ортонормированными являются базисы, двойственные к ортонормированным базисам в  $V$ , и только они.*

*Доказательство.* Поскольку  $(\cdot|\cdot)$  – билинейная форма, то отображение  $\psi : V \rightarrow V^\vee$  – гомоморфизм векторных пространств. Вычислим его ядро. Пусть  $v \in \ker \psi$ ; тогда  $(v|\cdot)$  – нулевая форма; в частности, ее значение на векторе  $v$  равно нулю, т. е.  $(v|v) = 0$ . Поскольку билинейная форма  $(\cdot|\cdot)$  знакоопределенна, то  $v = 0$ . Таким образом, гомоморфизм  $\ker \psi$  инъективен. Поскольку при этом  $\dim V = \dim V^\vee$ , то  $\psi$  – изоморфизм.

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  – ортонормированный базис пространства  $V$ . Рассмотрим линейные формы  $\psi(e_i)$ ; для их описания необходимо и достаточно знать их значения на векторах базиса:

$$\psi(e_i)(e_j) = (e_i|e_j) = \delta_{ij} = e^i(e_j), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Тем самым,  $\psi(e_i)$  совпадают с векторами  $e^i$  двойственного базиса.

Билинейная форма, задающая скалярное произведение на  $V^\vee$ , индуцированное изоморфизмом  $\psi$ , определяется наклонной стрелкой в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{(\cdot|\cdot)} & \mathbb{R} \\ (\psi^{-1}, \psi^{-1}) \uparrow & \nearrow (\cdot|)^\vee & \\ V^\vee \times V^\vee & & \end{array}$$

Значение формы  $(\cdot|\cdot)^\vee$  на паре линейных форм  $(u|\cdot), (v|\cdot)$  равно

$$((u|\cdot)|(v|\cdot))^\vee = (u|v).$$

При этом отображение  $\psi$  переводит ортонормированные базисы в ортонормированные. Очевидно, обратное к нему отображение  $\psi^{-1}$  обладает тем же свойством.  $\square$

### 2.1.7. Ортогональная группа

В этом пункте мы охарактеризуем автоморфизмы евклидова пространства  $(V, (\cdot|\cdot))$ . Это, очевидно, такие автоморфизмы векторного пространства  $V$ , которые сохраняют билинейную форму скалярного произведения.

**Определение 2.1.24.** Автоморфизм евклидова пространства называется *ортогональным преобразованием*.

Для характеристики изоморфизмов  $\mathcal{H}$ , сохраняющих евклидово скалярное произведение, достаточно изучать отображения, сохраняющие вид матрицы билинейной формы скалярного произведения: для любых  $x, y \in V$   $(\mathcal{H}x|\mathcal{H}y) = (x|y)$ . Чтобы зафиксировать билинейную форму, необходимо и достаточно знать ее значения на всевозможных парах векторов какого-нибудь базиса. Иными словами, необходимо охарактеризовать класс невырожденных матриц  $H$  (выступающих в качестве матриц перехода от базиса  $e_1, \dots, e_n$  к базису  $e'_1, \dots, e'_n$ ), удовлетворяющих уравнению

$$H^T F H = F, \quad (2.1.3)$$

где  $F$  – матрица билинейной формы, задающей скалярное произведение, в базисе  $e_1, \dots, e_n$ . Проще всего изучать ортогональные преобразования как преобразования, переводящие ортонормированный базис в (возможно, другой) ортонормированный базис, т. е. мы приходим к случаю  $F = E$ :

$$H^T H = E. \quad (2.1.4)$$

Уравнение (2.1.4) в точности означает, что  $H^{-1} = H^T$  или, равносильно,  $HH^T = E$ .

**Определение 2.1.25.** Вещественная матрица, удовлетворяющая одному из равносильных уравнений  $H^T H = E$  либо  $HH^T = E$ , называется *ортогональной*.

Ортогональные преобразования данного евклидова пространства составляют группу относительно композиции (докажите!). Ортогональные матрицы размера  $n$  составляют группу относительно матричного умножения (докажите!).

**Упражнение 2.1.26.** Докажите, что группа ортогональных преобразований  $n$ -мерного евклидова пространства изоморфна группе ортогональных матриц размера  $n$ .

Группа ортогональных матриц размера  $n$  обозначается  $O(n)$ . При  $n \geq 2$  она неабелева.

Вычислим определитель левой и правой частей уравнения (2.1.4):

$$\det(H^T H) = \det H^T \det H = (\det H)^2 = 1,$$

откуда  $\det H = \pm 1$ . Таким образом, ортогональная группа  $O(n)$  подразделяется в объединение двух непересекающихся подмножеств:  $O^+(n)$  – подмножество матриц с определителем 1 и  $O^-(n)$  – подмножество матриц с определителем  $-1$ . Между этими двумя подмножествами существует биекция, осуществляемая умножением матрицы на  $-1$ .

**Упражнение 2.1.27.** Докажите, что  $O^+(n)$  является подгруппой в  $O(n)$ , а  $O^-(n)$  – нет.

**Определение 2.1.28.** Группа  $O^+(n)$  ортогональных матриц с определителем, равным 1, называется *специальной ортогональной группой в размерности  $n$*  и обозначается  $SO(n)$ .

Группа  $O(n)$  является подгруппой группы  $GL_{\mathbb{R}}(n)$  всех вещественных невырожденных матриц. Всякая вещественная матрица  $H$  размера  $n$  может быть интерпретирована как точка некоторого  $n^2$ -мерного «геометрического» (или аффинного – точный смысл этого понятия будет раскрыт в отдельной главе) вещественного пространства  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^{n^2} = Mat_{\mathbb{R}}(n)$ , в котором матричные элементы  $h_{ij}$  играют роль координат. При этом невырожденные матрицы составляют в этом пространстве открытое подмножество, получаемое удалением геометрического места  $\Delta_0$  матриц с нулевым определителем, то есть матриц, удовлетворяющих уравнению  $n$ -й степени  $\det H = 0$ . Итак,  $GL_{\mathbb{R}}(n) = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^{n^2} \setminus \Delta_0$ . Кроме того, подгруппа  $O(n)$  составляет замкнутое подмножество, задаваемое системой квадратных уравнений (2.1.4), причем имеет место разложение в объединение двух замкнутых подмножеств  $O(n) = O^+(n) \cup O^-(n)$ , задаваемых в группе  $O(n)$  уравнениями  $\det H = 1$  и  $\det H = -1$  соответственно. Поскольку определитель  $\det : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$  – функция, непрерывная по координатам,

то объединение  $O^+(n) \cup O^-(n)$  несвязное. Рассмотрев в  $GL_{\mathbb{R}}(n)$  еще подгруппу матриц с определителем, равным 1 (так называемую унимодулярную группу  $SL_{\mathbb{R}}(n)$ ), получим  $SO(n) = O^+(n) = SL_{\mathbb{R}}(n) \cap O(n)$ .

## 2.2. Симплектические преобразования симплектических пространств

### 2.2.1. Отступление: пфаффиан

Согласно теореме о приведении кососимметрической формы к каноническому виду, для любой невырожденной кососимметрической матрицы  $F$  найдется невырожденная матрица  $H$  такая, что  $H^T F H = J_0$ . Вычислив детерминанты левой и правой частей, приходим к соотношению  $(\det H)^2 \det F = 1$ . Отсюда заключаем, что

$$\det F = 1/(\det H)^2, \quad (2.2.1)$$

т. е. *детерминант невырожденной кососимметрической матрицы является полным квадратом в поле коэффициентов.*

Теперь обратим внимание на тот факт, что (2.2.1) представляет собой равенство полиномиальных функций от матричных элементов. Кососимметрическая матрица  $F$  задается  $n(n-1)$  элементами, расположенными, скажем, над главной диагональю. Пусть  $T$  – кососимметрическая матрица с переменными элементами  $t_{12}, \dots, t_{1n}, t_{23}, \dots, t_{2n}, \dots, t_{n-1,n}$ . Возьмем кольцо полиномов  $Z[T] := \mathbb{Z}[t_{12}, \dots, t_{1n}, t_{23}, \dots, t_{2n}, \dots, t_{n-1,n}]$  от них с коэффициентами в  $Z = \mathbb{Z}$ , если  $k$  – поле нулевой характеристики, и в  $\mathbb{Z}_p$ , если поле  $k$  имеет характеристику  $p$ . Очевидно, это область целостности (ассоциативное коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля), и поэтому можно сформировать ее поле частных, которое есть поле  $Q(Z)(T)$  рациональных функций от элементов матрицы  $T$  с коэффициентами в поле частных  $Q(Z)$  кольца  $Z$ .

Реализация метода Лагранжа для приведения кососимметрической формы к каноническому виду приводит, при легко выполнимых предположениях о необращении в нуль некоторых элементов  $t_{ij}$ , к локально определенным функциональным зависимостям элементов матрицы  $H$  от всего набора элементов  $t_{ij}$ . Эти зависимости выражаются рациональными функциями от переменных  $t_{ij}$ . Таким образом,  $\det T$  является полным квадратом в поле дробей  $Q(Z)(T)$ . Более того, поскольку  $\det T \in Z[T]$  и  $Z[T]$  – кольцо с однозначным разложением на неприводимые, то  $\det T$  – полный квадрат в кольце  $Z[T]$ , т. е. существует полином  $P_n(T) \in Z[T]$  такой, что  $\det T = (P_n(T))^2$ . Нормируем полином  $P_n(T)$  так, что  $P_n(J) = 1$ .

Полученный полином называется *общим пфаффианом* размера  $n$  и обозначается  $\text{Pf}_n(T)$ . Низшие пфаффианы имеют следующий вид:

$$\text{Pf}_2(T) = t;$$

$$\text{Pf}_4(T) = t_{12}t_{34} - t_{13}t_{24} + t_{14}t_{23} \quad (\text{квадрика Плюккера}).$$

**Теорема 2.2.1.** (*Вынесение пфаффиана за скобки*) Для любой кососимметрической матрицы  $F$  и для любой матрицы  $H$  выполнено равенство  $\text{Pf}_n(H^T F H) = \det H \text{Pf}_n F$ .

*Доказательство.* Пусть  $U = (u_{ij})$  – произвольная матрица с  $k$ -алгебраически независимыми коэффициентами  $u_{ij}$ ,  $T$  – кососимметрическая матрица. Пользуясь определением пфаффиана, получим

$$(\text{Pf}_n U^T T U)^2 = \det U^T T U = (\det U)^2 \det T = (\det U)^2 (\text{Pf}_n T)^2,$$

откуда  $\text{Pf}_n U^T T U = \pm \det U \text{Pf}_n T$ . Для выяснения знака положим  $U = E$ ,  $T = J$ , откуда  $\text{Pf}_n U^T T U = \det U \text{Pf}_n T$ .  $\square$

### 2.2.2. Симплектическая группа

**Определение 2.2.2.** Автоморфизм симплектического пространства называется *симплектическим преобразованием*.

Очевидно, симплектические преобразования симплектического пространства  $V$  размерности  $2m$  составляют группу относительно композиции. Она называется *симплектической группой* размера  $2m$  и обозначается символом  $Sp_k(2m)$ . Матричная форма условия, которому должен удовлетворять симплектический автоморфизм, получается из (2.1.3) подстановкой  $F = J_0$ :

$$H^T J_0 H = J_0. \quad (2.2.2)$$

Матрица, удовлетворяющая этому условию, называется *симплектической*. Вычисляя определители левой и правой частей в (2.2.2), получаем  $(\det H)^2 = 1$ , и  $\det H = \pm 1$ . Используя пфаффиан, вычислим знак определителя:  $1 = \text{Pf } J_0 = \text{Pf } (H^T J_0 H) = \det H \text{Pf } J_0 = \det A$ .

Низшая симплектическая группа  $Sp_{\mathbb{R}}(2)$  имеет следующее описание.

**Утверждение 2.2.3.**  $Sp_{\mathbb{R}}(2) \cong SL_{\mathbb{R}}(2)$ .

*Доказательство.* Требуемое получается из явного вычисления:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\delta - \beta\gamma \\ -(\alpha\delta - \beta\gamma) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$



### 2.2.3. Спектр симплектического оператора

**Определение 2.2.4.** Полином  $f(t) \in k[t]$  степени  $d$  называется *возвратным*, если он удовлетворяет соотношению  $f(t) = t^d f(1/t)$ .

**Предложение 2.2.5.** (*Корни возвратного полинома*) Если  $f(t)$  – возвратный полином и  $\lambda$  – его корень, то  $1/\lambda$  – также его корень.

*Доказательство.* Подстановка  $\lambda$  в соотношение  $f(t) = t^d f(1/t)$  дает  $\lambda^d f(1/\lambda) = 0$  при  $\lambda \neq 0$ . Тогда  $f(1/\lambda) = 0$ .  $\square$

**Предложение 2.2.6.** (*Характеристический полином симплектического оператора*) Характеристический полином симплектического оператора является возвратным.

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{H}$  – симплектический оператор,  $H$  – его матрица в некотором базисе. Тогда она удовлетворяет соотношению  $H^T J_0 H = J_0$ . Выражая  $H^T$ , получаем  $H^T = J_0 H^{-1} J_0^{-1}$  и, после обращения,  $(H^T)^{-1} = J_0 H J_0^{-1} = -J_0 H J_0$ . Теперь вычислим характеристический полином:

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{H}}(t) &= \det(tE - A) = \det J_0(tE - A)J_0^{-1} = \det(tE - J_0 H J_0^{-1}) \\ &= \det(tE - (H^T)^{-1}) = \det(tE - H^{-1})^T = \det(tE - H^{-1}).\end{aligned}$$

Далее заметим, что  $\det H = 1$ , поэтому

$$\begin{aligned}\det(tE - H^{-1}) &= \det(tE - H^{-1}) \det H = \det(tH - E) \\ &= t^{2m} \det(H - \frac{1}{t}E) = t^{2m} \chi_{\mathcal{H}}(1/t).\end{aligned}$$

$\square$

Таким образом, *характеристические корни, а значит, и собственные значения симплектического оператора, объединены в пары взаимно обратных друг другу элементов.*

Пусть рассматривается симплектический оператор над полем вещественных чисел. Тогда его комплексные характеристические корни образуют также пары комплексно сопряженных элементов. Итак, *комплексные характеристические корни вещественного симплектического оператора объединяются в четверки по правилу  $\lambda, \bar{\lambda}, 1/\lambda, 1/\bar{\lambda}$ . Собственные значения такого оператора, будучи вещественными, объединяются в пары взаимно обратных элементов.*

## 2.3. Эрмитовы векторные пространства

### 2.3.1. Полуторалинейные и эрмитовы формы

Пусть  $V$  –  $n$ -мерное векторное пространство над полем  $\mathbb{C}$ . Попытка ввести на нем скалярное произведение по образцу евклидова пространства с использованием удачно подобранной билинейной формы терпит неудачу. Если, например,  $f$  – билинейная форма, определенная на пространстве  $V$ , и для вектора  $v \in V$  «скалярный квадрат»  $f(v, v)$  положителен, то для вектора  $iv$  мы придем к неравенству  $f(iv, iv) < 0$ . Тем самым, на комплексном векторном пространстве с билинейной формой определить норму вектора как неотрицательный квадратный корень из скалярного квадрата не представляется возможным.

**Определение 2.3.1.** Полуторалинейной формой на комплексном векторном пространстве  $V$  называется функция  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , обладающая свойствами:

1. *Линейность по первому аргументу:* для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  и для любых  $x, y, z \in V$  выполнено

$$f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z);$$

2. *Полулинейность по второму аргументу:* для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  и для любых  $x, y, z \in V$  выполнено

$$f(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} f(x, y) + \bar{\beta} f(x, z).$$

**Определение 2.3.2.** Полуторалинейная форма  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  называется эрмитовой, если для любых векторов  $x, y \in V$  выполнено

$$f(x, y) = \overline{f(y, x)}.$$

Выберем в пространстве  $V$  какой-нибудь базис  $e_1, \dots, e_n$ ; пусть векторы  $x, y \in V$  имеют в нем координатные представления  $x = \sum_i e_i x_i$  и  $y = \sum_j e_j y_j$  соответственно. Тогда значение полуторалинейной формы  $f$  на упорядоченной паре векторов  $x, y$  дается выражением

$$f(x, y) = f\left(\sum_i e_i x_i, \sum_j e_j y_j\right) = \sum_{i,j} x_i f(e_i, e_j) \bar{y}_j.$$

Итак, естественно возникает матрица  $F$  полуторалинейной формы  $f$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ , состоящая из элементов  $f_{ij} := f(e_i, e_j)$ . В матричной форме, обозначив за  $\bar{Y}$  столбец комплексных чисел, комплексно сопряженных к соответствующим координатам вектора  $y$ , получим

$$f(x, y) = X^T F \bar{Y}.$$

Пусть полуторалинейная форма  $f$  эрмитова. Тогда

$$f_{ij} = f(e_i, e_j) = \overline{f(e_j, e_i)} = \overline{f_{ji}}.$$

В матричных обозначениях имеем  $F = \overline{F}^T$ , где символ  $\overline{F}$  означает матрицу, состоящую из элементов, комплексно сопряженных к соответствующим элементам матрицы  $F$ . Операция  $F \mapsto \overline{F}^T$  иногда обозначается звездой  $\overline{F}^T =: F^*$  и называется *эрмитовым сопряжением на матрицах*. В такой терминологии матрица  $F$ , удовлетворяющая соотношению  $F = F^*$ , называется *эрмитово симметричной*. Итак, мы доказали, что *матрица эрмитовой формы эрмитово симметрична*.

При этом свойство матрицы полуторалинейной формы быть эрмитово симметричной не нарушается при смене базиса. Пусть  $H$  – матрица перехода от базиса  $e_1, \dots, e_n$  к базису  $e'_1, \dots, e'_n$ . Тогда матрица  $F'$  полуторалинейной формы  $f(\cdot, \cdot)$  в базисе  $e'_1, \dots, e'_n$  связана с матрицей  $F$  той же формы в базисе  $e_1, \dots, e_n$  соотношением  $F' = H^T F \overline{H}$ . Применяв к матрицам левой и правой частей этого равенства эрмитово сопряжение, получим  $F'^* = (H^T F \overline{H})^* = \overline{(H^T F \overline{H})}^T = H^T F^* \overline{H}$ . Из полученной цепочки равенств заключаем, что матрица  $F'$  эрмитово симметрична тогда и только тогда, когда таким же свойством обладает матрица  $F$ .

### 2.3.2. Эрмитово скалярное произведение

**Определение 2.3.3.** Эрмитовой квадратичной формой называется композиция  $q : V \xrightarrow{\delta} V \times V \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ , где  $\delta : V \hookrightarrow V \times V : x \mapsto (x, x)$  – диагональное вложение,  $f$  – эрмитова форма.

В силу эрмитовой симметрии формы  $f$  для каждого вектора  $x \in V$  имеем равенства  $q(x) = f(x, x) = \overline{f(x, x)} = \overline{q(x)}$ . Таким образом, эрмитова квадратичная форма принимает только вещественные значения.

**Определение 2.3.4.** Если для всех векторов  $x \in V$  выполнено  $q(x) \geq 0$ , причем  $q(x) = 0$  только для нулевого вектора, то эрмитова квадратичная форма  $q$  называется *положительно определенной*. Породившая ее эрмитова форма  $f$  в точности при этих условиях тоже называется *положительно определенной*.

Поскольку любая эрмитова форма есть комплекснозначная функция, то ее можно записать в виде  $f(\cdot, \cdot) = g(\cdot, \cdot) + ih(\cdot, \cdot)$  для подходящих вещественнозначных функций  $g$  и  $h$ .

**Упражнение 2.3.5.** Непосредственной проверкой убедитесь в том,

что функции  $g$  и  $h$   $\mathbb{R}$ -билинейны, причем  $g$  симметрическая, а  $h$  кососимметрическая.

**Упражнение 2.3.6.** Докажите, что эрмитова форма  $f$  положительно определена тогда и только тогда, когда композиция  $g \circ \delta$  на множестве  $V \setminus 0$  принимает только положительные значения.

**Определение 2.3.7.** Конечномерное  $\mathbb{C}$ -векторное пространство  $V$ , снабженное положительно определенной эрмитовой формой  $(\cdot|\cdot)$ , называется *эрмитовым*, или *унитарным*, *векторным пространством*. Для упорядоченной пары векторов  $x, y$  значение  $(x|y)$  называется *скалярным произведением* векторов  $x, y$ .

Положительная определенность скалярного произведения делает возможным введение нормы (длины) вектора, поскольку скалярный квадрат любого вектора – неотрицательное вещественное число.

**Определение 2.3.8.** *Длиной*, или *нормой*, вектора  $x$  в эрмитовом векторном пространстве  $V$  называется неотрицательное вещественное число, равное  $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ .

Очевидно, что для любого скаляра  $\lambda \in \mathbb{C}$  и любого вектора  $x$  в эрмитовом пространстве  $V$  выполнено равенство  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ . Также, поскольку эрмитово скалярное произведение невырожденно, нулевой вектор и только он обладает нулевой нормой.

**Пример 2.3.9.** Равенство  $(x|y) = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n$  представляет собой положительно определенную эрмитову форму на комплексном координатном пространстве  $\mathbb{C}^n$ , обладающую в стандартном базисе единичной матрицей. Это выражение задает эрмитово скалярное произведение, называемое *стандартным*. Итак,  $(\mathbb{C}^n, (\cdot|\cdot))$  – эрмитово векторное пространство. Норма  $\|x\|$  вектора  $x$  в этом пространстве вычисляется по формуле  $\|x\| = \sqrt{x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_n} = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$ .

### 2.3.3. Эрмитово пространство: основные результаты

**Предложение 2.3.10.** (*Эрмитово скалярное произведение в терминах норм*) Для любых двух векторов  $u, v$  эрмитова векторного пространства  $V$  справедливо равенство

$$2(u|v) = \|u + v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - (1 + i)(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

**Упражнение 2.3.11.** Докажите тождество предложения 2.3.10.

**Теорема 2.3.12.** (Неравенство Коши – Буняковского – Шварца) Для любых векторов  $x, y$  эрмитова пространства справедливо неравенство

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Знак равенства имеет место в том и только том случае, когда векторы  $x$  и  $y$  линейно зависимы.

*Доказательство.* Для доказательства рассмотрим тригонометрическую форму записи комплексного числа  $(x|y) = |(x|y)|e^{i\varphi}$ , где  $\varphi$  – аргумент числа  $(x|y)$ . Введем вещественную переменную  $t$  и рассмотрим скалярный квадрат линейной комбинации  $xt + ye^{i\varphi}$ :

$$(xt + ye^{i\varphi}|xt + ye^{i\varphi}) = \|x\|^2 t^2 + (x|y)te^{-i\varphi} + \overline{(x|y)}te^{i\varphi} + \|y\|^2 \geq 0.$$

Заметив, что  $(x|y)e^{-i\varphi} = |(x|y)| = \overline{(x|y)}e^{i\varphi}$ , приходим к неравенству с вещественными коэффициентами  $\|x\|^2 t^2 + 2|(x|y)|t + \|y\|^2 \geq 0$ , которое, по школьному правилу, равносильно следующему:  $|(x|y)|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$ . В случае равенства  $t$  – единственный двукратный корень вещественного квадратного трехчлена  $\|x\|^2 t^2 + 2|(x|y)|t + \|y\|^2$ , то есть  $|(x|y)|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 = 0$ . С другой стороны, из невырожденности скалярного произведения имеем  $xt + ye^{i\varphi} = 0$ .  $\square$

**Следствие 2.3.13.** (Возможность измерения углов) Неравенство Коши – Буняковского позволяет ввести величину  $\widehat{(x, y)}$  угла между векторами  $x$  и  $y$ , полагая

$$0 \leq \widehat{(x, y)} \leq \pi \quad \text{и} \quad \cos \widehat{(x, y)} = \frac{|(x|y)|}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

**Следствие 2.3.14.** (Неравенство треугольника) Для любой пары векторов  $x, y$  выполнено неравенство

$$\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Доказательство совершенно аналогично евклидову случаю. Иногда бывает полезной следующая запись неравенства треугольника:

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|.$$

**Следствие 2.3.15.** (Эрмитова многомерная теорема Пифагора) Пусть векторы  $x_1, \dots, x_m$  эрмитова пространства попарно ортогональны, т. е.  $(x_i|x_j) = 0$  при  $i \neq j$ . Тогда справедливо равенство

$$\|x_1 + \dots + x_m\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_m\|^2.$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
\|x_1 + \dots + x_m\|^2 &= (x_1 + \dots + x_m | x_1 + \dots + x_m) \\
&= (x_1 | x_1) + \dots + (x_m | x_m) \\
&\quad + \overline{(x_1 | x_2)} + \dots + \overline{(x_1 | x_m)} + \overline{(x_2 | x_3)} + \dots + \overline{(x_{m-1} | x_m)} \\
&\quad + (x_1 | x_2) + \dots + (x_1 | x_m) + (x_2 | x_3) + \dots + (x_{m-1} | x_m) \\
&= \|x_1\|^2 + \dots + \|x_m\|^2.
\end{aligned}$$

□

#### 2.3.4. Ортогональность и ортонормированные базисы

Определения ортогональности векторов и ортонормированного базиса в эрмитовом пространстве аналогичны евклидову случаю.

**Определение 2.3.16.** Векторы  $u, v$  эрмитова пространства  $(V, (\cdot | \cdot))$  *ортогональны*, если  $(u | v) = 0$ .

Несмотря на то что переход от евклидова пространства к эрмитову приводит к замене симметрии скалярного произведения на эрмитову симметрию, отношение ортогональности в эрмитовом пространстве симметрично:  $(u | v) = 0 \Leftrightarrow (v | u) = \overline{(u | v)} = 0$ . Поэтому множество векторов  $x \in V$ , ортогональных данному вектору  $v$ , задается уравнением  $(v | x) = 0$  или равносильным уравнением  $(x | v) = 0$ .

Аналогично евклидову случаю доказывается, что система попарно ортогональных векторов линейно независима.

Пусть  $W \subset V$  – подпространство эрмитова пространства  $V$ .

**Определение 2.3.17.** (Эрмитовым) *ортогональным дополнением подпространства  $W$*  называется подмножество

$$W^\perp = \{v \in V | \forall w \in W \ (v | w) = 0\}.$$

Нетрудно проверить, что  $W^\perp$  является подпространством пространства  $V$  (убедитесь в этом!).

Пусть подпространство  $W$  задано как линейная оболочка своего подмножества  $M$ :  $W = \langle M \rangle$ . Аналогично евклидову случаю, эрмитово ортогональное дополнение  $W^\perp$  определяется системой уравнений  $(x | m) = 0$ ,  $m \in M$ . В частности, это позволяет вычислять ортогональное дополнение подпространства, используя базис этого подпространства.

**Упражнение 2.3.18.** Пусть  $(\cdot | \cdot)$  – невырожденная эрмитова форма. Докажите, что  $V = W \oplus W^\perp$ .

Это означает, что, в силу невырожденности эрмитовой формы  $(\cdot|\cdot)$ , можно провести индуктивное построение ортогонального разложения эрмитова векторного пространства на  $n$  одномерных слагаемых. Подпространство  $V'$  определим как ортогональное дополнение подпространства  $\langle e_1 \rangle$ . Вектор  $e_1$  выбирается так, что  $q(e_1) = (e_1|e_1) \neq 0$ , и полученное разложение оказалось прямым. Ограничение формы  $(\cdot|\cdot)$  на подпространство  $V'$  и итерация процедуры приводит к ортогональному прямому разложению из  $n$  (попарно ортогональных) слагаемых  $V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle$ . Иными словами, *любое эрмитово  $n$ -мерное векторное пространство допускает ортогональное прямое разложение длины  $n$* . Таким образом, в любом эрмитовом векторном пространстве существуют ортогональные базисы. Нормируя векторы ортогонального базиса  $e_1, \dots, e_n$  так, чтобы  $\|e_i\| = 1$  для  $i = 1, \dots, n$ , получим (эрмитов) ортонормированный базис.

**Определение 2.3.19.** Базис  $e_1, \dots, e_n$  эрмитова векторного пространства  $(V, (\cdot|\cdot))$  называется ортонормированным, если он удовлетворяет условиям  $(e_i|e_j) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ .

*Замечание 2.3.20.* Проведенные рассуждения показывают, что невырожденная положительно определенная эрмитова форма выбором подходящего базиса может быть приведена к виду, в котором ее матрица единичная. Базисы, в которых форма скалярного произведения в эрмитовом пространстве имеет единичную матрицу, – это в точности ортонормированные базисы.

Теорема 2.1.18 об ортогонализации вместе с доказательством и алгоритмом Грама – Шмидта также переносятся в эрмитово пространство.

Аналогично евклидову случаю доказывается теорема о рефлексивности ортогональных дополнений для эрмитова пространства. Доказательство опирается лишь на существование ортогонального прямого разложения в сумму подпространства и его ортогонального дополнения, симметрию отношения ортогональности и аддитивность скалярного произведения и переносится в нашу ситуацию дословно.

**Теорема 2.3.21.** *(Рефлексивность ортогональных дополнений) Пусть  $L$  – подпространство векторного пространства  $V$ , наделенного такой симметрической билинейной формой  $f$ , что  $f(v, v) = 0$  только при  $v = 0$ . Тогда  $L^{\perp\perp} = L$ .*

**Теорема 2.3.22.** Пусть  $e_1, \dots, e_n$  – ортонормированный базис эрмитова или евклидова пространства  $(V, (\cdot|\cdot))$ . Тогда

1 (Координаты как проекции). Для любого вектора  $x \in V$  имеет место представление  $x = \sum_i e_i(x|e_i)$ .

2 (Равенство Парсеваля). Для любых векторов  $x, y \in V$  справедливо равенство  $(x|y) = \sum_i (x|e_i)(e_i|y)$ .

3 (Вычисление нормы). Для любого вектора  $x \in V$  норма может быть вычислена по формуле  $\|x\|^2 = \sum_i |(x|e_i)|^2$ .

*Доказательство.* 1. Пусть  $x = \sum_i e_i x_i$  – координатное представление вектора  $x$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ . Выразим отсюда координаты  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , умножая обе части выражения скалярно на  $e_j$  и используя условие ортонормированности  $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$ :  $(x|e_j) = \sum_i x_i(e_i|e_j) = \sum_i x_i \delta_{ij} = x_j$ .

2. Вычислим скалярное произведение векторов  $x$  и  $y$ , используя их координатные представления в ортонормированном базисе  $e_1, \dots, e_n$ , используя для координат равенства пункта 1:

$$\begin{aligned} (x|y) &= \left( \sum_i x_i e_i \middle| \sum_j y_j e_j \right) = \sum_{ij} x_i (e_i|e_j) \bar{y}_j = \sum_i x_i \bar{y}_i \\ &= \sum_i (x|e_i) \overline{(y|e_i)} = \sum_i (x|e_i)(e_i|y). \end{aligned}$$

3. Норму вектора  $x$  также легко вычислить, используя пункт 1:

$$\|x\|^2 = \left( \sum_i x_i e_i \middle| \sum_j x_j e_j \right) = \sum_i x_i \bar{x}_i = \sum_i |(x|e_i)|^2.$$

□

Пусть  $(V, (\cdot|\cdot))$  и  $(V', (\cdot|\cdot)')$  – эрмитовы векторные пространства.

**Определение 2.3.23.** *Изоморфизмом эрмитовых векторных пространств* называется изоморфизм векторных пространств  $\phi : V \xrightarrow{\sim} V'$ , отождествляющий эрмитовы формы, т. е. включаемый в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{(\cdot|\cdot)} & \mathbb{R} \\ (\phi, \phi) \downarrow & \nearrow (\cdot|\cdot)' & \\ V' \times V' & & \end{array} \quad (2.3.1)$$

*Замечание 2.3.24.* Коммутативность диаграммы (2.3.1) означает, что для любых векторов  $x, y \in V$  выполнено равенство  $(x|y) = (\phi(x)|\phi(y))$ . Иными словами, *изоморфизм  $\phi$  сохраняет скалярное произведение*.

Выбор ортонормированного базиса в  $n$ -мерном эрмитовом пространстве  $(V, (\cdot|\cdot))$  поставяет изоморфизм эрмитова пространства  $(V, (\cdot|\cdot))$  на



стандартное  $n$ -мерное эрмитово пространство  $(\mathbb{C}^n, (\cdot|\cdot))$ . Таким образом, имеет место очевидная теорема классификации.

**Теорема 2.3.25.** *(Классификация эрмитовых векторных пространств) Любое  $n$ -мерное эрмитово векторное пространство изоморфно стандартному эрмитову векторному пространству той же размерности. Класс изоморфных эрмитовых векторных пространств определяется натуральным числом – размерностью  $n$ .*

*Замечание 2.3.26.* Все результаты об эрмитовых векторных пространствах могут быть получены вычислениями в стандартном эрмитовом векторном пространстве той же размерности.

*Замечание 2.3.27.* Линейность скалярного произведения по первому аргументу позволяет каждому вектору  $v$  эрмитова векторного пространства  $V$  поставить в соответствие линейную форму  $f_v = (\cdot|v)$ . Однако определенное таким образом отображение  $V \rightarrow V^\vee$ , являясь гомоморфизмом абелевых групп, *не является линейным*. Оно *полулинейно*: для любых векторов  $v_1, v_2$  и для любых скаляров  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  выполнено равенство  $(\cdot|\alpha v_1 + \beta v_2) = \bar{\alpha}(\cdot|v_1) + \bar{\beta}(\cdot|v_2)$ , то есть  $f_{\alpha v_1 + \beta v_2} = \bar{\alpha}f_{v_1} + \bar{\beta}f_{v_2}$ .

### 2.3.5. Унитарная группа

В этом пункте мы охарактеризуем автоморфизмы эрмитова пространства  $(V, (\cdot|\cdot))$ . Это, очевидно, такие автоморфизмы векторного пространства  $V$ , которые сохраняют эрмитову форму скалярного произведения.

**Определение 2.3.28.** Автоморфизм эрмитова пространства называется *унитарным преобразованием*.

Для характеристики изоморфизмов  $\mathcal{H}$ , сохраняющих эрмитово скалярное произведение, достаточно изучать отображения, сохраняющие вид матрицы эрмитовой формы скалярного произведения: для любых  $x, y \in V$   $(\mathcal{H}x|\mathcal{H}y) = (x|y)$ . Чтобы зафиксировать полуторалинейную форму, необходимо и достаточно знать ее значения на всевозможных парах векторов какого-нибудь базиса. Иными словами, необходимо охарактеризовать класс невырожденных матриц  $H$  (выступающих в качестве матриц перехода от базиса  $e_1, \dots, e_n$  к базису  $e'_1, \dots, e'_n$ ), удовлетворяющих уравнению

$$H^T F \bar{H} = F, \quad (2.3.2)$$

где  $F$  – матрица полуторалинейной формы, задающей скалярное произведение, в базисе  $e_1, \dots, e_n$ . Проще всего изучать унитарные преобразования как преобразования, переводящие ортонормированный базис в

(возможно, другой) ортонормированный базис, т. е. мы приходим к случаю  $F = E$ :

$$H^T \overline{H} = E. \quad (2.3.3)$$

Уравнение (2.3.3) в точности означает, что  $H^{-1} = H^*$  или, равносильно,  $HH^* = E$ .

**Определение 2.3.29.** Матрица, удовлетворяющая одному из равносильных уравнений  $H^*H = E$  либо  $HH^* = E$ , называется *унитарной*.

**Упражнение 2.3.30.** 1. Докажите, что унитарные преобразования данного эрмитова пространства составляют группу относительно композиции. 2. Докажите, что унитарные матрицы размера  $n$  составляют группу относительно матричного умножения. 3. Докажите, что группа унитарных преобразований  $n$ -мерного евклидова пространства изоморфна группе ортогональных матриц размера  $n$ .

Группа унитарных матриц размера  $n$  обозначается  $U(n)$ . При  $n \geq 2$  она неабелева. Наиболее просто устроена группа  $U(1)$ : это группа по умножению, образованная всеми комплексными числами, имеющими абсолютную величину, равную 1. Понятно, что группа  $U(1)$  имеет топологию окружности.

Вычислим определитель левой и правой частей уравнения  $HH^* = E$ :

$$\det(HH^*) = \det H \det H^* = (\det H)(\overline{\det H}) = |\det H|^2 = 1,$$

откуда  $|\det H| = 1$ , т. е.  $\det H = e^{i\varphi}$ .

Группа  $O(n)$  является подгруппой группы  $U(n)$  всех унитарных матриц. Рассмотрев в  $U(n)$  подгруппу, образованную всеми унитарными матрицами с определителем, равным 1, получим *специальную унитарную группу в размерности  $n$* , обозначаемую  $SU(n)$ . Она имеет очевидную интерпретацию как пересечение  $SU(n) = U(n) \cap SL_{\mathbb{C}}(n)$ , где  $SL_{\mathbb{C}}(n)$  – группа комплексных унимодулярных матриц размера  $n$ .

*Замечание 2.3.31.* \* Унитарные группы реализуются как группы внутренних (так называемых калибровочных) симметрий физических полей. Под калибровочной симметрией понимают симметрию уравнений физического поля, не зависящую от его конкретных пространственно-временных конфигураций. Простейшим примером калибровочного поля, т. е. поля с симметрией такого рода, является электромагнитное поле. Всем известно, что электрический потенциал точки определяется с точностью до аддитивной постоянной  $\varphi_0$ , а физическим смыслом наделено лишь напряжение, или разность потенциалов, между двумя точками. Это и есть

простейшее проявление калибровочной симметрии. Все уравнения электромагнитного поля (характеризуемого так называемым четырехмерным потенциалом  $(\varphi, \vec{A})$ , где  $\varphi$  – электрический,  $\vec{A}$  – магнитный потенциалы; измеряемыми величинами являются электрическая  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$  и магнитная  $\vec{H} = \text{rot}\vec{A}$  напряженности) остаются инвариантными относительно преобразований вида  $\varphi \mapsto \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$ ,  $\vec{A} \mapsto \vec{A} + \text{grad}f$ , где  $f$  – любая скалярная функция координат и времени. Частным случаем такого преобразования является прибавление к  $\varphi$  скалярной постоянной  $\varphi_0$  и к  $\vec{A}$  постоянного вектора. В так называемом лагранжевом формализме теории поля преобразование соответствует введению фазового множителя  $e^{i\Phi}$ . Это иллюстрирует тот факт, что калибровочной группой электромагнитного поля является группа  $U(1)$ . Так называемое слабое взаимодействие (одним из проявлений которого является  $\beta$ -распад радиоактивных изотопов некоторых химических элементов с избыточным либо недостаточным количеством нейтронов в ядре) имеет калибровочную группу  $SU(2)$ , а сильное взаимодействие (удерживающее протоны и нейтроны внутри атомных ядер, а кварки внутри протонов и нейтронов) – группу  $SU(3)$ .

## 2.4. Псевдоевклидовы пространства

### 2.4.1. Основные понятия

Пусть  $V$  – вещественное векторное пространство размерности  $n$  с фиксированной на нем неопределенной невырожденной квадратичной формой  $q(x) = \sum_{i,j} g_{ij}x_i x_j$ . Ей соответствует полярная билинейная форма  $(x|y) = \sum_{i,j} g_{ij}x_i y_j$ .

**Определение 2.4.1.** *Псевдоевклидовым векторным пространством сигнатуры  $(s, n-s)$  называется вещественное векторное пространство  $V$ , наделенное невырожденной билинейной формой  $(\cdot|\cdot)$  сигнатуры  $(s, n-s)$ . Эта форма, а также ее значение  $(x|y)$  на любой паре векторов  $x, y$ , называется псевдоскалярным произведением.*

При подходящем выборе базиса форма  $q$  приводится к нормальному виду:  $q(x) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_n^2$ . В нормальном базисе  $e_1, \dots, e_n$  полярная билинейная форма, задающая скалярное произведение, имеет вид:

$$(x|y) = x_1 y_1 + \dots + x_s y_s - x_{s+1} y_{s+1} - \dots - x_n y_n. \quad (2.4.1)$$

Заметим, что, в зависимости от выбора ненулевого вектора  $x \in V$ , квадрат его нормы  $\|x\|^2 = (x|x)$  может оказаться не только положительным,

но отрицательным или нулевым.

**Определение 2.4.2.** Вектор  $x \in V$  называется *изотропным*, если  $\|x\|^2 = 0$ . Вектор  $x \in V$  называется *положительным*, если  $\|x\|^2 > 0$ . Вектор  $x \in V$  называется *отрицательным*, если  $\|x\|^2 < 0$ .

Множество изотропных векторов данного псевдоевклидова пространства  $(V, (\cdot|\cdot))$  составляет так называемый *изотропный конус*.

*Предостережение: изотропный конус не совпадает с ядром формы  $(\cdot|\cdot)$  и не является векторным подпространством.*

**Упражнение 2.4.3.** Нарисуйте изотропные конусы для псевдоевклидовых пространств сигнатур  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 2)$ . Отметьте на рисунке области, в которых расположены положительные, а в которых – отрицательные векторы.

#### 2.4.2. Классификация псевдоевклидовых пространств

**Определение 2.4.4.** Псевдоевклидовы пространства  $(V, (\cdot|\cdot))$  и  $(V', (\cdot|\cdot)')$  называются *изоморфными*, если существует изоморфизм  $\mathbb{R}$ -векторных пространств  $\phi : V \xrightarrow{\sim} V'$ , отождествляющий билинейные формы, т.е. включаемый в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{(\cdot|\cdot)} & \mathbb{R} \\ (\phi, \phi) \downarrow & \nearrow (\cdot|\cdot)' & \\ V' \times V' & & \end{array} \quad (2.4.2)$$

*Замечание 2.4.5.* Коммутативность диаграммы (2.4.2) означает, что для любой пары векторов  $x, y \in V$  выполнено равенство  $(x|y) = (\phi(x)|\phi(y))$ . Иными словами, *изоморфизм  $\phi$  сохраняет псевдоскалярное произведение*.

**Определение 2.4.6.** Псевдоевклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  с псевдоскалярным произведением  $(\cdot|\cdot)$ , заданным выражением (2.4.1), называется *стандартным псевдоевклидовым пространством сигнатуры  $(s, n - s)$* .

Пусть  $(V, (\cdot|\cdot))$  – псевдоевклидово пространство. Тогда выбор нормального базиса для билинейной формы  $(\cdot|\cdot)$  поставляет изоморфизм пространства  $(V, (\cdot|\cdot))$  на стандартное псевдоевклидово пространство той же сигнатуры. Согласно закону инерции, сигнатура не зависит от выбора нормального базиса.

**Теорема 2.4.7.** (Классификация псевдоевклидовых пространств) *Псевдоевклидовы пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их сигнатуры совпадают.*

*Доказательство.* Пусть псевдоевклидовы пространства  $(V, (\cdot|\cdot))$  и  $(V', (\cdot|\cdot)')$  изоморфны и  $\phi : V \rightarrow V'$  – изоморфизм. Выберем нормальные базисы  $e_1, \dots, e_n$  в  $V$  и  $e'_1, \dots, e'_n$  в  $V'$ . Тогда  $\|e_i\|^2 = (e_i|e_i) = (e'_i|e'_i) = \|e'_i\|^2$  при  $i = 1, \dots, n$  и числа положительных и отрицательных квадратов у обоих базисов совпадают. Обратно, пусть пространства  $(V, (\cdot|\cdot))$  и  $(V', (\cdot|\cdot)')$  имеют равные сигнатуры; тогда, выбрав нормальные базисы, получим изоморфизмы обоих псевдоевклидовых пространств на стандартное пространство с той же сигнатурой.  $\square$

### 2.4.3. Псевдоортогональная группа

**Определение 2.4.8.** Автоморфизм псевдоевклидова пространства называется *псевдоортогональным преобразованием*.

**Определение 2.4.9.** *Псевдоортогональной группой* называется группа невырожденных линейных преобразований пространства  $V$ , сохраняющих псевдоскалярное произведение  $(\cdot|\cdot)$ . Иными словами, псевдоортогональная группа – это группа псевдоортогональных автоморфизмов пространства  $(V, (\cdot|\cdot))$ .

Псевдоортогональная группа однозначно, с точностью до изоморфизма, определяется сигнатурой пространства, на котором она действует. Поэтому псевдоортогональная группа сигнатуры  $(s, n - s)$  обозначается символом  $O(s, n - s)$ .

В нормальном базисе форме  $(\cdot|\cdot)$  соответствует блочно-диагональная матрица  $I_{s, n-s} = \text{diag}(E_s, -E_{n-s})$ , а линейному оператору  $\mathcal{A} \in O(s, n - s)$  – матрица  $A$ . Поскольку оператор  $\mathcal{A}$  сохраняет псевдоскалярное произведение, то соответствующая ему в нормальном базисе матрица  $A$  удовлетворяет уравнению

$$A^T I_{s, n-s} A = I_{s, n-s}. \quad (2.4.3)$$

Таким образом, псевдоортогональная группа  $O(s, n - s)$ , будучи подгруппой в  $GL_{\mathbb{R}}(n)$ , является замкнутым подмногообразием (пересечением аффинных квадрик). Вычисляя определители обеих частей уравнения (2.4.3), приходим к результату  $\det A = \pm 1$ . Тем самым, псевдоортогональная группа  $O(s, n - s)$  представляет собой приводимое многообразие, состоящее из двух компонент  $O(s, n - s) = O^+(s, n - s) \cup O^-(s, n - s)$ , соответствующих матрицам с определителем  $+1$  и  $-1$  соответственно. При этом преобразования с определителем  $+1$  называются *собственными* и составляют подгруппу  $O^+(s, n - s)$ . Компонента  $O^-(s, n - s)$ , как нетрудно заключить, подгруппой не является.

## Глава 3

# Линейная алгебра в евклидовых и эрмитовых пространствах

Эта глава посвящена выяснению общих закономерностей поведения линейных операторов и квадратичных форм в евклидовых и эрмитовых пространствах. Ее результаты богаты приложениями, и в первую очередь в физике. Многие результаты для эрмитова и евклидова случаев формулируются и доказываются одинаково. В таких ситуациях мы даем универсальное рассуждение либо приводим «эрмитову версию», а затем, где это необходимо, даем комментарий для евклидова пространства. Итак, мы работаем с векторными пространствами над двумя полями:  $k = \mathbb{R}$  либо  $k = \mathbb{C}$ .

### 3.1. Линейные операторы vs $\theta$ -линейные формы

#### 3.1.1. Линейные операторы и $\theta$ -линейные формы. Сопряжение

**Соглашение 3.1.1.** Введем собирательное название  $\theta$ -линейной формы; параметр  $\theta$  принимает 2 значения:  $\theta = 2$  для билинейной формы в евклидовом (вещественном) случае и  $\theta = 3/2$  для полуторалинейной формы в эрмитовом (комплексном) случае. Тогда множество всех  $\theta$ -линейных форм на вещественном ( $\theta = 2$ ) либо комплексном ( $\theta = 3/2$ ) пространстве  $V$  будем обозначать символом  $\theta Lin(V)$ .

Пусть  $\mathcal{A} \in End(V)$  – линейный оператор на пространстве  $V$  с положительно определенным скалярным произведением  $(\cdot|\cdot)$ . Поставим ему в соответствие  $\theta$ -линейную форму по правилу  $\mathcal{A} \mapsto (\mathcal{A} \cdot |\cdot)$ . Такое соответствие определяет отображение  $\Upsilon : End(V) \rightarrow \theta Lin(V)$ .

**Упражнение 3.1.2.** Докажите, что  $\Upsilon$  – изоморфизм  $k$ -векторных пространств.

По данной  $\theta$ -линейной форме  $f(\cdot, \cdot)$  можно построить линейный оператор  $\mathcal{A}_f$  такой, что  $f(\cdot, \cdot) = (\mathcal{A} \cdot | \cdot)$ . Для этого воспользуемся следующим рассуждением. Выберем ортонормированный базис  $e_1, \dots, e_n$ . Пусть  $F$  – матрица  $\theta$ -линейной формы  $f(\cdot, \cdot)$  в этом базисе. Пусть  $\mathcal{A}_f$  – линейный оператор, обладающий в базисе  $e_1, \dots, e_n$  матрицей  $F^T$ . Тогда для векторов  $x = \sum_i e_i x_i$  и  $y = \sum_j e_j y_j$  в матричных обозначениях получим

$$(\mathcal{A}_f x | y) = (F^T X)^T \bar{Y} = X^T F \bar{Y} = f(x, y).$$

Также можно построить линейный оператор  $\mathcal{A}_f^*$  такой, что  $f(\cdot, \cdot) = (\cdot | \mathcal{A}_f^* \cdot)$ . Если  $F$  – матрица  $\theta$ -линейной формы  $f(\cdot, \cdot)$  в ортонормированном базисе  $e_1, \dots, e_n$ , то определим  $\mathcal{A}_f^*$  как линейный оператор, обладающий в том же базисе матрицей  $\bar{F}$ . При этом получим

$$(x | \mathcal{A}_f^* y) = X^T (\bar{F} Y) = X^T F \bar{Y} = f(x, y).$$

**Определение 3.1.3.** Линейный оператор  $\mathcal{A}^*$  называется *сопряженным к линейному оператору  $\mathcal{A}$* , если  $\theta$ -линейные формы  $(\mathcal{A}^* \cdot | \cdot)$  и  $(\cdot | \mathcal{A} \cdot)$  равны.

Согласно проведенному рассуждению, соответствие  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^*$  поставляет корректно определенное отображение пространства  $End_k(V)$  в себя. Более того, отображение  $*$  :  $End_k(V) \rightarrow End_k(V) : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^*$  – инволюция, то есть  $* \circ *$  – тождественное отображение.

**Упражнение 3.1.4.** Докажите, что  $*$  :  $End_k(V) \rightarrow End_k(V) : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^*$  – инволюция.

Пусть  $A$  – матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  в ортонормированном базисе  $e_1, \dots, e_n$ . Тогда она выражается через матрицу  $F$   $\theta$ -линейной формы  $(\mathcal{A} \cdot | \cdot)$  как  $A = F^T$ . Матрица линейного оператора  $\mathcal{A}^*$ , сопряженного к линейному оператору  $\mathcal{A}$ , в том же ортонормированном базисе определялась как  $\bar{F}$ , т. е.  $\bar{A}^T = A^*$ . Итак,

*матрица линейного оператора, сопряженного к данному линейному оператору, в ортонормированном базисе является эрмитово сопряженной к матрице данного оператора в том же базисе.*

**Замечание 3.1.5.** Рассмотренное в этом пункте биективное соответствие между  $\theta$ -линейными формами и линейными операторами определяется скалярным произведением, т. е. эрмитовой (соответственно, евклидовой) структурой на пространстве  $V$ . Соответствие сохраняется, если в описанной матричной конструкции перейти от одного ортонормированного базиса к другому.

**Упражнение 3.1.6.** Докажите следующие свойства операции сопряжения на алгебре линейных операторов:

1. Для любых  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{End}_k(V)$   $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$ .
2. Для любых  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{End}_k(V)$   $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$ .
3. Для любого  $\mathcal{A} \in \text{End}_k(V)$  и для любого  $\alpha \in k$   $(\alpha\mathcal{A})^* = \bar{\alpha}\mathcal{A}^*$ .

Осуществляет ли сопряжение автоморфизм векторного пространства  $\text{End}_k(V)$ ? автоморфизм алгебры  $\text{End}_k(V)$ ?

### 3.1.2. Матрица линейного оператора, сопряженного данному

Выберем сначала ортонормированный базис  $e_1, \dots, e_n$ ; пусть  $A = (a_{ij})$  – матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  в выбранном базисе, а  $A^* = (a_{ij}^*)$  – матрица сопряженного ему линейного оператора в том же базисе. Тогда прямое вычисление дает

$$(\mathcal{A}^*e_i|e_j) = \left(\sum_s e_s a_{si}^* | e_j\right) = \sum_s a_{si}^* (e_s | e_j) = \sum_s a_{si}^* \delta_{sj} = a_{ji}^*.$$

С другой стороны, по определению оператора, сопряженного данному,

$$(\mathcal{A}^*e_i|e_j) = (e_i|\mathcal{A}e_j) = (e_i|\sum_r e_r a_{rj}) = \sum_r \bar{a}_{rj} (e_i|e_r) = \sum_r \bar{a}_{rj} \delta_{ir} = \bar{a}_{ij}.$$

Итак, в ортонормированном базисе  $a_{ji}^* = \bar{a}_{ij}$ , т.е.  $A^* = \bar{A}^T$ .

Пусть теперь  $e_1, \dots, e_n$  – произвольный (необязательно ортонормированный) базис,  $A = (a_{ij})$  – матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  в нем и  $A^* = (a_{ij}^*)$  – матрица сопряженного ему оператора  $\mathcal{A}^*$  в том же базисе. Выполним аналогичное вычисление:

$$(\mathcal{A}^*e_i|e_j) = \left(\sum_s e_s a_{si}^* | e_j\right) = \sum_s a_{si}^* (e_s | e_j) = \sum_s a_{si}^* g_{sj},$$

где введено обозначение  $g_{ij} = (e_i|e_j)$ . С другой стороны, по определению оператора, сопряженного данному,

$$(\mathcal{A}^*e_i|e_j) = (e_i|\mathcal{A}e_j) = (e_i|\sum_r e_r a_{rj}) = \sum_r \bar{a}_{rj} (e_i|e_r) = \sum_r \bar{a}_{rj} g_{ir}.$$

Итак,  $\sum_s a_{si}^* g_{sj} = \sum_r g_{ir} \bar{a}_{rj}$ . Элементы  $g_{ij} = (e_i|e_j)$  составляют матрицу  $G = (g_{ij})$ , называемую *матрицей Грама базиса*  $e_1, \dots, e_n$ . В матричной форме имеем  $(A^*)^T G = G \bar{A}$ , откуда  $A^* = (G \bar{A} G^{-1})^T$ . Матрица Грама ортонормированного базиса равна единичной, и снова получается простое выражение  $A^* = \bar{A}^T$ .



### 3.1.3. Эрмитовы и косоэрмитовы линейные операторы

Скалярное произведение на эрмитовом (евклидовом) пространстве  $V$  определяет операцию эрмитова сопряжения на множестве линейных операторов  $End_k(V)$ . В связи с этим выделяются два специальных класса линейных операторов.

**Определение 3.1.7.** Линейный оператор  $A \in End_k(V)$  называется *эрмитовым*, или *самосопряженным*, если  $A^* = A$ . Линейный оператор  $A \in End_k(V)$  называется *косоэрмитовым*, или *антисамосопряженным*, если  $A^* = -A$ .

Используя биективное соответствие между линейными операторами и  $\theta$ -линейными формами, для операторов обоих классов  $A^* = \pm A$  и для любых векторов  $x, y \in V$  получим

$$f_A(x, y) = (Ax|y) = \pm(x|Ay) = \pm(\overline{Ay|x}) = \pm\overline{f_A(y, x)}.$$

Таким образом, эрмитовым операторам соответствуют эрмитовы формы, косоэрмитовым операторам – косоэрмитовы формы. В любом ортонормированном базисе матрица эрмитова оператора эрмитова, т. е. удовлетворяет соотношению  $A^* = A$ , а матрица косоэрмитова оператора косоэрмитова, т. е. для нее выполнено  $A^* = -A$ .

В евклидовом случае эрмитову сопряжению соответствует транспонирование матрицы, и поэтому эрмитов оператор – это симметрический оператор, а косоэрмитов – это кососимметрический оператор.

**Теорема 3.1.8.** (Разложение оператора в пространстве со скалярным произведением) (i) Любой линейный оператор  $Z$  на эрмитовом (евклидовом) пространстве может быть однозначно представлен в виде суммы эрмитова и косоэрмитова операторов. (ii) Любой линейный оператор  $Z$  на эрмитовом пространстве может быть однозначно представлен в виде  $X + iY$ , где  $X$  и  $Y$  – эрмитовы операторы.

*Доказательство.* (i) Искомые эрмитов и косоэрмитов операторы задаются выражениями  $Z^+ = (Z + Z^*)/2$  и  $Z^- = (Z - Z^*)/2$ . Тем самым определено разложение  $End_k(V) = End_k^+(V) + End_k^-(V)$  векторного пространства всех линейных операторов в сумму подпространств, состоящих из всех эрмитовых  $End_k^+(V)$  и всех косоэрмитовых  $End_k^-(V)$  операторов соответственно. Эти подпространства пересекаются вдоль нулевого подпространства (убедитесь в этом!), поэтому сумма прямая, и разложение каждого линейного оператора на эрмитову и косоэрмитову составляющие определено однозначно.

(ii) Достаточно положить  $\mathcal{X} = \mathcal{Z}^+$ ,  $\mathcal{Y} = -i\mathcal{Z}^-$ . Читателю предлагается самостоятельно убедиться в том, что определенный таким образом линейный оператор  $\mathcal{Y}$  является эрмитовым.  $\square$

*Замечание 3.1.9.* Прямое разложение  $End_k(V) = End_k^+(V) \oplus End_k^-(V)$  пространства линейных операторов на эрмитову и косоэрмитову части не является разложением алгебры в прямую сумму подалгебр. Действительно, подпространства  $End_k^+(V)$  и  $End_k^-(V)$  не замкнуты относительно операции композиции: композиция эрмитовых операторов может не быть эрмитовым оператором. Аналогично, композиция косоэрмитовых операторов может не быть косоэрмитовым оператором.

**Теорема 3.1.10.** (*Эрмитовость композиции*) Композиция  $\mathcal{AB}$  эрмитовых операторов эрмитова тогда и только тогда, когда операторы коммутируют, т.е.  $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$ .

*Доказательство.*  $\mathcal{AB} = (\mathcal{AB})^* = \mathcal{B}^* \mathcal{A}^* = \mathcal{BA}$ .  $\square$

*Замечание 3.1.11.* (i) Класс эрмитовых операторов не является замкнутым относительно композиции. Однако, выбрав в качестве операции *антикоммутатор*, определяемый для двух операторов  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  по правилу

$$\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} = \frac{1}{2}(\mathcal{AB} + \mathcal{BA}),$$

получим, что если операторы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  эрмитовы, то

$$\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}^* = \frac{1}{2}(\mathcal{AB} + \mathcal{BA})^* = \frac{1}{2}(\mathcal{AB} + \mathcal{BA}) = \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\},$$

т. е. *антикоммутатор эрмитовых операторов эрмитов*. Операция антикоммутирования линейных операторов линейна по обоим аргументам, коммутативна и неассоциативна, а также удовлетворяет *тождеству Йордана*: для любых  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

$$\{\{\mathcal{A}^2, \mathcal{B}\}, \mathcal{A}\} = \{\mathcal{A}^2, \{\mathcal{B}, \mathcal{A}\}\}.$$

Класс всех эрмитовых операторов на данном эрмитовом пространстве  $V$  с операцией вычисления антикоммутатора составляет пример *йордановой алгебры*.

(ii) Класс косоэрмитовых операторов на эрмитовом пространстве  $V$  замкнут относительно *коммутатора*, определяемого формулой

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{AB} - \mathcal{BA}$$

(проверьте!), т. е. *коммутатор косоэрмитовых операторов косоэрмитов*. Эта операция линейна по обоим аргументам, антикоммутативна,

т. е. для любого оператора  $\mathcal{A}$  выполнено равенство  $[\mathcal{A}, \mathcal{A}] = \mathcal{O}$ , и удовлетворяет *тождеству Якоби*: для любых  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$

$$[\mathcal{A}, [\mathcal{B}, \mathcal{C}]] + [\mathcal{B}, [\mathcal{C}, \mathcal{A}]] + [\mathcal{C}, [\mathcal{A}, \mathcal{B}]] = \mathcal{O}.$$

Косоэрмитовы операторы с операцией коммутирования поставляют пример *алгебры Ли*.

**Теорема 3.1.12.** (*Оператор, переводящий векторы в им ортогональные*) Пусть оператор  $\mathcal{A}$  таков, что для любого вектора  $x \in V$

$$(\mathcal{A}x|x) = 0,$$

и выполнено одно из двух условий: 1)  $V, (\cdot|\cdot)$  – эрмитово пространство; 2)  $V, (\cdot|\cdot)$  – евклидово пространство и  $\mathcal{A}$  – симметрический оператор. Тогда  $\mathcal{A} = \mathcal{O}$ .

*Доказательство.* Воспользуемся легко проверяемым соотношением: для любых векторов  $x, y \in V$

$$(\mathcal{A}x|y) + (\mathcal{A}y|x) = (\mathcal{A}(x+y)|x+y) - (\mathcal{A}x|x) - (\mathcal{A}y|y). \quad (3.1.1)$$

Для п.1) потребуется еще одно (также легко проверяемое) соотношение:

$$(\mathcal{A}x|y) - (\mathcal{A}y|x) = -i(\mathcal{A}(ix+y)|ix+y) + i(\mathcal{A}(ix)|ix) + i(\mathcal{A}y|y). \quad (3.1.2)$$

По предположению, правые части обращаются в нуль. Тогда

$$(\mathcal{A}x|y) + (\mathcal{A}y|x) = (\mathcal{A}x|y) - (\mathcal{A}y|x) = 0,$$

откуда  $(\mathcal{A}x|y) = 0$  для всех  $x, y \in V$ . Тогда  $\mathcal{A} = \mathcal{O}$ .

Для п.2 по симметрии оператора  $\mathcal{A}$  имеем  $(\mathcal{A}y|x) = (y|\mathcal{A}^*x) = (y|\mathcal{A}x) = (\mathcal{A}x|y)$ . Подстановка полученного равенства в (3.1.1) приводит к равенству  $(\mathcal{A}x|y) = 0$  для любых  $x, y \in V$ . Отсюда  $\mathcal{A} = \mathcal{O}$ .  $\square$

**Замечание 3.1.13.** Несимметрический оператор на евклидовом пространстве  $V$ , для любого  $x \in V$  удовлетворяющий условию  $(\mathcal{A}x|x) = 0$ , может не быть нулевым. Пусть  $V \cong \mathbb{R}^2$  – пространство векторов плоскости со скалярным произведением, определенным по школьному правилу (произведение длин векторов на косинус угла между ними), линейный оператор  $\mathcal{A}$  – поворот вектора на  $90^\circ$  против часовой стрелки. Очевидно,  $\mathcal{A} \neq \mathcal{O}$ .

#### 3.1.4. Изометрии

Пусть  $(V, (\cdot|\cdot))$  – пространство со скалярным произведением.

**Определение 3.1.14.** *Изометрией* на пространстве  $V$  со скалярным произведением  $(\cdot|\cdot)$  называется линейный оператор  $\mathcal{A}$ , сохраняющий расстояние (метрику), т. е. для любых векторов  $x, y \in V$  удовлетворяющий соотношению

$$\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\| = \|x - y\|.$$

**Теорема 3.1.15.** *(Характеризация изометрий) Класс изометрий пространства  $V, (\cdot|\cdot)$  совпадает с классом унитарных (ортогональных) операторов на пространстве  $V$ .*

*Доказательство.* Пусть линейный оператор  $\mathcal{A}$  изометричен. т. е. для любых векторов  $x, y \in V$  выполнено соотношение  $\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\| = \|x - y\|$ . Но  $\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\| = \|\mathcal{A}(x - y)\|$ , и условие изометричности принимает вид  $\|\mathcal{A}x\| = \|x\|$  для всех  $x \in V$ . Выразив нормы векторов через скалярные произведения, получим  $\|\mathcal{A}x\|^2 = (\mathcal{A}x|\mathcal{A}x) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x|x) = \|x\|^2 = (x|x)$ , или, равносильно,  $((\mathcal{A}^*\mathcal{A} - \mathcal{E})x|x) = 0$ . Заметим, что оператор  $\mathcal{A}^*\mathcal{A} - \mathcal{E}$  эрмитов (симметрический) и, согласно теореме 3.1.12,  $\mathcal{A}^*\mathcal{A} - \mathcal{E} = \mathcal{O}$ , т. е.  $\mathcal{A}$  унитарен (ортогонален).

Обратно, пусть  $\mathcal{A}$  – унитарный (ортогональный) оператор, т. е.  $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{E}$ . Тогда для любого вектора  $x \in V$  имеем

$$\|\mathcal{A}x\|^2 = (\mathcal{A}x|\mathcal{A}x) = (x|\mathcal{A}^*\mathcal{A}x) = (x|x) = \|x\|^2,$$

т. е.  $\mathcal{A}$  – изометрия. □

### 3.1.5. Канонический вид самосопряженных операторов: инвариантность и ортогональные разложения

**Лемма 3.1.16.** *(Собственные значения самосопряженного оператора) Собственные значения самосопряженного оператора вещественны.*

*Доказательство.* В вещественном случае лемма очевидна. Пусть  $\mathcal{A}$  эрмитов,  $\lambda$  – его собственное значение, отвечающее собственному вектору  $v$ . Тогда  $(\mathcal{A}v|v) = \lambda(v|v)$  и, с другой стороны,  $(\mathcal{A}v|v) = (v|\mathcal{A}^*v) = (v|\mathcal{A}v) = \bar{\lambda}(v|v)$ , т. е.  $\lambda = \bar{\lambda}$ . □

*Замечание 3.1.17.* \* В квантовой физике каждой физической величине ставится в соответствие самосопряженный линейный оператор на пространстве комплекснозначных функций нескольких вещественных переменных, подчиняющихся некоторым естественным ограничениям (типа наличия непрерывных производных до некоторого порядка включительно плюс существование несобственных интегралов некоторого специального вида). Упомянутое пространство функций наделено скалярным

произведением, превращающим это пространство в бесконечномерный аналог эрмитова пространства, и многие результаты теории эрмитовых пространств оказываются применимыми. В частности, собственные значения самосопряженного оператора вещественны. Измеряемые значения физических величин являются вещественными числами. При измерении физической величины получаются значения из спектра соответствующего ей линейного оператора. Собственные векторы линейного оператора данной физической величины – это так называемые волновые функции «чистых состояний» физической системы, в которой исследуется данная физическая величина. Тот факт, что величина в квантовой системе принимает дискретный набор значений, соответствует дискретному спектру соответствующего ей линейного оператора. Состояние системы описывается линейной комбинацией собственных волновых функций, т. е. является элементом подпространства, натянутого на собственные векторы. Если эта линейная комбинация содержит более одного ненулевого коэффициента, то в разных актах измерения исследуемой физической величины в данной системе могут получаться разные собственные значения, соответствующие функциям, вошедшим с ненулевыми коэффициентами, с различными вероятностями. Такое состояние физики называют «смешанным». Если состояние системы описывается собственным вектором оператора исследуемой физической величины, то при ее измерении с достоверностью получится соответствующее данному собственному вектору собственное значение; это так называемое «чистое» состояние.

**Лемма 3.1.18.** *(Собственный вектор самосопряженного оператора) Самосопряженный линейный оператор имеет хотя бы один собственный вектор.*

*Доказательство.* В комплексном случае лемма очевидна. Любой вещественный линейный оператор обладает одно- либо двумерным инвариантным подпространством. Если оператор  $\mathcal{A}$  имеет одномерное подпространство, то лемма доказана. В противном случае пусть  $L$  –  $\mathcal{A}$ -инвариантное двумерное подпространство. Поскольку  $\mathcal{A}$  – симметрический оператор, то его ограничение  $\mathcal{A}|_L$  – также симметрический оператор. Выберем в  $L$  ортонормированный базис  $e_1, e_2$ ; пусть матрица линейного оператора  $\mathcal{A}|_L$  в этом базисе имеет вид

$$A_L = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Вычислив ее характеристический полином, получим

$$\chi_{A_L}(t) = t^2 - (a + d)t + (ad - b^2).$$

Его дискриминант равен  $D_\chi = (a + d)^2 - 4(ad - b^2) = (a - d)^2 + 4b^2$  и неотрицателен. Следовательно, характеристический полином имеет вещественный корень.  $\square$

**Лемма 3.1.19.** *(Инвариантность ортогонального дополнения) Пусть  $\mathcal{A}$  – самосопряженный линейный оператор на пространстве со скалярным произведением  $V, (\cdot|\cdot)$ ,  $L \subset V$  –  $\mathcal{A}$ -инвариантное подпространство. Тогда его ортогональное дополнение  $L^\perp$  также  $\mathcal{A}$ -инвариантно.*

*Доказательство.* Выберем произвольно  $x \in L$  и  $y \in L^\perp$ . Тогда  $\mathcal{A}x \in L$ , и  $(\mathcal{A}x|y) = 0$ . Используя самосопряженность линейного оператора  $\mathcal{A}$ , получим  $(\mathcal{A}x|y) = (x|\mathcal{A}^*y) = (x|\mathcal{A}y) = 0$ , откуда  $\mathcal{A}y \perp L$  для всех  $y \in L^\perp$ . Следовательно,  $\mathcal{A}L^\perp \subset L^\perp$ .  $\square$

**Теорема 3.1.20.** *(Канонический вид матрицы самосопряженного оператора) Для каждого самосопряженного оператора  $\mathcal{A}$  на пространстве со скалярным произведением существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора  $\mathcal{A}$  диагональна. Ее диагональные элементы вещественны.*

*Доказательство.* Согласно лемме 3.1.18, самосопряженный линейный оператор  $\mathcal{A}$  имеет собственный вектор  $e_1$ . Будем считать, что  $\|e_1\| = 1$ , при необходимости нормировав его. Согласно лемме 3.1.19, ортогональное дополнение  $\langle e_1 \rangle^\perp$   $\mathcal{A}$ -инвариантно. Поэтому процесс можно продолжить, рассмотрев ограничение  $\mathcal{A}|_{\langle e_1 \rangle^\perp}$ , и в  $\langle e_1 \rangle^\perp$  найдется собственный вектор  $e_2$  и т. д. Получим ортонормированный базис  $e_1, \dots, e_n$ , состоящий из собственных векторов линейного оператора  $\mathcal{A}$ . Согласно лемме 3.1.16, собственные значения – а именно они являются диагональными элементами матрицы оператора в построенном базисе – самосопряженного оператора вещественны.  $\square$

**Следствие 3.1.21.** *(Характеристические корни самосопряженного оператора) Все характеристические корни самосопряженного оператора вещественны, а геометрическая кратность каждого корня равна его алгебраической кратности.*

*Доказательство.* Поскольку характеристический полином имеет степень, равную размерности пространства, а самосопряженный линейный

оператор обладает таким же числом независимых собственных векторов, принадлежащих вещественным собственным значениям, то алгебраическая и геометрическая кратности каждого корня совпадают, а все характеристические корни являются собственными значениями.  $\square$

*Замечание 3.1.22.* Для любого самосопряженного оператора на пространстве размерности  $n$  имеется  $n$  попарно ортогональных собственных направлений, определяемых каноническим базисом  $e_1, \dots, e_n$ . Действие самосопряженного оператора вдоль направления  $e_l$  сводится к растяжению по этому направлению в  $|\lambda_l|$  раз и, если  $\lambda_l < 0$ , к отражению относительно  $\langle e_l \rangle^\perp$ .

### 3.1.6. Приведение квадратичной формы к главным осям

Ранее мы установили биективное соответствие между эрмитовыми формами на векторном пространстве  $V$  и самосопряженными линейными операторами на нем. Пусть дана эрмитова форма  $f(\cdot, \cdot)$ ; тогда определен самосопряженный оператор  $\mathcal{A}$  такой, что  $f(x, y) = (\mathcal{A}x|y)$  для любых векторов  $x, y$ . Согласно теореме о каноническом виде матрицы самосопряженного оператора, существует ортонормированный базис  $e_1, \dots, e_n$  из собственных векторов оператора  $\mathcal{A}$ :  $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i, i = 1, \dots, n$ . В этом базисе векторы  $x, y$  приобретают координатные представления  $x = \sum_i e_i x_i, y = \sum_j e_j y_j$ . Тогда для формы  $f$  получим  $f(e_i, e_j) = (\mathcal{A}e_i|e_j) = \lambda_i \delta_{ij}$ , и  $f(x, y) = \sum_{i,j} f(e_i, e_j) x_i \bar{y}_j = \sum_i \lambda_i x_i \bar{y}_i$ . Полагая  $x = y$ , получим следующий результат.

**Теорема 3.1.23.** *(Приведение квадратичной формы к главным осям)* Для любой эрмитовой квадратичной формы  $q(x)$  на  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  со скалярным произведением существует ортонормированный базис, в котором квадратичная форма  $q(x)$  как функция координат  $x_1, \dots, x_n$  принимает вид

$$q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i |x_i|^2.$$

В матричной форме теоремы 3.1.20 и 3.1.23 формулируются одинаково:

для любой эрмитовой (соответственно, вещественной симметрической) матрицы  $A$  найдется унитарная (соответственно, ортогональная) матрица  $H$  такая, что матрица  $H^{-1}AH$  диагональна, причем на ее диагонали стоят вещественные числа, являющиеся собственными





### 3.1.9. Канонический вид изометрий

**Лемма 3.1.25.** *(Спектр унитарного и ортогонального операторов) Собственные значения унитарного оператора – комплексные числа, по модулю равные 1. Собственные значения ортогонального оператора равны  $\pm 1$ .*

*Доказательство.* Пусть  $e$  – собственный вектор унитарного (ортогонального) линейного оператора  $\mathcal{A}$ , принадлежащий собственному значению  $\lambda$ . Тогда  $(\mathcal{A}e|\mathcal{A}e) = (\lambda e|\lambda e) = |\lambda|^2(e|e)$ . С другой стороны,  $(\mathcal{A}e|\mathcal{A}e) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}e|e) = (e|e)$ . Объединяя оба выражения, приходим к равенству  $|\lambda|^2 = 1$ .  $\square$

**Лемма 3.1.26.** *(Инвариантность ортогонального дополнения относительно унитарного оператора) Пусть  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  – унитарный либо ортогональный оператор,  $U \subset V$  –  $\mathcal{A}$ -инвариантное подпространство. Тогда его ортогональное дополнение  $U^\perp$  тоже  $\mathcal{A}$ -инвариантно.*

*Доказательство.* Линейный оператор  $\mathcal{A}|_U : U \rightarrow U$  унитарен (ортогонален). Тогда  $\det \mathcal{A}|_U \neq 0$  и, следовательно, для любого  $u \in U$  найдется  $u' \in U$  такой, что  $u = \mathcal{A}u'$ . Пусть  $v \in U^\perp$ , т. е. для любого  $u \in U$   $(u|v) = 0$ . Рассмотрим вектор  $\mathcal{A}v$  и вычислим скалярное произведение  $(u|\mathcal{A}v)$ :  $(u|\mathcal{A}v) = (\mathcal{A}u'|\mathcal{A}v) = (u'|v) = 0$ , т. е.  $\mathcal{A}v \in U^\perp$ .  $\square$

Сейчас сосредоточимся на комплексном случае.

**Теорема 3.1.27.** *(Диагонализируемость унитарного оператора) Каждый унитарный оператор диагонализируем.*

В матричной формулировке эта теорема утверждает следующее: для любой унитарной матрицы  $A$  найдется такая унитарная матрица  $H$  такая, что  $H^{-1}AH$  диагональна.

**Замечание 3.1.28.** Поскольку собственные значения унитарного оператора суть комплексные числа, по модулю равные 1, то диагональная форма матрицы унитарного оператора имеет вид  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $|\lambda_i| = 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

*Доказательство.* Возьмем любой нормированный собственный вектор  $e_1$  линейного оператора  $\mathcal{A}$ . Поскольку мы работаем над полем  $\mathbb{C}$ , то такой вектор всегда существует. Согласно лемме 3.1.26, ортогональное дополнение  $\langle e_1 \rangle^\perp$  также  $\mathcal{A}$ -инвариантно. Очевидно,  $\dim \langle e_1 \rangle^\perp = n - 1$ . Продолжая процесс, получим ортонормированный базис, в котором матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  диагональна.  $\square$

**Упражнение 3.1.29.** Докажите, что оператор, имеющий в некотором ортонормированном базисе матрицу вида  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $|\lambda_i| = 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , унитарен.

Теперь обратимся к случаю ортогонального оператора.

**Теорема 3.1.30.** (Канонический вид матрицы ортогонального оператора) Каждый ортогональный оператор выбором подходящего ортонормированного базиса приводится к виду с матрицей

$$\left[ \begin{array}{cc|c|cc|c|c} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 & \dots & \cos \varphi_r & -\sin \varphi_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sin \varphi_r & \cos \varphi_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -E_t \end{array} \right], \quad 2r + s + t = n.$$

*Доказательство.* Известно, что вещественный линейный оператор обладает одно- или двумерным инвариантным подпространством. Выделив такое подпространство  $V_1$  и воспользовавшись результатом леммы 3.1.26, находим одно- или двумерное инвариантное подпространство в  $V_1^\perp$ . Продолжая процесс, получим ортогональное прямое разложение на инвариантные подпространства

$$V = V_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} V_m. \quad (3.1.3)$$

При этом условимся считать, что ни одно из двумерных подпространств разложения (3.1.3) не разложимо в сумму одномерных.

Если  $\dim V_i = 1$ , то линейный оператор действует на  $V_i$  умножением на 1 либо  $-1$ . Рассмотрим действие ортогонального оператора на неразложимом двумерном пространстве  $V_i = V$ . Пусть в ортонормированном базисе  $e_1, e_2$  оператор представлен вещественной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

и пусть  $\det A = ac - bd = -1$ . Тогда характеристический полином  $\chi_A = t^2 - (a + d)t - 1$  имеет два вещественных корня, что означает, что пространство  $V$  разложимо в прямую сумму одномерных инвариантных подпространств, что противоречит предположению. Таким образом, возможно только  $\det A = ac - bd = 1$ . Обращение матрицы  $A$  и применение условия ортогональности  $A^{-1} = A^T$  приводит к равенству

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A^T,$$

откуда  $c = -b$ ,  $a = d$ . Тогда

$$\det A = \begin{vmatrix} a & -c \\ c & a \end{vmatrix} = a^2 + c^2 = 1.$$

Положим  $a = \cos \varphi$ ,  $c = \sin \varphi$ , и  $A$  – поворот на угол с мерой  $\varphi$ . □

## 3.2. Специальные классы линейных операторов

### 3.2.1. Нормальные операторы

**Определение 3.2.1.** Линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  на эрмитовом пространстве  $(V, (\cdot|\cdot))$  называется *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряженным, т. е.  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ . Матрица нормального оператора в любом базисе также называется *нормальной*.

Очевидно, самосопряженные и антисамосопряженные операторы нормальны. Однако существуют линейные операторы, которые, являясь нормальными, не являются ни самосопряженными, ни антисамосопряженными. Например, таков оператор с матрицей  $\text{diag}(i, 1)$ .

Нетрудно также проверить, что линейный оператор  $\mathcal{A}$  нормален тогда и только тогда, когда  $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$  нормален. При этом скаляр  $\lambda \in \mathbb{C}$  выбирается произвольно. Кроме того, нормальный оператор обладает следующим метрическим свойством: для любого вектора  $x \in V$

$$\|\mathcal{A}x\|^2 = (\mathcal{A}x|\mathcal{A}x) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x|x) = (\mathcal{A}\mathcal{A}^*x|x) = (\mathcal{A}^*x|\mathcal{A}^*x) = \|\mathcal{A}^*x\|^2.$$

Заменив  $\mathcal{A}$  на  $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ , получим  $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^* = \mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{E}$ , и

$$\|(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})x\| = \|(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^*x\|.$$

При этом  $\mathcal{A}x = \lambda x$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{A}^*x = \bar{\lambda}x$ . Таким образом, *нормальный оператор и его сопряженный имеют одинаковые собственные векторы и взаимно сопряженные собственные значения.*

**Теорема 3.2.2.** (Критерий нормальности) *Линейный оператор  $\mathcal{A}$  нормален тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис, в котором его матрица диагональна.*

*Доказательство.* Пусть в ортонормированном базисе  $e_1, \dots, e_n$  матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  диагональна, т. е.  $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$ . Тогда  $\mathcal{A}^*e_i = \bar{\lambda}_i e_i$ , откуда  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ .

Для обратной импликации возьмем собственное значение  $\lambda$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  и рассмотрим соответствующее ему собственное подпространство  $V^\lambda = \{x \in V | \mathcal{A}x = \lambda x\}$ . Поскольку  $\mathcal{A}$  нормален, то  $\mathcal{A}^*$  имеет

те же собственные векторы, что и  $\mathcal{A}$ . Поэтому  $\mathcal{A}^*V^\lambda \subset V^\lambda$ . Утверждается, что ортогональное дополнение  $(V^\lambda)^\perp$  тоже  $\mathcal{A}^*$ -инвариантно. Для доказательства возьмем произвольный вектор  $y \in (V^\lambda)^\perp$ , т. е. для любого  $x \in V^\lambda$  выполнено  $(y|x) = 0$ . Вычислим  $(\mathcal{A}y|x) = (y|\mathcal{A}^*x) = 0$ , поскольку  $\mathcal{A}^*x \in V^\lambda$ .

Так как сопряжение инволютивно, то пространство  $(V^\lambda)^\perp$  тоже  $\mathcal{A}^*$ -инвариантно. Ограничения операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$  на подпространство  $(V^\lambda)^\perp$  коммутируют, т. к. являются нормальными. Теперь можно рассуждать индукцией по  $n$ , предположив, что в  $(V^\lambda)^\perp$  имеется ортонормированный базис, в котором оператор  $\mathcal{A}$  имеет диагональную матрицу. Для  $V^\lambda$  это верно по определению и, так как  $V = V^\lambda \oplus (V^\lambda)^\perp$ , то теорема доказана.  $\square$

**Теорема 3.2.3.** (Спектральное разложение нормального оператора) Любому нормальному оператору  $\mathcal{A}$  на конечномерном эрмитовом пространстве  $V$  отвечают попарно различные собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ,  $1 \leq m \leq n = \dim V$ , и взаимно ортогональные ненулевые проекторы  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m$  такие, что

- а)  $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i = \mathcal{E}$ ;
- б)  $\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathcal{P}_i = \mathcal{A}$ , где  $\lambda_i$  – собственные значения оператора  $\mathcal{A}$ ;
- в) разложение п. б) единственно;
- г) существуют комплексные полиномы  $f_1(t), \dots, f_m(t)$  такие, что  $f_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$ ;  $f_i(\mathcal{A}) = \mathcal{P}_i$ .

В случае, когда  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ , все числа  $\lambda_i$  и полиномы  $f_i(t)$  вещественны.

*Доказательство.* Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  – попарно различные собственные значения оператора  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{P}_i : V \rightarrow V^{\lambda_i}$  проектор параллельно подпространству  $\sum_{j \neq i} V^{\lambda_j}$ , для каждого  $i = 1, \dots, m$ . Согласно доказательству теоремы 3.2.2,  $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \mathcal{P}_j \mathcal{P}_i = \delta_{ij} \mathcal{P}_i$ , т. е. все  $\mathcal{P}_i$  взаимно ортогональны и отличны от нуля.

а) Из разложения  $V = \bigoplus_{i=1}^m V^{\lambda_i}$  следует, что  $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i = \mathcal{E}$ .

б) Выберем произвольный вектор  $v \in V$ ; тогда для каждого  $i = 1, \dots, m$  выполнено равенство  $\mathcal{A} \mathcal{P}_i v = \lambda_i \mathcal{P}_i v$ . Откуда  $\mathcal{A} v = \mathcal{A} (\sum_i \mathcal{P}_i) v = \sum_i \mathcal{A} \mathcal{P}_i v = \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_i v$ . Таким образом,  $\mathcal{A} = \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_i$ .

в) Пусть имеется разложение  $\mathcal{A} = \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_i$ . Пусть  $x \in \text{im } \mathcal{P}_i$  – ненулевой вектор. Такой вектор существует, так как проектор  $\mathcal{P}_i$  ненулевой. Тогда  $x = \mathcal{P}_i x$ , и  $\mathcal{A} x = \mathcal{A} \mathcal{P}_i x = \lambda_i x$ , откуда заключаем, что  $\lambda_i$  – собственное значение оператора  $\mathcal{A}$ .

Обратно, пусть  $\lambda$  – собственное значение оператора  $\mathcal{A}$ . Тогда найдется

ненулевой вектор  $v \in V$  такой, что  $\mathcal{A}v = \lambda v$ . Применим к нему проекторы  $\mathcal{P}_i$ ; получим  $\mathcal{P}_i v = v_i$ , и  $\mathcal{A}v = \lambda v = \lambda \sum_{j=1}^m v_j$ . С другой стороны,  $\mathcal{A}v = \mathcal{A} \sum_{j=1}^m v_j = \sum_{j=1}^m \mathcal{A}v_j = \sum_{j=1}^m \lambda_j v_j$ . Тогда  $\sum_{j=1}^m (\lambda - \lambda_j) v_j = 0$ . Так как векторы  $v_1, \dots, v_m$  взаимно ортогональны, то  $(\lambda - \lambda_j) v_j = 0$  для всех  $j$ . Таким образом, если  $v_j \neq 0$ , то  $\lambda = \lambda_j$ . Единственность разложения доказана.

г) Рассмотрим полиномы вида

$$f_i(t) = \prod_{j \neq i} \frac{t - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

Если  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ , то  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , и  $f_i(t) = \mathbb{R}[t]$ . Используя разложение п. б) и соотношение ортогональности  $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \mathcal{P}_j \mathcal{P}_i = \delta_{ij} \mathcal{P}_i$ , вычислим степени оператора  $\mathcal{A}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= \left( \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_i \right) \left( \sum_j \lambda_j \mathcal{P}_j \right) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \sum_i \lambda_i^2 \mathcal{P}_i, \\ \mathcal{A}^3 &= \sum_i \lambda_i^3 \mathcal{P}_i, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathcal{A}^s &= \sum_i \lambda_i^s \mathcal{P}_i. \end{aligned}$$

Согласно п. а),  $\mathcal{A}^0 = \sum_i \mathcal{P}_i = \mathcal{E} = \sum_i \lambda_i^0 \mathcal{P}_i$ . Тогда комплексный полином  $f$  от оператора  $\mathcal{A}$  вычисляется по формуле  $f(\mathcal{A}) = \sum_i f(\lambda_i) \mathcal{P}_i$ . В частности,  $f_i(\mathcal{A}) = f_i(\lambda_i) \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i$ .  $\square$

Как и всякий линейный оператор, нормальный оператор может быть записан в виде  $\mathcal{A} = \mathcal{B} + i\mathcal{C}$ , где  $\mathcal{B} = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)$ ,  $\mathcal{C} = \frac{1}{2i}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$  – эрмитовы операторы.

**Упражнение 3.2.4.** Докажите, что  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{B}\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{B}$ .

### 3.2.2. Перестановочные операторы

**Лемма 3.2.5.** (Общий собственный вектор) Коммутирующие операторы на комплексном пространстве имеют общий собственный вектор.

*Доказательство.* Пусть  $\lambda$  – собственное значение оператора  $\mathcal{A}$ ; поскольку мы работаем над полем  $\mathbb{C}$ , то любой линейный оператор имеет хотя бы одно собственное значение и хотя бы один собственный вектор.

Рассмотрим собственное подпространство

$$V^\lambda = \{x \in V | \mathcal{A}x = \lambda x\}.$$

Применив к нему оператор  $\mathcal{B}$  и воспользовавшись перестановочностью операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , получим

$$\mathcal{B}V^\lambda = \{\mathcal{B}x \in V | \mathcal{A}\mathcal{B}x = \mathcal{B}\mathcal{A}x = \lambda\mathcal{B}x\},$$

т. е.  $\mathcal{B}V^\lambda \subset V^\lambda$ . Тогда ограничение оператора  $\mathcal{B}$  на  $\mathcal{B}$ -инвариантное подпространство  $V^\lambda$  обладает хотя бы одним собственным вектором  $y \in V^\lambda$  таким, что  $\mathcal{B}y = \mu y$ , где  $\mu$  – собственное значение оператора  $\mathcal{B}$ , которому принадлежит собственный вектор  $y$ . Итак,  $y$  – общий собственный вектор линейных операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ .  $\square$

**Теорема 3.2.6.** *(Одновременная диагонализуемость) Два эрмитовых или унитарных оператора  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  на  $n$ -мерном пространстве  $V$  приводятся к диагональному виду в одном и том же ортонормированном базисе тогда и только тогда, когда они перестановочны.*

*Замечание 3.2.7.* Теорема представляет собой критерий того, что два эрмитовых или унитарных оператора имеют общую ортогональную систему  $n$  собственных векторов.

*Доказательство.* Если операторы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  задаются диагональными матрицами  $A$  и  $B$  в некотором базисе, то они перестановочны, поскольку две любые диагональные матрицы обладают таким свойством. Для матриц  $A' = HAH^{-1}$  и  $B' = HBH^{-1}$  этих операторов в любом другом базисе получим  $A'B' = (HAH^{-1})(HBH^{-1}) = HABH^{-1} = HBAH^{-1} = (HBH^{-1})(HAH^{-1}) = B'A'$ .

Пусть теперь  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ . Тогда у этих операторов существует общий собственный вектор  $e_1$ ; условимся считать, что он нормирован. Подпространство  $\langle e_1 \rangle^\perp$   $\mathcal{A}$ -инвариантно и  $\mathcal{B}$ -инвариантно в силу эрмитовости либо в силу унитарности. Ограничения операторов на это подпространство также перестановочны, что поставляет второй общий собственный вектор  $e_2$ . Продолжая процесс, приходим к ортонормированному базису из  $n$  общих собственных векторов  $e_1, \dots, e_n$ .  $\square$

### 3.2.3. Положительно определенные операторы

Любому эрмитову оператору  $\mathcal{A}$  на эрмитовом пространстве (соответственно, любому симметрическому оператору на евклидовом пространстве) ставится в соответствие квадратичная форма  $q(x) = (\mathcal{A}x|x)$ . Тогда

понятие знакоопределенности можно перенести на эрмитовы либо симметрические линейные операторы.

**Определение 3.2.8.** Эрмитов (или симметрический) линейный оператор  $\mathcal{A}$  *положительно определен*, если квадратичная форма  $q(x) = (\mathcal{A}x|x)$  положительно определена.

Поскольку существует ортонормированный базис, в котором матрица эрмитова (соответственно, симметрического) оператора диагональна, то все собственные значения  $\lambda_i$  такого оператора положительны. Обратно, если все собственные значения эрмитова (симметрического) оператора положительны, то оператор положительно определен. Очевидно, положительно определенный оператор обратим.

**Определение 3.2.9.** Эрмитов (или симметрический) линейный оператор  $\mathcal{A}$  *положительно полуопределен*, если квадратичная форма  $q(x) = (\mathcal{A}x|x)$  положительно полуопределена.

Понятно, что оператор  $\mathcal{A}$  положительно полуопределен тогда и только тогда, когда все его собственные значения неотрицательны.

**Предложение 3.2.10.** (*Квадратный корень из положительного оператора*) Любой положительно определенный оператор  $\mathcal{A}$  может быть записан в виде квадрата некоторого другого положительно определенного оператора  $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$ , причем для данного  $\mathcal{A}$  оператор  $\mathcal{B}$  определен однозначно.

*Доказательство.* Приведем матрицу оператора  $\mathcal{A}$  к диагональному виду:  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда матрица  $B = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ ,  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , удовлетворяет равенству  $A = B^2$ . При этом для любой невырожденной матрицы  $H$  имеем  $H A H^{-1} = (H B H^{-1})^2$ .

Для доказательства единственности предположим, что существует положительно определенная матрица  $B'$  такая, что  $B'^2 = A$ . Рассмотрим спектральное разложение  $B' = \sum_j \mu_j \mathcal{P}'_j$  для линейного оператора, задаваемого матрицей  $B'$ . Возводя в квадрат и сравнивая со спектральным разложением оператора  $\mathcal{A} = \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_i$ , получим, учитывая единственность спектрального разложения, что

$$B'^2 = \sum_j \mu_j^2 \mathcal{P}'_j = \mathcal{A} = \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_i,$$

откуда, после подходящей перенумерации слагаемых,  $\mathcal{P}'_i = \mathcal{P}_i$ ,  $\mu_i^2 = \lambda_i$ . Таким образом,  $B' = B$ .  $\square$

**Предложение 3.2.11.** (Построение положительно определенных операторов) Пусть  $\mathcal{C}$  – произвольный невырожденный линейный оператор на пространстве со скалярным произведением. Тогда произведения  $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{C}^*$  и  $\mathcal{B} = \mathcal{C}^*\mathcal{C}$  – невырожденные положительно определенные операторы.

*Доказательство.* Проведем доказательство для оператора  $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{C}^*$ ; доказательство для  $\mathcal{B} = \mathcal{C}^*\mathcal{C}$  аналогично. Во-первых, легко проверить, что оператор  $\mathcal{A}$  эрмитов (проверьте!). Во-вторых, он невырожден:  $\det \mathcal{A} = \det \mathcal{C} \det \mathcal{C}^* = |\det \mathcal{C}|^2 > 0$ . Тогда для любого  $x \neq 0$   $\mathcal{C}^*x \neq 0$ , и  $(\mathcal{C}\mathcal{C}^*x|x) = (\mathcal{C}^*x|\mathcal{C}^*x) > 0$  для всех  $x \neq 0$ .  $\square$

**Теорема 3.2.12.** (Строение положительно полуопределенных операторов) Пусть  $V$  – пространство со скалярным произведением. Следующие свойства линейных операторов эквивалентны:

- 1)  $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$ ,  $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$ ;
- 2)  $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{C}^*$ ;
- 3)  $\mathcal{A} \geq 0$ .

*Доказательство.* Итак, пусть выполнено 1), т. е. эрмитов (или вещественный симметричный) оператор  $\mathcal{A}$  является квадратом самосопряженного оператора  $\mathcal{B}$ . Тогда, учитывая, что  $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$  и положив  $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ , получим 2).

Пусть теперь выполнено 2). Тогда для любого вектора  $x \in V$  сформируем и преобразуем форму  $(\mathcal{A}x|x)$ :

$$(\mathcal{A}x|x) = (\mathcal{C}\mathcal{C}^*x|x) = (\mathcal{C}^*x|\mathcal{C}^*x) \geq 0,$$

что доказывает 3).

Пусть выполнено 3), т. е. для любого вектора  $x \in V$   $(\mathcal{A}x|x) \geq 0$ . Согласно теореме 3.1.20, существует ортонормированный базис, в котором матрица самосопряженного оператора  $\mathcal{A}$  диагональна с вещественными диагональными элементами:  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Поскольку  $\mathcal{A} \geq 0$ , то  $\lambda_i \geq 0$  для  $i = 1, \dots, n$ . Определив оператор  $\mathcal{B}$  в том же базисе матрицей  $B = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ , приходим к выражению  $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$ ,  $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$ , что завершает доказательство.  $\square$

### 3.2.4. Полярное разложение невырожденного линейного оператора

Поведение эрмитова сопряжения на множестве всех линейных операторов похоже на поведение комплексного сопряжения на множестве комплексных чисел. При этом самосопряженные операторы являются аналогами вещественных чисел, антисамосопряженные – аналогами мнимых.



Изометричные операторы аналогичны комплексным числам, по модулю равным 1 (здесь полезно вспомнить, что умножение произвольного комплексного числа на число вида  $e^{i\varphi}$  не меняет модуля). Эта аналогия весьма глубока: во множестве линейных операторов существует аналог экспоненциальной записи комплексного числа.

**Теорема 3.2.13.** *(Полярное разложение) Всякий невырожденный линейный оператор  $\mathcal{A}$  на эрмитовом или евклидовом векторном пространстве может быть представлен в виде  $\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{Q}$ , где  $\mathcal{P}$  – положительно определенный оператор,  $\mathcal{Q}$  – изометрия (унитарный или ортогональный оператор). Разложение единственно.*

*Доказательство.* Рассмотрим оператор  $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ ; согласно предложению 3.2.11, он положительно определен и, следовательно, согласно предложению 3.2.10, существует единственный положительно определенный оператор  $\mathcal{P}$  такой, что  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{P}^2$ . Положим  $\mathcal{Q} := \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}$ . Убедимся в том, что  $\mathcal{Q}$  – изометрия.

Поскольку оператор  $\mathcal{P}$  самосопряжен, то  $\mathcal{P}\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{E} = \mathcal{E}^* = \mathcal{P}^{-1*}\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^{-1*}\mathcal{P}$ , откуда  $\mathcal{P}^{-1*} = \mathcal{P}^{*-1} = \mathcal{P}^{-1}$ . Тогда  $\mathcal{Q}\mathcal{Q}^* = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{P}^{-1*} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}^2\mathcal{P}^{-1*} = \mathcal{E}$ .

Для доказательства единственности предположим, что имеются два полярных разложения  $\mathcal{P}\mathcal{Q} = \mathcal{A} = \mathcal{P}_1\mathcal{Q}_1$ . Выполняя сопряжение, получим равенства  $\mathcal{Q}^*\mathcal{P}^* = \mathcal{Q}^*\mathcal{P} = \mathcal{Q}_1^*\mathcal{P}_1^* = \mathcal{Q}_1^*\mathcal{P}_1$ , откуда  $\mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*\mathcal{P} = \mathcal{P}_1\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_1^*\mathcal{P}_1$  и, по изометричности операторов  $\mathcal{Q}$  и  $\mathcal{Q}_1$ ,  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}_1^2$ . Поскольку квадратный корень из положительно определенного оператора определен однозначно, то  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ . Отсюда следует, что  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1$ .  $\square$

*Замечание 3.2.14.* Аналогичным образом получается полярное разложение с обратным порядком следования сомножителей:  $\mathcal{A} = \mathcal{Q}\mathcal{P}' = \mathcal{Q}(\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{P}\mathcal{Q})$ , где  $\mathcal{P}' = \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{P}\mathcal{Q}$ .

*Замечание 3.2.15.* Аналог полярного разложения также имеет место и в случае вырожденного оператора. При этом положительно определенный оператор следует заменить положительно полуопределенным. Однако однозначность полярного разложения перестает иметь место.

**Теорема 3.2.16.** *(Полярное разложение нормального оператора) Пусть линейный оператор  $\mathcal{A}$  обладает полярным разложением  $\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{Q}$ , в котором  $\mathcal{P}$  – положительно (полу)определенный оператор,  $\mathcal{Q}$  – изометрия. Тогда  $\mathcal{A}$  нормален тогда и только тогда, когда операторы  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{Q}$  коммутируют.*

*Доказательство.* Пусть теперь невырожденный оператор  $\mathcal{A}$  таков, что  $\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\mathcal{P}$ . Вычислим для такого оператора  $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$  и  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathcal{A}^* &= \mathcal{P}\mathcal{Q}(\mathcal{P}\mathcal{Q})^* = \mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*\mathcal{P} = \mathcal{P}^2; \\ \mathcal{A}^*\mathcal{A} &= (\mathcal{Q}\mathcal{P})^*\mathcal{Q}\mathcal{P} = \mathcal{P}\mathcal{Q}^*\mathcal{Q}\mathcal{P} = \mathcal{P}^2,\end{aligned}$$

т. е. оператор  $\mathcal{A}$  нормален:  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ .

Обратно, пусть оператор  $\mathcal{A}$  нормален; выполним подстановку полярного разложения  $\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{Q}$  в условие  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathcal{A}^* &= \mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*\mathcal{P} = \mathcal{P}^2 \\ \mathcal{A}^*\mathcal{A} &= \mathcal{Q}^*\mathcal{P}^2\mathcal{Q}.\end{aligned}$$

Получим  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{Q}^*\mathcal{P}^2\mathcal{Q}$ . Так как  $\mathcal{Q}\mathcal{Q}$  – изометрия, то  $\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}^{-1}$ , и  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{P}^2\mathcal{Q}$ . Итак,  $\mathcal{Q}$  коммутирует с  $\mathcal{P}^2$ . Тогда  $\mathcal{Q}$  и  $\mathcal{P}^2$  как комплексные операторы одновременно приводятся к диагональному виду в некотором ортонормированном базисе. Отсюда следует, что и оператор  $\mathcal{P}$  приводится к диагональному виду в этом базисе. Это означает, что в нем матрицы операторов  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{Q}$ , будучи диагональными, коммутируют. Значит, операторы  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{Q}$  коммутируют.  $\square$

### 3.3. Комплексификация и о вещественности

#### 3.3.1. Оператор комплексной структуры на вещественном векторном пространстве

Поскольку поле  $\mathbb{C}$  алгебраически замкнуто, то поведение многих алгебро-геометрических объектов, изначально определенных над полем  $\mathbb{R}$ , становится проще, если их рассматривать как объекты над  $\mathbb{C}$ . В частности, любой полином, определенный над  $\mathbb{C}$ , имеет в  $\mathbb{C}$  корень, а любой комплексный оператор обладает собственным вектором. Унитарные операторы диагонализуются в подходящих ортонормированных базисах, а в случае ортогональных операторов это не так.

Поэтому иногда полезно «расширить поле скаляров», рассматривая вещественный объект как объект над полем  $\mathbb{C}$  (*комплексификация*), а затем вернуться к первоначальному вещественному объекту (*овеществление*).

**Пример 3.3.1.** Двумерное вещественное векторное пространство можно превратить в одномерное комплексное, введя  $\mathbb{R}$ -линейный оператор  $\mathcal{J}$ , имитирующий действие мнимой единицы. Для этого в стандартном

базисе  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  определим оператор  $\mathcal{J}$  матрицей

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Понятно, что  $\mathcal{J}^2 = -1$ . Возьмем вектор  $v = e_1x + e_2y$ ; действие на него оператора  $\alpha\mathcal{E} + \beta\mathcal{J}$  имеет вид

$$(\alpha\mathcal{E} + \beta\mathcal{J})(e_1x + e_2y) = \alpha e_1x + \alpha e_2y + \beta e_2x - \beta e_1y = e_1(\alpha x - \beta y) + e_2(\alpha y + \beta x),$$

т. е. полностью аналогично действию комплексного числа  $\alpha + i\beta$  на  $x + iy$ :  
 $(\alpha + i\beta)(x + iy) = \alpha x - \beta y + i(\alpha y + \beta x).$

Пусть  $V$  –  $n$ -мерное вещественное векторное пространство.

**Определение 3.3.2.** *Комплексной структурой* на пространстве  $V$  называется линейный оператор  $\mathcal{J} : V \rightarrow V$  такой, что  $\mathcal{J}^2 = -\mathcal{E}$ .

Понятно, что на данном вещественном векторном пространстве комплексная структура может быть введена не единственным способом.

Например, на координатном пространстве размерности  $n = 2m$  линейный оператор  $\mathcal{J}$ , заданный в стандартном базисе матрицей

$$J = \left[ \begin{array}{cc|cc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right], \quad (3.3.1)$$

является комплексной структурой.

Пара  $V, \mathcal{J}$  может рассматриваться как  $\mathbb{C}$ -векторное пространство  $\tilde{V}$  с действием комплексных скаляров, определенным по правилу: для любого  $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$  и для любого  $v \in V$

$$(\alpha + i\beta)v = (\alpha\mathcal{E} + \beta\mathcal{J})v.$$

**Упражнение 3.3.3.** Покажите, что введение комплексной структуры на вещественном векторном пространстве действительно превращает  $V$  в комплексное векторное пространство.

**Определение 3.3.4.**  $\mathbb{C}$ -векторное пространство  $\tilde{V}$  называют *комплексным векторным пространством, ассоциированным с  $V$  и комплексной структурой  $\mathcal{J}$* .

**Предложение 3.3.5.** (*Описание пространств с комплексной структурой*) Пространство  $V$  с комплексной структурой  $\mathcal{J}$  всегда имеет четную размерность. Существует базис, в котором матрица оператора  $\mathcal{J}$  имеет вид (3.3.1). При этом  $2\dim_{\mathbb{C}} \tilde{V} = \dim_{\mathbb{R}} V$ .

*Доказательство.* Выберем векторы  $e_1, \dots, e_s$  так, что  $e_1, \mathcal{J}e_1, \dots, e_s, \mathcal{J}e_s$  линейно независимы. Введем обозначение  $V_s := \langle e_1, \mathcal{J}e_1, \dots, e_s, \mathcal{J}e_s \rangle_{\mathbb{R}}$ . Если  $V_s = V$ , то предложение доказано. В противном случае найдется вектор  $e_{s+1} \in V \setminus V_s$ . Предположим, что его образ  $\mathcal{J}e_{s+1}$  линейно выражается через  $e_{s+1}$  и векторы  $e_1, \mathcal{J}e_1, \dots, e_s, \mathcal{J}e_s$ :

$$\mathcal{J}e_{s+1} = \alpha e_{s+1} + v_s, \quad (3.3.2)$$

где  $v_s \in V_s$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Применив оператор  $\mathcal{J}$ , получим

$$-e_{s+1} = \alpha \mathcal{J}e_{s+1} + \mathcal{J}v_s. \quad (3.3.3)$$

По построению  $\mathcal{J}V_s \subset V_s$ , и потому  $\mathcal{J}v_s \in V_s$ . Выполнив подстановку (3.3.2) в (3.3.3), придем к соотношению  $(1 + \alpha^2)e_{s+1} = -\alpha v_s - \mathcal{J}v_s$ , откуда следует, что  $e_{s+1} \in V_s$ , поскольку  $1 + \alpha^2 \neq 0$ . Это противоречит выбору  $e_{s+1}$ .

Продолжая процесс присоединения к  $V_s$  линейно независимых векторов, при некотором  $m$  получим  $V_m = \langle e_1, \mathcal{J}e_1, \dots, e_m, \mathcal{J}e_m \rangle_{\mathbb{R}} = V$ . В базисе  $e_1, \mathcal{J}e_1, \dots, e_m, \mathcal{J}e_m$  матрица линейного оператора  $\mathcal{J}$  имеет вид (3.3.1).  $\square$

### 3.3.2. Овеществление

Пусть  $U$  – произвольное  $n$ -мерное  $\mathbb{C}$ -векторное пространство. Структура комплексного векторного пространства включает действие поля  $\mathbb{C}$  на аддитивной абелевой группе  $U$ :  $\alpha_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times U \rightarrow U$ . Рассмотрев поле вещественных чисел как подполе  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , можно сформировать ограничение  $\alpha_{\mathbb{R}}$  отображения  $\alpha_{\mathbb{C}}$  на  $\mathbb{R} \times U$  как композицию:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times U & \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{C}}} & U \\ \uparrow & \nearrow \alpha_{\mathbb{R}} & \\ \mathbb{R} \times U & & \end{array}$$

**Определение 3.3.6.** Овеществлением комплексного векторного пространства  $U$  называется вещественное векторное пространство  $U_{\mathbb{R}}$ , определяемое аддитивной группой пространства  $U$  и действием  $\alpha_{\mathbb{R}}$  поля вещественных чисел.

Очевидно,  $U_{\mathbb{R}} = \langle U \rangle_{\mathbb{R}}$ . Если  $e_1, \dots, e_n$  – базис пространства  $U$  (как комплексного пространства), то базис его о веществления  $U_{\mathbb{R}}$  может быть выбран, например, в виде  $e_1, ie_1, \dots, e_n, ie_n$ . При этом умножение на  $i$  в  $U$  поставляет комплексную структуру  $\mathcal{J}$  на  $U_{\mathbb{R}}$ :

$$\mathcal{J}e_s = ie_s; \quad \mathcal{J}(ie_s) = -e_s; \quad s = 1, \dots, n.$$

Понятно, что  $\tilde{U}_{\mathbb{R}} = U$ .

**Определение 3.3.7.** Овеществлением оператора  $\mathcal{A}$  относительно комплексной структуры  $\mathcal{J}$  называется линейный оператор  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} : U_{\mathbb{R}} \rightarrow U_{\mathbb{R}}$ , действие которого поточечно совпадает с действием оператора  $\mathcal{A}$ , т. е.  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} : x \mapsto \mathcal{A}x$ .

Овеществленное пространство  $U_{\mathbb{R}}$  можно разложить в прямую сумму «действительной» и «мнимой» части:

$$U_{\mathbb{R}} = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle ie_1, \dots, ie_n \rangle_{\mathbb{R}}.$$

*Замечание 3.3.8.* Заметим, что выбор базиса вида  $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$  позволяет очевидным образом восстановить комплексную структуру.

Рассмотрим действие овеществленного оператора  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  на базисные векторы  $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ . По определению овеществления линейного оператора,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{R}}e_r &= \mathcal{A}e_r = \sum_{i=1}^n a_{rs}e_s, \\ \mathcal{A}_{\mathbb{R}}(ie_r) &= \mathcal{A}(ie_r) = i\mathcal{A}e_r = i \sum_{i=1}^n a_{rs}e_s. \end{aligned}$$

При этом  $a_{rs}$  – комплексные элементы матрицы линейного оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ . Разделив действительную и мнимую части  $a_{rs} = a_{rs}^{(1)} + ia_{rs}^{(2)}$ , придем к представлению

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{R}}e_r &= \sum_{i=1}^n (a_{rs}^{(1)} + ia_{rs}^{(2)})e_s = \sum_{i=1}^n a_{rs}^{(1)}e_s + \sum_{i=1}^n a_{rs}^{(2)}(ie_s), \\ \mathcal{A}_{\mathbb{R}}(ie_r) &= i \sum_{i=1}^n (a_{rs}^{(1)} + ia_{rs}^{(2)})e_s = \sum_{i=1}^n a_{rs}^{(1)}(ie_s) - \sum_{i=1}^n a_{rs}^{(2)}e_s. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица овеществленного линейного оператора  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  в базисе  $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$  имеет блочный вид

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & -A_2 \\ \hline A_2 & A_1 \end{array} \right), \quad (3.3.4)$$

в котором подматрицы  $A_i$  определены вполне ожидаемым образом:  $A_1 = (a_{rs}^{(1)})$ ,  $A_2 = (a_{rs}^{(2)})$ . Специальный вид матрицы овеществленного линейного оператора указывает на то, что

*не каждый линейный оператор на вещественном пространстве четной размерности представляет собой овеществление некоторого комплексного оператора.*

Пусть  $End(U)_{\mathbb{R}}$  – множество всех операторов, являющихся овеществлениями, а  $End(U_{\mathbb{R}})$  – алгебра всех  $\mathbb{R}$ -линейных операторов на овеществлении  $U_{\mathbb{R}}$  комплексного пространства  $U$ . Очевидно,  $End(U)_{\mathbb{R}} \subset End(U_{\mathbb{R}})$ . Свойство вещественного линейного оператора «быть овеществлением» удовлетворяет следующим соотношениям:

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})_{\mathbb{R}} = \mathcal{A}_{\mathbb{R}} + \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad (\mathcal{A}\mathcal{B})_{\mathbb{R}} = \mathcal{A}_{\mathbb{R}}\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad (\alpha\mathcal{A})_{\mathbb{R}} = \alpha\mathcal{A}_{\mathbb{R}} \quad \text{для любого } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Каждое из них нетрудно проверить, рассмотрев матрицы операторов в базисе вида  $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ . Таким образом,  $End(U)_{\mathbb{R}}$  – подалгебра в алгебре  $End(U_{\mathbb{R}})$ . Выбор базиса  $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$  фиксирует изоморфизм  $End(U_{\mathbb{R}}) \cong Mat_{\mathbb{R}}(2n)$ , при котором подалгебра  $End(U)_{\mathbb{R}}$  отображается на подалгебру блочных матриц вида (3.3.4). Тогда легко вычислить размерность подалгебры  $End(U)_{\mathbb{R}}$ :

$$\dim End(U)_{\mathbb{R}} = 2n^2 = (\dim End(U_{\mathbb{R}}))/2.$$

Комплексная структура  $\mathcal{J}$  в нашем базисе представлена матрицей

$$J = \left( \begin{array}{c|c} 0 & -E \\ \hline E & 0 \end{array} \right).$$

Поскольку первоначальный оператор  $\mathcal{A}$   $\mathbb{C}$ -линеен, то его действие коммутирует с действием мнимой единицы;  $\mathcal{A}i = i\mathcal{A}$ . Переходя к овеществлениям  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  и  $i_{\mathbb{R}} = \mathcal{J}$ , будем иметь  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}\mathcal{J} = \mathcal{J}\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ . Матричная версия этого операторного уравнения имеет вид

$$\left( \begin{array}{c|c} A_1 & A_3 \\ \hline A_2 & A_4 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} 0 & -E \\ \hline E & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 0 & -E \\ \hline E & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} A_1 & A_3 \\ \hline A_2 & A_4 \end{array} \right),$$

откуда заключаем, что  $A_3 = -A_2$ ,  $A_4 = A_1$ . Таким образом доказано

**Предложение 3.3.9.** *(Характеризация овеществленных операторов) Подалгебра  $End(U)_{\mathbb{R}} \subset End(U_{\mathbb{R}})$  овеществленных линейных операторов относительно комплексной структуры  $\mathcal{J}$  состоит в точности из операторов, перестановочных с  $\mathcal{J}$ .*

**Определение 3.3.10.** Комплексная структура  $\mathcal{J}$  на вещественном векторном пространстве  $V$  размерности  $2n$  называется *согласованной с*

линейным оператором  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ , если на комплексном  $n$ -мерном пространстве  $U$  существует  $\mathbb{C}$ -линейный оператор  $\mathcal{B} : U \rightarrow U$  такой, что  $V = U_{\mathbb{R}}$  и  $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ .

В связи с этим возникает следующая общая задача:

*Дано вещественное векторное пространство размерности  $2n$  и линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ . Охарактеризовать условия, при которых на пространстве  $V$  существует комплексная структура, согласованная с  $\mathcal{A}$ .*

В простейшем случае  $n = 1$  ответ дается следующей теоремой.

**Теорема 3.3.11.** *(Существование комплексной структуры, согласованной с линейным оператором) Пусть  $V = \mathbb{R}^2$  и  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  – линейный оператор, не имеющий собственных векторов. Тогда на пространстве  $V$  можно определить согласованную с  $\mathcal{A}$  комплексную структуру.*

*Доказательство.* Линейный оператор указанного в теореме вида имеет два комплексно сопряженных характеристических корня  $\lambda = \lambda_1 \pm i\lambda_2$ . Выразим мнимую единицу  $i = \pm(\lambda - \lambda_1)/\lambda_2$  и рассмотрим линейный оператор  $\mathcal{J} = (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})/\lambda_2$ . Тогда оператор  $\mathcal{A}$  выражен как

$$\mathcal{A} = \lambda_1 \mathcal{E} + \lambda_2 \mathcal{J}. \quad (3.3.5)$$

Характеристический полином линейного оператора  $\mathcal{A}$  равен  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^2 - \text{tr} \mathcal{A} t + \det \mathcal{A}$ . Согласно теореме Гамильтона – Кэли,  $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ . Подстановка выражений  $\text{tr} \mathcal{A} = 2\lambda_1$ ,  $\det \mathcal{A} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$  и (3.3.5) в это уравнение дает

$$(\lambda_1^2 \mathcal{E} + 2\lambda_1 \lambda_2 \mathcal{J} + \lambda_2^2 \mathcal{J}^2) - 2\lambda_1(\lambda_1 \mathcal{E} + \lambda_2 \mathcal{J}) + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \mathcal{E} = \mathcal{O},$$

откуда  $\mathcal{J}^2 = -\mathcal{E}$ . Таким образом, на  $V$  определена структура одномерного комплексного пространства  $\mathbb{C}^1$ , и поскольку  $\mathcal{J}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{J}$ , то  $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ , где  $\mathcal{B}$  – умножение на комплексное число  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ .  $\square$

**Предложение 3.3.12.** *(Определитель овеществленного оператора)  $\det \mathcal{A}_{\mathbb{R}} = |\det \mathcal{A}|^2$ .*

*Доказательство.* Воспользуемся инвариантностью детерминанта линейного оператора и блочным представлением матрицы овеществленного линейного оператора в подходящем базисе. Сначала к верхней (блочной) строке прибавим нижнюю, умноженную на  $i$ , а после этого из правого блочного столбца вычтем левый, умноженный на  $i$ . Получим следующую

цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\det \mathcal{A}_{\mathbb{R}} &= \left| \begin{array}{c|c} A_1 & -A_2 \\ \hline A_2 & A_1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} A_1 + iA_2 & -A_2 + iA_1 \\ \hline A_2 & A_1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} A_1 + iA_2 & 0 \\ \hline A_2 & A_1 - iA_2 \end{array} \right| \\ &= \left| \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline A_2 & \overline{A} \end{array} \right| = \det A \det \overline{A} = |\det A|^2 = |\det \mathcal{A}|^2.\end{aligned}$$

□

### 3.3.3. Комплексификация

Пусть  $V$  –  $n$ -мерное вещественное векторное пространство. Образует внешнюю прямую сумму  $V \oplus V$ ; это  $2n$ -мерное векторное пространство с покомпонентным сложением и умножением на скаляры из  $\mathbb{R}$ . Введем линейный оператор

$$\mathcal{J} : V \oplus V \rightarrow V \oplus V : (u, v) \mapsto (-v, u). \quad (3.3.6)$$

Легко проверить, что он представляет собой комплексную структуру на  $V \oplus V$ .

**Определение 3.3.13.** Комплексная структура (3.3.6) на прямой сумме  $V \oplus V$  называется *канонической*.

**Определение 3.3.14.** Комплексификацией вещественного векторного пространства  $V$  называется комплексное векторное пространство  $V^{\mathbb{C}} = \overline{V \oplus V}$ , ассоциированное с  $V \oplus V$  и канонической комплексной структурой.

Понятно, что  $\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$ .

Рассмотрим действие мнимой единицы  $i$  на  $(u, v) \in V \otimes V$ :

$$i(u, v) = \mathcal{J}(u, v) = (-v, u).$$

Поэтому всякий вектор  $(u, v)$  представляется в виде суммы «действительной» и «мнимой» частей  $(u, v) = (u, 0) + i(v, 0)$ . Поэтому будем использовать обозначение  $(u, v) = u + iv$ . Легко проверяется, что

$$(\alpha + i\beta)(u + iv) = (\alpha u - \beta v) + i(\alpha v + \beta u) = (\alpha \mathcal{E} + \beta \mathcal{J})(u, v).$$

**Предложение 3.3.15.** (Базис комплексификации) Пусть  $e_1, \dots, e_n$  – базис  $\mathbb{R}$ -векторного пространства  $V$ . Тогда  $e_1 + i0, \dots, e_n + i0$  векторы составляют базис комплексификации  $V^{\mathbb{C}}$  пространства  $V$ .

*Доказательство.* Сначала докажем, что векторы  $e_1, \dots, e_n$   $\mathbb{C}$ -линейно независимы. Предположим, что существует равная 0 нетривиальная  $\mathbb{C}$ -линейная комбинация  $(\alpha_1 + i\beta_1)(e_1 + i0) + \dots + (\alpha_n + i\beta_n)(e_n + i0) = 0$ .



Это уравнение равносильно системе однородных линейных уравнений над полем  $\mathbb{R}$ :

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0, \quad \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n = 0.$$

Наличие хотя бы одного ненулевого решения противоречило бы тому, что векторы  $e_1, \dots, e_n$   $\mathbb{R}$ -линейно независимы.

Теперь остается заметить, что

$$\dim_{\mathbb{R}} \langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} \langle e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n \rangle_{\mathbb{R}} = 2n = \dim_R V \oplus V,$$

откуда  $\langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{C}} = \widetilde{V \oplus V} = V^{\mathbb{C}}$ . □

Доказанное предложение поясняет термин «замена поля скаляров»: если  $V$  – множество линейных комбинаций базисных векторов с вещественными коэффициентами, то  $V^{\mathbb{C}}$  – множество линейных комбинаций тех же векторов с комплексными коэффициентами. Поэтому понятно, что  $V^{\mathbb{C}}$  «больше», чем  $V$ , в том смысле, что  $V$  – собственное подмножество в  $V^{\mathbb{C}}$ . Однако  $V$  не является подпространством в своей комплексификации  $V^{\mathbb{C}}$ , поскольку векторные пространства  $V$  и  $V^{\mathbb{C}}$  имеют разные поля коэффициентов.

*Замечание 3.3.16.* Любое  $n$ -мерное комплексное векторное пространство  $U$  изоморфно комплексификации подходящего вещественного пространства  $V$ . Для его построения достаточно выбрать любой базис  $e_1, \dots, e_n$  в  $U$  и сформировать его  $\mathbb{R}$ -линейную оболочку:  $\langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{R}} = V$ . При этом  $V^{\mathbb{C}} = (\langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{C}} = U$ .

**Определение 3.3.17.** Комплексификацией  $\mathbb{R}$ -линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  называется  $\mathbb{C}$ -линейный оператор  $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ , для которого

$$\mathcal{A}^{\mathbb{C}}(u + iv) = \mathcal{A}u + i\mathcal{A}v.$$

Согласно предложению 3.3.15, матрица  $A$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$  служит одновременно и матрицей  $A^{\mathbb{C}}$  комплексификации  $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$  в том же базисе, т. е.  $A^{\mathbb{C}} = A$ . В частности, все инварианты совпадают для оператора  $\mathcal{A}$  и его комплексификации  $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ , например,  $\det \mathcal{A}^{\mathbb{C}} = \det \mathcal{A}$ ,  $\text{tr} \mathcal{A}^{\mathbb{C}} = \text{tr} \mathcal{A}$ .

**Упражнение 3.3.18.** Докажите, что операция перехода к комплексификациям совместима с суммами и композициями: для любых вещественных линейных операторов  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\mathbb{C}} = \mathcal{A}^{\mathbb{C}} + \mathcal{B}^{\mathbb{C}}; \quad (\mathcal{A}\mathcal{B})^{\mathbb{C}} = \mathcal{A}^{\mathbb{C}}\mathcal{B}^{\mathbb{C}}.$$

Пусть  $\mathcal{A}$  – линейный оператор на  $V$ ,  $a + ib$  – собственный вектор его комплексификации  $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ , принадлежащий собственному значению  $\alpha + i\beta$ . Тогда

$$\mathcal{A}a + i\mathcal{A}b = \mathcal{A}^{\mathbb{C}}(a + ib) = (\alpha + i\beta)(a + ib) = (\alpha a - \beta b) + i(\alpha b + \beta a).$$

Отсюда заключаем, что  $\mathcal{A}a = \alpha a - \beta b$  и  $\mathcal{A}b = \alpha b + \beta a$ , т. е.  $\langle a, b \rangle_{\mathbb{R}}$  – двумерное  $\mathcal{A}$ -инвариантное подпространство.

*Замечание 3.3.19.* \* Комплексификация вещественного векторного пространства является частным случаем расширения поля (соответственно, кольца) скаляров, которое может быть построено для любого векторного пространства (соответственно, модуля над кольцом) с помощью универсальной конструкции так называемого *тензорного произведения*.

Пусть теперь  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  – билинейная форма. Соответствие  $f \mapsto f_+^{\mathbb{C}}$ , определяемое на любой паре векторов  $x + iy, u + iv \in V^{\mathbb{C}}$  правилом

$$f_+^{\mathbb{C}}(x + iy, u + iv) = f(x, u) - f(y, v) + i(f(x, v) + f(y, u)),$$

конструирует по вещественной билинейной форме  $f$  комплексную билинейную форму  $f_+^{\mathbb{C}}$  на комплексификации  $V^{\mathbb{C}}$ . При этом если  $f$  симметрическая (соответственно, кососимметрическая), то  $f^{\mathbb{C}}$  также симметрическая (соответственно, кососимметрическая).

Определив соответствие  $f \mapsto f_-^{\mathbb{C}}$  на любой паре векторов  $x + iy, u + iv \in V^{\mathbb{C}}$  другим правилом

$$f_-^{\mathbb{C}}(x + iy, u + iv) = f(x, u) + f(y, v) - i(f(x, v) - f(y, u)),$$

получим полуторалинейную форму  $f_-^{\mathbb{C}}$  на комплексификации  $V^{\mathbb{C}}$ . При этом если  $f$  симметрическая (соответственно, кососимметрическая), то  $f^{\mathbb{C}}$  эрмитова (соответственно, косоэрмитова).

Пусть теперь  $V, (\cdot|\cdot)$  – вещественное векторное пространство со скалярным произведением. Тогда на комплексификации  $V^{\mathbb{C}}$  определено скалярное произведение  $(\cdot|\cdot)^{\mathbb{C}} := (\cdot|\cdot)_{\pm}^{\mathbb{C}}$ . Если  $V, (\cdot|\cdot)$  евклидово, то  $V^{\mathbb{C}}, (\cdot|\cdot)^{\mathbb{C}}$  эрмитово. При этом  $\|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .

### 3.3.4. Комплексификация – овеществление – комплексификация

Выполним на  $n$ -мерном вещественном пространстве  $V$  сначала комплексификацию, а затем овеществление полученного комплексного пространства:  $W = (V^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ . Понятно, что имеет место прямое разложение

$W = V \oplus V$ , соответствующее выделению действительной и мнимой частей, и на этом пространстве определен оператор  $\mathcal{J} = (i\mathcal{E})_{\mathbb{R}}$  – оветствование действия мнимой единицы. Если в  $W$  выбран базис  $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ , то в этом базисе оператор  $\mathcal{J}$  задан матрицей

$$J = \left( \begin{array}{c|c} 0 & -E \\ \hline E & 0 \end{array} \right).$$

Кроме этого, на пространстве  $W$  определен оператор «комплексного сопряжения», меняющий знак «мнимой части»:  $\mathcal{S} : V \oplus V \rightarrow V \oplus V$ ;  $(u, v) \mapsto (u, -v)$ . Оператор  $\mathcal{S}$  в выбранном базисе представлен матрицей

$$J = \left( \begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & -E \end{array} \right).$$

**Определение 3.3.20.** Линейным оператором, комплексно сопряженным к линейному оператору  $\mathcal{A} : V^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{\mathbb{C}}$ , назовем линейный оператор  $\overline{\mathcal{A}} : V^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{\mathbb{C}}$ , действие которого определяется равенством  $\overline{\mathcal{A}}(u + iv) = \overline{\mathcal{A}(u + iv)}$ .

Выполнив оветствование, получим

$$\overline{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}(u, v) = (\overline{\mathcal{A}(u + iv)})_{\mathbb{R}} = (\overline{\mathcal{A}(u + iv)})_{\mathbb{R}} = \mathcal{S}\mathcal{A}_{\mathbb{R}}\mathcal{S}(u, v),$$

т. е.  $\overline{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}} = \mathcal{S}\mathcal{A}_{\mathbb{R}}\mathcal{S}$ . Если в базисе  $e_1, \dots, e_n$  линейный оператор  $\mathcal{A}$  имеет матрицу  $A_1 + iA_2$ , где матрицы  $A_1, A_2$  вещественны, то комплексно сопряженный к нему оператор  $\overline{\mathcal{A}}$  в том же базисе задается матрицей  $A_1 - iA_2$ . Тогда для того, чтобы оператор  $\mathcal{A}$  был комплексификацией некоторого вещественного оператора, необходимо и достаточно, чтобы  $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$ .

Пусть теперь  $U$  –  $\mathbb{C}$ -векторное пространство с действием скаляров  $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ ; рассмотрим комплексно сопряженное векторное пространство  $\overline{U}$ , в котором действие скаляров определено по правилу  $(\lambda, v) \mapsto \overline{\lambda}v$ . Перейдя в вещественном пространстве с комплексной структурой  $V, \mathcal{J}$  к  $V, -\mathcal{J}$ , получим  $\overline{\overline{V}}$  в качестве комплексного пространства, ассоциированного с пространством  $V, -\mathcal{J}$ .

Применив к  $\mathbb{C}$ -векторному пространству  $V$  сначала оветствование, а затем комплексификацию, получим  $\mathbb{C}$ -изоморфизм

$$f : (V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} V \oplus \overline{V}.$$

При этом на  $(V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$  определены два оператора: комплексификация канонической комплексной структуры  $\mathcal{J}^{\mathbb{C}} : (x, y) \mapsto (-y, x)$  и действие мнимой единицы  $i = \sqrt{-1}$ , отвечающее исходной структуре комплексного

пространства на  $V: (x, y) \mapsto (ix, iy)$ . Нетрудно проверить, что операторы  $\mathcal{J}^{\mathbb{C}}$  и  $i$  перестановочны; это, в частности, означает, что  $\mathcal{J}^{\mathbb{C}}$   $\mathbb{C}$ -линеен относительно действия поля комплексных чисел, определяемого с помощью оператора  $i$ . Поскольку по определению комплексной структуры  $(\mathcal{J}^{\mathbb{C}})^2 = -1$ , то  $\mathcal{J}^{\mathbb{C}}$  имеет два собственных значения  $\pm i$ . Им соответствуют два собственных подпространства:

$$V^{1,0} = \{(x, y) \in (V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \mid \mathcal{J}^{\mathbb{C}}(x, y) = i(x, y)\}, \quad (3.3.7)$$

$$V^{0,1} = \{(x, y) \in (V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \mid \mathcal{J}^{\mathbb{C}}(x, y) = -i(x, y)\}, \quad (3.3.8)$$

образующие прямое разложение  $(V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$ . Действительно, описания собственных подпространств могут быть переписаны в виде (убедитесь в этом!)

$$V^{1,0} = \{(x, -ix) \in (V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \mid x \in V\},$$

$$V^{0,1} = \{(y, iy) \in (V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \mid y \in V\}.$$

Тогда для любого элемента  $(u, v) \in (V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$  уравнение

$$(u, v) = (x, -ix) + (y, iy)$$

разрешимо единственным способом по формулам  $x = (u + iv)/2$ ,  $y = (u - iv)/2$ .

Более того, имеются канонические  $\mathbb{C}$ -изоморфизмы

$$V^{1,0} \cong V, \quad V^{0,1} \cong \bar{V}.$$

Действительно, имеют место  $\mathbb{R}$ -линейные изоморфизмы

$$V \xrightarrow{\sim} V^{1,0} : x \mapsto (x, -ix), \quad (3.3.9)$$

$$\bar{V} \xrightarrow{\sim} V^{0,1} : x \mapsto (x, ix). \quad (3.3.10)$$

Согласование с действиями поля  $\mathbb{C}$  поставляется коммутативными диаграммами

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\sim} & V^{0,1} \\ i \downarrow & & \downarrow \mathcal{J}^{\mathbb{C}} \\ V & \longrightarrow & V^{1,0} \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} \bar{V} & \xrightarrow{\sim} & V^{1,0} \\ i \downarrow & & \downarrow \mathcal{J}^{\mathbb{C}} \\ \bar{V} & \longrightarrow & V^{0,1} \end{array}$$

соответственно.

**Упражнение 3.3.21.** Выполните проверку коммутативности диаграмм. Для этого используйте выражения для действий мнимой единицы на пространствах  $V, \bar{V}$ , выражения (3.3.7, 3.3.8) для  $\mathcal{J}^{\mathbb{C}}$  и (3.3.9, 3.3.10) для отображений. Как отсюда получается вывод о  $\mathbb{C}$ -линейности отображений (3.3.9, 3.3.10)?

## Глава 4

# Элементы линейной геометрии

В этой главе изложены основные черты общего подхода к многомерной геометрии, основанного на результатах линейной алгебры. Мы сконцентрируемся на аффинных пространствах как без метрической структуры, так и с метрической структурой, и в основном на поведении линейных объектов в таких пространствах.

Понятие аффинного пространства является способом аксиоматизации свойств привычного нам физического пространства без правил измерения отрезков и углов. При этом размерность может быть равной любому натуральному числу. Это предмет так называемой многомерной аффинной геометрии. Она является хорошим «испытательным полигоном» линейной алгебры и оказывается на удивление богатой. Аффинные задачи, как правило, формулируются в терминах инцидентности (принадлежит – не принадлежит) и взаимного расположения (пересекаются – не пересекаются, каково подмножество общих точек и т. п.)

Евклидово точечное пространство получается, когда в вещественном аффинном пространстве вводится евклидова метрика. Свойства такого пространства моделируют аналогичные свойства физического пространства, касающиеся измерения длин отрезков, величин углов, площадей, объемов и т. п. Метрические задачи, в отличие от аффинных, так или иначе включают в себя эти понятия.

### 4.1. Аффинное пространство

#### 4.1.1. Основные понятия

**Определение 4.1.1.**  $n$ -мерным аффинным пространством над полем  $k$  называется непустое множество  $\mathbb{A}_k^n$ , элементы которого называют *точками*, с фиксированным действием на нем  $n$ -мерного  $k$ -векторного про-

пространства  $V$

$$\tau : V \times \mathbb{A}_k^n \rightarrow \mathbb{A}_k^n$$

таким, что

- 1) действие  $\tau$  *транзитивно*, т. е. для любых  $\dot{a}, \dot{b} \in \mathbb{A}_k^n$  найдется  $v \in V$  такой, что  $\tau(v, \dot{a}) = \dot{b}$ ,
- 2) действие  $\tau$  *свободно*, т. е. каждый ненулевой вектор  $v$  действует на  $\mathbb{A}_k^n$  без неподвижных точек:  $\tau(v, \dot{a}) \neq \dot{a}$  для всех  $\dot{a} \in \mathbb{A}_k^n$ .

В частности, каждый вектор  $v$ , указанный в п. 1), определяется парой  $\dot{a}, \dot{b}$  однозначно.

Говорят, что аффинное пространство  $\mathbb{A}_k^n$  *ассоциировано с векторным пространством  $V$*  той же размерности.

**Соглашение 4.1.2.** Поскольку обычно действие  $\tau$  фиксировано и единственно, то вместо общего обозначения  $\tau(v, \dot{a}) = \dot{b}$  будем использовать более традиционное, хотя и весьма условное,  $\dot{b} = \dot{a} + v$ .

*Замечание 4.1.3.* Из транзитивности действия  $\tau$  следует, что фиксация любой точки  $\dot{a} \in \mathbb{A}_k^n$  поставяет отображение  $\mathbb{A}_k^n \rightarrow V$ . Из того, что действие свободно, следует, что это отображение биективно.

*Замечание 4.1.4.* Фиксация произвольного вектора  $v \in V$  поставяет биективное отображение  $\tau(v, \cdot) : \mathbb{A}_k^n \rightarrow \mathbb{A}_k^n : \dot{a} \mapsto \tau(v, \dot{a})$ . Это отображение называется (*параллельным*) *переносом*, или *трансляцией*, на вектор  $v$ . Параллельные переносы аффинного пространства  $\mathbb{A}_k^n$  образуют векторное пространство  $(\mathbb{A}_k^n)^\sharp$ , называемое *пространством переносов* аффинного пространства  $\mathbb{A}_k^n$ . Пространство  $(\mathbb{A}_k^n)^\sharp$  изоморфно  $V$ .

**Упражнение 4.1.5.** Как определено сложение в пространстве переносов?

**Соглашение 4.1.6.** Поскольку для любых точек  $\dot{a}, \dot{b}$  существует единственный вектор  $v$ , осуществляющий перенос точки  $\dot{a}$  в точку  $\dot{b}$ , то такой вектор мы будем обозначать символом  $\overrightarrow{a\dot{b}}$ . Принимая во внимание соглашение 4.1.2, получим  $\dot{b} = \dot{a} + \overrightarrow{a\dot{b}}$ . Имеет место отображение «вычитания точек»  $- : \mathbb{A}_k^n \times \mathbb{A}_k^n \rightarrow V$ , определяемое правилом  $(\dot{a}, \dot{b}) \mapsto \dot{b} - \dot{a} := \overrightarrow{a\dot{b}}$ .

#### 4.1.2. Аффинные отображения

Пусть  $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$  – аффинные пространства над одним и тем же полем  $k$ , ассоциированные с векторными пространствами  $V, V'$  соответственно. Пусть  $\tau : V \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  и  $\tau' : V' \times \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A}'$  – действия векторных пространств трансляциями, определяющие структуры аффинных пространств на  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{A}'$  соответственно.

**Определение 4.1.7.** *Аффинным отображением* называется отображение множеств  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  такое, что отображения вычитания точек индуцируют гомоморфизм  $k$ -векторных пространств  $Df : V \rightarrow V'$ , определяемый коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} \times \mathbb{A} & \xrightarrow{-} & V \\ (f, f) \downarrow & & \downarrow Df \\ \mathbb{A}' \times \mathbb{A}' & \xrightarrow{-} & V' \end{array}$$

При этом  $k$ -гомоморфизм  $Df$  называется *линейной частью*, или *дифференциалом*, аффинного отображения  $f$ .

Иными словами, линейное отображение  $Df$  определяется соответствием  $\overrightarrow{ab} \mapsto f(\dot{a})f(\dot{b})$ .

**Упражнение 4.1.8.** Докажите, что отображение  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  аффинно-линейно тогда и только тогда, когда для  $\dot{b} = \dot{a} + v \in \mathbb{A}$  выполнено  $f(\dot{b}) = f(\dot{a}) + (Df)v$ .

Таким образом, аффинное отображение представляет собою гомоморфизм действий, понимаемый в следующем смысле: при аффинно-линейном отображении  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V \times \mathbb{A} & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{A} \\ (Df, f) \downarrow & & \downarrow f \\ V' \times \mathbb{A}' & \xrightarrow{\tau'} & \mathbb{A}' \end{array}$$

**Определение 4.1.9.** *Изоморфизмом* аффинных пространств называется их биективное аффинно-линейное отображение. При этом аффинные пространства  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{A}'$  называются *изоморфными*.

Понятно, что аффинно-линейное отображение  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  биективно тогда и только тогда, когда его дифференциал  $Df$  биективен.

**Теорема 4.1.10.** *(Классификация аффинных пространств) Аффинные пространства  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{A}'$  над одним и тем же полем изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.*

*Доказательство.* Пусть  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  – изоморфизм аффинных пространств; тогда его дифференциал  $Df$  биективен и, следовательно, является  $k$ -изоморфизмом. Тогда векторные пространства  $V$  и  $V'$ , будучи изоморфными, имеют равные размерности. Поэтому то же верно для аффинных пространств  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{A}'$ .

Обратно, пусть  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{A}'$  имеют равные размерности. Поскольку оба множества точек непусты, выберем  $\dot{a} \in \mathbb{A}$  и  $\dot{a}' \in \mathbb{A}'$ . Определим  $k$ -изоморфизм  $Df : V \xrightarrow{\sim} V'$ , выбрав произвольно базисы  $e_1, \dots, e_n$  в  $V$  и  $e'_1, \dots, e'_n$  в  $V'$  и установив биективное соответствие между ними:  $Df : e_i \mapsto e'_i, i = 1, \dots, n$ . Тогда на остальные векторы пространства  $V$  отображение  $Df$  продолжается по линейности. Искомый аффинный изоморфизм  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  определяется соответствием:  $\dot{a} + v \mapsto \dot{a}' + (Df)v$ .  $\square$

### 4.1.3. Аффинные координаты

**Определение 4.1.11.** *Аффинной системой координат, или аффинным репером, в аффинном пространстве  $(\mathbb{A}, V)$  называется совокупность точки  $\dot{o} \in \mathbb{A}$  и базиса  $e_1, \dots, e_n$  в  $V$ . Координатами точки  $a \in \mathbb{A}$  в репере  $(\dot{o}, e_1, \dots, e_n)$  называются координаты вектора  $\vec{oa}$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ .*

Итак, если  $\vec{oa} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ , то будем использовать запись  $\dot{a}(x_1, \dots, x_n)$ . Понятно, что если  $\dot{a}(x_1, \dots, x_n)$  и  $\dot{b}(y_1, \dots, y_n)$ , то  $\vec{ab} = \vec{ob} - \vec{oa} = (y_1 - x_1)e_1 + \dots + (y_n - x_n)e_n$ . Также, если  $\dot{b} = \dot{a} + v$ ,  $\dot{a}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$ , то для координат точки  $\dot{b}$  будем иметь  $y_i = x_i + v_i, i = 1, \dots, n$ .

Пусть теперь в пространстве  $\mathbb{A}$  заданы два репера  $(\dot{o}, e_1, \dots, e_n)$  и  $(\dot{o}', e'_1, \dots, e'_n)$ , причем точка  $\dot{o}'$  задана в репере  $(\dot{o}, e_1, \dots, e_n)$  координатами  $\dot{o}'(b_1, \dots, b_n)$ , и известна матрица перехода от базиса  $e_1, \dots, e_n$  к базису  $e'_1, \dots, e'_n$ :  $e'_j = \sum_i e_i a_{ij}$ . Выберем произвольную точку  $\dot{x}$ ; ее координаты в репере  $(\dot{o}, e_1, \dots, e_n)$  будем обозначать как  $\dot{x}(x_1, \dots, x_n)$ , а координаты той же точки в репере  $(\dot{o}', e'_1, \dots, e'_n)$  – как  $\dot{x}(x'_1, \dots, x'_n)$ . Вычислим уравнения связи между координатами этой точки в двух разных реперах.

Итак,  $\vec{ox} = \vec{oo'} + \vec{o'x}$ . Подстановка координатных представлений приводит к равенству

$$\sum_i e_i x_i = \sum_i e_i b_i + \sum_j e'_j x'_j = \sum_i e_i b_i + \sum_j \sum_i e_i a_{ij} x'_j.$$

Наконец, приравняв коэффициенты при одноименных базисных векторах, приходим к искомым соотношениям:

$$x_i = b_i + \sum_j a_{ij} x'_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Перепишем то же самое в матричной форме, введя очевидные обозначе-



ния:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тогда  $X = B + AX'$  или, выражая  $X'$ ,  $X' = B' + A^{-1}X$  для  $B' = -A^{-1}B$ .

#### 4.1.4. Линейные подмногообразия

**Определение 4.1.12.** *Линейным подмногообразием, или аффинным подпространством, аффинного пространства  $\mathbb{A}^n = (\mathbb{A}, V)$  называется подмножество  $\Pi = \dot{a} + U = \{\dot{a} + u | u \in U\}$ , где  $\dot{a} \in \mathbb{A}$  – точка и  $U \subset V$  – подпространство векторного пространства  $V$ . При этом  $U$  называется *направляющим подпространством* линейного подмногообразия  $\Pi$ .*

Размерностью линейного подмногообразия  $\Pi$ , проходящего через точку  $a$  в направлении подпространства  $U$ , естественно считать размерность направляющего подпространства  $U$ .

*Замечание 4.1.13.* Каждое линейное подмногообразие неподвижно относительно параллельных переносов вдоль векторов направляющего подпространства. Действительно, пусть  $\Pi = \dot{a} + U$ . Выполним перенос на произвольный вектор  $u \in U$ :  $\tau(u, \Pi) = \tau(u, \dot{a}) + U$ . Обозначим  $\tau(u, \dot{a}) = \dot{b}$ ; понятно, что  $\dot{b} \in \Pi$ . С другой стороны, для любой точки  $\dot{x} \in \Pi$  имеем  $\dot{x} = \dot{a} + \overrightarrow{ax} = \dot{b} + \overrightarrow{bx} = b + \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ax} = \dot{a} + \overrightarrow{ax}$ , т. е.  $\dot{x} \in \tau(u, \Pi)$ , и  $\Pi \subset \tau(u, \Pi)$ . Обратное включение доказывается обращением цепочки равенств. Поэтому аффинное подпространство задается *любой его точкой и направляющим векторным подпространством, которое не зависит от выбора точки.*

Пусть  $\Pi \subset \mathbb{A}^n$  –  $m$ -мерное аффинное подпространство, проходящее через точку  $a$  в направлении подпространства  $U \subset V$ . Выберем в  $U$  какой-нибудь базис  $g_1, \dots, g_m$  и рассмотрим  $m$ -мерное аффинное пространство  $\mathbb{A}^m$  над тем же полем, что и  $\mathbb{A}^n$ . Зафиксируем также репер  $(\dot{o}, e_1, \dots, e_n)$  в пространстве  $\mathbb{A}^n$  и выразим векторы  $g_i$  через векторы  $e_1, \dots, e_n$ :  $g_i = \sum_j e_j h_{ji}$ . Взяв произвольный репер  $(\dot{o}', e'_1, \dots, e'_m)$  в пространстве  $\mathbb{A}^m$ , установим соответствие  $\dot{o}' \mapsto \dot{a}$ ,  $e'_i \mapsto g_i = \sum_j e_j h_{ji}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Тем самым определено аффинное отображение  $f : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}^n$ , образом которого является аффинное подпространство  $\Pi$ . Отображение  $\Pi$  осуществляет вложение аффинного пространства  $\mathbb{A}^m$  в аффинное пространство не меньшей размерности  $\mathbb{A}^n$  и поставляет аффинный изоморфизм  $\mathbb{A}^m \cong \Pi$ .

Итак, *каждое аффинное подпространство является образом некоторого аффинного отображения.*

Некоторым аффинным подпространствам, в зависимости от их размерности, присвоены специальные названия:

$m = 0$  – точка,

$m = 1$  – прямая,

$m = n - 1$  – гиперплоскость.

Иногда любое  $m$ -мерное аффинное подмногообразие называют  $m$ -мерной плоскостью ( $m$ -плоскостью).

Нетрудно проверить, что если подмножество  $\Pi \subset \mathbb{A}^n$  является плоскостью с направляющим подпространством  $U$ , то оно удовлетворяет двум следующим свойствам:

*Свойство 1.* Для любых  $\dot{q}, \dot{r} \in \Pi$  выполнено  $\overrightarrow{q\dot{r}} \in U$ .

Действительно, пусть  $\dot{q} = \dot{a} + u$ ,  $\dot{r} = \dot{a} + v$ ,  $u, v \in U$ . Тогда  $\dot{q} + (v - u) = \dot{a} + u + (v - u) = \dot{a} + v = \dot{r}$  и  $\overrightarrow{q\dot{r}} = v - u \in U$ .

*Свойство 2.* Для любых  $\dot{q}, \dot{r}, \dot{s} \in \Pi$  выполнено  $\dot{s} + \overrightarrow{q\dot{r}} \in \Pi$ .

Действительно, пусть  $\dot{s} = \dot{a} + w$ , и

$$\dot{s} + \overrightarrow{q\dot{r}} = (\dot{a} + w) + \overrightarrow{q\dot{r}} = \dot{a} + (w + \overrightarrow{q\dot{r}}) \in \Pi.$$

*Замечание 4.1.14.* Подмножество, обладающее свойствами 1 и 2, принадлежит плоскости. В качестве примера ситуации, когда подмножество точек, обладающих свойствами 1 и 2, не совпадает с плоскостью, можно рассмотреть множество точек с целочисленными координатами на вещественной плоскости  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ .

Далее будем считать, что характеристика поля коэффициентов  $k$  отлична от 2, и будем рассматривать линейные подмногообразия строго положительных размерностей. Тогда такое линейное подмногообразие содержит по крайней мере две различные точки.

Пусть  $(\dot{p}\dot{q}) = \{\dot{p} + \lambda \overrightarrow{p\dot{q}} | \lambda \in k\}$  – прямая, проходящая через точки  $\dot{p} \neq \dot{q} \in \mathbb{A}^n$ .

**Теорема 4.1.15.** *(Критерий аффинного подпространства) Подмножество  $\Pi \subset \mathbb{A}^n$  является линейным подмногообразием тогда и только тогда, когда наряду с любыми двумя различными точками оно содержит проходящую через них прямую.*

*Доказательство.* Пусть  $\Pi$  – аффинное подпространство, т. е. подмножество  $\Pi$  может быть представлено в виде  $\Pi = \dot{p} + U$  для подходящей точки  $\dot{p} \in \Pi$  и векторного подпространства  $U \subset V$ . Пусть  $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \in \Pi$  – две различные точки; тогда точки прямой  $(\dot{q}_1\dot{q}_2)$  имеют вид  $\dot{q} = \dot{q}_1 + \lambda \overrightarrow{q_1\dot{q}_2} =$

$\dot{p} + \overrightarrow{pq_1} + \lambda \overrightarrow{q_1 q_2}$ . Если  $\dot{q}_1 = \dot{p} + u_1$ ,  $\dot{q}_2 = \dot{p} + u_2$  для  $u_1, u_2 \in U$ , то  $\overrightarrow{q_1 q_2} = u_2 - u_1$ , и  $\overrightarrow{pq_1} = u_1$ . Тогда  $\dot{q} = \dot{q}_1 + \lambda \overrightarrow{q_1 q_2} = \dot{p} + u_1 + \lambda(u_2 - u_1) \in \dot{p} + U = \Pi$ .

Обратно, пусть  $\dot{p} \in \Pi$  – произвольная и фиксированная точка,  $U = \{\overrightarrow{pq} | \dot{q} \in \Pi\}$  – множество векторов. Убедимся в том, что  $U$  – векторное подпространство в  $V$ . Выберем две точки  $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \in \Pi$ ; пусть  $\overrightarrow{pq_1} = u_1$ ,  $\overrightarrow{pq_2} = u_2$ . По условию точка вида  $\dot{q}_1 + \lambda \overrightarrow{q_1 q_2} = \dot{p} + u_1 + \lambda(u_2 - u_1) \in (\dot{q}_1 \dot{q}_2)$  принадлежит подмножеству  $\Pi$  при всех  $\lambda \in k$ . Иными словами,  $u_1 + \lambda(u_2 - u_1) \in U$ , если только  $u_1, u_2 \in U$ .

Поскольку  $\dot{p} \in \Pi$ , то  $0 \in U$ . При  $u_1 = 0$  получим импликацию  $u_2 \in U \Rightarrow \lambda u_2 \in U$ . Положив  $\lambda = 1/2$ , получим  $u_1, u_2 \in U \Rightarrow (u_1 + u_2)/2 \in U$ . Тогда  $2[(u_1 + u_2)/2] = u_1 + u_2 \in U$ .  $\square$

#### 4.1.5. Пересечение и параллельность в $\mathbb{A}^n$

**Предложение 4.1.16.** (Пересечение аффинных подпространств) Пересечение двух аффинных подпространств  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , имеющих направляющие подпространства  $U_1$  и  $U_2$  соответственно, либо пусто, либо представляет собой аффинное подпространство, проходящее в направлении  $U_1 \cap U_2$ .

*Доказательство.* Пусть  $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$ ; пусть  $\dot{a} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$ . Тогда  $\Pi_i = \dot{a} + U_i$ ,  $i = 1, 2$ . Рассмотрим пересечение

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{\dot{x} | \Pi_1 \ni \dot{x} \in \Pi_2\} = \{\dot{x} | U_1 \ni \overrightarrow{ax} \in U_2\} = \dot{a} + U_1 \cap U_2.$$

$\square$

**Определение 4.1.17.** Аффинные подпространства  $\Pi = \dot{a} + U$  и  $\Sigma = \dot{b} + W$  пространства  $\mathbb{A}^n$  называются *параллельными*, если либо  $U \subset W$ , либо  $W \subset U$ .

*Замечание 4.1.18.* Параллельные линейные многообразия совмещаются параллельным переносом. Пусть линейные многообразия  $\Pi = \dot{a} + U$  и  $\Sigma = \dot{b} + W$  параллельны и пусть  $U \subset W$ . Тогда параллельный перенос на вектор  $\overrightarrow{ab}$  переводит многообразие  $\Pi$  в  $\Pi' = \dot{b} + U \subset \Sigma$ . Понятно, что если  $\dim \Pi = \dim \Sigma$ , то  $\Pi' = \Sigma$ , т. е. параллельные линейные многообразия равных размерностей отождествляются параллельным переносом.

#### 4.1.6. Аффинно-линейные функции и задание подпространств уравнениями

**Определение 4.1.19.** Аффинно-линейной функцией называется отображение  $f : \mathbb{A} \rightarrow k$ , удовлетворяющее условию: существует такая линейная форма  $Df : V \rightarrow k$  на векторном пространстве  $V$ , что для



– одно из ее решений. Примем его за координаты точки  $x^0$  в некотором репере  $(\dot{o}, e_1, \dots, e_n)$  так, что  $f_i(\dot{o}) = -b_i$ . Тогда любое другое решение системы (4.1.1) имеет вид  $\dot{x} = \dot{x}^0 + v$ , где  $v \in V$  – решение однородной системы  $(Df_1)v = \dots = (Df_m)v = 0$  (согласно известной теореме о том, что общее решение системы неоднородных линейных уравнений есть сумма ее частного решения и общего решения соответствующей системы однородных уравнений). Пусть это (как и (4.1.1)) система ранга  $r$ . Тогда пространство  $U$  ее решений имеет размерность  $n - r$ . Таким образом, совокупность решений системы (4.1.1) представляет собой линейное многообразие  $\Pi = \dot{x}^0 + U$  размерности  $n - r$ .

Обратно, пусть  $\Pi = \dot{x}^0 + U$  – произвольное аффинное подпространство размерности  $n - r$ . Возьмем какую-нибудь отличную от  $\dot{x}^0$  точку  $\dot{x} \in \Pi$ ; пусть в выбранном репере  $\dot{x}^0(x_1^0, \dots, x_n^0)$  и  $\dot{x}(x_1, \dots, x_n)$ . Векторное подпространство  $U$  может быть интерпретировано как пространство решений подходящей системы однородных линейных уравнений  $\sum_j a_{ij} y_j = 0$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Точка  $\dot{x} \in \Pi$  тогда и только тогда, когда  $\overrightarrow{x^0 x} \in U$ , т. е.  $\sum_j a_{ij}(x_j - x_j^0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Раскрыв скобки и введя обозначение  $b_i = \sum_j a_{ij} x_j^0$ ,  $i = 1, \dots, r$ , получим искомую систему линейных уравнений ранга  $r$ .  $\square$

#### 4.1.7. Аффинная независимость и аффинная оболочка

**Определение 4.1.21.** Точки  $\dot{p}^0, \dot{p}^1, \dots, \dot{p}^m$  *аффинно независимы* (или *находятся в общем положении*), если они не содержатся в  $m - 1$ -мерном аффинном подпространстве.

*Замечание 4.1.22.* Это условие равносильно тому, что векторы  $\overrightarrow{\dot{p}^0 \dot{p}^1}, \dots, \overrightarrow{\dot{p}^0 \dot{p}^m}$  линейно независимы. Рассмотрев линейную оболочку  $U = \langle \overrightarrow{\dot{p}^0 \dot{p}^1}, \dots, \overrightarrow{\dot{p}^0 \dot{p}^m} \rangle$ , заключим, что через точки  $\dot{p}^0, \dot{p}^1, \dots, \dot{p}^m$  проходит аффинное  $m$ -подпространство  $\dot{p}^0 + U$ .

Пусть  $M \subset \mathbb{A}$  – произвольное подмножество точек,  $\dot{p}^0 \in M$  – любая точка в нем. Сформируем линейную оболочку  $U := \langle \overrightarrow{\dot{p}^0 \dot{p}} \mid \dot{p} \in M \rangle$  системы векторов  $\{\overrightarrow{\dot{p}^0 \dot{p}} \mid \dot{p} \in M\}$ . Очевидно, система  $\{\overrightarrow{\dot{p}^0 \dot{p}} \mid \dot{p} \in M\}$  может оказаться бесконечной. Однако мы работаем с конечномерным пространством  $\mathbb{A}$ , которое ассоциировано с конечномерным векторным пространством  $V$ . Поэтому любое его подпространство и, в частности,  $U$ , конечномерно.

**Определение 4.1.23.** *Аффинной оболочкой* подмножества  $M \subset \mathbb{A}$

называется аффинное подпространство  $A(M) := \dot{p}^0 + U$ .

**Упражнение 4.1.24.** Докажите, что 1) аффинная оболочка подмножества  $M$  – это пересечение всех аффинных подпространств, содержащих  $M$ ; 2) аффинная оболочка подмножества  $M$  – это наименьшее по включению из всех аффинных подпространств, содержащих  $M$ .

#### 4.1.8. Взаимное расположение двух подпространств

Пусть в аффинном пространстве  $\mathbb{A}^n$ , ассоциированном с векторным пространством  $V$ , заданы два линейных подмногообразия

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \dot{p}^1 + U_1, \\ \Pi_2 &= \dot{p}^2 + U_2,\end{aligned}$$

размерностей  $d_1$  и  $d_2$  соответственно. Для определенности предположим, что  $d_1 \leq d_2$ .

**Определение 4.1.25.** Непараллельные линейные подмногообразия аффинного пространства  $\mathbb{A}$ , не имеющие общих точек, называются *скрещивающимися*.

**Теорема 4.1.26.** (Аффинное подпространство, параллельное данному) Для любого линейного подмногообразия  $\Pi \subset \mathbb{A}$  и любой точки  $\dot{q} \in \mathbb{A}$  найдется единственное линейное многообразие  $\Pi'$  той же размерности, проходящее через точку  $\dot{q}$  параллельно  $\Pi$ . Если при этом  $\dot{q} \in \Pi$ , то  $\Pi' = \Pi$ . В противном случае  $\Pi$  и  $\Pi'$  не пересекаются.

*Доказательство.* Пусть  $\Pi = \dot{p} + U$ , тогда  $\Pi' = \dot{q} + U$ . Понятно, что любое линейное многообразие размерности, равной  $\dim \Pi$ , имеет направляющее подпространство  $U$ . Поэтому искомое линейное подмногообразие, проходящее через точку  $\dot{q}$ , – это  $\Pi' = \dot{q} + U$  и только оно. Если  $\dot{q} \in \Pi$ , то  $\overrightarrow{p\dot{q}} \in U$ , откуда  $\Pi' = \dot{q} + U = \dot{p} + U = \Pi$ . Пусть теперь  $\dot{q} \notin \Pi$  и предположим, что  $\dot{r}$  – общая точка многообразий  $\Pi$  и  $\Pi'$ . Тогда  $\overrightarrow{p\dot{r}} \in U$ , поскольку  $\dot{p}, \dot{r} \in \Pi$ , и  $\overrightarrow{q\dot{r}} \in U$ , поскольку  $\dot{q}, \dot{r} \in \Pi'$ . Отсюда  $\overrightarrow{p\dot{q}} = \overrightarrow{p\dot{r}} - \overrightarrow{q\dot{r}} \in U$ , т. е.  $\dot{q} \in \Pi'$ , что противоречит условию  $\dot{q} \notin \Pi$ . Таким образом, предположение о том, что  $\Pi$  и  $\Pi'$  имеют непустое пересечение, неверно.  $\square$

Основным инструментом исследования взаимного расположения двух линейных подмногообразий является размерность их аффинной оболочки  $A(\Pi_1 \cup \Pi_2)$ . Для ее оценки необходимо подпространство  $W = U_1 + U_2$  и вектор  $\overrightarrow{p^1 p^2}$ .

**Теорема 4.1.27.** (Критерий пересечения аффинных подпространств) Линейные подмногообразия  $\Pi_1 = \dot{p}^1 + U_1$  и  $\Pi_2 = \dot{p}^2 + U_2$  имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда  $\overrightarrow{p^1 p^2} \in U_1 + U_2$ .

*Доказательство.* Пусть  $\dot{q} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$ . Тогда  $\overrightarrow{q p^1} \in U_1$  и  $\overrightarrow{q p^2} \in U_2$ , откуда  $\overrightarrow{p^1 p^2} \in U_1 + U_2$ . Обратно, пусть  $\overrightarrow{p^1 p^2} \in U_1 + U_2$ . Это означает, что существуют векторы  $u_1 \in U_1$  и  $u_2 \in U_2$  такие, что  $\overrightarrow{p^1 p^2} = u_1 + u_2$ . Таким образом, найдется точка  $\dot{q} \in \Pi_1$  такая, что  $\overrightarrow{p^1 q} = u_1$ , и тогда  $\overrightarrow{q p^2} = \overrightarrow{p^1 p^2} - u_1 = u_2$ . Отсюда заключаем, что  $\dot{q} \in \Pi_2$ , и  $\dot{q} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$ .  $\square$

Для дальнейшего исследования полезно следующее очевидное

**Предложение 4.1.28.** Не имеющие общих точек аффинные подпространства параллельны тогда и только тогда, когда  $\dim(U_1 \cap U_2) = \min(d_1, d_2)$ . Аффинные подпространства, имеющие общую точку, пересекаются вдоль аффинного подпространства размерности  $\dim(U_1 \cap U_2)$ .

**Упражнение 4.1.29.** Опишите все возможные случаи взаимного расположения двух двумерных плоскостей в четырехмерном пространстве. Дайте интерпретацию каждого случая на языке общих уравнений.

#### 4.1.9. Отрезок и простое отношение

Пусть  $\mathbb{A}$  – вещественное аффинное пространство.

**Определение 4.1.30.** Отрезком с концами  $\dot{p}$  и  $\dot{q}$  называется множество

$$[\dot{p}\dot{q}] = \{\dot{p} + \lambda \overrightarrow{p\dot{q}} \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Точки, соответствующие  $0 < \lambda < 1$ , называются *внутренними точками* отрезка  $[\dot{p}\dot{q}]$ .

Отрезок всегда является подмножеством прямой  $(\dot{p}\dot{q})$ , содержащей его концы (почему?).

**Определение 4.1.31.** Говорят, что точка  $\dot{r}$  делит отрезок  $[\dot{p}\dot{q}]$  в простом отношении  $\sigma$ , если выполнено векторное равенство  $\overrightarrow{p\dot{r}} = \mu \overrightarrow{r\dot{q}}$ .

При этом нетрудно убедиться в том, что  $\dot{r} = \dot{p} + \frac{\mu}{\mu+1} \overrightarrow{p\dot{q}}$ . Понятно, что для любой пары различных точек  $\dot{p}, \dot{q}$  и вещественного числа  $\sigma \neq -1$  существует точка  $\dot{r} \in (\dot{p}\dot{q})$  такая, что она делит отрезок  $[\dot{p}\dot{q}]$  в отношении  $\mu$ . При этом точка  $\dot{r}$  – внутренняя точка отрезка  $[\dot{p}\dot{q}]$  тогда и только тогда, когда  $\mu > 0$ . Точка  $\dot{p}$  лежит между  $\dot{r}$  и  $\dot{q}$ , если  $-1 < \mu < 0$ , и  $\dot{q}$  лежит между  $\dot{p}$  и  $\dot{r}$ , если  $\mu < -1$ .

#### 4.1.10. Аффинные преобразования и аффинная группа

**Определение 4.1.32.** *Аффинным преобразованием, или аффинным автоморфизмом, пространства  $\mathbb{A}$  называется аффинный изоморфизм этого пространства на себя, т.е.  $f : \mathbb{A} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}$ .*

Поскольку аффинный автоморфизм является аффинным эндоморфизмом (отображением в себя), то он может быть задан в виде

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{A}; \\ \dot{p} + x &\mapsto f(\dot{p}) + (Df)x, \end{aligned}$$

где  $Df : V \rightarrow V$  – линейный оператор. Требование обратимости аффинного морфизма  $f$  приводит к невырожденности  $Df$ . Любой аффинный эндоморфизм с невырожденным дифференциалом является аффинным автоморфизмом. Прямой проверкой аксиом нетрудно убедиться в том, что аффинные автоморфизмы данного аффинного пространства образуют группу относительно композиции. Группа аффинных автоморфизмов пространства  $\mathbb{A}$  обозначается  $Aff(\mathbb{A})$ .

**Определение 4.1.33.** Группа  $Aff(\mathbb{A})$  аффинных автоморфизмов пространства  $\mathbb{A}^n$  называется *аффинной группой в размерности  $n$* .

**Упражнение 4.1.34.** Простейшей из аффинных групп является аффинная группа одномерного пространства  $Aff(\mathbb{A}^1)$ . Убедитесь в том, что она неабелева.

Рассмотрим аффинную группу в размерности  $n$  и в ней подгруппу, состоящую из всех автоморфизмов, стабилизирующих точку  $o$ :

$$Aff(\mathbb{A})_o = \{f \in Aff(\mathbb{A}) \mid f(o) = o\}.$$

Соответствие  $f \mapsto Df$ , ограниченное на эту подгруппу, устанавливает изоморфизм  $Aff(\mathbb{A})_o \cong Aut_k(V)$  на группу невырожденных линейных операторов, а выбор репера с началом в точке  $o$  – изоморфизм  $Aff(\mathbb{A})_o \cong GL_n(k)$  на группу невырожденных матриц размера  $n$ .

Гомоморфизм групп  $D : Aff(\mathbb{A}) \rightarrow Aut_k(V)$ , ставящий в соответствие каждому аффинному автоморфизму его дифференциал, сюръективен, а его ядро имеет вид

$$T = \{f \in Aff(\mathbb{A}) \mid Df = \text{id}_V\} = \{f \in Aff(\mathbb{A}) \mid \exists v \in V : (f : \dot{p} \mapsto \dot{p} + v)\}.$$

Это уже известная читателю группа переносов, или трансляций, пространства  $\mathbb{A}$ . Будучи ядром гомоморфизма групп, она является нормальным делителем области определения этого гомоморфизма. Итак, имеет



место точная тройка групп

$$e \rightarrow T \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{A}) \rightarrow \text{Aut}_k(V) \rightarrow e.$$

В частности, любой аффинный автоморфизм представим в виде композиции  $f = t_v \circ g$ , где  $g$  – аффинный автоморфизм, стабилизирующий точку  $\dot{o}$ , а  $t_v$  – сдвиг на подходящий вектор  $v$ . Разложение зависит от выбора точки  $\dot{o}$ . Нетрудно убедиться в том, что при замене точки  $\dot{o}$  точкой  $\dot{o}'$  вектор сдвига  $v$  следует заменить на  $v' = v + (Df - \text{id}_V)\overrightarrow{o\dot{o}'}$ .

Пусть  $\dot{p}_0, \dots, \dot{p}_m$  и  $\dot{p}'_0, \dots, \dot{p}'_m$  – два набора точек общего положения в аффинном пространстве  $\mathbb{A}^n$ . Тогда существует аффинный автоморфизм  $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$  такой, что  $f(\dot{p}_i) = \dot{p}'_i$ .

**Упражнение 4.1.35.** Постройте его. Сделайте отсюда вывод, что аффинные подпространства *аффинно конгруэнтны* (т.е. отождествляются подходящим аффинным автоморфизмом) тогда и только тогда, когда они имеют равные размерности.

**Теорема 4.1.36.** (*Характеризация аффинных автоморфизмов*) Биективное отображение  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  тогда и только тогда является аффинным автоморфизмом, когда оно сохраняет коллинеарность точек и простое отношение.

*Доказательство.* Сохранение коллинеарности точек и простого отношения означает следующее. Пусть  $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r} \in \mathbb{A}$  таковы, что  $\overrightarrow{p\dot{q}} = \lambda \overrightarrow{q\dot{r}}$ ,  $\lambda \in k$ . Тогда  $\overrightarrow{f(\dot{p})f(\dot{q})} = \lambda \overrightarrow{f(\dot{q})f(\dot{r})}$ .

Понятно, что любое аффинное преобразование обладает таким свойством. Определим отображение  $Df : V \rightarrow V$  по правилу  $(Df)\overrightarrow{p\dot{q}} = \overrightarrow{f(\dot{p})f(\dot{q})}$ . Тогда, положив в условии  $\lambda = 1$ , заключим, что отображение определено корректно, т. е. образ вектора  $\overrightarrow{p\dot{q}}$  не зависит от выбора пары точек  $\dot{p}, \dot{q}$ . Докажем, что оно линейно. Свойство однородности  $(Df)(\lambda v) = \lambda(Df)v$  выполнено по условию. Пусть теперь  $u = \overrightarrow{p\dot{q}}$ ,  $v = \overrightarrow{q\dot{r}}$ ; тогда  $(Df)(u + v) = (Df)\overrightarrow{p\dot{r}} = \overrightarrow{f(\dot{p})f(\dot{r})} = \overrightarrow{f(\dot{p})f(\dot{q})} + \overrightarrow{f(\dot{q})f(\dot{r})} = (Df)u + (Df)v$ . Для любой точки  $\dot{q}$  имеем  $f(\dot{q}) = f(\dot{p}) + (Df)\overrightarrow{p\dot{q}}$ , т. е.  $f$  аффинно.  $\square$

**Замечание 4.1.37.** В приведенном доказательстве нигде не использовалась биективность отображения  $f$ . Она нужна лишь затем, чтобы рассматривать класс аффинных автоморфизмов вместо класса всех аффинных морфизмов. Поэтому нами доказан более общий результат:

*Отображение аффинных пространств аффинно тогда и только тогда, когда оно сохраняет коллинеарность точек и простое отношение.*

## 4.2. Евклидово точечное пространство

### 4.2.1. Отступление: метрическое пространство

Пусть  $M$  – множество, элементы которого будем называть *точками*.

**Определение 4.2.1.** Неотрицательная функция  $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  называется *функцией расстояния*, или *метрической функцией*, на  $M$ , если она удовлетворяет следующим требованиям (аксиомам расстояния):

1. *Симметричность*: для любых двух точек  $x, y \in M$   $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ .
2. *Невырожденность*:  $\rho(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$ .
3. *Неравенство треугольника*: для любых трех точек  $x, y, z \in M$  выполнено неравенство  $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ .

Значение  $\rho(x, y)$  функции  $\rho$  на паре точек  $x, y$  называется *расстоянием между точками  $x$  и  $y$* .

**Определение 4.2.2.** Множество  $M$  с метрической функцией  $\rho$  на нем называется *метрическим пространством*.

*Замечание 4.2.3.* Понятие метрической функции и понятие метрики как скалярного произведения являются различными, поскольку определяются различными функциями на различных областях определения. Метрика как скалярное произведение вводится на векторном пространстве. В то же время метрическая функция определяется на множестве точек, которое может быть лишено каких-либо дополнительных структур: существуют метрические пространства, на которых невозможно ввести структуру векторного пространства. Связь между понятиями метрической функции и метрики как скалярного произведения вскрывается с помощью конструкции евклидова точечного пространства.

### 4.2.2. Евклидово точечное пространство: основные понятия

**Определение 4.2.4.** Аффинное пространство  $\mathbb{E}$ , ассоциированное с евклидовым векторным пространством  $V, (\cdot | \cdot)$ , называется *евклидовым точечным пространством*.

Евклидово скалярное произведение (евклидова метрика) на векторном пространстве  $V$  индуцирует функцию расстояния на множестве точек  $\mathbb{E}$ , превращая его в метрическое пространство.

**Определение 4.2.5.** Расстоянием между точками  $\dot{x}, \dot{y}$  евклидова точечного пространства  $\mathbb{E}$  называется действительное число

$$\rho(\dot{x}, \dot{y}) = ||\overrightarrow{x\dot{y}}|| = \sqrt{(\overrightarrow{x\dot{y}} | \overrightarrow{x\dot{y}})}.$$

При этом свойства симметричности и невырожденности, а также неравенство треугольника для скалярного произведения обеспечивают выполнение одноименных аксиом расстояния.

**Определение 4.2.6.** Мера  $\varphi$  угла между прямыми  $(\dot{p}\dot{q})$  и  $(\dot{r}\dot{s})$  определяется выражением

$$\cos \varphi = \frac{|(\overrightarrow{pq}|\overrightarrow{rs})|}{\|\overrightarrow{pq}\| \cdot \|\overrightarrow{rs}\|}. \quad (4.2.1)$$

*Замечание 4.2.7.* Понятно, что  $(\dot{p}\dot{q})$  и  $(\dot{q}\dot{p})$  – одна и та же прямая. При этом замена  $(\dot{p}\dot{q})$  на  $(\dot{q}\dot{p})$  соответствует смене знака косинуса в (4.2.1) и, соответственно, меры  $\varphi$  угла на меру смежного к нему угла. При этом, как и в привычной читателю дву- и трехмерной геометрии, за меру угла между прямыми разумно выбрать меру меньшего из образуемых этими прямыми смежных углов. Поэтому знак абсолютной величины в числителе дроби (4.2.1) важен.

Поскольку формула вычисления скалярного произведения имеет наиболее удобный вид в случае, если базис является ортонормированным, то и в евклидовом точечном пространстве легко выделить класс систем координат, адаптированных к метрическим вычислениям.

**Определение 4.2.8.** Прямоугольной системой координат (или ортонормированным репером) в евклидовом точечном пространстве  $\mathbb{E}$  называется репер  $(\dot{o}, e_1, \dots, e_n)$ , в котором базис  $e_1, \dots, e_n$  ортонормирован.

Тогда расстояние между точками  $\dot{x}(x_1, \dots, x_n)$  и  $\dot{y}(y_1, \dots, y_n)$ , заданными своими координатами в прямоугольной системе координат, вычисляется по формуле  $\rho(\dot{x}, \dot{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$ .

**Определение 4.2.9.** Точечные евклидовы пространства  $\mathbb{E}$  и  $\mathbb{E}'$  (метрически) изоморфны, если существует аффинный изоморфизм  $f : \mathbb{E} \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}'$ , сохраняющий расстояние между точками, т. е. для любой пары точек  $\dot{p}, \dot{q} \in \mathbb{E}$  выполнено  $\rho(\dot{p}, \dot{q}) = \rho(f(\dot{p}), f(\dot{q}))$ .

*Замечание 4.2.10.* По функции расстояния на евклидовом точечном пространстве  $\mathbb{E}$  можно восстановить скалярное произведение в векторном пространстве  $V$ , которым ассоциировано  $\mathbb{E}$  как аффинное пространство. Пусть  $u, v \in V$ ; выберем произвольную точку  $\dot{p}$  и, применив теорему косинусов к треугольнику с вершинами  $\dot{p}, \dot{p} + v, \dot{p} + u$ , вычислим  $\cos \widehat{uv}$ . Тогда  $(u|v) = \rho(\dot{p}, \dot{p} + u)\rho(\dot{p}, \dot{p} + v)\cos \widehat{uv}$ . Более того, наличие метрического изоморфизма между двумя евклидовыми точечными пространствами  $(\mathbb{E}, V, (\cdot|\cdot))$  и  $(\mathbb{E}', V', (\cdot|\cdot)')$  равносильно наличию аффинного

изоморфизма  $(\mathbb{E}, V) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{E}', V')$ , переводящего скалярное произведение  $(\cdot|\cdot)$  на  $V$  в скалярное произведение  $(\cdot|\cdot)'$  на  $V'$ .

**Теорема 4.2.11.** (Классификация точечных евклидовых пространств) Любые евклидовы точечные пространства  $\mathbb{E}$  и  $\mathbb{E}'$  одинаковой конечной размерности изоморфны.

*Доказательство.* Выберем ортонормированные реперы  $(\dot{o}, e_1, \dots, e_n)$  в  $\mathbb{E}$  и  $(\dot{o}', e'_1, \dots, e'_n)$  в  $\mathbb{E}'$ . Установим соответствие  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  по правилу  $\dot{o} + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto \dot{o}' + x_1 e'_1 + \dots + x_n e'_n$ . Это аффинный изоморфизм, сохраняющий метрику.  $\square$

#### 4.2.3. Перпендикуляр к подпространству

Пусть  $\Pi$  –  $m$ -мерное подпространство в  $n$ -мерном евклидовом точечном пространстве  $\mathbb{E}$ ,  $\dot{q} \in \Pi$ ,  $\dot{r} \in \mathbb{E}$ , причем будем считать, что точки  $\dot{r}$  и  $\dot{q}$  различны.

**Определение 4.2.12.** Прямая  $(\dot{r}\dot{q})$  перпендикулярна аффинному подпространству  $\Pi$  (обозначение:  $(\dot{r}\dot{q}) \perp \Pi$ ), если для любых  $\dot{r}, \dot{s} \in \Pi$   $(\overrightarrow{r\dot{q}}|\overrightarrow{s\dot{q}}) = 0$ . При этом число  $\rho(\dot{r}, \dot{q})$  называется расстоянием от точки  $\dot{r}$  до подпространства  $\Pi$  (обозначение:  $\rho(\dot{r}, \Pi)$ ), а отрезок  $[\dot{r}\dot{q}]$  – перпендикуляром из точки  $\dot{r}$  на подпространство  $\Pi$ .

*Замечание 4.2.13.* Если  $\dot{r} \in \Pi$ , то расстояние  $\rho(\dot{r}, \Pi)$  принимается равным 0.

**Предложение 4.2.14.** (Существование перпендикуляра) Для любого аффинного подпространства  $\Pi$  и для любой точки  $\dot{r} \notin \Pi$  существует точка  $\dot{q} \in \Pi$  такая, что  $[\dot{r}\dot{q}] \perp \Pi$ .

*Доказательство.* Пусть  $U$  – направляющее подпространство аффинного подпространства  $\Pi$ . Рассмотрим ортогональное прямое разложение  $V = U \oplus U^\perp$ , произвольную точку  $\dot{r} \in \Pi$  и разложение вектора  $\overrightarrow{r\dot{r}} = u + u^\perp$ ,  $u \in U$ ,  $u^\perp \in U^\perp$ . Тогда  $\dot{q} = \dot{r} + u \in \Pi$  – искомая точка такая, что  $\overrightarrow{q\dot{r}} = u^\perp$ .  $\square$

Заметим, что расстояние от точки  $\dot{r}$  до подпространства  $\Pi$  – это норма составляющей  $u^\perp$  любого из векторов  $\overrightarrow{o\dot{r}}$ ,  $\dot{o} \in \Pi$ , на ортогональное дополнение  $U^\perp$  направляющего подпространства  $U$  для  $\Pi$ .

Расстояние от точки  $\dot{r}$  до линейного подмногообразия  $\Pi = \dot{o} + U$  нетрудно вычислить, выбрав репер подходящим образом. Пусть  $(\dot{o}, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$  – такой репер, что первые  $m$  векторов

составляют базис направляющего подпространства  $U$ . Разложим вектор  $v = \overrightarrow{or}$  в сумму двух составляющих  $v = u + u^\perp$ ,  $u \in U$ ,  $u^\perp \in U^\perp$ . Для этого воспользуемся методом неопределенных коэффициентов  $u = u_1 e_1 + \dots + u_m e_m$  и вычислим подлежащие определению  $u_1, \dots, u_m$  исходя из соотношения ортогональности  $(v - u|U) = 0$ . В координатах получим

$$u_1(e_1|e_j) + \dots + u_m(e_m|e_j) = (\overrightarrow{or}|e_j), \quad j = 1, \dots, m.$$

Наконец,  $\rho(\dot{p}, \Pi) = \|u^\perp\| = \|\overrightarrow{or} - u\|$ . Если репер ортонормированный, то  $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$ , и  $u_i = (\overrightarrow{or}|e_i)$ .

Рассмотрим подмножество  $D(\dot{p}, \Pi) = \{\rho(\dot{p}, \dot{r}) | \dot{r} \in \Pi\} \subset \mathbb{R}$  длин всех отрезков, один конец которых находится в точке  $\dot{p}$ , а другой принадлежит подпространству  $\Pi$ .

**Предложение 4.2.15.** *(Экстремальное свойство перпендикуляра) Подмножество  $D(\dot{p}, \Pi)$  содержит минимальный элемент, соответствующий перпендикуляру из точки  $\dot{p}$  на подпространство  $\Pi$ .*

*Доказательство.* Для любой точки  $\dot{r} \in \Pi$  выполнено  $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$ . Поскольку  $(\dot{p}\dot{q}) \perp \Pi$ , то  $(\overrightarrow{pq}|\overrightarrow{qr}) = 0$ , и  $\rho(\dot{p}, \dot{r})^2 = \rho(\dot{p}, \dot{q})^2 + \rho(\dot{q}, \dot{r})^2 \geq \rho(\dot{p}, \dot{q})^2$ , причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда  $\rho(\dot{q}, \dot{r}) = 0$ , т.е.  $\dot{q} = \dot{r}$ .  $\square$

#### 4.2.4. Расстояние между подпространствами

Рассмотрим два аффинных подпространства  $\Pi = \dot{p} + U$  и  $\Pi' = \dot{p}' + U'$  евклидова точечного пространства  $\mathbb{E}$ . Поскольку замена точки  $\dot{p}'$  любой точкой подпространства  $\Pi'$  не меняет самого подпространства, то без ограничения общности будем считать, что  $(\dot{p}\dot{p}') \perp \Pi'$ . Если одновременно  $(\dot{p}\dot{p}') \perp \Pi$ , то прямая  $(\dot{p}\dot{p}')$  называется *общим перпендикуляром к подпространствам  $\Pi$  и  $\Pi'$* .

**Предложение 4.2.16.** *(Экстремальное свойство общего перпендикуляра) Если  $[\dot{p}\dot{p}']$  – общий перпендикуляр подпространств  $\Pi$  и  $\Pi'$ , то  $\rho(\dot{p}, \dot{p}') \leq \rho(\dot{q}, \dot{q}')$  для любых точек  $\dot{q} \in \Pi$  и  $\dot{q}' \in \Pi'$ .*

*Доказательство.* Для точек  $\dot{q} \in \Pi$  и  $\dot{q}' \in \Pi'$  рассмотрим разложение  $\overrightarrow{qq'} = \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pp'} + \overrightarrow{p'q'}$ . При этом  $(\overrightarrow{pp'}|\overrightarrow{qp}) = 0$  и  $(\overrightarrow{pp'}|\overrightarrow{p'q'}) = 0$ , откуда  $(\overrightarrow{pp'}|\overrightarrow{qp} + \overrightarrow{p'q'}) = 0$  и, следовательно,

$$\rho(\dot{q}, \dot{q}')^2 = \|\overrightarrow{qq'}\|^2 = \|\overrightarrow{pp'}\|^2 + \|\overrightarrow{qp} + \overrightarrow{p'q'}\|^2 \geq \rho(\dot{p}, \dot{p}')^2.$$

$\square$

*Замечание 4.2.17.* Векторы  $\overrightarrow{qr}$  и  $\overrightarrow{p'q'}$  могут быть не ортогональны между собой; поэтому теорему Пифагора можно применить только так, как это сделано в доказательстве.

**Предложение 4.2.18.** *(Существование общего перпендикуляра) Для любых двух аффинных подпространств  $\Pi$  и  $\Pi'$  евклидова точечного пространства общий перпендикуляр существует.*

*Доказательство.* Пусть  $\Pi = \dot{q} + U$ ,  $\Pi' = \dot{q}' + U'$ . Подберем точки  $\dot{p} \in \Pi$  и  $\dot{p}' \in \Pi'$  такие, что  $\overrightarrow{pp'} \perp (U + U')$ . Рассмотрим ортогональное прямое разложение  $V = (U + U') \oplus (U + U')^\perp$ . Тогда вектор  $\overrightarrow{qq'}$  имеет однозначное разложение в сумму  $\overrightarrow{qq'} = \bar{u} + \bar{u}^\perp$ , где  $\bar{u} \in U + U'$ , а  $\bar{u}^\perp \in (U + U')^\perp$ . Кроме того, имеется разложение (необязательно однозначное)  $\bar{u} = u + u'$ ,  $u \in U$ ,  $u' \in U'$ . Тогда  $\dot{p} = \dot{q} + u$ ,  $\overrightarrow{pp'} = \bar{u}^\perp$ ,  $\overrightarrow{p'q} = u'$ .  $\square$

**Предложение 4.2.19.** *(Перечисление общих перпендикуляров) Множество общих перпендикуляров подпространств  $\Pi = \dot{q} + U$  и  $\Pi' = \dot{q}' + U'$  биективно множеству векторов пересечения  $U \cap U'$ .*

*Доказательство.* Каждый общий перпендикуляр соответствует выбору разложения  $\bar{u} = u + u'$ ,  $u \in U$ ,  $u' \in U'$ . Каждое такое разложение может быть поставлено в соответствие вектору из пересечения  $U \cap U'$ . В частности, общий перпендикуляр единственный в том и только том случае, когда сумма  $U + U'$  прямая.  $\square$

#### 4.2.5. Матрица Грама системы векторов.

##### Определитель Грама системы векторов

В п. 3.1.2 была введена матрица Грама для базиса евклидова или эрмитова векторного пространства. Здесь мы расширим это понятие на произвольные конечные системы векторов. Хотя нам потребуется только евклидова версия, в целях сохранения общности исследование будет проведено как для нее, так и для эрмитова случая. Итак, рассмотрим систему из  $m$  векторов  $v_1, \dots, v_m$  в  $n$ -мерном векторном пространстве со скалярным произведением  $V, (\cdot | \cdot)$ .

**Определение 4.2.20.** *Матрицей Грама системы векторов  $v_1, \dots, v_m$  называется матрица  $G(v_1, \dots, v_m) = ((v_i | v_j))_{i,j=1,\dots,m}$ . Определителем Грама системы векторов  $v_1, \dots, v_m$  называется определитель матрицы  $G(v_1, \dots, v_m) = ((v_i | v_j))_{i,j=1,\dots,m}$ .*

Выберем базис  $e_1, \dots, e_n$ . Векторы  $v_j$  имеют разложения по базису  $v_j = \sum_i e_i h_{ij}$ . Сформируем скалярные произведения

$$(v_j | v_s) = \left( \sum_i e_i h_{ij} \middle| \sum_r e_r h_{rs} \right) = \sum_{i,r} h_{ij} (e_i | e_r) \bar{h}_{rs}.$$

Если  $v_1, \dots, v_m$  – тоже базис, то  $m = n$  и  $H = (h_{ij})$  – матрица перехода от базиса  $e_1, \dots, e_n$  к базису  $v_1, \dots, v_n$ . Тогда для матриц Грама получим соотношение  $G(v_1, \dots, v_n) = H^T G(e_1, \dots, e_n) \bar{H}$ .

Если  $e_1, \dots, e_n$  – ортонормированный базис, а  $v_1, \dots, v_m$  – произвольная система векторов (возможно, линейно зависимая), то

$$(v_j | v_s) = \sum_{i,r} h_{ij} (e_i | e_r) \bar{h}_{rs} = \sum_{i,r} h_{ij} \delta_{ir} \bar{h}_{rs} = \sum_i h_{ij} \bar{h}_{is},$$

т. е.  $G(v_1, \dots, v_m) = H^T \bar{H}$ .

**Теорема 4.2.21.** *(Свойства определителя Грама) Определитель Грама системы векторов  $v_1, \dots, v_m$  неотрицателен. Он отличен от 0 тогда и только тогда, когда система  $v_1, \dots, v_m$  линейно независима.*

*Доказательство.* Предположим, сначала, что  $m = n$ . При этом  $\det G(v_1, \dots, v_m) = \det H^T \bar{H} = \det H^T \det \bar{H} = |\det H|^2 \geq 0$ , причем  $\det G(v_1, \dots, v_m) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\det H = 0$ , т. е. в точности тогда, когда векторы  $v_1, \dots, v_m$  линейно зависимы.

Пусть теперь  $m < n$ . В этом случае систему  $v_1, \dots, v_m$  можно включить в систему из  $n$  векторов  $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n$ , не нарушая линейной зависимости/независимости системы и сохранив то же значение определителя Грама. Для этого следует выбрать векторы  $v_{m+1}, \dots, v_n$  нормированными, ортогональными друг другу и ортогональными подпространству  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ . При этом система  $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n$  будет линейно зависимой / независимой в точности тогда, когда исходная система  $v_1, \dots, v_m$  обладает аналогичным свойством. В случае линейной зависимости линейные соотношения в этих системах будут одинаковыми.

Пусть  $H'$  – матрица координат векторов  $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n$  в ортонормированном базисе  $e_1, \dots, e_n$ , а ее матрица Грама имеет блочно-диагональный вид:

$$G(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n) = \text{diag}(G(v_1, \dots, v_m), E_{n-m}).$$

Таким образом,  $\det G(v_1, \dots, v_m) = \det G(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n) = \det H'^T \bar{H}' = |\det H'|^2 \geq 0$ , и применимы дальнейшие рассуждения случая  $m = n$ .

В случае, когда  $m > n$ , система  $v_1, \dots, v_m$  линейно зависима. Для исследования ее определителя Грама рассмотрим линейное выражение одного из векторов системы через остальные; пусть такое выражение имеет место для  $v_m$  :

$$v_m = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{m-1} v_{m-1}.$$

Тогда для скалярных произведений на векторы  $v_i, i = 1, \dots, m$ , получим соотношения

$$(v_m | v_i) = \alpha_1 (v_1 | v_i) + \dots + \alpha_{m-1} (v_{m-1} | v_i).$$

Таким образом,  $m$ -я строка матрицы  $G(v_1, \dots, v_m)$  линейно выражается через остальные, и  $\det G(v_1, \dots, v_m) = 0$ .  $\square$

*Замечание 4.2.22.* При  $m = 2$  неотрицательность и условие обращения в нуль определителя Грама поставяет неравенство Коши – Буняковского. Действительно,  $\det G(v_1, v_2) = (v_1 | v_1)(v_2 | v_2) - (v_1 | v_2)(v_2 | v_1) \geq 0$ , причем  $\det G(v_1, v_2) = 0$  тогда и только тогда, когда векторы  $v_1, v_2$  линейно зависимы.

#### 4.2.6. Объем $n$ -мерного параллелепипеда

Читателю известны понятия длины отрезка, площади плоской фигуры, объема тела в трехмерном пространстве. Общая версия и аксиоматическое оформление этих понятий являются предметом теории меры.  $n$ -мерным объемом  $vol^n$  называется функция, определяемая на некотором классе подмножеств евклидова точечного пространства, которые называются *измеримыми*. Класс измеримых множеств весьма широк. Функция  $vol^n$  принимает неотрицательные вещественные значения либо  $\infty$ , причем на ограниченных множествах ее значения конечны. Функция  $vol^n$  удовлетворяет следующим требованиям:

1. *Счетная аддитивность*: для любого счетного набора попарно непересекающихся (т. е. таких, что  $F_i \cap F_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ ) подмножеств  $F_i \subset \mathbb{E}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , выполнено равенство

$$vol^n\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} vol^n(F_i).$$

2. *Нормировка*:  $vol^1(\text{точка}) = 0$ ,  $vol^1[\dot{p}\dot{q}] = |\dot{p} - \dot{q}|$ .

3. *Монотонность*: если  $F \subseteq G$ , то  $vol^n(F) \leq vol^n(G)$ .

4. *Мультипликативность в ортогональных прямых суммах*: если  $V = U_1 \overset{\perp}{\oplus} U_2$  – ортогональное прямое разложение,  $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$  – со-



ответствующее разложение пространства  $\mathbb{E}$  в прямое произведение ортогональных друг другу подпространств  $\mathbb{E}_i = \dot{o} + U_i$ ,  $\dim \mathbb{E}_i = d_i$ ,  $i = 1, 2$ , по правилу  $\dot{o} + v = (\dot{o} + u_1, \dot{o} + u_2)$ ,  $v = u_1 + u_2$ ,  $u_i \in U_i$ ,  $i = 1, 2$  причем подмножество  $F$  представлено в виде прямого произведения  $F = F_1 \times F_2$ ,  $F_i \subset \mathbb{E}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда

$$\text{vol}^n F = \text{vol}^{d_1} F_1 \cdot \text{vol}^{d_2} F_2.$$

5. *Поведение при аффинно-линейных преобразованиях*: если  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  – аффинно-линейное преобразование, то для любого измеримого подмножества  $F$  выполнено равенство

$$\text{vol}^n f(F) = |\det(Df)| \text{vol}^n(F).$$

Существование функции, удовлетворяющей этим требованиям, как и ее единственность, нуждается в доказательстве, которое мы приводить не будем.

**Упражнение 4.2.23.** Пусть  $F$  – измеримое подмножество в  $m$ -мерном подпространстве  $n$ -мерного евклидова точечно-векторного пространства  $\mathbb{E}$ . Используя аксиомы 2 и 4, докажите, что  $\text{vol}^n F = 0$ .

**Упражнение 4.2.24.** 1)  $n$ -мерным *единичным кубом* называется подмножество

$$I^n = \{\dot{x} \in \mathbb{E} | \dot{x} = \dot{o} + t_1 e_1 + \dots + t_n e_n, 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \dots, n\},$$

если  $\dot{o}, e_1, \dots, e_n$  – ортонормированный репер пространства  $\mathbb{E}$ . Докажите, что  $\text{vol}^n I^n = 1$ .

2) Докажите, что объем  $n$ -мерного куба со стороной  $a > 0$

$$I_a^n = \{\dot{x} \in \mathbb{E} | \dot{x} = \dot{o} + t_1 e_1 + \dots + t_n e_n, 0 \leq t_i \leq a, i = 1, \dots, n\}$$

равен  $a^n$ .

**Определение 4.2.25.**  $n$ -мерным *параллелепипедом*, построенным на векторах  $v_1, \dots, v_n$ , называется множество

$$I(v_1, \dots, v_n) = \{\dot{x} \in \mathbb{E} | \dot{x} = \dot{o} + t_1 v_1 + \dots + t_n v_n, 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}.$$

Для вычисления его объема рассмотрим аффинно-линейное преобразование  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E} : \dot{o} + t_1 e_1 + \dots + t_n e_n \mapsto \dot{o} + t_1 v_1 + \dots + t_n v_n$ , переводящее единичный куб в рассматриваемый параллелепипед, и воспользуемся аксиомой 5. Дифференциал  $Df$  этого отображения задается в ортонормированном базисе  $e_1, \dots, e_n$  матрицей  $H = (h_{ij})$  из коэффициентов разложений  $v_j = \sum_{ij} e_i h_{ij}$ . Тогда

$$\text{vol}^n I(v_1, \dots, v_n) = |\det H| = \sqrt{\det H^T H} = \sqrt{\det G(v_1, \dots, v_n)},$$

где  $G(v_1, \dots, v_n)$  – матрица Грама системы векторов  $v_1, \dots, v_n$ . Если эта система линейно зависима, то множество  $I(v_1, \dots, v_n)$  принадлежит подпространству меньшей размерности, и тогда  $\text{vol}^n I(v_1, \dots, v_n) = 0$ .

#### 4.2.7. Изометрии точечного евклидова пространства. Группа изометрий

**Определение 4.2.26.** *Изометрией, или движением, евклидова точечного пространства  $\mathbb{E}$  называется его аффинный автоморфизм, линейная часть которого является ортогональным оператором.*

Не очень трудным, но пространственным рассуждением можно доказать, что, для того чтобы отображение  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  было движением, необходимо и достаточно сохранения функции расстояния, т. е. выполнения равенства  $\rho(f(\dot{p}), f(\dot{q})) = \rho(\dot{p}, \dot{q})$  для любых точек  $\dot{p}, \dot{q}$ . С доказательством можно ознакомиться в [4, глава 4, §3, п. 2, теорема 3].

Изометрии данного евклидова точечного пространства  $\mathbb{E}$  образуют группу, обозначаемую  $\text{Iso}(\mathbb{E})$ . «Забывая» метрику, получаем вложение ее как подгруппы в аффинную группу в той же размерности:  $\text{Iso}(\mathbb{E}) < \text{Aff}(\mathbb{E})$ . Рассуждение, аналогичное подобному рассуждению в аффинном случае, приводит к точной тройке групп

$$e \rightarrow T \rightarrow \text{Iso}(\mathbb{E}) \rightarrow \text{Iso}(\mathbb{E})_{\dot{o}} \rightarrow e,$$

где  $\text{Iso}(\mathbb{E})_{\dot{o}} = \text{Aff}(\mathbb{E})_{\dot{o}} \cap \text{Iso}(\mathbb{E})$  – группа изометрий, стабилизирующих точку  $\dot{o}$ , а  $T$  – группа трансляций пространства  $\mathbb{E}$ . При этом имеет место изоморфизм групп  $\text{Iso}(\mathbb{E})_{\dot{o}} \cong O(n)$ ,  $n = \dim \mathbb{E}$ . Как и в аффинной ситуации, для каждой изометрии  $f$  имеет место разложение  $f = t_v \circ g$ , где  $g \in \text{Iso}(\mathbb{E})_{\dot{o}}$ ,  $t_v$  – перенос на вектор  $v$ ; это разложение зависит от выбора точки. Рассмотрев ортогональные операторы с определителем, равным 1, и образуемую ими подгруппу  $SO(n) < O(n)$ , приходим к подгруппе  $\text{Iso}_+(\mathbb{E})$  изометрий, дифференциалы которых имеют определитель 1. Такие изометрии называются *собственными движениями*.

#### 4.2.8. Обзор классификации движений в малых размерностях

В этом пункте мы приведем в качестве примеров классификацию движений в низших размерностях, ограничившись лишь краткими комментариями.

$n = 1$ . Движение на евклидовой прямой задается соответствием  $x \mapsto a + \varepsilon x$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ . При  $\varepsilon = 1$  получаем сдвиг на  $a$ , а при  $\varepsilon = -1$  – отражение относительно точки  $a/2$ .

$n = 2$ . Для классификации движений на плоскости достаточно применить теорему о канонической форме ортогонального оператора. Получим следующие типы движений: а) сдвиг:  $(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$ ; б) композицию сдвига вдоль прямой и отражения вдоль этой прямой:  $(x, y) \mapsto (x + a, -y + b)$ ; в) композицию поворота относительно точки и сдвига. Такая композиция имеет неподвижную точку. Поместив в нее начало координат, придем к выводу, что рассматриваемое движение есть поворот относительно этой точки.

**Теорема 4.2.27.** *(Классификация движений плоскости) Собственное движение плоскости представляет собой либо сдвиг, либо поворот относительно некоторой точки. Несобственное движение есть композиция отражения относительно некоторой прямой и сдвига вдоль нее.*

$n = 3$ . Применение теоремы о канонической форме ортогонального оператора приводит к следующему результату.

**Теорема 4.2.28.** *(Классификация движений трехмерного евклидова пространства) Собственное движение трехмерного евклидова пространства является композицией сдвига вдоль некоторой прямой и поворота относительно этой прямой (винтовое движение). Несобственное движение есть композиция отражения относительно некоторой плоскости либо со сдвигом на вектор, компланарный плоскости отражения, либо с поворотом относительно прямой, перпендикулярной плоскости отражения.*

В качестве следствий приведем две теоремы кинематики твердого тела.

**Следствие 4.2.29.** *(Теорема Эйлера) Всякое движение твердого тела с одной закрепленной точкой есть вращение относительно оси, проходящей через закрепленную точку.*

**Следствие 4.2.30.** *(Теорема Шаля) Всякое перемещение твердого тела есть композиция поступательного движения вдоль некоторой прямой и вращения относительно оси, совпадающей с этой прямой.*

#### 4.2.9. Аффинные преобразования евклидова пространства

**Теорема 4.2.31.** *(Изменение объемов при аффинных преобразованиях) При аффинном преобразовании объем параллелепипеда умножается на абсолютную величину определителя линейной части преобразования.*

*Доказательство.* Рассмотрим параллелепипед, построенный на векторах  $\overrightarrow{op_1}, \dots, \overrightarrow{op_n}$ , и пусть в некотором ортонормированном базисе  $e_1, \dots, e_n$  векторы  $\overrightarrow{op_j}$  имеют координатное представление  $\overrightarrow{op_j} = \sum_i e_i a_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\overrightarrow{op_1}, \dots, \overrightarrow{op_n}$ , равен  $vol_n(\overrightarrow{op_1}, \dots, \overrightarrow{op_n}) = |\det(a_{ij})|$ . Пусть  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  – аффинный автоморфизм. Тогда образ рассматриваемого параллелепипеда – параллелепипед, построенный на векторах  $(Df)\overrightarrow{op_1}, \dots, (Df)\overrightarrow{op_n}$ , имеющих в том же ортонормированном базисе координатное представление  $(Df)\overrightarrow{op_j} = \sum_i (Df)e_i a_{ij} = \sum_{i,r} e_r f_{ri} a_{ij}$ . Тогда его объем равен

$$|\det \sum_i f_{ri} a_{ij}| = |\det f_{ri}| \cdot |\det a_{ij}| = |\det f_{ri}| \cdot vol_n(\overrightarrow{op_1}, \dots, \overrightarrow{op_n}).$$

□

**Следствие 4.2.32.** *(Аффинная инвариантность отношения объемов) При аффинном преобразовании отношение объемов сохраняется.*

**Теорема 4.2.33.** *(Разложение аффинного автоморфизма) Всякий аффинный автоморфизм евклидова пространства есть композиция сдвига, движения, оставляющего неподвижной некоторую точку  $o$ , и аффинного преобразования, являющегося композицией  $n$  масштабных преобразований вдоль взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в точке  $o$ .*

*Доказательство.* Действительно, для любого  $f \in \text{Aff}(\mathbb{E})$  имеет место разложение  $f = t_v \circ g$ ,  $g \in \text{Aff}(\mathbb{E})_o$ . Для линейной части  $Dg$  имеем полярное разложение  $Dg = \mathcal{O}\mathcal{P}$ , где  $\mathcal{O}$  – ортогональный,  $\mathcal{P}$  – положительно определенный симметрический линейные операторы. Симметрический линейный оператор диагонализуем; выберем ортонормированный репер  $o, e_1, \dots, e_n$  так, что в базисе  $e_1, \dots, e_n$  матрица оператора  $\mathcal{P}$  имеет вид  $P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда введем серию линейных операторов  $\mathcal{P}_i$ , определяемых равенствами  $\mathcal{P}_i e_i = \lambda_i e_i$ ,  $\mathcal{P}_i e_j = e_j$  при  $i \neq j$ , и серию аффинных преобразований  $\pi_i : \dot{o} + x \mapsto \dot{o} + \mathcal{P}_i x$ . Тогда, введя аффинное преобразование  $\omega : \dot{o} + x \mapsto \dot{o} + \mathcal{O}x$ , получим разложение  $g = \omega \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_n$ , и  $f = t_v \circ g = t_v \circ \omega \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_n$ . □

## 4.3. Квадратичные функции и квадрики

### 4.3.1. Биаффинные и квадратичные функции

Пусть  $\mathbb{A}$  –  $n$ -мерное аффинное пространство, ассоциированное с векторным пространством  $V$  над полем  $k$ , характеристика которого

отлична от 2.

**Определение 4.3.1.** *Биаффинной функцией* на аффинном пространстве  $\mathbb{A}$  называется отображение  $\phi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow k$  такое, что для любой точки  $\dot{p} \in \mathbb{A}$

$$\phi_{\dot{p}}^{(1)} : \dot{p} \times \mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{A} \times \mathbb{A} \xrightarrow{\phi} k$$

и для любой точки  $\dot{q} \in \mathbb{A}$

$$\phi_{\dot{q}}^{(2)} : \mathbb{A} \times \dot{q} \hookrightarrow \mathbb{A} \times \mathbb{A} \xrightarrow{\phi} k$$

– аффинно-линейные функции.

**Определение 4.3.2.** Биаффинная функция  $\phi$  *симметрическая*, если для любых точек  $\dot{p}, \dot{q} \in \mathbb{A}$   $\phi(\dot{p}, \dot{q}) = \phi(\dot{q}, \dot{p})$ .

Пусть  $\dot{p} = \dot{o} + x$ ,  $\dot{q} = \dot{o} + y$ ; тогда

$$\begin{aligned} \phi(\dot{p}, \dot{q}) = \phi(\dot{o} + x, \dot{o} + y) &= \phi_{\dot{p}}^{(1)}(\dot{o} + y) = \phi_{\dot{p}}^{(1)}(\dot{o}) + (D\phi_{\dot{p}}^{(1)})y \\ &= \phi_{\dot{q}}^{(2)}(\dot{o} + x) = \phi_{\dot{q}}^{(2)}(\dot{o}) + (D\phi_{\dot{q}}^{(2)})x, \end{aligned}$$

откуда заключаем, что  $\phi(\dot{o} + x, \dot{o} + y) = \phi(\dot{o}, \dot{o}) + \ell_1(x) + \ell_2(y) + f(x, y)$ , где  $\ell_i : V \rightarrow k$ ,  $i = 1, 2$  – линейные функции,  $f(x, y) : V \times V \rightarrow k$  – билинейная форма. При этом выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} \phi(\dot{o}, \dot{o}) + \ell_1(x) &= \phi_{\dot{p}}^{(1)}(\dot{o}) = \phi_{\dot{o}}^{(2)}(\dot{o}) + (D\phi_{\dot{o}}^{(2)})x, \\ \phi(\dot{o}, \dot{o}) + \ell_2(y) &= \phi_{\dot{q}}^{(2)}(\dot{o}) = \phi_{\dot{o}}^{(1)}(\dot{o}) + (D\phi_{\dot{o}}^{(1)})y. \end{aligned}$$

Если  $\phi$  симметрическая, то  $\ell_1 = \ell_2$  и билинейная форма  $f$  также симметрическая. Поэтому симметрическая биаффинная функция имеет вид  $\phi(\dot{o} + x, \dot{o} + y) = \phi(\dot{o}, \dot{o}) + \ell(x) + \ell(y) + f(x, y) = \phi(\dot{o}, \dot{o}) + \ell(x + y) + f(x, y)$ .

**Определение 4.3.3.** *Квадратичной функцией* на аффинном пространстве  $\mathbb{A}$  называется отображение  $Q : \mathbb{A} \rightarrow k$ , разложимое в композицию

$$Q : \mathbb{A} \xrightarrow{diag} \mathbb{A} \times \mathbb{A} \xrightarrow{\phi} k,$$

где  $diag : \mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{A} \times \mathbb{A} : \dot{p} \mapsto (\dot{p}, \dot{p})$  – диагональное вложение подпространства, а  $\phi$  – симметрическая биаффинная функция.

Пусть  $q(x) = f(x, x)$  – квадратичная форма, соответствующая билинейной форме  $f$ . Тогда квадратичная функция  $Q$ , соответствующая симметрической биаффинной функции  $\phi$ , может быть записана в виде  $Q(\dot{o} + x) = \phi(\dot{o}, \dot{o}) + 2\ell(x) + q(x)$ .

Зафиксировав репер  $\dot{o}, e_1, \dots, e_n$ , получим выражение для квадратичной функции  $Q$  от координат вектора  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ :

$$Q(\dot{o} + x) = \phi(\dot{o}, \dot{o}) + 2 \sum_i \phi_i x_i + \sum_{i,j} \phi_{ij} x_i x_j.$$

При смене системы координат матрица  $\Phi = (\phi_{ij})$  квадратичной формы  $q$  преобразуется обычным образом; поэтому ее ранг является инвариантом. Рангом квадратичной функции  $Q(\dot{o} + x) = \phi(\dot{o}, \dot{o}) + 2\ell(x) + q(x)$  называется ранг соответствующей ей квадратичной формы  $q$ .

#### 4.3.2. Центры квадратичной функции.

##### Центральные квадратичные функции

**Определение 4.3.4.** Центром, или центральной точкой, квадратичной функции  $Q$  называется такая точка  $\dot{p}$ , что для любого вектора  $x \in V$  выполнено  $Q(\dot{p} + x) = Q(\dot{p} - x)$ .

*Замечание 4.3.5.* Центр квадратичной функции является аналогом центра симметрии фигуры в элементарной геометрии и определяется похожим образом.

**Определение 4.3.6.** Квадратичная функция  $Q$  называется центральной, если она имеет хотя бы один центр, и нецентральной в противном случае.

**Теорема 4.3.7.** (Альтернативное определение центра) Точка  $\dot{p}$  является центральной точкой квадратичной функции  $Q$  тогда и только тогда, когда для любого вектора  $y \in V$  выполнено  $Q(\dot{p} + y) = Q(\dot{p}) + q(y)$ .

*Доказательство.* Пусть  $\dot{p}$  – центр квадратичной функции  $Q$ ; вычислим ее значение в точке  $\dot{p} + y$ :

$$\begin{aligned} Q(\dot{p} + y) &= Q(\dot{o} + x + y) = Q(\dot{o}) + 2\ell(x + y) + q(x + y) \\ &= Q(\dot{o}) + 2\ell(x) + q(x) + 2(\ell(y) + f(x, y)) + q(y) \\ &= Q(\dot{p}) + q(y) + 2(\ell(y) + f(x, y)). \end{aligned}$$

Так как  $\dot{p}$  – центр, то  $Q(\dot{p} - y) = Q(\dot{p}) + q(y) - 2(\ell(y) + f(x, y)) = Q(\dot{p}) + q(y) + 2(\ell(y) + f(x, y)) = Q(\dot{p} + y)$ , откуда  $2(\ell(y) + f(x, y)) = 0$ , и  $Q(\dot{p} + y) = Q(\dot{p}) + q(y)$ .

Обратно, пусть  $Q(\dot{p} + y) = Q(\dot{p}) + q(y)$ . Тогда  $Q(\dot{p} - y) = Q(\dot{p}) + q(y) = Q(\dot{p} + y)$ .  $\square$

Из доказательства теоремы сразу же имеем

**Следствие 4.3.8.** (Описание множества центров квадратичной функции) Точка  $o + x$  является центром квадратичной функции  $Q$  в том и только том случае, когда для любого  $y \in V$  выполнено  $\ell(y) + f(x, y) = 0$ .

Выбрав в пространстве  $V$  базис  $e_1, \dots, e_n$ , получим систему уравнений

$$\ell(e_i) + f(x, e_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

или, в координатной форме,

$$\phi_i + \sum_j x_j \phi_{ji} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.3.1)$$

Совместность системы исследуют, пользуясь критерием Кронеккера – Капелли. Отсюда сразу же заключаем, что множество центральных точек квадратичной функции, если оно непусто, является линейным подмногообразием с направляющим подпространством, совпадающим с ядром  $\ker q$  квадратичной формы  $q$  и определяемым системой уравнений  $\sum_j x_j \phi_{ji} = 0, \quad i = 1, \dots, n$ . Кроме того, нецентральность квадратичной функции имеет место лишь тогда, когда ее ранг  $r$  строго меньше  $n$ .

*Замечание 4.3.9.* Определение центральной точки было дано без вовлечения координат. Это служит указанием на то, что определяемый объект *аффинно инвариантен*, т. е. не меняется при аффинных преобразованиях. В частности, при аффинном преобразовании, переводящем репер  $(\dot{o}, e_1, \dots, e_n)$  в репер  $(\dot{o}', e'_1, \dots, e'_n)$ , система (4.3.1) умножается справа на матрицу перехода от базиса  $e_1, \dots, e_n$  к базису  $e'_1, \dots, e'_n$ . При этом определяемое ею подпространство остается неизменным. Таким образом, линейное подмногообразие центров квадратичной функции зависит только от самой функции, а не от выбора ее координатного представления.

### 4.3.3. Аффинная классификация квадратичных функций

**Определение 4.3.10.** Квадратичные функции  $Q$  и  $Q'$  *аффинно эквивалентны*, если существует аффинное преобразование  $g \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ ,  $g : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  такое, что  $Q' = Q \circ g$ .

**Теорема 4.3.11.** (Аффинная классификация квадратичных функций) Пусть  $Q$  – квадратичная функция ранга  $r$  на  $n$ -мерном аффинном пространстве  $\mathbb{A}$ , ассоциированном с  $k$ -векторным пространством  $V$ .

- Если  $Q$  нецентральная, то выбором системы координат  $\dot{o}, e_1, \dots, e_n$  она приводится к виду

$$Q(\dot{o} + x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_r x_r^2 + 2x_{r+1}, \quad (4.3.2)$$

где  $r < n$ ,  $\alpha_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, r$ ,  $\ker q$  задается уравнениями  $x_1 = \dots = x_r = 0$ , где  $q$  – квадратичная форма, связанная с  $Q$ .

- Если  $Q$  центральная, то выбором системы координат  $\dot{o}, e_1, \dots, e_n$  с началом в центральной точке  $\dot{o}$  она приводится к виду

$$Q(\dot{o} + x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_r x_r^2 + \phi_0, \quad (4.3.3)$$

где  $Q(\dot{o}') = \phi_0$  для любой центральной точки  $\dot{o}'$ .

Функции (4.3.2) и (4.3.3) аффинно неэквивалентны.

*Доказательство.* 1) Выберем канонический базис  $e'_1, \dots, e'_n$  в пространстве  $V$  для квадратичной формы  $q$ . Тогда в репере  $\dot{o}, e'_1, \dots, e'_n$  функция  $Q$  примет вид

$$Q(\dot{o} + x) = \alpha'_1 x_1'^2 + \dots + \alpha'_r x_r'^2 + 2\beta'_1 x_1' + \dots + 2\beta'_n x_n' + \gamma',$$

причем  $\alpha'_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Перенос начала координат  $x''_i = x'_i + \beta'_i/\alpha'_i$  при  $i = 1, \dots, r$ ,  $x''_i = x'_i$  при  $i = r + 1, \dots, n$  приводит к виду

$$Q(\dot{o}'' + x) = \alpha_1 x_1''^2 + \dots + \alpha_r x_r''^2 + 2\beta_{r+k} x_{r+k}'' + \dots + 2\beta_n x_n'' + \gamma''.$$

Если при этом не все коэффициенты  $\beta_j$ ,  $j = r + k, \dots, n$ , равны 0 (т.е.  $\beta_{r+k} \neq 0$ ), то необходима еще одна замена координат:  $x_i = x''_i$  при  $i = 1, \dots, r$ ,  $x_{r+1} = \beta_{r+k} x_{r+k}'' + \dots + \beta_n x_n'' + \gamma''/2$ ,  $x_{j+1} = x''_j$  при  $j = r + 2, \dots, r + k - 1$ ,  $x_j = x''_j$  при  $j = r + k + 1, \dots, n$ . Эта замена приведет к виду (4.3.2). Иначе получен вид (4.3.3), с точностью до обозначений.

2) Пусть квадратичная функция  $Q$  приведена к виду (4.3.2) либо (4.3.3). Соответствующая ей квадратичная форма записывается в каноническом виде  $q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_r x_r^2$ , и ее ядро  $\ker q$  является  $(n - r)$ -мерным подпространством в  $V$  и задается уравнениями  $x_1 = \dots = x_r = 0$ . Пусть  $\dot{p} = \dot{o} + x$  – центральная,  $\dot{p} + y$  – произвольная точка. Вычислим значения функции в точке  $\dot{p} + y$  для случая (4.3.2)  $Q(\dot{p} + y) = Q(\dot{o} + x + y) = \sum_{i=1}^r \alpha_i (x_i + y_i)^2 + 2(x_{r+1} + y_{r+1}) = Q(\dot{p}) + q(y) + 2 \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i y_i + 2y_{r+1}$  и для случая (4.3.3)  $Q(\dot{p} + y) = Q(\dot{o} + x + y) = \sum_{i=1}^r \alpha_i (x_i + y_i)^2 + \phi_0 = Q(\dot{p}) + q(y) + 2 \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i y_i$ . Условие центральности для (4.3.3) сводится к  $x \in \ker q$ , т. е.  $x_1 = \dots = x_r = 0$ . В случае (4.3.2) оно не удовлетворяется из-за линейного слагаемого  $2y_{r+1}$ .  $\square$

Комбинируя этот результат с возможностью приведения вещественной квадратичной формы к нормальному виду и теоремой инерции, получим



**Следствие 4.3.12.** (Классификация вещественных квадратичных функций) *Над полем  $k = \mathbb{R}$  любая квадратичная функция путем выбора системы координат может быть приведена к одному из видов:*

$$\begin{aligned} Q(\dot{o} + x) &= x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_r^2 + 2x_{r+1}, \\ Q(\dot{o} + x) &= x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_r^2 + \phi_0, \end{aligned}$$

*причем этот вид однозначно определяется самой функцией.*

**Замечание 4.3.13.** Итак, вещественные квадратичные функции  $Q$  и  $Q'$  аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им квадратичные формы имеют равные ранги и равные сигнатуры и при этом либо обе функции нецентральные, либо обе функции центральные и принимают равные значения на соответственных центральных точках.

#### 4.3.4. Метрическая классификация квадратичных функций

Будем рассматривать квадратичные функции на евклидовом точечном пространстве  $\mathbb{E}$ .

**Определение 4.3.14.** Квадратичные функции  $Q$  и  $Q'$  метрически эквивалентны, если существует движение (метрический автоморфизм)  $g \in Iso(\mathbb{E})$  такое, что  $Q' = Q \circ g$ .

**Теорема 4.3.15.** (Метрическая классификация квадратичных функций) *Любая квадратичная функция на  $n$ -мерном евклидовом точечном пространстве  $\mathbb{E}$  выбором ортонормированного репера может быть приведена к одному из следующих видов:*

$$\begin{aligned} Q(\dot{o} + x) &= \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + \phi_0, \\ Q(\dot{o} + x) &= \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + 2\mu x_{r+1}, \quad \mu > 0. \end{aligned}$$

*При этом  $\lambda_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, r$ ; первый случай соответствует центральной функции, и начало координат  $\dot{o}$  помещено в центральную точку. Вид, к которому приводится данная функция, определяется самой функцией однозначно.*

Доказательство этой теоремы мы здесь приводить не будем в целях экономии места. Оно схоже с доказательством теоремы аффинной классификации, однако требует дополнительной заботы ортогональность используемой замены базиса.

#### 4.3.5. Вещественные квадрики.

##### Их аффинная и метрическая классификации

Пусть  $Q$  – квадратичная функция на  $n$ -мерном аффинном пространстве  $\mathbb{A}$  над полем  $k$ .

**Определение 4.3.16.** *Квадрикой, или гиперповерхностью второго порядка, называется подмножество*

$$S_Q = \{\dot{p} \in \mathbb{A} \mid Q(\dot{p}) = 0\}.$$

В случае  $n = 2$  квадрику называют *коническим сечением*, или *коникой*.

Мы ограничимся случаем  $k = \mathbb{R}$ . Прежде всего исключим из рассмотрения пустые квадрики. Такова, например, квадрика, соответствующая функции  $Q(\dot{p}) = x_1^2 + 1$  в пространстве любой размерности.

**Определение 4.3.17.** *Рангом квадрики  $S_Q$  называется ранг определяющей ее квадратичной функции  $Q$  (и соответствующей ей квадратичной формы  $q$ ).*

**Определение 4.3.18.** Квадрика  $S_Q$  называется *двойным подпространством*, если она представляет собой линейное подмногообразие.

Например, такова квадрика, задаваемая уравнением  $x_1^2 + \dots + x_r^2 = 0$ ; это не что иное, как линейное подмногообразие  $x_1 = \dots = x_r = 0$  размерности  $n - r$ . То же линейное подмногообразие задается уравнением  $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 = 0$  при  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Очевидно, двойные подпространства могут быть исключены из рассмотрения, поскольку их геометрическое строение изучено.

Для всех остальных квадрик имеет место очень полезная

**Теорема 4.3.19.** *(Единственность уравнения квадрики) Если квадрика  $S$  не является двойным подпространством, то два ее уравнения в одной и той же системе координат могут различаться лишь ненулевым скалярным множителем, т. е.*

$$S_{Q_1} = S_{Q_2} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0 : Q_2 = \lambda Q_1.$$

Заинтересованный читатель может ознакомиться с ее доказательством, приведенным в книге [4, глава 5, §2, теорема 1].

**Определение 4.3.20.** Точка  $\dot{o} \in \mathbb{A}$  называется *центром*, или *центром симметрии*, квадрики  $S$ , если из того, что  $\dot{o} + x \in S$ , следует, что  $\dot{o} - x \in S$ . Квадрика  $S$  называется *центральной*, если она имеет хотя бы один центр. В противном случае квадрика называется *нецентральной*.

**Предложение 4.3.21.** (Центры квадрики) Квадрика  $S$ , не являющаяся двойным подпространством, центральна тогда и только тогда, когда задающая ее квадратичная функция  $Q$  центральна. Множества центров квадрики  $S$ , не являющейся двойным подпространством, и задающей ее квадратичной квадратичной функции совпадают.

*Доказательство.* Пусть  $S$  определяется обращением в нуль квадратичной функции

$$Q(\dot{o} + x) = q(x) + 2\ell(x) + \phi_0,$$

где  $q$  – квадратичная форма, а  $\ell$  – линейная форма на векторном пространстве  $V$ . Если  $\dot{o}$  – центр квадрики  $S$  и  $\dot{o} + x \in S$ , то  $Q(\dot{o} + x) = q(x) + 2\ell(x) + \phi_0 = 0$  и, в силу центральности точки  $\dot{o}$ ,  $\dot{o} - x \in S$ , и тогда  $Q(\dot{o} - x) = q(x) - 2\ell(x) + \phi_0 = 0$ . Таким образом, функции  $Q(\dot{o} + x) = q(x) + 2\ell(x) + \phi_0$  и  $Q'(\dot{o} + x) = q(x) - 2\ell(x) + \phi_0$  определяют одну и ту же квадратичку  $S$  и, по теореме единственности уравнения,  $Q' = \lambda Q$  для некоторого  $\lambda \neq 0$ . Поскольку  $q(x) \neq 0$ , то  $\lambda = 1$  и  $\ell = 0$ . Последнее равенство является условием центральности точки  $\dot{o}$  для квадратичной функции  $Q$ . Обратно, если  $\dot{o}$  – центр квадратичной функции  $Q$ , то эта точка является центром квадрики  $S_Q = S$  по определению.  $\square$

**Теорема 4.3.22.** (Аффинная классификация квадрик) Уравнение квадрики в  $n$ -мерном вещественном аффинном пространстве приводится аффинным автоморфизмом к одному и только одному из следующих типов:

- центральная квадратика с центром в начале координат:

$$\begin{aligned} I_{s,r} : x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_r^2 &= 1, \quad 0 < s \leq r, \\ I'_{s,r} : x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_r^2 &= 0, \quad r/2 \leq s \leq r, \end{aligned}$$

- нецентральная квадратика:

$$II_{s,r} : x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_r^2 = -2x_{r+1}, \quad r/2 \leq s \leq r.$$

*Доказательство.* Теорема является прямым следствием теоремы аффинной классификации для квадратичных функций, если заметить, что квадрики, определяемые квадратичными функциями, отличающимися на ненулевой скалярный множитель, совпадают. Поэтому выбором скалярного множителя добиваются нормировки свободного члена в  $I_{s,r}$  и линейного члена в  $II_{s,r}$ . Ограничение  $s > 0$  исключает пустую квадратичку в  $I_{s,r}$ . Равенство  $s = r$  в  $I'_{s,r}$  поставяет двойное подпространство.  $\square$

Для некоторых классов квадрик в  $n$ -мерном пространстве имеются специальные названия.

$I_{n,n}$  – эллипсоид;

$I_{s,n}$  – гиперболоид;

$II_{n-1,n-1}$  – эллиптический параболоид;

$II_{s,n-1}$ ,  $s < n - 1$  – гиперболический параболоид.

Следующие классы квадрик носят название *вырожденных*:

$I_{s,r}, I'_{s,r}$ ,  $r < n$  и  $II_{s,r}$ ,  $r < n - 1$  – цилиндры;

$I'_{s,n}$  – конусы.

Теперь обратимся к квадрикам в  $n$ -мерном евклидовом точечном пространстве  $\mathbb{E}$ .

**Теорема 4.3.23.** (*Метрическая классификация квадрик*) Уравнение непустой квадрики в  $n$ -мерном евклидовом точечном пространстве, не являющейся двойным подпространством, подходящим выбором ортонормированного репера приводится к одному и только одному из следующих видов:

- центральная квадрика с центром в начале координат:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \dots - \frac{x_r^2}{a_r^2} = 1, \quad 0 < s \leq r, \quad (4.3.4)$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \dots - \frac{x_r^2}{a_r^2} = 0, \quad r/2 \leq s \leq r, \quad (4.3.5)$$

- нецентральная квадрика:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \dots - \frac{x_r^2}{a_r^2} = -2x_{r+1}, \quad r/2 \leq s < r. \quad (4.3.6)$$

*Доказательство.* Теорема является прямым следствием теоремы метрической классификации квадратичных функций. В случае (4.3.4)  $\phi_0 = Q(0) \neq 0$ , и полуоси  $a_i$  определяются выражениями  $a_i = \sqrt{|\phi_0/\lambda_i|}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , где  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  – отличные от нуля характеристические корни симметрической матрицы, соответствующей квадратичной форме  $q$ . Порядок следования знаков квадратичных слагаемых достигается способом нумерации переменных.

В случае (4.3.5) полуоси определяются выражениями  $a_i = \sqrt{|1/\lambda_i|}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , в случае (4.3.6) – выражениями  $a_i = \sqrt{|\mu/\lambda_i|}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , причем нумерация переменных выбирается так, что  $\lambda_i \mu > 0$  при  $i = 1, \dots, s$ , и  $\lambda_i \mu < 0$  при  $i = s + 1, \dots, r - 1$ .  $\square$

Для некоторых классов квадрик в  $n$ -мерном евклидовом пространстве имеются специальные названия.

(4.3.4),  $s = n$  – *эллипсоид*;

(4.3.4),  $0 < s < r = n$  – *гиперболоид*;

(4.3.6),  $s = n - 1$  – *эллиптический параболоид*;

(4.3.6),  $0 \leq s < r = n - 1$  – *гиперболический параболоид*.

В отличие от аффинной классификации, в метрической классификации квадрики наделяется набором полуосей  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , имеющих положительные вещественные значения. В случае гиперболоидов различают *вещественные* (при  $i = 1, \dots, s$ ) и *мнимые* (при  $i = s + 1, \dots, n$ ) полуоси. Значения полуосей не зависят от способа приведения уравнения квадрики к каноническому виду; их инвариантность относительно метрических автоморфизмов следует из инвариантности характеристических корней  $\lambda_i$  и параметров  $\phi_0, \mu$  метрической классификации квадратичных функций. Полуоси вместе с типом квадрики составляют ее полный набор инвариантов классификации.

#### 4.3.6. Цилиндры и конусы

**Определение 4.3.24.** *Конусом* называется квадрика  $S$ , на которой имеется точка  $\dot{o}$  со следующим свойством:

если  $\dot{o} + x \in S$ , то для всех  $\lambda \in \mathbb{R}$   $\dot{o} + \lambda x \in S$ .

Такая точка называется *вершиной конуса* и является его центром симметрии. Прямая  $\{\dot{o} + \lambda x | \lambda \in \mathbb{R}\} \subset S$  называется *образующей конуса*  $S$ .

Конусами являются квадрики типа  $I'_{s,r}$ ; вершина в этом случае помещена в начало координат. Если  $r < n$ , то квадрика представляет собой цилиндр над конусом.

**Определение 4.3.25.** *Цилиндром* называется квадрика  $S$ , обладающая следующим свойством:

существует вектор  $u \neq 0$  такой, что если  $\dot{p} \in S$ , то  $\dot{p} + \lambda u \in S$  при всех  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Нетрудно убедиться в том, что векторы  $u$  из определения 4.3.25 составляют подпространство векторного пространства  $V$  (выполните проверку самостоятельно!) Пусть  $U$  – это подпространство.

**Определение 4.3.26.** Аффинные подпространства  $\dot{p} + U$ ,  $\dot{p} \in S$ , называются *образующими цилиндра*  $S$ .

Рассмотрим произвольное прямое разложение  $V = U \oplus W$  и выберем произвольную точку цилиндра  $\dot{q} \in S$ . Тогда любая образующая  $\dot{p} + U$

пересекает подпространство  $\dot{q} + W$  в единственной точке  $\dot{r} \in S$ , определяемой разложением  $\overrightarrow{p\dot{q}} = u + w$ ,  $u \in U$ ,  $w \in W$ ,  $\dot{r} = \dot{p} + u = \dot{q} - w$ . Поэтому заданием подпространства  $U \subset V$  и квадрики  $S^0 = S \cap (\dot{q} + W)$  цилиндр определяется однозначно. Квадрика  $S^0$  называется *основанием цилиндра*  $S$ .

Пусть  $S_Q$  – квадрика, определяемая квадратичной функцией

$$Q(\dot{o} + x) = q(x) + 2\ell(x) + \phi_0,$$

и пусть  $\dot{p} = \dot{o} + x \in S_Q$ , а также  $\dot{p} + \alpha u \in S_Q$  для всех  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Тогда  $Q(\dot{p}) = 0$  и

$$Q(\dot{p} + \alpha u) = Q(\dot{p}) + \alpha^2 q(u) + 2\alpha(f(x, u) + \ell(u)) = 0,$$

и  $\alpha^2 q(u) + 2\alpha(f(x, u) + \ell(u)) = 0$  при всех  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Таким образом,  $q(u) = 0$  и  $f(x, u) + \ell(u) = 0$ .

Пусть  $u \in U$  (символом  $U$  по-прежнему обозначено направляющее подпространство цилиндра), и выберем базис  $e_1, \dots, e_n$  так, что  $U = \langle e_{m+1}, \dots, e_n \rangle$ . Тогда в координатной записи квадратичной функции  $Q$

$$Q(\dot{o} + x) = \sum_{i,j} \phi_{ij} x_i x_j + 2 \sum_i \phi_j x_j + \phi_0$$

имеем  $\phi_{ij} = 0$  и  $\phi_i = 0$  при  $j = m+1, \dots, n$ . Итак, мы доказали следующий результат.

**Предложение 4.3.27.** *(Распознавание цилиндров) Квадрика  $S_Q$  ранга  $r$  является цилиндром тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:*

- квадрика центральная и  $r < n$ ,
- квадрика нецентральная и  $r < n - 1$ .

*Направляющее подпространство  $U$  имеет размерность, равную  $n - r$  для центральной и  $n - r - 1$  для нецентральной квадрики. Основанием цилиндра является невырожденная квадрика либо конус в аффинном пространстве размерности  $r$  в центральном случае и в пространстве размерности  $r + 1$  в нецентральном случае.*

**Определение 4.3.28.** В соответствии с типом основания  $S_Q^0$  цилиндр  $S_Q$  называют *эллиптическим*, *гиперболическим* или *коническим*, либо, равносильно и соответственно, *цилиндром над эллипсоидом*, *гиперболоидом* или *конусом*  $S_Q^0$ .

#### 4.3.7. Дополнение: матричная запись аффинных преобразований и классификация квадрик

Пусть  $\mathbb{A}^n$  – аффинное пространство,  $(\dot{o}, e_1, \dots, e_n)$  – репер,  $\dot{p}(x_1, \dots, x_n)$  – точка. Пусть аффинное преобразование  $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$  задается в фиксированном репере соответствием  $\dot{p}(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(\dot{p})(x'_1, \dots, x'_n)$  так, что  $x_i = \sum_j a_{ij}x'_j + b_i$ . Это выражение можно записать в виде матричного умножения, используя следующий формальный прием. Введем  $n+1$ -ю «координату»  $x_{n+1}$ , которая всегда будет равна 1, «расширенный» столбец координат  $\hat{X}$  и «расширенную» матрицу аффинного преобразования по правилу

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \hat{A} = \left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (4.3.7)$$

так, что  $\hat{X} = \hat{A}\hat{X}'$ . Матрица, обратная к  $\hat{A}$ , имеет такой же (блочнo-верхнетреугольный) вид и  $\hat{X}' = \hat{A}^{-1}\hat{X}$ .

Квадратичная функция  $Q(\dot{o}+x) = \sum_{i,j} \phi_{ij}x_ix_j + 2\sum_i \phi_j x_j + \phi_0$  в новых обозначениях запишется следующим образом:

$$Q(\dot{o}+x) = [x_1 \dots x_n 1] \left[ \begin{array}{ccc|c} \phi_{11} & \dots & \phi_{1n} & \phi_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n1} & \dots & \phi_{nn} & \phi_n \\ \hline \phi_1 & \dots & \phi_n & \phi_0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} = \hat{X}^T \hat{F} \hat{X}, \quad (4.3.8)$$

где введена «расширенная» матрица квадратичной функции  $\hat{F}$ . Нетрудно убедиться в том, что расширенная матрица квадратичной функции  $\hat{F}$  преобразуется при смене репера по правилу, аналогичному правилу преобразования матрицы квадратичной формы:  $\hat{F}' = \hat{A}^T \hat{F} \hat{A}$ , где  $\hat{A}$  – расширенная матрица преобразования, переводящего репер  $(\dot{o}, e_1, \dots, e_n)$  в репер  $(\dot{o}', e'_1, \dots, e'_n)$  и в соответствии с этим связывающая координаты в этих реперах по правилу  $\hat{X} = \hat{A}\hat{X}'$ .

Отсюда сразу же заключаем, что 1) *ранг расширенной матрицы (большой ранг) квадратичной функции есть аффинный инвариант*; 2) *наличие и геометрия центра также аффинно инвариантны*.

Поскольку классификация квадрик из теоремы 4.3.22 определяется малым рангом  $r$ , сигнатурой и наличием линейного и свободного членов, то, используя расширенную матрицу для каждого из аффинных типов, мы можем интерпретировать классификационный результат в терминах расширенной матрицы.

Вырождение (в цилиндр или конус) происходит тогда и только тогда, когда  $\hat{r} < n+1$ . Квадрика центральная тогда и только тогда, когда система (4.3.1) совместна. Квадрика является конусом ( $I'_{s,n}$ ) тогда и только тогда, когда центральная точка единственна, т. е. большой  $\hat{r} = \text{rank } \hat{F}$  и малый  $r = \text{rank } F$  ранги равны и равны  $n$ . Если  $\hat{r} < r+1$ , то имеем квадрику типа  $I_{s,r}$ ; если к тому же  $r < n$ , получаем цилиндр типа  $I_{s,r}$ . Если  $\hat{r} = r$  и  $r < n$ , то цилиндр типа  $I'_{s,r}$ . Это цилиндры, имеющие бесконечные множества центров. Если, наконец,  $\hat{r} = r+2$ , то центров нет, и квадрика относится к типу  $II_{s,r}$ . Если при этом  $r < n-1$ , то это цилиндр типа  $II_{s,r}$ . Число  $s$  положительных квадратов в канонической форме уравнения квадрики дается распределением знаков характеристических корней матрицы  $F$ . Таким образом, вывод об аффинном типе квадрики можно сделать, не приводя ее уравнения к каноническому виду, а вычислив инварианты  $r, \hat{r}, s$ . Для классификации квадрик удобно пользоваться таблицей:

ранги	знаки	каноническая матрица $\hat{F}$	комментарий
$r < n,$ $\hat{r} = r+1$	$0 < s \leq r$	$\left[ \begin{array}{ccc c} E_s & & & \\ & -E_{r-s} & & \\ & & O_{n-r} & \\ \hline & & & 1 \end{array} \right]$	$I_{s,r}$ цилиндр центральный
$r = n,$ $\hat{r} = n+1$	$0 < s \leq n$	$\left[ \begin{array}{ccc c} E_s & & & \\ & -E_{r-s} & & \\ \hline & & & 1 \end{array} \right]$	$I_{s,n}$ центр единственный
$r < n,$ $\hat{r} = r$	$r/2 \leq s \leq r$	$\left[ \begin{array}{ccc c} E_s & & & \\ & -E_{r-s} & & \\ & & O_{n-r} & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right]$	$I'_{s,r}$ цилиндр конический центральный
$r = n,$ $\hat{r} = n$	$r/2 \leq s \leq r$	$\left[ \begin{array}{ccc c} E_s & & & \\ & -E_{r-s} & & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right]$	$I'_{s,n}$ конус центр единственный
$r < n-1,$ $\hat{r} = r+2$	$r/2 \leq s \leq r$	$\left[ \begin{array}{cccc c} E_s & & & & \\ & -E_{r-s} & & & \\ & & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline & & 1 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right]$	$II_{s,r}$ цилиндр нецентральный
$r = n-1,$ $\hat{r} = n+1$	$r/2 \leq s \leq r$	$\left[ \begin{array}{ccc c} E_s & & & \\ & -E_{r-s} & & \\ & & 0 & 1 \\ \hline & & 1 & 0 \end{array} \right]$	$II_{s,n-1}$ нецентральная



## 4.4. Элементы геометрии в пространстве Минковского

### 4.4.1. Пространство Минковского

**Определение 4.4.1.** *Псевдоевклидовым точечным пространством* называется аффинное пространство, ассоциированное с псевдоевклидовым векторным пространством  $V, (\cdot|\cdot)$ . *Сигнатурой псевдоевклидова точечного пространства* называется сигнатура псевдоскалярного произведения в соответствующем ему векторном пространстве. Псевдоевклидово точечное пространство сигнатуры  $(1, 3)$  называют *пространством Минковского*.

Обычно пространство Минковского рассматривают в связи с основным его приложением, благодаря которому оно и появилось в математике и физике, – математическим аппаратом *специальной теории относительности*. Это физико-математическая теория, рассматривающая поведение кинематических уравнений в различных инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга со скоростями, сравнимыми со скоростью света ( $3 \cdot 10^8$  м/с). Поэтому мы будем совмещать математические понятия с понятиями и обозначениями физики. Удобно рассматривать ортонормированный репер  $(\dot{o}, e_0, e_1, e_2, e_3)$ , первый вектор которого положителен. Точку  $x$  пространства Минковского физики называют *мировой точкой*. Вектор  $\overrightarrow{ox}$  имеет координатное представление  $x = te_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ . Координаты  $x_1, x_2, x_3$  интерпретируются как пространственные координаты материальной точки, а  $t$  – как время или величина, ему пропорциональная (в зависимости от выбора системы единиц измерения). Мировая точка  $x$  в пространстве Минковского соответствует событию, произошедшему в момент времени  $t$  в точке обычного трехмерного пространства, имеющей в нем координаты  $x_1, x_2, x_3$ . С точки зрения физики ортонормированный репер  $(\dot{o}, e_0, e_1, e_2, e_3)$  – не что иное, как *инерциальная система отсчета*. Из курса физики напомним, что *инерциальной* называется такая система отсчета, в которой любая материальная точка при равенстве нулю векторной суммы всех действующих на нее сил движется с постоянной по величине и направлению скоростью (в частности, покоится).

После выбора ортонормированного репера можно считать, что мы работаем в стандартном псевдоевклидовом пространстве  $\mathbb{R}^4$  со стандартным базисом  $e_0, e_1, e_2, e_3$ , в котором норма вектора  $u = te_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$  вычисляется по правилу

$$||u||^2 = t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2. \quad (4.4.1)$$

При этом все векторы подразделяются на три класса (не являющихся векторными пространствами): *положительные*, или *времениподобные*;  $\|u\|^2 > 0$ , *нулевые*, или *световые*  $\|u\|^2 = 0$ ; *отрицательные*, или *пространственно-подобные*,  $\|u\|^2 < 0$ . Это разбиение является инвариантом формы (4.4.1) и связанной с нею псевдоортогональной группы  $O(1, 3)$ , т. е. не меняется при смене ортонормированных базисов. Гиперплоскость  $\dot{o} + \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$  несет индуцированную структуру евклидова пространства с длиной вектора, вычисляемой по формуле  $\|x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3\|_e = -\|x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3\|$ . Таким образом, все преобразования, сохраняющие эту плоскость, – это обычные движения (а при фиксации начала – ортогональные преобразования) трехмерного евклидова пространства.

Если выбраны две точки  $\dot{p}, \dot{q} = \dot{p} + u$ , то квадрат  $s^2$  4-расстояния между ними дается формулой (4.4.1) и называется *четырёхмерным интервалом между точками*  $\dot{p}, \dot{q}$ :  $s^2 = t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ . Очевидно, он инвариантен относительно псевдоевклидовых движений и может принимать отрицательные значения.

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  материальная точка находится в точке с пространственными координатами  $(x_1, x_2, x_3) = \vec{0}$  и движется с постоянной по величине и направлению скоростью  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Тогда ее кинематические уравнения движения имеют вид

$$x_i = v_i t, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.4.2)$$

Система уравнений (4.4.2) имеет одномерное пространство решений. Оно представляет собой простейшую версию *мировой линии* материальной точки.

В частности, при  $\|\vec{v}\|_e = 1$  получаем прямые, принадлежащие изотропному конусу.

#### 4.4.2. Преобразования Лоренца

В этом пункте мы будем интересоваться преобразованиями, не меняющими начала отсчета, а лишь обусловленными сменой ортонормированных базисов. Результатом будет явный вид псевдоортогональных преобразований, не стабилизирующих вектор  $e_0$ , для этого случая. Такие преобразования физики называют *бустами*.

Условимся так выбрать базис трехмерного подпространства  $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \subset \mathbb{R}^4$ , что  $\vec{v} = (v, 0, 0)$ . Тогда можно рассматривать вместо четырехмерного кинематического описания двумерное, т. е. работать с

подпространством  $\mathbb{R}^2 = \langle e_0, e_1 \rangle$  с псевдоскалярным произведением, определяемым квадратичной формой

$$||x||^2 = t^2 - x_1^2. \quad (4.4.3)$$

Векторы изотропного конуса в этом случае имеют вид  $\lambda(e_0 \pm e_1)$ . Множеству изотропных векторов соответствует пара кинематических уравнений  $x_1 = \pm t$ . Они соответствуют движениям *со скоростью света* по направлению базисного вектора  $e_1$  и против него. Псевдоортогональное преобразование, сохраняющее квадратичную форму (4.4.1) или (4.4.3), в физике соответствует переходу от одной инерциальной системе отсчета к другой. Любое такое преобразование переводит изотропные векторы в изотропные. Это математический аспект физического *принципа инвариантности скорости света*: во всех инерциальных системах отсчета скорость света в вакууме имеет одно и то же значение.

Итак, линейный оператор  $\mathcal{A}$  принадлежит группе  $O(1, 1)$ , если выполняется одна из двух пар требований:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(e_0 + e_1) &= \alpha(e_0 + e_1), & \mathcal{A}(e_0 - e_1) &= \beta(e_0 - e_1); \\ \mathcal{A}(e_0 + e_1) &= \alpha(e_0 - e_1), & \mathcal{A}(e_0 - e_1) &= \beta(e_0 + e_1). \end{aligned}$$

Разрешив уравнения первого случая, приходим к выражениям

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_0 &= \frac{\alpha + \beta}{2}e_0 + \frac{\alpha - \beta}{2}e_1, \\ \mathcal{A}e_1 &= \frac{\alpha - \beta}{2}e_0 + \frac{\alpha + \beta}{2}e_1. \end{aligned}$$

Поскольку мы рассматриваем собственное преобразование Лоренца, то  $\det \mathcal{A} = 1$ ,

$$\det \mathcal{A} = \begin{vmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} & \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \frac{\alpha-\beta}{2} & \frac{\alpha+\beta}{2} \end{vmatrix} = \alpha\beta = 1.$$

Подстановка  $\beta = \alpha^{-1}$  и переобозначение  $\frac{\alpha-\alpha^{-1}}{\alpha+\alpha^{-1}} = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1} = v$  приводят к следующему виду собственного преобразования Лоренца  $x' = \mathcal{A}x$ :

$$t' = \frac{t - vx_1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (4.4.4)$$

Параметр  $v$  имеет физический смысл относительной скорости систем отсчета, измеряемой в долях скорости света. Поэтому  $|v| < 1$ . При этом, если величина относительной скорости систем отсчета невелика  $v \ll 1$  — именно таковы «привычные» нам скорости — то в нулевом приближении получим известные из школьной физики преобразования Галилея:

$$t' = t, \quad x' = x - vt.$$

**Упражнение 4.4.2.** Рассмотрев второй случай, получите явный вид несобственного преобразования Лоренца.

Простейшим следствием полученного преобразования является так называемое *лоренцево сокращение* длин при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. При этом концы отрезка  $x_1, \bar{x}_1$  фиксируются одновременно в той системе отсчета, в которой измеряется данный отрезок. Дело в том, что события, одновременные в некоторой системе отсчета, не будут одновременными в другой, если вторая система движется относительно первой:

$$x'_1 - \bar{x}'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} - \frac{\bar{x}_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{x_1 - \bar{x}_1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Итак, самую большую длину отрезок имеет в той системе, в которой он покоится. Если отрезок имеет длину  $l_0 = |x'_1 - \bar{x}'_1|$  в той системе отсчета, в которой он покоится, то его длина  $l = |x_1 - \bar{x}_1|$  в системе отсчета, движущейся относительно него со скоростью  $v$ , равна  $l = l_0 \sqrt{1 - v^2}$ .

Собственные преобразования Лоренца сигнатуры  $(1, 1)$  составляют в группе  $O(1, 1)$  однопараметрическую подгруппу с параметром  $v$ . Выясним явный вид связи параметра с операцией композиции в этой подгруппе. Для этого рассмотрим композицию  $g_v = g_{v_2} \circ g_{v_1}$  двух преобразований Лоренца; применим  $g_{v_1} : (t, x_1) \mapsto (t', x'_1)$  с параметром  $v_1$ , а затем  $g_{v_2} : (t', x'_1) \mapsto (t'', x''_1)$  с параметром  $v_2$ :

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - v_1 x_1}{\sqrt{1 - v_1^2}}, & x'_1 &= \frac{x_1 - v_1 t}{\sqrt{1 - v_1^2}}; \\ t'' &= \frac{t' - v_2 x'_1}{\sqrt{1 - v_2^2}}, & x''_1 &= \frac{x'_1 - v_2 t'}{\sqrt{1 - v_2^2}}. \end{aligned}$$

Выразив  $t''$  через  $t$ , получим

$$t'' = \frac{t - v_1 x_1 - v_2 (x_1 - v_1 t)}{\sqrt{1 - v_1^2} \sqrt{1 - v_2^2}} = \frac{t - (v_1 + v_2) x_1 / (1 + v_1 v_2)}{\sqrt{1 - ((v_1 + v_2) / (1 + v_1 v_2))^2}}.$$

Таким образом, композиция  $g_v = g_{v_2} \circ g_{v_1}$  соответствует скорости относительного движения, вычисляемой по формуле (*правило сложения скоростей в специальной теории относительности*):

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}.$$

Физическое толкование этого правила «сложения параметров» следующее: *если скорость материальной точки в первой системе отсчета равна  $v_1$ , а вторая система отсчета движется относительно первой*

со скоростью  $v_2$ , то скорость материальной точки относительно второй системы равна  $v$ .

**Упражнение 4.4.3.** Исследуйте правило сложения скоростей как функцию двух вещественных переменных на область определения, область физически значимых значений аргументов и область принимаемых значений. Истолкуйте результат с точки зрения физики: поясните, какие «суммарные» скорости достижимы, а какие – нет.

**Упражнение 4.4.4.** Убедитесь в том, что в приближении малых скоростей правило сложения скоростей приводится к виду, известному из школьного курса физики.

**Упражнение 4.4.5.** Является ли группа  $O(1, 1)$  абелевой? Ответ обоснуйте.

**Упражнение 4.4.6.** Любое псевдоевклидово пространство содержит евклидово подпространство. Постройте его. Тогда любая псевдоортогональная группа  $O(s, n - s)$  содержит хотя бы одну ортогональную подгруппу. Постройте ее.

**Упражнение 4.4.7.** Какие из псевдоортогональных групп абелевы, а какие – нет? Обоснуйте ответ, используя результаты, полученные в двух предыдущих упражнениях.

# Литература

- [1] Гельфанд, И. М. Лекции по линейной алгебре / И. М. Гельфанд. — 5-изд., испр. — М. : МЦНМО, 1998. — 320 с.
- [2] Зуланке, Р. Алгебра и геометрия : в 3 т. Т. 1 : Введение / Р. Зуланке, А. Л. Онищик. — М. : МЦНМО, 2004. — 408 с. : ил.
- [3] Зуланке, Р. Алгебра и геометрия : в 3 т. Т. 2 : Модули и алгебры / Р. Зуланке, А. Л. Онищик — М.: МЦНМО, 2008. — 336 с. : ил.
- [4] Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Ч. 2 : Линейная алгебра : учебник для вузов / А. И. Кострикин. — М. : Физматлит, 2000. — 368 с. : ил.
- [5] Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Ч. III : Основные структуры алгебры : учебник для вузов / А. И. Кострикин. — 2-изд., стереотип. — М. : Физматлит, 2001. — 272 с. : ил.
- [6] Кострикин, А. И. Линейная алгебра и геометрия / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. — М. : Физматлит, 1980. — 303 с. : ил.
- [7] Халмош, П. Конечномерные векторные пространства / П. Халмош. — М. : Физматгиз, 1963. — 264 с.
- [8] Ландау Л. Д. Теоретическая физика. Т. II : Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — 7-изд, испр. — М. : Наука, 1988. — 512 с.

Учебное издание

**Тимофеева** Надежда Владимировна  
**Линейная алгебра. Современная алгебра. Часть 2**

*Учебное пособие*

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова  
Верстка Н. В. Тимофеева

Подписано в печать 18.09.2017. Формат  $60 \times 84^{1/16}$ .

Усл. печ. л. 8,0. Уч.-изд. л. 7,0.

Тираж 21 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен  
в редакционно-издательском отделе  
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.  
150000, Ярославль, ул. Советская, 14