

Министерство образования Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

**В. А. Митрофанов**

# **Избранные задачи по механике**

*Учебное пособие*

*Рекомендовано  
Научно-методическим советом университета  
для студентов, обучающихся по специальностям Физика,  
Микроэлектроника и полупроводниковые приборы, Радиофизика*

Ярославль 2010

УДК 531/534:372.8  
ББК В2я73–4+В36я73–4+В317.1я73–4  
М 67

*Рекомендовано  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2009/10 года*

Рецензенты:

В. П. Глушаков, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры общей физики  
Ярославского государственного педагогического университета  
им. К. Д. Ушинского; кафедра физики Ярославского государственного  
технического университета

**Митрофанов, В. А.** Избранные задачи по механике: учеб.  
М 67 пособие / В. А. Митрофанов; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. –  
Ярославль: ЯрГУ, 2010. – 116 с.  
ISBN 978-5-8397-0696-5

Учебное пособие содержит значительный набор задач разной сложности с ответами и методическими указаниями. По содержанию оно соответствует механике в курсе общей физики классического университета и перекликается с известными задачками, однако объём заимствований минимизирован, а многие задачи имеют оригинальную постановку или решение.

Пособие адресовано студентам, обучающимся по специальностям 010700.62 Физика, 010803.65 Микроэлектроника и полупроводниковые приборы, 010801.65 Радиофизика (дисциплина «Механика», блок ЕН), очной формы обучения, а также преподавателям и студентам университетов и технических вузов для проведения практических занятий и выполнения самостоятельной работы.

УДК 531/534:372.8  
ББК В2я73–4+В36я73–4+В317.1я73–4

ISBN 978-5-8397-0696-5

© Ярославский государственный  
университет им. П. Г. Демидова, 2010

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие представляет собой задачник, в котором отражен опыт практических занятий по механике на I курсе физического факультета университета. В нем содержатся задачи разной сложности для аудиторного разбора преподавателем и самостоятельного решения студентами в домашней обстановке. Нацеленные в основном на развитие аналитических способностей первокурсников, они с успехом могут решаться и на старших курсах физического факультета университета.

С методической точки зрения данное пособие занимает промежуточное положение между обычными задачниками [3, 5], где даются только ответы в конце книги (или не даются вообще [6]), и “решебниками” типа [2, 4]. В настоящем издании ответы и подсказки-рекомендации, называемые указаниями, даются сразу после постановки задач. Отчасти это связано с необходимостью использования готовых ответов в так называемых цепочках задач. Кроме того, присутствие ответа и указаний к решению задач рядом с их условием, по мнению автора, дисциплинирует студента и экономит его время. С той же целью в задачах повышенной сложности рекомендовано применение компьютерного пакета MathCad.

Учитывая крайнюю загруженность первокурсников и недостаток учебных часов, из большинства задач исключены числовые значения. Они оставлены лишь там, где описана конкретная ситуация и численный результат сам полезен для физического образования, а его получение не просто упражнение.

Автор по возможности сократил объём заимствований, произведённых в основном из [1 – 3], переформулировав и дополнив ряд известных задач. Многие из них представлены в оригинальной постановке. Отдельные “декоративные” элементы, вплетённые в “канву физических повествований” (условий задач), по мнению автора, полезны в гуманитарном отношении.

Представленные задачи в разные годы предлагались в качестве домашних заданий студентам-физикам, невольно способст-

вовавшим их появлению и оттачиванию формулировок. Автор признателен своему неизменному коллеге В. А. Папоркову за полезные обсуждения и благодарен А. А. Прохорчуку за помощь в подготовке текста и рисунков.

Получив физико-техническое образование в Советском Союзе, по мнению академика Раушенбаха, лучшее в мире, автор с горечью наблюдает его деградацию в нынешнее время. Желание сберечь и развить творческий потенциал, накопленный ещё в те годы, руководило автором при подготовке данного издания.

## ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ И РЕКОМЕНДАЦИИ

Решение каждой задачи независимо от её сложности следует начинать с рисунка, простейшей схемы. Они помогают наглядно представить ситуацию, описанную в условии задачи, зафиксировать и развить на бумаге мысленные образы рассматриваемых объектов, уяснить их характеристики.

Нужно опираться на основные законы, уравнения, связи физических величин и их определения. Многие из них приводятся в начале каждой темы. Надо учиться применять их к конкретным случаям, исходя из физической природы явлений, а не школярничать, манипулируя формулами.

Следует изначально разделять физические величины на искомые и заданные. Учитывая специфику раздела и характер поставленных вопросов, стараться получить замкнутую систему уравнений (алгебраических или дифференциальных) для нахождения неизвестных. И только убедившись в её полноте, задуматься над способом решения.

Каждую задачу следует решать в общем (аналитическом) виде, т. е. в буквенных обозначениях. Такое решение придает окончательному результату особую ценность, так как показывает зависимость искомой величины от заданных параметров, независимых переменных. Полученный в общем виде ответ зачастую позволяет судить об ошибочности самого решения. Для этого достаточно проверить размерности или рассмотреть предельные случаи.

Если не требуется предварительных оценок в задачах с численными значениями, их подстановку следует производить только в конечную формулу, не забывая о приведении размерностей к одной системе единиц. При этом сам расчет нужно производить с двумя – тремя значащими цифрами, что отвечает обычной погрешности опытов. Полученный численный ответ надо проверить на правдоподобность, т. е. сравнить с хорошо известными данными.

Решение задач надо проводить в отдельной рабочей тетради, не смешивая их с лекционным материалом. А при сдаче домашних заданий не пренебрегать их оформлением в чистом виде. На этой стадии могут выявиться ошибки или открыться новые стороны изучаемого явления.

Автор не согласен с весьма символичным высказыванием одного профессора: “Для того, чтобы решить задачу, надо найти её готовое решение”, например, в Интернете. Такой прагматичный подход, возможно, и хорош для профессионала, но не для студента, у которого ещё только закладывается фундамент образования. Ему-то как раз необходимо учиться по-настоящему решать задачи, т. е., исходя из “первых принципов” и научных методов решения, наработать собственный опыт преодолений. Без этого не стать профессионалом. Думается, что данное пособие послужит этому делу.

Корифеи физической науки всегда придавали большое значение решению задач, понимая, что анализ любой большой проблемы лучше начинать с её малых, простейших форм. И ещё следует помнить слова профессора МГУ Д. П. Костомарова: “Успех в решении задачи зависит главным образом от того, насколько удачно будут выбраны переменные”.

# 1. КИНЕМАТИКА

- Мгновенные линейные скорость  $\mathbf{v}$  и ускорение  $\mathbf{w}$  частицы:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

- Проекция вектора ускорения на касательную  $\boldsymbol{\tau}$  и нормаль  $\mathbf{n}$  к траектории частицы:

$$w_{\tau} = \frac{dv}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{R_k},$$

где  $v$  – модуль вектора  $\mathbf{v}$ , а  $R_k$  – местный радиус кривизны траектории.

- Закон сложения движений для скоростей и ускорений:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}' + \mathbf{w}_0.$$

- Мгновенные угловые скорость и ускорение твердого тела:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

- Связь линейных и угловых величин при вращении тела:

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}], \quad w_{\tau} = \beta R, \quad w_n = \omega^2 R.$$

- Связь между линейными скоростями двух точек твердого тела при его произвольном движении:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}].$$

- Понятие среднего за время  $\Delta t$  значения некоторой величины  $z$ :

$$\bar{z} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} z dt, \quad \text{где } \Delta t = t_2 - t_1.$$

## Прямолинейное движение

1.1. Начиная с момента времени  $t = 0$ , частица движется вдоль оси  $x$  по закону  $x = at^2(1 - bt)$ , где  $a$  и  $b$  – положительные постоянные. Найдите:

а) скорость  $v$  и ускорение  $w$  частицы в зависимости от времени  $t$ ;

б) промежуток времени  $\Delta t$ , по истечении которого частица вернется в исходную точку, и путь  $s$ , который она пройдет при этом;

в) наибольший за время движения  $\Delta t$  модуль скорости  $|v|_{\max}$ .

Ответ: а)  $v = at(2 - 3bt)$ ,  $w = 2a(1 - 3bt)$ ;

$$\text{б) } \Delta t = \frac{1}{b}, \quad s = \frac{8a}{27b^2};$$

$$\text{в) } |v|_{\max} = a/b.$$

1.2. В момент времени  $t = 0$  частица выходит из начала координат в положительном направлении оси  $x$ . Её скорость меняется по закону  $v = v_0(1 - t/\tau)$ , где  $v_0 = 10 \text{ см/с}$ ,  $\tau = 5 \text{ с}$ . Найдите:

а) координату частицы  $x$  в зависимости от времени  $t$ ;

б) моменты времени, когда частица будет находиться на расстоянии  $10 \text{ см}$  от начала координат;

в) путь  $s$ , пройденный частицей к моменту времени  $t$ .

$$\text{Ответ: а) } x = v_0 t \left( 1 - \frac{t}{2\tau} \right);$$

$$\text{б) } 1, 1, 9 \text{ и } 11 \text{ с};$$

$$\text{в) } s = v_0 \left( t - \frac{t^2}{2\tau} \right) \text{ при } t \leq \tau \text{ и } s = v_0 \left( \tau - t + \frac{t^2}{2\tau} \right) \text{ при } t \geq \tau.$$

1.3. Частица движется в положительном направлении оси  $x$  так, что ее скорость меняется по закону  $v = a\sqrt{x}$ , где  $a$  – положительная постоянная. В момент времени  $t = 0$  частица находилась в точке  $x = 0$ . Найдите:

а) зависимость от времени  $t$  скорости  $v$  и ускорения  $w$  частицы;

б) среднее значение скорости частицы на пути  $s$ .

Ответ: а)  $v = a^2 t / 2$ ,  $w = a^2 / 2$ ;

б)  $\bar{v} = a\sqrt{s}/2$ .

1.4. Частица движется прямолинейно, замедляясь от начальной скорости  $v_0$  до остановки с ускорением  $w = -2atv$ , где  $a$  – положительная постоянная. Найдите закон изменения скорости  $v$  со временем  $t$  и пройденный частицей путь  $s$ .

Ответ:  $v = v_0 e^{-at^2}$ ,  $s = \frac{v_0}{2} \sqrt{\pi/a}$ .

1.5. Прямолинейно движущаяся частица замедляется от начальной скорости  $v_0$  до остановки с ускорением  $w = -bx$ , где  $b$  – положительная постоянная, а координата  $x$  отсчитывается от начального положения частицы. Найдите зависимость скорости  $v$  от координаты  $x$ , пройденный частицей путь  $s$  и время движения  $\tau$ .

Ответ:  $v = \sqrt{v_0^2 - bx^2}$ ,  $s = \frac{v_0}{\sqrt{b}}$ ,  $\tau = \frac{\pi}{2\sqrt{b}}$ .

1.6. Ускорение тела, выпавшего с борта аэростата на высоте  $h$ , менялось по закону  $w = g - bv^2$ , где  $v$  – мгновенная скорость,  $b$  – положительная постоянная. Найдите скорость  $v_{\text{п}}$ , с которой тело упадёт на землю, и время его падения  $t_{\text{п}}$ . Горизонтальной скоростью аэростата пренебречь.

Ответ:  $v_{\text{п}} = v_0 \sqrt{1 - e^{-2bh}}$ ,  $t_{\text{п}} = \frac{v_0}{2g} \ln \left( \frac{v_0 + v_{\text{п}}}{v_0 - v_{\text{п}}} \right)$ ,

где  $v_0 = \sqrt{g/b}$  – предельная скорость падения.

Указание. Получите зависимость скорости тела  $v$  от пройденного им пути вниз и, отдельно, связь скорости  $v$  и времени движения  $t$ .



## Плоское движение

1.7. Координаты частицы при её движении по плоскости меняются по закону:  $x = at$ ,  $y = at(1 - bt)$ , где  $a$  и  $b$  – положительные постоянные. Найдите:

- а) уравнение траектории движения  $y(x)$  и постройте её;
- б) абсолютную величину скорости  $v$  и ускорения  $w$  частицы в зависимости от координаты  $x$ ;
- в) угол  $\alpha$  между векторами скорости и ускорения в моменты пересечения частицей оси  $x$ .

Ответ: а)  $y = x - bx^2/a$ ;

б)  $v = \sqrt{a^2 + (2bx - a)^2}$ ,  $w = 2ab$ ;

в)  $\alpha = 3\pi/4, \pi/4$ .

1.8. Частица движется на плоскости по траектории  $y = ax - bx^2$ , где  $a$  и  $b$  – положительные постоянные. Найдите скорость частицы  $v$  в зависимости от координаты  $x$ , если её ускорение постоянно, по абсолютной величине равно  $w$ , а его направление:

- а) противоположно оси  $y$ ;
- б) совпадает с осью  $x$ .

Ответ: а)  $v = \sqrt{c(1 + \eta^2)}$ ;

б)  $v = \sqrt{c\eta(1 + \eta^2)}$ , где  $c = w/(2b)$ ,  $\eta = a - 2bx$ .

Указания. Дважды продифференцируйте уравнение траектории по времени. Из полученных уравнений выразите компоненты скорости  $v_x$ ,  $v_y$ .

1.9. Для увеличения дальности метания камней древние воины использовали пращу – сложенный петлей ремень, который они раскручивали над головой, отпуская в нужный момент времени один из его концов. При раскрутке пращи вокруг центра  $O$  удерживающая ремень рука  $A$  воина двигалась впереди камня  $B$ , образуя угол  $\alpha$ , показанный на рис. 1.1. Найдите в зависимости от времени  $t$  скорость камня  $v$  и его полное ускорение  $w$ , если

раскрутка будет происходить при постоянном угле  $\alpha$  с начальной скоростью  $v_0$ .

$$\text{Ответ: } v = \frac{v_0 R}{R - \operatorname{tg}(\gamma) v_0 t}, \quad w = \frac{v^2}{l + r \cos(\alpha)}, \quad \operatorname{tg}(\gamma) = \frac{r \sin(\alpha)}{l + r \cos(\alpha)},$$

$$R = \sqrt{r^2 + l^2 + 2rl \cos(\alpha)},$$

где  $r$  – радиус окружности, описываемой рукой воина,  $l$  – длина пращи.

1.10. В условиях задачи 1.9 определите, как скорость камня  $v$  будет зависеть от угла  $\varphi$  его поворота? Сколько  $N$  оборотов пращи нужно совершить для броска камня со скоростью  $v_1$ ?

$$\text{Ответ: } v = v_0 e^{\varphi \operatorname{tg}(\gamma)}, \quad N = \frac{1}{2\pi \operatorname{tg}(\gamma)} \ln \left( \frac{v_1}{v_0} \right), \quad \operatorname{tg}(\gamma) = \frac{r \sin(\alpha)}{l + r \cos(\alpha)}.$$

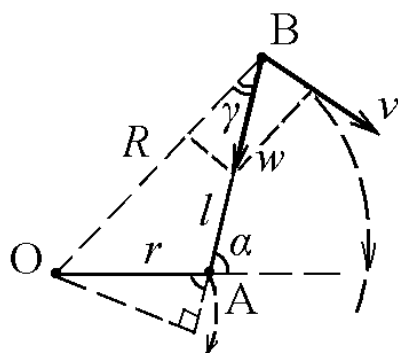


Рис. 1.1

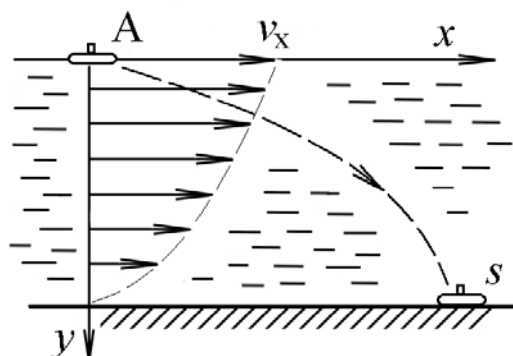


Рис. 1.2

1.11. Тело движется по окружности радиусом  $R$  так, что его скорость меняется по закону  $v = b\sqrt{s}$ , где  $s$  – пройденный телом путь,  $b$  – положительная постоянная. Найдите в зависимости от величины  $s$  полное ускорение тела  $w$  и угол  $\alpha$  между его вектором и вектором скорости.

$$\text{Ответ: } w = \frac{b^2}{2} \sqrt{1 + \left( \frac{2s}{R} \right)^2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}(2s/R).$$

1.12. Тело движется по окружности радиусом  $R$ , замедляясь с тангенциальным ускорением  $w_t = -bv^2$ , где  $b$  – положительная постоянная. В момент времени  $t = 0$  его скорость равнялась  $v_0$ .

Как будет меняться с течением времени  $t$  скорость тела  $v$  и пройденный им путь  $s$ ? Какими будут при этом полное ускорение тела  $w$  и угол  $\alpha$ , образуемый его вектором и вектором скорости?

$$\text{Ответ: } v = \frac{v_0}{1 + v_0 b t}, \quad s = \frac{1}{b} \ln(1 + v_0 b t),$$

$$w = v^2 \sqrt{b^2 + R^{-2}}, \quad \alpha = \pi/2 + \operatorname{arctg}(bR).$$

1.13. Потерявшая ход субмарина А произвела аварийное погружение с поверхности моря на его дно с постоянной скоростью  $v_0$  (рис. 1.2). Найдите траекторию движения подлодки  $x(y)$  и величину  $s$  её горизонтального сноса, если скорость морского течения в месте погружения была  $v_x = a(h^2 - y^2)$ . Здесь  $h$  – глубина моря,  $a$  – положительная постоянная, координата  $y$  отсчитывается от поверхности моря вниз.

$$\text{Ответ: } x = \frac{ay}{v_0} \left( h^2 - \frac{y^2}{3} \right), \quad s = \frac{2ah^3}{3v_0}.$$

1.14. Под действием ветра тело, брошенное вертикально вверх со скоростью  $v_0$ , двигалось с горизонтальным ускорением  $w_x = ay$ , где  $y$  – высота над поверхностью земли,  $a$  – постоянная. Полагая вертикальное движение тела равноускоренным, найдите:

а) зависимость от времени  $t$  его горизонтальной скорости  $v_x$  и смещения  $x$ ;

б) скорость тела  $v_1$ , его смещение  $x_1$  и радиус кривизны траектории  $R_1$  в её наивысшей точке;

в) горизонтальную скорость тела  $v_{x2}$ , его смещение  $x_2$  и радиус кривизны траектории  $R_2$  при падении на землю.

$$\text{Ответ: а) } v_x = \frac{at^2}{2} \left( v_0 - \frac{gt}{3} \right), \quad x = \frac{at^3}{6} \left( v_0 - \frac{gt}{4} \right);$$

$$\text{б) } v_1 = \frac{av_0^3}{3g^2}, \quad x_1 = \frac{av_0^4}{8g^3}, \quad R_1 = \frac{a^2 v_0^6}{9g^5};$$

$$\text{в) } v_{x2} = \frac{2av_0^3}{3g^2}, \quad x_2 = \frac{2av_0^4}{3g^3}, \quad R_2 = \frac{1}{g v_{x2}} (v_0^2 + v_{x2}^2)^{3/2}.$$

1.15. Во время запуска метеозонда скорость его подъёма менялась по закону  $v_y = b\sqrt{h^2 - y^2}$ , а скорость ветра – по закону  $v_x = ay$ , где  $y$  – высота над поверхностью земли,  $a$  и  $b$  – постоянные. Найдите:

а) уравнение траектории  $x(y)$ , горизонтальный снос  $s$  и время подъёма  $\tau$  тела до предельной высоты  $h$ ;

б) квадраты модулей  $v$  скорости и  $w$  ускорения тела в зависимости от координаты  $y$ ;

в) тангенциальную  $w_\tau$  и нормальную  $w_n$  компоненты ускорения, радиус кривизны траектории  $R_k$ .

Ответ: а)  $x = \frac{a}{b} \left( h - \sqrt{h^2 - y^2} \right)$ ,  $s = \frac{a}{b} h$ ,  $\tau = \frac{\pi}{2b}$ ;

б)  $v^2 = b^2 h^2 + (a^2 - b^2) y^2$ ,  $w^2 = b^2 [a^2 h^2 + (b^2 - a^2) y^2]$ ;

в)  $w_\tau = b(a^2 - b^2) \frac{y}{v} \sqrt{h^2 - y^2}$ ,  $w_n = \frac{ab^2 h^2}{v}$ ,  $R_k = \frac{v^3}{ab^2 h^2}$ ,

где скорость  $v$  – полученная выше функция координаты  $y$ .

1.16. Выполните пункт а) задачи 1.15, если скорость подъёма метеозонда менялась по закону  $v_y = b\sqrt{h - y}$  при том же изменении скорости ветра с высотой  $y$  над поверхностью земли.

Ответ:  $x = \frac{4a}{3b} \left[ h^{3/2} - \left( h + \frac{y}{2} \right) \sqrt{h - y} \right]$ ,  $s = \frac{4a}{3b} h^{3/2}$ ,  $\tau = \frac{2}{b} \sqrt{h}$ .

1.17. Частица движется с постоянной по модулю скоростью  $v$  по плоской траектории  $y(x)$ , уравнение которой дается ниже. Найдите ускорение частицы  $w$  и радиус кривизны траектории  $R_k$  в указанных точках:

а) для параболы  $y = ax^2$  в точке  $(0,0)$ ;

б) для эллипса  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$  в точках  $(a,0)$ ,  $(0,b)$ , где  $a$  и  $b$  – постоянные.

Ответ: а)  $w = 2av^2$ ,  $R_k = \frac{1}{2a}$ ;

$$\begin{aligned} \text{б) } w &= av^2/b^2, \quad R_k = b^2/a \quad \text{в точке } (a,0), \\ w &= bv^2/a^2, \quad R_k = a^2/b \quad \text{в точке } (0,b). \end{aligned}$$

Указания. Дважды продифференцируйте уравнение траектории по времени. Последовательно определите компоненты скорости и ускорения в указанных точках.

1.18. Получите общее выражение для радиуса кривизны  $R_k$  гладкой плоской кривой, задаваемой в декартовых координатах функцией  $y(x)$ . Примените полученную формулу к функциям

$$y = ax^2, \quad y = ax^{3/2}, \quad y = ax^{2/3},$$

где  $a$  – постоянная. Найдите радиус кривизны соответствующих кривых в зависимости от координаты  $x$ . Каков он в точке  $x = 0$ ?

$$\text{Ответ: } R_k = \frac{1}{|y''_{xx}|} \left[ 1 + (y'_x)^2 \right]^{3/2}.$$

Указания. Представьте, что по данной кривой движется частица с постоянной скоростью, которую для простоты можно считать единичной. Последовательно выразите через производные от функции  $y(x)$  полное, тангенциальное и нормальное ускорения.

### ***Задачи на достижение целей***

1.19. Скорость течения реки меняется по закону  $u = cy(b - y)$ , где  $c$  – положительная постоянная,  $b$  – ширина реки, а координата  $y$  отсчитывается от пункта А на её берегу. Лодка, движущаяся относительно воды с постоянной скоростью  $v$ , должна попасть из пункта А в пункт В на противоположном берегу. Под каким углом  $\alpha$  к линии АВ она должна держать курс, чтобы:

- а) сразу после пересечения реки оказаться в пункте В;
- б) попасть в пункт В за кратчайшее время, если остаток пути после пересечения реки ей придется пройти вдоль берега?

$$\text{Ответ: а) } \sin(\alpha) = \frac{cb^2}{6v};$$

$$\text{б) } \sin(\alpha) = \left(1 + \frac{cb^2}{6v}\right)^{-1}.$$

Указания. Направьте ось  $x$  по течению реки. Найдите величину  $s$  сноса лодки сразу после пересечения реки под заданным углом  $\alpha$ . Выразите время достижения пункта В через угол  $\alpha$ .

1.20. Двое гребцов стартовали на байдарках из пункта А с намерением попасть в пункт В, находившийся строго напротив пункта А на другом берегу реки шириной  $h = 500 \text{ м}$ . Байдарки имели одинаковую скорость  $v = 2 \text{ м/с}$  относительно воды. При этом скорость течения реки  $u = 1 \text{ м/с}$  была всюду постоянной.

Первый спортсмен грёб сначала строго поперёк течения, а достигнув противоположного берега, поплыл в пункт В вдоль него. Второй же сразу стал грести под таким углом  $\alpha_2$  к линии АВ, чтобы всё время плыть вдоль неё. Какими были угол  $\alpha_2$  и времена  $t_1, t_2$ , затраченные гребцами?

$$\text{Ответ: } \alpha_2 = \arcsin\left(\frac{u}{v}\right), \quad t_1 = \frac{h}{v-u}, \quad t_2 = \frac{h}{\sqrt{v^2 - u^2}}.$$

1.21. Найдите времена  $t_-$  и  $t_+$  достижения пункта В спортсменами из задачи 1.20, если их байдарки будут пересекать реку под углами  $\alpha < \alpha_2$  и  $\alpha > \alpha_2$  соответственно, а остаток пути проплывут вдоль берега. Какие углы  $\alpha_-$ ,  $\alpha_+$  обеспечат им достижение цели за кратчайшее время при условии прямолинейного пересечения реки.

$$\text{Ответ: } t_- = \frac{h}{v+u} \cdot \frac{1+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad t_+ = \frac{h}{v-u} \cdot \frac{1-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad \alpha_- = \alpha_+ = \alpha_2.$$

1.22. В условиях задачи 1.20 рассмотрите движение лодки-двойки, переплывающей реку таким образом, что её рулевой всё время направляет лодку к пункту В. Используя те же значения скорости лодки  $v$  относительно воды и скорости течения реки  $u$ , найдите время  $\tau$ , затраченное лодкой на переправу, и уравнение траектории движения лодки. Под каким углом  $\alpha$  она причалит к берегу в пункте В?

Ответ:  $\tau = \frac{hv}{v^2 - u^2}$ ,  $x = r\xi$ ,  $y = h - r\sqrt{1 - \xi^2}$ ,

$$r = \frac{h}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left( \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \right)^{v/2u}.$$

Указания. Введите показанные на рис. 1.3 координаты  $x$ ,  $y$ , угол  $\alpha$  и расстояние  $r$  от лодки С до пункта В, взятые в произвольный момент времени  $t$ . Выразите через скорости  $u$ ,  $v$  и угол  $\alpha$  величину приближения  $-dr$  лодки к пункту В и величину её продольного перемещения  $dx$  за малое время  $dt$ . Проинтегрируйте полученные формулы на временном интервале  $(0, \tau)$ . (Идея данного решения заимствована из [3]).

Для нахождения траектории лодки выразите её координаты  $x$ ,  $y$  через параметры  $r$ ,  $\xi$ , где  $\xi = \cos(\alpha)$ . В полученных выше формулах исключите величину  $dt$  и замените координату  $x$  её выражением. В новом дифференциальном уравнении разделите переменные  $r$ ,  $\xi$  и проинтегрируйте его с начальным условием  $r = h$  при  $\xi = 0$ . Используйте найденную функцию  $r(\xi)$  для задания траектории лодки в параметрическом виде  $x(\xi)$ ,  $y(\xi)$  и определения угла  $\alpha$ , под которым она причалит к берегу в пункте В.

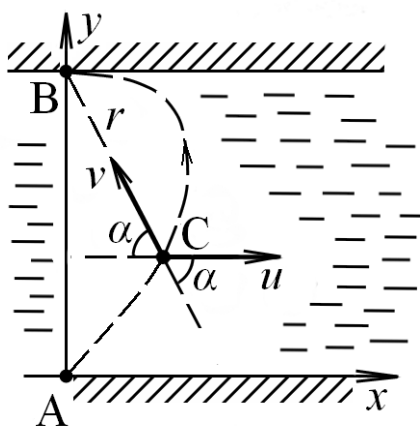


Рис. 1.3

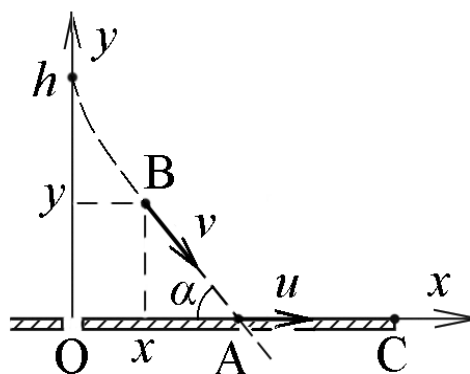


Рис. 1.4

1.23. Беспечная курица А пролезла через дыру О в заборе деревенской усадьбы и оказалась с глазу на глаз с лисой В, затаившейся напротив дыры на расстоянии  $h$  от неё (рис. 1.4).

Спасаясь, курица побежала с постоянной скоростью  $u$  вдоль забора к его углу  $C$ , где сидела хозяйская собака. При каком расстоянии  $l$  от дыры до угла забора курица избежит гибели, если скорость лисы  $v$  будет постоянной ( $v > u$ ), а её вектор всё время направлен на курицу? Какой будет траектория движения лисы в координатах  $x, y$ , показанных на рис. 1.4?

$$\text{Ответ: } l < \frac{hvu}{v^2 - u^2}, \quad x = -\int_0^{\xi} \frac{dy}{d\xi} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad y = h \left( \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \right)^{v/2u}.$$

Указания. По методу [3] выразите величину сближения  $-dr$  лисы и курицы и их перемещения  $dx$  и  $dx_k$  за малое время  $dt$  через скорости  $u, v$  и угол  $\alpha$  между вектором скорости лисы и забором. Проинтегрировав полученные формулы на временном интервале  $(0, \tau)$ , найдите время  $\tau$  бега лисы до встречи с курицей у достаточно длинного забора и расстояние  $u\tau$  от дыры, на котором эта встреча должна произойти. При условии  $l < u\tau$  встреча не состоится.

Для нахождения траектории лисы примените выражения  $r = y/\sin(\alpha)$ ,  $dx = -dy/\operatorname{tg}(\alpha)$ . В полученных выше формулах исключите величины  $dt, dx$  и замените расстояние  $r$  его выражением. Введя параметр  $\xi = \cos(\alpha)$ , получите дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными  $y, \xi$ . Проинтегрируйте его с начальным условием  $y = h$  при  $\xi = 0$ . Используя выражение для величины  $dx$ , получите траекторию лисы в параметрическом виде  $x(\xi), y(\xi)$ .

## **Баллистика**

1.24. При движении пули в древесине её ускорение  $w$  меняется по закону  $w = -av^2$ , где  $a$  – положительная постоянная. Какую скорость  $v_1$  будет иметь пуля на вылете из доски толщиной  $h$ , если её первоначальная скорость была  $v_0$ ?

$$\text{Ответ: } v_1 = v_0 e^{-ah}.$$

1.25. Для определения скорости горизонтально летевшей пули на её пути установили три вертикальных щита  $A, B_1, B_2$



(рис. 1.5) на одинаковом расстоянии  $l$  друг от друга. После выстрела понижение пробоев в щитах  $B_1$ ,  $B_2$  по отношению к щиту  $A$  составило величину  $y_1$ ,  $y_2$  соответственно. Какой была первоначальная скорость пули  $v_0$ , если после пробивания каждого щита она уменьшалась в одинаковое число раз? Полагать, что понижения  $y_1$ ,  $y_2$  малы по сравнению с расстоянием  $l$ . Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: 
$$v_0 = \frac{l}{y_1} \sqrt{\frac{g}{2}(y_2 - y_1)}.$$

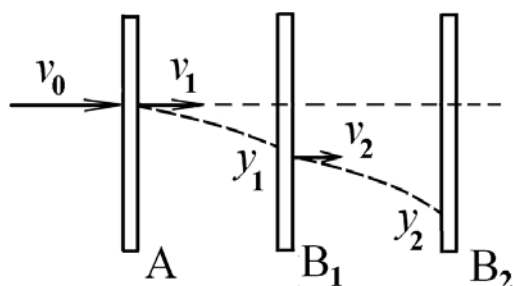


Рис. 1.5

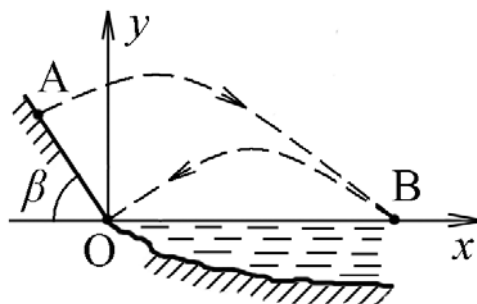


Рис. 1.6

1.26. Какую величину  $h$  составит понижение пули после горизонтального выстрела по мишени, находившейся на расстоянии  $l$  от стрелка, если под действием сопротивления воздуха она приобретает дополнительное ускорение  $w_c = -avv$ , где  $a$  — положительная постоянная. Начальная скорость пули равна  $v_0$ .

Ответ: 
$$h = \frac{g}{(2av_0)^2} (e^{2al} - 2al - 1).$$

Указания. Разложите векторную формулу для полного ускорения пули по осям координат  $x$  — в направлении выстрела,  $y$  — вниз от начального положения пули. В полученных уравнениях перейдите от времени  $t$  к независимой переменной  $x$ . Учитывая неравенство  $v_y \ll v_x$ , проинтегрируйте их с условиями  $v_x(0) = v_0$ ,  $v_y(0) = 0$ . Используйте полученные функции  $v_x(x)$ ,  $v_y(x)$  для нахождения траектории пули  $y(x)$ .

1.27. Артиллерийское орудие расположено на склоне горы, который можно представлять наклонной плоскостью, составляющей угол  $\beta$  с горизонтом. Начальная скорость снаряда –  $v_0$ , угол его вылета из орудия по отношению к горизонту –  $\alpha$ . Найдите дальность полёта снаряда по склону  $s^-$  под уклон горы и  $s^+$  в сторону её возвышения. При каких значениях  $\alpha_n^-$  и  $\alpha_n^+$  угла наклона ствола орудия в данных случаях, эта дальность будет наибольшей?

$$\text{Ответ: } s^\mp = \frac{v_0^2}{g \cos(\beta)} \left[ \sin(2\alpha) \pm 2 \operatorname{tg}(\beta) \cos^2(\alpha) \right],$$

$$\alpha_n^- = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(\beta)), \quad \alpha_n^+ = \frac{\pi}{2} - \alpha_n^-.$$

1.28. Цель на холме высотой  $h$  расположена от орудийного расчета на расстоянии  $l$  (по горизонтали). Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите угол возвышения  $\alpha$  ствола орудия, под которым надо вести стрельбу по цели при начальной скорости снарядов  $v_0$ . При каком условии цель досягаема?

$$\text{Ответ: } \operatorname{tg}(\alpha) = b \pm \sqrt{b^2 - 2b \frac{h}{l} - 1}, \quad \text{где } b = \frac{v_0^2}{gl}.$$

$$\text{Условие досягаемости } v_0^2/g \geq h + \sqrt{h^2 + l^2}.$$

1.29. На какое расстояние  $l$  (по горизонтали) улетает снаряд, выпущенный с холма высотой  $h$  на равнину, при начальной скорости  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту? При каком угле возвышения  $\alpha_{\max}$  ствола орудия дальность стрельбы в этих условиях будет наибольшей? Чему равна эта дальность  $l_{\max}$ ?

$$\text{Ответ: } l = a \sqrt{1 - s^2} \left( s + \sqrt{s^2 + b} \right),$$

$$\sin(\alpha_{\max}) = \frac{1}{\sqrt{b+2}}, \quad l_{\max} = a \sqrt{b+1},$$

где введены параметры  $a = v_0^2/g$ ,  $b = 2h/a$  и монотонная по углу  $\alpha$  переменная  $s = \sin(\alpha)$ .

1.30. Используя преимущество в скорости  $v_{\pi}$  вылета снарядов главного калибра, корабли противника с расстояния наибольшей дальности своей стрельбы подвергли обстрелу порт и городские кварталы, лежащие у подножия горы, поднимающейся под углом  $\beta$  к горизонту. Чтобы достать противника, находившегося вне пределов досягаемости береговой артиллерии, снарядами с начальной скоростью  $v_0 < v_{\pi}$ , защитники города решили везти свои орудия вверх по склону горы. На какое наименьшее расстояние  $r$  в данном направлении их надо перемещать? При каких значениях угла  $\beta$  и скорости  $v_0$  ещё возможно предотвратить обстрел порта?

$$\text{Ответ: } r = \frac{1}{\cos^2(\beta)} \left[ a \sin(\beta) - l_{\pi} \cos(\beta) - \sqrt{a^2 - a l_{\pi} \sin(2\beta)} \right],$$

$$\text{если } \beta > \pi/4 \text{ и } v_0 \geq v_{\pi} \sqrt{\sin(2\beta)},$$

где  $a = v_0^2/g$ ,  $l_{\pi} = v_{\pi}^2/g$  – наибольшие дальности стрельбы береговой артиллерии и корабельных орудий противника.

Указания. Введите систему координат  $Ox$ , поместив её начало  $O$  в порт и направив ось  $x$  в сторону противника  $B$  (рис. 1.6). Используя ответ задачи 1.29, выразите наибольшую дальность стрельбы  $x_{\max}$  орудийного расчёта горожан с позиции  $A$  на склоне горы по отношению к порту  $O$ . Из равенства  $x_{\max} = l_{\pi}$  получите квадратное уравнение для величины  $r$ , исследуйте его корни.

### ***Вращательное движение. Качение***

1.31. Снаряд вылетел из пушки за время  $t = 0.01 \text{ с}$ , сделав внутри ствола  $N = 2$  оборота. Считая нарезку ствола равномерной, а движение снаряда в нём равноускоренным, найдите линейную  $v$  и угловую  $\omega$  скорость снаряда в момент вылета. Длина ствола  $l = 2.5 \text{ м}$ .

$$\text{Ответ: } v = 2l/t, \quad \omega = 4\pi N/t.$$

Замечание. Поскольку нарезка ствола равномерная, угол поворота снаряда  $\varphi$  пропорционален его смещению  $x$  в стволе.

1.32. В момент времени  $t = 0$  твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси по закону  $\varphi = at - bt^3$ , где  $a$ ,  $b$  – положительные постоянные. Найдите:

а) время вращения  $t_1$  до остановки тела и  $t_2$  до его возврата в исходное положение;

б) наибольшие за время  $t_2$  угол поворота  $\varphi_{\max}$  и модуль угловой скорости  $|\omega|_{\max}$ ;

в) средние значения  $\bar{\omega}$  угловой скорости и  $\bar{\beta}$  углового ускорения за время вращения  $t_1$  до остановки.

Ответ: а)  $t_1 = \sqrt{\frac{a}{3b}}$ ,  $t_2 = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ;

б)  $\varphi_{\max} = \frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{3b}}$ ,  $|\omega|_{\max} = 2a$ ;

в)  $\bar{\omega} = 2a/3$ ,  $\bar{\beta} = -\sqrt{3ab}$ .

1.33. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, замедляясь от начальной скорости  $\omega_0$  до остановки, с угловым ускорением  $\beta = -a\sqrt{\omega}$ , где  $a$  – положительная постоянная. Найдите время движения  $t_{\Pi}$ , полный угол поворота  $\varphi_{\Pi}$  и среднюю скорость  $\bar{\omega}$  тела за это время.

Ответ:  $t_{\Pi} = \frac{2}{a} \sqrt{\omega_0}$ ,  $\varphi_{\Pi} = \frac{2}{3a} \omega_0^{3/2}$ ,  $\bar{\omega} = \frac{\omega_0}{3}$ .

1.34. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси с начальной скоростью  $\omega_0$ . Найдите зависимость скорости вращения  $\omega$  от угла  $\varphi$  поворота от начального положения при угловом ускорении:

а)  $\beta = \beta_0 \cos(\varphi)$ ;

б)  $\beta = \beta_0 \sin(\varphi)$ ,

где  $\beta_0$  – положительная постоянная. Постройте график зависимости величины  $\omega$  от угла  $\varphi$  (фазовую траекторию) и объясните характер движения тела. Обратите внимание на случай  $\omega_0 = 0$ .

Ответ: а)  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\beta_0 \sin(\varphi)}$ ,

где  $s = \pm 1$  при  $\omega_0^2 \leq 2\beta_0$  и  $s = 1$  при  $\omega_0^2 > 2\beta_0$ ;

$$\text{б) } \omega = \sqrt{\omega_0^2 + 4\beta_0 \sin^2(\varphi/2)}.$$

1.35. Колесо с радиусом  $R$  катится без скольжения по горизонтальной плоскости с постоянной скоростью  $v_0$  (рис. 1.7). Для точки В, находящейся на ободе колеса в положении, задаваемом углом  $\varphi$  между радиусами, проведёнными в эту точку и точку А касания колеса плоскости, найдите:

а) модули  $v$  и  $w$  векторов скорости  $\mathbf{v}$  и ускорения  $\mathbf{w}$  в лабораторной системе отсчёта и их направления;

б) тангенциальную  $w_\tau$  и нормальную  $w_n$  компоненту вектора ускорения точки В и радиус кривизны  $R_k$  её траектории.

Ответ: а)  $v = 2v_0 \sin(\varphi/2)$ ,  $w = v_0^2/R$ ;

б)  $w_\tau = w \cos(\varphi/2)$ ,  $w_n = w \sin(\varphi/2)$ ,  $R_k = 4R \sin(\varphi/2)$ .

Указание. Используя закон сложения движений, покажите, что полное ускорение точки В совпадает с её центростремительным ускорением в системе отсчёта  $Ox'y'$ , движущейся поступательно вместе с осью колеса О.

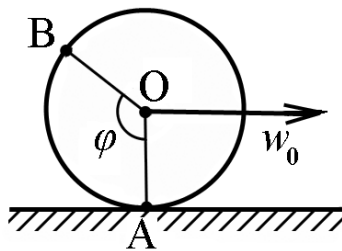


Рис. 1.7

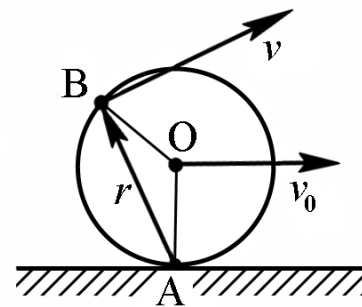


Рис. 1.8

1.36. В условиях задачи 1.35 покажите, что вектор  $\mathbf{v}$  скорости произвольной точки В на ободе колеса перпендикулярен вектору  $\mathbf{r}$ , проведённому к этой точке из точки А касания колеса плоскости (рис. 1.8). При этом модули данных векторов связаны соотношением  $v = \omega r$ , где  $\omega = v_0/R$ .

Замечание. Это доказывает, что мгновенное движение колеса можно рассматривать как чистое вращение относительно точки А, происходящее с угловой скоростью  $\omega$ .

1.37. Получите в параметрическом виде уравнение траектории движения точки В, находящейся на ободе колеса радиусом  $R$ , катящегося без скольжения с постоянной скоростью  $v_0$  по горизонтальной плоскости  $y=0$ . В качестве параметра используйте угол  $\varphi$  между радиусами, проведёнными в точку В и точку А касания колеса этой плоскости. Горизонтальную координату  $x$  отсчитывайте от нижнего положения точки В (точка  $B_0$  на рис. 1.9). Найдите в зависимости от угла  $\varphi$  компоненты  $v_x$ ,  $v_y$  и модуль  $v$  скорости точки В. Рассчитайте полный путь  $s$ , проходимый точкой В между двумя её последовательными касаниями плоскости.

Ответ:  $x = R(\varphi - \sin(\varphi))$ ,  $y = R(1 - \cos(\varphi))$ ,

$$v_x = v_0(1 - \cos(\varphi)), \quad v_y = v_0 \sin(\varphi), \quad v = 2v_0 \sin(\varphi/2),$$

$$s = 8R.$$

Указания. Свяжите с углом  $\varphi$  координаты  $x'$ ,  $y'$  системы отсчёта  $Ox'y'$ , движущейся поступательно вместе с осью колеса О. Используйте закон сложения движений.

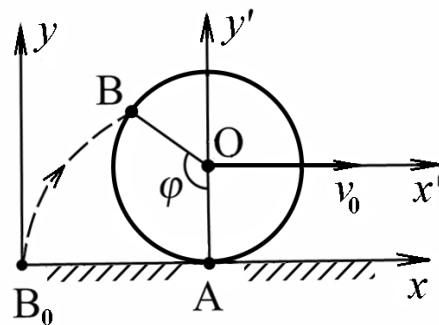


Рис. 1.9

1.38. Колесо с радиусом  $R$  катится без скольжения по горизонтальной плоскости с постоянным ускорением  $w_0$  его оси О. В момент времени, когда угловая скорость колеса равна  $\omega$ , найдите:

а) нормальную  $w_n$  и тангенциальную  $w_t$  компоненту вектора  $w$  полного ускорения точки В, находящейся на ободе колеса в

положении, задаваемом углом  $\varphi$  между радиусами, проведёнными в эту точку и точку А касания колеса плоскости (рис. 1.7);

б) квадрат модуля  $w$  вектора полного ускорения точки В и углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , при которых достигается соответственно его максимум и минимум в данный момент времени.

Ответ: а)  $w_n = \omega^2 R \sin(\varphi/2)$ ,  $w_\tau = 2w_0 \sin(\varphi/2) + \omega^2 R \cos(\varphi/2)$ ;

$$\text{б) } w^2 = 2w_0^2(1 - \cos(\varphi)) + 2w_0\omega^2 R \sin(\varphi) + \omega^4 R^2,$$

$$\varphi_1 = \pi - \arctg(\omega^2 R/w_0), \quad \varphi_2 = 2\pi - \arctg(\omega^2 R/w_0).$$

Замечания. По закону сложения движений вектора скорости  $\mathbf{v}$  и ускорения  $\mathbf{w}$  в лабораторной системе отсчёта выражаются в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}', \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}'_\tau + \mathbf{w}'_n,$$

где штрихами отмечены величины, взятые в системе отсчёта, движущейся поступательно вместе с осью О. Векторы  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{w}_0$ ,  $\mathbf{w}'_\tau$  одинаковы по модулю (объясните, почему?), а их суммы одинаково направлены. При этом вектор  $\mathbf{v}$  задаёт тангенциальное направление. Остается лишь спроецировать вектор  $\mathbf{w}'_n$  на это и перпендикулярное ему направления.

## 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПРОСТЫХ СИСТЕМ

● Основное уравнение динамики материальной точки в инерциальной системе отсчета (и.с.о.) – векторный вид и проекции на касательную и нормаль к траектории:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}, \quad mw_\tau = F_\tau, \quad mw_n = F_n,$$

где  $\mathbf{F}$  – результирующий вектор приложенных сил.

● Основное уравнение динамики материальной точки в неинерциальной системе отсчета (н.с.о.) при её произвольном движении как твёрдого тела по отношению к инерциальной системе отсчета:

$$m\mathbf{w}' = \mathbf{F} - m\mathbf{w}_0 + m\omega^2 \mathbf{r}'_\perp + 2m[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}] + m[\mathbf{r}'\boldsymbol{\beta}],$$

где  $w_0$  – ускорение поступательного движения н.с.о.,  $\omega$  и  $\beta$  – её угловая скорость и ускорение,  $r'_\perp$  – радиус-вектор материальной точки относительно оси вращения н.с.о.

## **Равноускоренное движение**

2.1. По наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, скользят два тела с массой  $m_1$  (нижнее) и  $m_2$  (верхнее), соединенные нитью (рис. 2.1). Коэффициенты трения тел  $k_1$  и  $k_2$  таковы, что  $k_1 < k_2$ . Найдите ускорение тел  $w$  и натяжение нити  $T$ . Сформулируйте условие скольжения.

Ответ:  $w = g[\sin(\alpha) - \chi \cos(\alpha)]$ ,  $T = \mu g(k_2 - k_1)\cos(\alpha)$ ,

$$\operatorname{tg}(\alpha) \geq \chi, \text{ где } \chi = \frac{k_1 m_1 + k_2 m_2}{m_1 + m_2}, \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

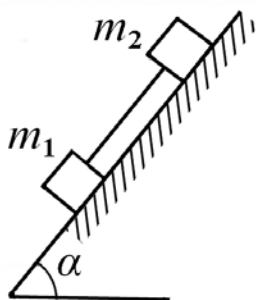


Рис.2.1

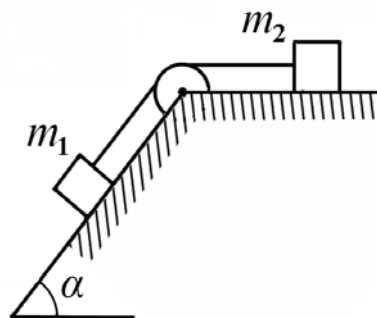


Рис.2.2

2.2. В установке на рис. 2.2 заданы массы тел  $m_1$ ,  $m_2$ , их коэффициенты трения  $k_1$ ,  $k_2$  и угол  $\alpha$ , под которым горизонтальная плоскость переходит в наклонную. Пренебрегая массой блока и трением в его оси, найдите ускорение тел  $w$  при их движении и натяжение нити  $T$ . Сформулируйте условие скольжения.

Ответ:  $w = g \frac{\chi_1(\alpha)m_1 - k_2 m_2}{m_1 + m_2}$ ,  $T = \mu g[\chi_1(\alpha) + k_2]$ ,

$$\chi_1(\alpha) \geq k_2 m_2 / m_1,$$

где  $\chi_1(\alpha) = \sin(\alpha) - k_1 \cos(\alpha)$ ,  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ .



2.3. По наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, ускоренно скользит доска массой  $m_0$  с коэффициентом трения  $k_0$ . На доску помещают брусок с массой  $m$  и коэффициентом трения  $k$  (рис. 2.3). Найдите ускорение бруска  $w'$  относительно доски, если её движение останется ускоренным. При каком отношении масс  $m/m_0$ :

а) движение доски может стать равномерным;

б) доска не сможет скользить по плоскости?

Ответ:  $w' = (1 + m/m_0)(k_0 - k)g \cos(\alpha)$ ,

а)  $m/m_0 = \eta$ ;

б)  $\frac{m}{m_0} > \eta$ , где  $\eta = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) - k_0}{k_0 - k}$ .

2.4. Доска массой  $m_0$  скользит по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения  $k_0$  под действием постоянной горизонтальной силы  $F_0$  (рис. 2.4). На доску кладут брусок массой  $m$  с коэффициентом трения  $k$ . Какими будут:

а) относительное ускорение бруска  $w'$  в случае его скольжения по доске;

б) горизонтальная сила взаимодействия  $F$  бруска и доски в отсутствие скольжения между ними?

При каком условии брусок, помещенный на доску, окажется неподвижным относительно неё?

Ответ: а)  $w' = g(k_0 + k)(m_0 + m)/m_0 - F_0/m_0$ ;

б)  $F = F_0 m/(m_0 + m) - k_0 mg$ ,

$F_0 < (k_0 + k)(m_0 + m)g$ .

Замечание. Векторные величины здесь берутся как алгебраические по отношению к направлению силы  $F_0$ . Поэтому  $w' < 0$ ,  $F > 0$ , и условие нескольжения бруска по доске может быть получено из любого неравенства  $w' < 0$  или  $F < kmg$ .

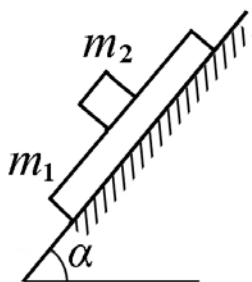


Рис. 2.3

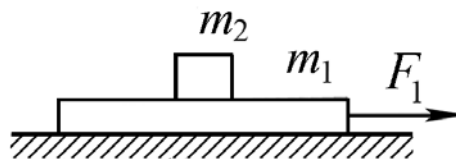


Рис. 2.4

2.5. В установке, показанной на рис. 2.5, даны масса призмы  $m_0$ , угол  $\alpha$  при ее основании и массы тел  $m_1 > m_2$ , связанных нерастяжимой нитью. Полагая, что призма покоится на шероховатом столе, найдите ускорение тел  $w$ , натяжение нити  $T$  и силу давления  $P$  призмы на стол. Трением тел о боковые грани призмы, трением в оси блока и его массой пренебречь. При каком коэффициенте трения  $k$  призмы о стол она еще будет неподвижной?

Ответ:  $w = g\eta \sin(\alpha)$ ,  $T = 2\mu g \sin(\alpha)$ ,

$$P = m_0 g + 4\mu g \sin^2(\alpha) + (m_1 + m_2)g \cos^2(\alpha),$$

$$k > F/P, \quad F = (m_1 - m_2)g \sin(\alpha) \cos(\alpha),$$

где  $\eta = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ ,  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ .

Указание. Для облегчения выкладок при решении системы скалярных уравнений используйте обозначения  $s = \sin(\alpha)$ ,  $c = \cos(\alpha)$  и примените пакет MathCad.

2.6. Показанную на рис. 2.5 установку, параметры которой даны в задаче 2.5, поместили на гладкий стол. Пренебрегая массой блока и трением на всех поверхностях, найдите ускорение призмы  $w_0$ , ускорение тел  $w'$  по отношению к ней и натяжение нити  $T$ .

Ответ:  $w_0 = \frac{\eta g \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\eta_0 + \sin^2(\alpha)}$ ,  $w' = w_0 \frac{\eta_0 + 1}{\cos(\alpha)}$ ,  $T = 2\mu g \sin(\alpha)$ ,

где  $\eta = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ ,  $\eta_0 = \frac{m_0}{m_1 + m_2}$ ,  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ .

Указание. Такое же, как в задаче 2.5.

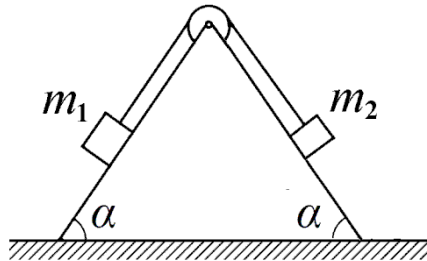


Рис. 2.5

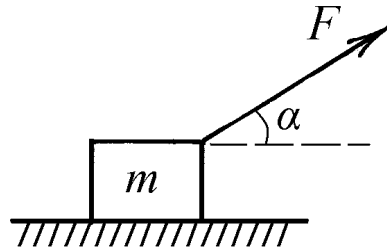


Рис. 2.6

2.7. На небольшое тело с массой  $m$ , лежавшее на горизонтальной плоскости с коэффициентом трения  $k$ , в момент времени  $t = 0$  под углом  $\alpha$  к горизонту начала действовать сила  $F = bt$ , где  $b$  – постоянная (рис. 2.6). Найдите:

- а) моменты времени  $t_c$  начала скольжения и  $t_0$  отрыва тела;
- б) скорость тела  $v$  в момент отрыва от плоскости;
- в) путь  $s$ , пройденный телом к этому моменту времени.

Ответ: а)  $t_c = mgk / (b \cdot f(\alpha))$ ,  $t_0 = mg / (b \cdot \sin(\alpha))$ ;

$$\text{б) } v = \frac{mg^2 \operatorname{ctg}^2(\alpha)}{2b \cdot f(\alpha)};$$

$$\text{в) } s = \frac{m^2 g^3 \cos(\alpha) h(\alpha)}{6b^2 \sin^3(\alpha) f^2(\alpha)},$$

где  $f(\alpha) = \cos(\alpha) + k \sin(\alpha)$ ,  $h(\alpha) = \cos^2(\alpha) - 3k^2 \sin^2(\alpha)$ .

Выражения б) и в) получены с применением пакета MathCad.

2.8. При каких значениях угла  $\alpha$  тело из задачи 2.7 оторвётся от плоскости без скольжения по ней?

Ответ:  $\alpha \geq \arctg(k)$ .

2.9. В установке на рис. 2.7 дана длина стержня  $l$ , его масса  $m_0$  и масса шарика  $m$ , причем  $m_0 > m$ . Шарик имеет отверстие и может скользить по нити с некоторым трением. Массой блока и

трением в его оси можно пренебречь. Сначала шарик находился в покое напротив нижнего конца стержня. Затем систему предоставили самой себе, и тела стали двигаться с постоянными ускорениями. Найдите силу трения  $F_{\text{тр}}$  между шариком и нитью, если спустя время  $t$  после начала движения шарик оказался напротив верхнего конца стержня. Каким было время  $t$ , если шарик остался неподвижен относительно блока?

Ответ:  $F_{\text{тр}} = \frac{2m_0ml}{(m_0 - m)t^2}$ ,  $t = \sqrt{\frac{2m_0l}{(m_0 - m)g}}$ .

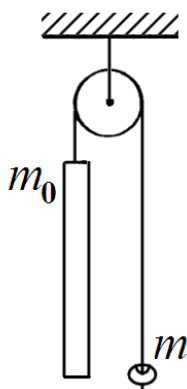


Рис. 2.7

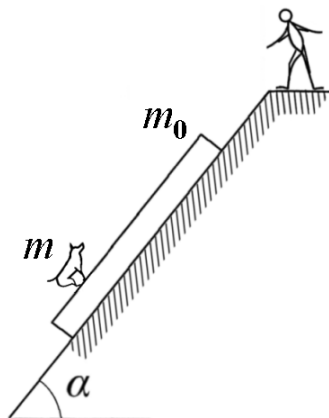


Рис. 2.8

2.10. По ледяному жёлобу, составляющему угол  $\alpha$  с горизонтом, рабочий спускает доски с массой  $m_0$  и длиной  $l$  (рис. 2.8). В момент начала движения одной из них на нижний край доски прыгает собачка массой  $m$ , которая бежит вверх, отталкиваясь от доски с постоянной силой  $F$ . Пренебрегая трением доски о жёлоб, найдите относительное  $w'$  и абсолютное  $w$  ускорение собачки, а также время  $t$  её бега по доске. На какой высоте  $h$  по отношению к начальному уровню окажется собачка, когда достигнет верхнего конца доски? Какую абсолютную скорость  $v$  она будет иметь, спрыгивая с доски? Изменение скорости тел во время прыжков собачки не учитывать.

Ответ:  $w' = F/\mu$ ,  $w = F/m - g \sin(\alpha)$ ,  $t = \sqrt{2\mu l/F}$ ,

$$h = \frac{1}{2}wt^2 \sin(\alpha), \quad v = wt, \quad \text{где } \mu = \frac{mm_0}{m + m_0}.$$

Указания. Запишите уравнения движения собачки относительно доски и доски относительно жёлоба в проекции на направление их движения. Примените закон сложения движений и простейшие кинематические формулы.

2.11. На один конец стоявшей на дороге тележки с массой  $m_0$  и длиной  $l$  прыгает собачка массой  $m$ , которая бежит до её другого конца, отталкиваясь от тележки с постоянной горизонтальной силой  $F$ . Найдите ускорение собачки  $w'$  относительно тележки, если её коэффициент трения о дорожное покрытие равен  $k_0$ . Какую абсолютную скорость  $v$  приобретёт собачка, спрыгивая с тележки? Изменением скорости тел во время прыжков собачки пренебречь.

$$\text{Ответ: } w' = \frac{F - k_0 mg}{\mu}, \quad v = \frac{F}{m} \sqrt{\frac{2l}{w'}}, \quad \text{где } \mu = \frac{mm_0}{m + m_0}.$$

Указания. Аналогичные данным в задаче 2.10.

2.12. Через лёгкий блок В на верхнем ребре прямоугольного бруска массой  $m_0$ , лежащего на горизонтальном столе, переброшена нить, к которой привязаны одинаковые тела массой  $m$  (рис. 2.9). Коэффициент трения тел по бруску  $k < 1$ . Полагая, что брусок покоится, найдите силу  $P_0$  его давления на стол и ускорение тел  $w$ . Какому условию должен удовлетворять в данном случае коэффициент трения  $k_0$  бруска по столу?

$$\text{Ответ: } P_0 = mg \frac{\xi}{2}, \quad w = \frac{g}{2} (1 - k), \quad k_0 \geq \frac{1 - k}{\xi},$$

где  $\xi = 2m_0/m + 3 + k$ .

2.13. В условиях задачи 2.12 бруску на рис. 2.9 сообщили направленное влево горизонтальное ускорение  $w_0$ . Найдите его наименьшее  $w_0^{\min}$  и наибольшее  $w_0^{\max}$  значения, при которых тела ещё будут неподвижны по отношению к бруску. Массой блока и трением в его оси пренебречь.

$$\text{Ответ: } w_0^{\min} = g \frac{1 - k}{1 + k}, \quad w_0^{\max} = g \frac{1 + k}{1 - k}.$$

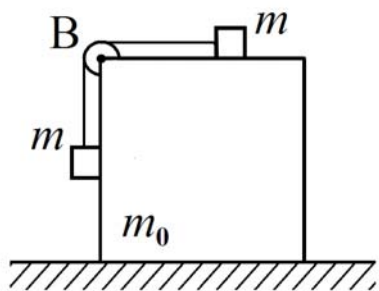


Рис. 2.9

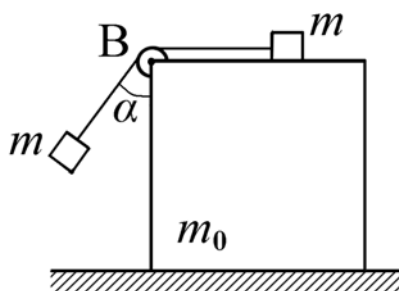


Рис. 2.10

2.14. Через лёгкий блок В на верхнем ребре прямоугольного бруска, лежащего на горизонтальном столе, переброшена нить, к которой привязаны одинаковые тела массой  $m$  (рис. 2.10). Коэффициент трения тел по бруску  $k > 1$ . Когда подвешенное тело находилось на уровне блока, а нить была натянута, бруску сообщили направленное вправо горизонтальное ускорение  $w_0$ . Найдите натяжение нити  $T$  и угол  $\alpha$  её отклонения от вертикали, если лежавшее тело будет:

- неподвижно по отношению к бруску;
- скользить по бруску.

При каком наименьшем значении  $w_0^{\min}$  ускорения бруска начнётся скольжение тела? Каким будет после этого его относительное ускорение  $w'$ ?

Ответ: а)  $T = mw_1$ ,  $\operatorname{tg}(\alpha) = w_0/g$ ;

б)  $T = m(kg + w_1 - w_0)/2$ ,  $\operatorname{tg}(\alpha) = w_0/g$ .

$$w_0^{\min} = g \frac{k^2 - 1}{2k}, \quad w' = \frac{1}{2}(w_0 + w_1 - kg),$$

где  $w_1 = \sqrt{g^2 + w_0^2}$ .

2.15. Через блок В на верхнем ребре прямоугольного бруска массой  $m_0$ , лежащего на горизонтальной плоскости, переброшена нить, к которой привязаны два тела массой  $m$  (рис. 2.10). Когда подвешенное тело находилось на уровне блока, а нить была натянута, систему предоставили самой себе. Пренебрегая массой блока и трением на всех поверхностях, найдите ускорение бруска  $w_0$  и угол  $\alpha$  отклонения нити от вертикали.

Ответ:  $w_0 = g \operatorname{tg}(\alpha)$ ,  $\sin(\alpha) = 1 + \eta - \sqrt{\eta(2 + \eta)}$ , где  $\eta = m_0/m$ .

2.16. Через блок В на верхнем ребре прямоугольного бруска массой  $m_0$  и высотой  $h$  переброшена длинная нить, к концу которой привязано небольшое тело массой  $m$  (рис. 2.11). Другой конец нити закреплён на стенке С на уровне блока В. Когда тело находилось на том же уровне, а нить была натянута, систему предоставили самой себе. Пренебрегая размерами блока, его массой и трением бруска по горизонтальной плоскости  $AA'$ , найдите его ускорение  $w_0$  и угол  $\alpha$  отклонения нити от вертикали. Какую скорость  $v_0$  приобретёт брусок после того, как тело опустится на плоскость  $AA'$ ? С какой скоростью  $v$  тело ударится об неё?

Ответ:  $w_0 = g \operatorname{tg}(\alpha)$ ,  $\sin(\alpha) = 1 + \eta' - \sqrt{\eta'(2 + \eta')}$ ,

$$v_0 = \sqrt{\frac{2w_0 h}{\cos(\alpha)}}, \quad v = 2\sqrt{w_0 h \frac{1 - \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}, \quad \text{где } \eta' = \frac{m_0}{2m}.$$

Указания. Ввиду нерастяжимости нити перемещения  $s_0$  бруска по плоскости и  $s'$  тела относительно бруска будут одинаковыми при сохранении угла  $\alpha$ . Как следствие, будут равны ускорения  $w_0$  и  $w'$ . Учитывая это, получите систему из трёх уравнений для отыскания величин  $w_0$ ,  $T$ ,  $\alpha$ . Сведите её к уравнению для неизвестного  $\sin(\alpha)$ .

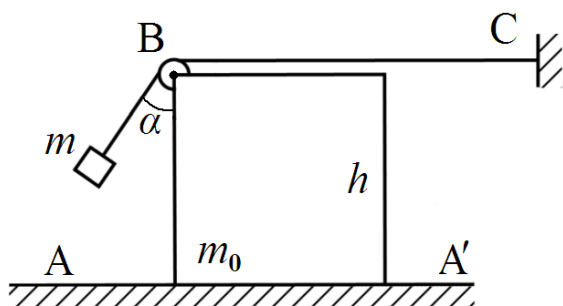


Рис. 2.11

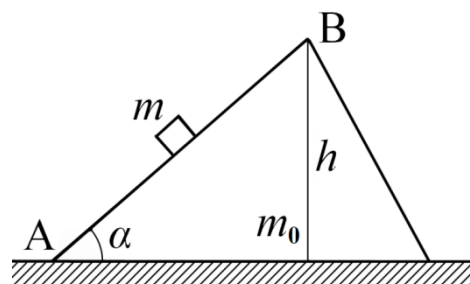


Рис. 2.12

2.17. По наклонной грани  $AB$  призмы массой  $m_0$ , которая покоится на шероховатом столе, в сторону угла  $\alpha$  при её основании скользит без трения тело массой  $m$  (рис. 2.12). Найдите силу  $P_0$  давления призмы на стол и коэффициент трения  $k_0$ , при котором она ещё будет неподвижной.

Ответ:  $P_0 = g \left[ m_0 + m \cos^2(\alpha) \right], \quad k_0 \geq \frac{m \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{m_0 + m \cos^2(\alpha)}.$

2.18. На призме с углом  $\alpha$  при основании (рис. 2.12) находился брусок массой  $m$  с коэффициентом трения  $k < \operatorname{ctg}(\alpha)$ . Призме сообщили направленное влево горизонтальное ускорение  $w_0$ . Найдите его наименьшее значение  $w_0^{\min}$ , при котором брусок не будет скользить вниз по призме, и его наибольшее значение  $w_0^{\max}$ , при котором брусок не будет скользить вверх по ней.

Ответ:  $w_0^{\min} = g \frac{\operatorname{tg}(\alpha) - k}{1 + k \cdot \operatorname{tg}(\alpha)}, \quad w_0^{\max} = g \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + k}{1 - k \cdot \operatorname{tg}(\alpha)}.$

2.19. С вершины В призмы массой  $m_0$  и высотой  $h$ , которая находится на горизонтальной плоскости, в сторону угла  $\alpha$  при её основании съезжает небольшое тело массой  $m$  (рис. 2.12). Пренебрегая трением на всех поверхностях, найдите ускорение призмы  $w_0$  и ускорение тела  $w'$  по отношению к ней. Какую скорость  $v_0$  приобретёт призма после того, как тело съедет на горизонтальную плоскость?

Ответ:  $w_0 = \eta m \cos(\alpha), \quad w' = \eta(m + m_0),$

$$v_0 = w_0 \sqrt{\frac{2h}{w' \sin(\alpha)}}, \quad \text{где } \eta = \frac{g \sin(\alpha)}{m_0 + m \sin^2(\alpha)}.$$

2.20. В установке на рис. 2.13 дана масса призмы  $m_0$ , её высота  $h$  и угол  $\alpha$  при основании, а также масса  $m$  небольшого тела, привязанного длинной нитью к стенке С на уровне блока В. Когда тело находилось на том же уровне, а нить была натянута, систему предоставили самой себе. Пренебрегая размерами блока, его массой и трением на всех поверхностях, найдите силу  $P$  давления тела на призму и её ускорение  $w_0$ . Какую скорость  $v_0$  приобретёт призма, когда тело съедет на горизонтальную плоскость АА'?

Ответ:  $P = mg \frac{2(\eta' + 1) \cos(\alpha) - \cos^2(\alpha) - 1}{2(\eta' + 1 - \cos(\alpha))},$



$$w_0 = \frac{g \sin(\alpha)}{2(\eta' + 1 - \cos(\alpha))}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2w_0 h}{\sin(\alpha)}}, \quad \text{где } \eta' = \frac{m_0}{2m}.$$

Замечания. Ввиду нерастяжимости нити перемещения  $s_0$  призмы по плоскости и  $s'$  тела относительно призмы будут одинаковыми. Как следствие, будут равны их ускорения  $w_0$  и  $w'$ . Полученное для силы  $P$  выражение справедливо лишь при условии

$$\cos(\alpha) > 1 + \eta' - \sqrt{\eta'(2 + \eta')}.$$

Если оно не выполнено, то тело отстанет от призмы, и характер его движения будет таким же, как в задаче 2.16.

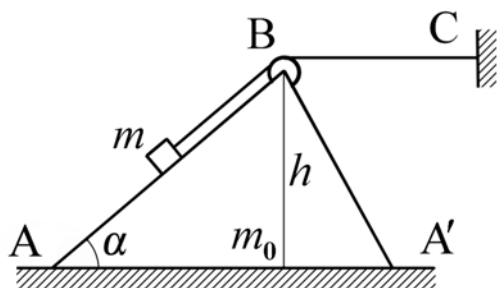


Рис. 2.13

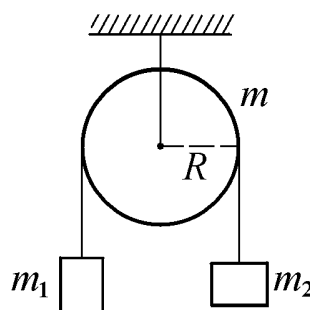


Рис. 2.14

## Интегрирование уравнений движения

2.21. В процессе швартовки речного теплохода матрос набрасывает один конец каната петлёй на кнехт – тумбу на пристани, а его другой конец наматывает на подобный кнехт, находящийся на борту теплохода. Найдите в зависимости от угла намотки  $\varphi$  силу натяжения каната  $T$  при его равномерном скольжении по кнехту, если матрос тянет его силой  $T_1$ . Сколько  $N$  оборотов каната следует сделать, чтобы удержать теплоход, для швартовки которого требуется сила  $T_2$ ? Коэффициент трения каната о поверхность кнехта равен  $k$ .

Ответ:  $T = T_1 e^{k\varphi}$ ,  $N > \frac{1}{2\pi k} \ln(T_2/T_1)$ .

Указание. Спроецируйте векторное уравнение движения короткого элемента каната с углом намотки  $d\varphi$  на касательную и нормаль к поверхности кнехта.

2.22. Лёгкая нить на рис. 2.14 скользит по неподвижному блоку массой  $m$  с коэффициентом трения  $k$  под влиянием тел разной массы  $m_1 < m_2$ . Найдите их ускорение  $w$  и силу  $F$ , действующую на подвеску блока. Получите условие скольжения нити.

$$\text{Ответ: } w = \frac{(m_2 - m_1 \varepsilon)g}{m_2 + m_1 \varepsilon}, \quad F = mg + \frac{2m_1 m_2 g(\varepsilon + 1)}{m_2 + m_1 \varepsilon}, \quad \frac{m_2}{m_1} > \varepsilon,$$

где  $\varepsilon = e^{k\pi}$ .

Указание. Используйте ответ задачи 2.21.

2.23. На тело при движении в воздухе действует сила сопротивления  $F_c = -cv^2$ , где  $c$  – постоянная,  $v$  – мгновенная скорость. Найдите высоту  $h$ , на которую поднимется тело массой  $m$ , брошенное со скоростью  $v_0$  вертикально вверх с поверхности земли. Какой будет скорость  $v_{\text{п}}$  этого тела при свободном падении на землю с высоты  $h$ ?

$$\text{Ответ: } h = \frac{1}{2a} \ln(1 + av_0^2/g), \quad v_{\text{п}} = \sqrt{\frac{g}{a}(1 - e^{-2ah})}, \quad \text{где } a = c/m.$$

Указание. В уравнении движения тела в качестве независимой переменной используйте вертикальную координату.

2.24. Коэффициент сопротивления  $c$ , введенный в задаче 2.23, при затяжном прыжке парашютиста составляет величину  $c_1 = 0.2 \text{ кг/м}$ , а после раскрытия парашюта принимает значение  $c_2 = 20 \text{ кг/м}$ . Чтобы уберечь парашютиста от перегрузок, а стропы парашюта от разрыва, его сумка устроена так, чтобы парашют раскрывался за время  $\tau = 3 \text{ сек}$ . Найдите суммарное натяжение строп  $T$  в это время, полагая его постоянным. Какое расстояние  $s$  пролетит парашютист массой  $m = 70 \text{ кг}$  вместе с парашютом до его полного раскрытия.

$$\text{Ответ: } T = mg + (v_1 - v_2)/\tau, \quad s = \tau(v_1 + v_2)/2,$$

где  $v_i = \sqrt{mg/c_i}$ ,  $i = 1, 2$ .

2.25. Сила давления пороховых газов на артиллерийский снаряд зависит от его перемещения  $x$  в стволе орудия по закону

$$F = F_0 (1 + x/l_0)^{-\gamma},$$

где  $F_0$  – значение этой силы при воспламенении пороха,  $l_0$  – длина казенной части ствола,  $\gamma$  – показатель адиабаты. Какова скорость  $v$  снаряда при вылете из орудия, если его масса  $m$ , а путь в стволе  $l$ ?

$$\text{Ответ: } v = \sqrt{\frac{2l_0 F_0}{m(\gamma - 1)} \left[ 1 - (1 + l/l_0)^{1-\gamma} \right]}.$$

2.26. Подвешенный на нити длиной  $l$  шарик с массой  $m$  отвели в сторону так, чтобы нить приняла горизонтальное положение, а затем отпустили. Найдите:

а) полное ускорение шарика  $w$  и натяжение нити  $T$  в зависимости от угла отклонения  $\theta$  нити от вертикали;

б) зависимость от угла  $\theta$  модуля скорости  $v$  и наибольшее значение  $(v_y)_{\max}$  её вертикальной составляющей;

в) время опускания  $t_0$  шарика в нижнее положение.

$$\text{Ответ: а) } w = g\sqrt{1 + 3\cos^2(\theta)}, \quad T = 3mg\cos(\theta);$$

$$\text{б) } v = \sqrt{2gl\cos(\theta)}, \quad (v_y)_{\max} = \frac{2}{3}\sqrt{gl\sqrt{3}};$$

$$\text{в) } t_0 = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta)}}.$$

2.27. На горизонтальной плоскости  $Oxy$  по направляющей  $y = 0$  при  $x < 0$  в положительном направлении оси  $x$  со скоростью  $v_0$  движется каретка. При  $x \geq 0$  направляющая переходит в параболу  $y = ax^2$ , где  $a$  – положительная постоянная. Пренебрегая трением, найдите в зависимости от координаты  $x$  силу реакции  $N$ , действующую на каретку со стороны направляющей.

$$\text{Ответ: } N = 0 \quad \text{при } x < 0,$$

$$N = 2amv_0^2 / \left(1 + 4a^2x^2\right)^{3/2} \quad \text{при } x \geq 0.$$

Указание. Используйте ответ задачи 1.18.

Замечания. При  $x = 0$  сила реакции  $N$  меняется скачком на величину  $\Delta N = 2amv_0^2$ , и, следовательно, происходит удар карет-

ки по направляющей. Похожая ситуация описана в романе Даниила Гранина “Иду на грозу”, где главный герой Крылов объяснил главному конструктору завода поломку каретки “разрывом производной” при “сопряжении дуги с направляющей”. Дуга представляла собой окружность, и, чтобы устранить “причину поломки”, Крылов предложил заменить её параболой. Поскольку другие подробности в романе отсутствуют, можно предположить, что в точке сопряжения “рвалась” именно вторая производная  $y''_{xx}$ , как в нашей задаче. Но тогда замена окружности на обычную (квадратичную) параболу по существу ничего не меняла. Другое дело – её замена на кубическую параболу  $y = ax^3$ . Покажите, что тогда удара в точке её сопряжения с прямой  $y = 0$  не будет.

2.28. Найдите величину  $\Delta x$  недолёта пули до цели, вызванного сопротивлением воздуха согласно формуле  $F_c = -cvv$ , где  $v$  – модуль скорости,  $c$  – положительная постоянная. Выстрел производится из точки  $O$  под углом  $\alpha$  к горизонту при начальной скорости  $v_0$  (рис. 2.15). Цель  $A$  находится на уровне стрелка.

$$\text{Ответ: } \Delta x = \frac{cv_0^4}{mg^2} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \left[ \sin(\alpha) + \frac{\cos^2(\alpha)}{2} \ln \left( \frac{1 + \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)} \right) \right].$$

Указания. Решение производится методом возмущений. Его идея и техника применения описаны в Приложении.

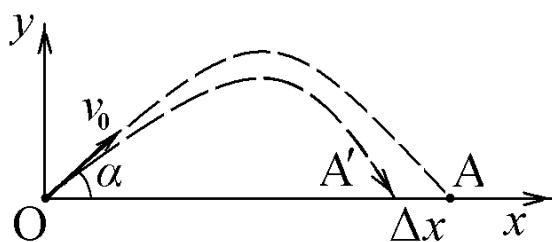


Рис. 2.15

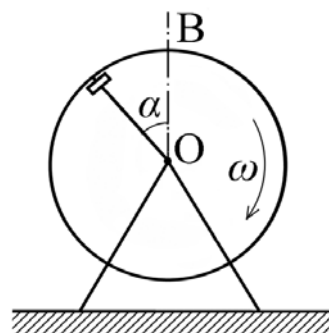


Рис. 2.16

## Вращающиеся системы отсчёта

2.29. Большой горизонтальный диск вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Из этого центра радиально с постоянной скоростью  $v'$  относительно диска движется человек. Какой путь  $r$  он сможет пройти, удерживаясь на диске, если коэффициент трения между подошвами его ботинок и диском равен  $k$ ?

Ответ:  $r = \sqrt{\left(\frac{kg}{\omega^2}\right)^2 - \left(\frac{2v'}{\omega}\right)^2}$ .

2.30. Гладкий горизонтальный стержень длиной  $l$  вращают с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец. От этого конца с начальной скоростью  $v_0$  по стержню начинает скользить муфточка массой  $m$ . Найдите в зависимости от расстояния  $r$  до оси вращения продольную скорость муфточки  $v'$ , боковую силу  $P$  её давления на стержень и полное время движения  $\tau$ .

Ответ:  $v' = \sqrt{v_0^2 + (\omega r)^2}$ ,  $P = 2mv'\omega$ ,  $\tau = \frac{1}{\omega} \ln(\xi + \sqrt{1 + \xi^2})$ ,

где  $\xi = \omega l / v_0$ .

2.31. Велосипедное колесо с внутренним радиусом  $R$  вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси  $O$  с постоянной скоростью  $\omega$ . На каждую спицу колеса одета муфточка, которая может скользить без трения вдоль спицы. При какой наименьшей скорости  $\omega_{\min}$  все муфточки ещё будут поджаты к ободу колеса? При каком угле  $\alpha$  отклонения спицы от вертикали  $OB$  её муфточка не сможет удержаться у обода, если  $\omega < \omega_{\min}$ ?

Ответ:  $\omega_{\min} = \sqrt{g/R}$ ,  $\alpha < \arccos(\omega^2 R / g)$ .

Указание. Спроецируйте уравнение движения муфточки, показанной на рис. 2.16, на внутреннюю нормаль к ободу колеса. Выразите нормальную реакцию  $N$ , действующую на муфточку с его стороны, в виде функции  $N(\alpha, \omega)$ . Значение  $\omega_{\min}$  определите

из уравнения  $\min_{\alpha} N(\alpha, \omega) = 0$ . При  $\omega < \omega_{\min}$  не удержатся муфточки, для которых  $N(\alpha, \omega) < 0$ .

2.32. Велосипедное колесо с внутренним радиусом  $R$  вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси  $O$  с постоянным замедлением  $\beta > 0$  (рис. 2.16). Надетые на его спицы муфточки могут перемещаться вдоль них лишь с коэффициентом трения  $k$ . Начальная скорость колеса такова, что все муфточки были поджаты к его ободу. При какой угловой скорости  $\omega$  муфточки ещё не будут скользить по спицам? При каком угле  $\alpha_c$  отклонения спицы от вертикали  $OB$  её муфточка первой не сможет удержаться у обода колеса?

Ответ:  $\omega > \sqrt{\frac{g}{R} \sqrt{1 + k^2} - k\beta}$ ,  $\alpha_c = \arctg(k)$ .

Указание. Полагая, что муфточка на рис. 2.16 уже не давит на обод колеса, а удерживается около него силой трения покоя  $F_{\text{п}}$ , запишите уравнение движения муфточки в проекциях на касательную и внутреннюю нормаль к ободу колеса. Выразив отсюда силу  $F_{\text{п}}$  и нормальную реакцию  $N_c$ , действующую на муфточку со стороны спицы, получите условие нескольжения в виде

$$g[\cos(\alpha) + k \sin(\alpha)] < k\beta R + \omega^2 R.$$

Первой может заскользить муфточка на спице, угол  $\alpha$  которой доставляет максимум левой части данного неравенства. Пока его правая часть больше этого максимума, скольжения не будет.

Замечание. Замедление  $\beta$  здесь понимается как ускорение со знаком “—”.

2.33. Цепочка с массой  $m$ , замкнутая в кольцо радиусом  $R$ , надетая на круговой конус, ось которого  $OO'$  вертикальна и составляет с его образующей  $OA$  угол  $\theta$  (рис. 2.17). Найдите натяжение цепочки  $T$  после того, как она будет приведена во вращение вместе с конусом с угловой скоростью  $\omega$  вокруг его оси. Будет ли давление цепочки на конус зависеть от величины  $\omega$ ?

Ответ:  $T = \frac{mg}{2\pi} \left( \operatorname{ctg}(\theta) + \frac{\omega^2 R}{g} \right).$

Указание. Выделите короткий кусочек цепочки длиной  $\Delta s \ll R$  и составьте уравнение его равновесия в системе отсчета, связанной с конусом.

2.34. Вдоль образующей ОА кругового конуса из задачи 2.33 проделана канавка, по которой с его вершины начинает скользить шайбочка. Пренебрегая трением, найдите её относительную скорость  $v'$  в зависимости от высоты опускания  $y$  до момента отрыва от конуса. При каком значении  $y_{\text{отр}}$  этой высоты произойдёт отрыв, если конус будет достаточно высоким?

Ответ:  $v' = \sqrt{2gy + (\omega y)^2 \operatorname{tg}^2(\theta)}, \quad y_{\text{отр}} = g/\omega^2.$

2.35. С вершины О кругового конуса из задачи 2.33 соскальзывает без трения маленькая шайба. На какой угол  $\varphi$  от первоначального направления движения она отклонится, опустившись с высоты  $y$ ? Скорость вращения конуса  $\omega$  полагать небольшой.

Ответ:  $\varphi = \frac{2\omega}{3\cos(\theta)} \sqrt{2y/g}.$

Указания. Пренебрегая влиянием центробежной силы, найдите в зависимости от высоты  $y$  вертикальную  $v_y$  и радиальную  $v_r$  скорости невозмущённого движения шайбы в системе отсчета, связанной с конусом. Применяя метод возмущений, проинтегрируйте уравнение азимутального (бокового) движения шайбы в переменных  $v_\varphi, y$ . Используя функцию  $y(t)$ , полученную для невозмущённого движения шайбы, найдите её боковое смещение относительно конуса.

2.36. Покажите, что сила Кориолиса  $\mathbf{F}^{(\text{Кор})}$ , действующая на вертикально движущееся тело, на широте  $\varphi$  как в северном, так и в южном полушариях имеет только горизонтальную составляющую

$$F_{\text{гор}}^{(\text{Кор})} = 2mv\omega \cos(\varphi),$$

которая направлена на запад при подъёме тела и соответственно на восток при его опускании. Здесь  $v$  – абсолютная величина скорости тела,  $\omega$  – угловая скорость вращения Земли.

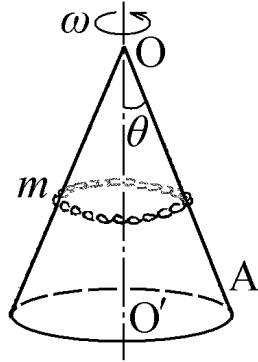


Рис. 2.17

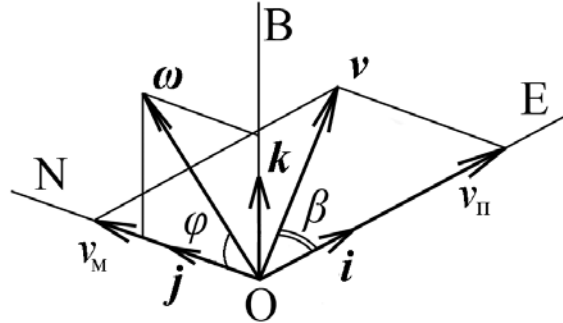


Рис. 2.18

2.37. Из гондолы воздушного шара, находившегося в безветренную погоду на экваторе, с высоты  $h = 1 \text{ км}$  выпало тело. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите отклонение тела  $s$  от вертикали при его падении на землю.

Ответ:  $s = \frac{2}{3} \omega h \sqrt{\frac{2h}{g}}$ .

Указание. Падение тела рассматривать в Земной системе отсчёта, применив результат задачи 2.36.

2.38. Рассмотрите падение тела из задачи 2.37 в инерциальной системе отсчёта, движущейся поступательно со скоростью центра Земли. Если ошибочно считать, что движение тела происходит как в однородном поле тяжести (по параболе), то получится величина  $s_{\text{одн}} = \omega h \sqrt{2h/g}$ .

2.39. Покажите, что сила Кориолиса, действующая на горизонтально движущееся тело, на широте  $\varphi$  имеет составляющие

$$F_{\text{гор}}^{(\text{Кор})} = 2mv\omega \sin(\varphi), \quad F_{\text{вер}}^{(\text{Кор})} = 2mv\omega \cos(\varphi) \cos(\beta),$$

где  $\beta$  – угол между вектором скорости  $v$  и направлением на восток. Горизонтальная составляющая  $F_{\text{гор}}^{(\text{Кор})}$  не зависит от направления движения тела. В северном полушарии она действует вбок,



направо по движению, в южном – налево. Вертикальная составляющая  $F_{\text{вер}}^{(\text{Кор})}$  не зависит от полушария.

Указания. Воспользуйтесь рис. 2.18, где ОЕ – параллель, ОН – меридиан, ОВ – местная вертикаль,  $i, j, k$  – единичные базисные векторы. Покажите, что вектор  $\omega$  угловой скорости вращения Земли лежит в меридиональной плоскости и составляет угол  $\varphi$  с горизонтом. Разложите векторы  $v, \omega$  по базису  $\{i, j, k\}$ .

2.40. Найдите боковое отклонение снаряда  $z$ , выпущенного из артиллерийского орудия с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту, если выстрел производится:

- а) на Северном полюсе;
- б) на экваторе в северном направлении;
- в) на широте  $\varphi$  вертикально вверх;
- г) на широте  $\varphi$  в восточном направлении;
- д) на широте  $\varphi$  в северном направлении.

Ответ: а)  $z = 4b \cos(\alpha) \sin^2(\alpha)$ , где  $b = v_0^3 \omega / g^2$ ;

б)  $z = (4b/3) \cdot \sin^3(\alpha)$ , на запад;

в)  $z = (4b/3) \cdot \cos(\varphi)$ , на запад;

г)  $z = 4b \sin(\varphi) \cos(\alpha) \sin^2(\alpha)$ , на юг;

д)  $z = (4b/3) \cdot \sin^2(\alpha) [2 \sin(\varphi - \alpha) + \sin(\varphi + \alpha)]$ , на восток.

Указания. Применяя метод возмущений, разложите движение тела на основное, происходящее под влиянием силы тяжести, и дополнительное, связанное с действием сил инерции. Боковое отклонение снаряда от плоскости стрельбы  $Oxy$  вызывается силой Кориолиса. При её расчёте достаточно учесть лишь скорость основного движения, которую следует разложить на горизонтальную  $v_x$  и вертикальную  $v_y$  составляющие. Пользуясь результатами задач 2.39 и 2.36, выразите боковое ускорение  $w_z$ . Дважды интегрируя его за время полета, найдите искомое отклонение снаряда  $z$ .

2.41. Подвешенный на нити длиной  $l$  математический маятник отвели от положения равновесия на расстояние  $a \ll l$  и отпустили без начальной скорости. Найдите боковые отклонения

маятника  $y_1$  и  $y_2$  от вертикальной плоскости, проходящей через его положение равновесия, в моменты достижения им среднего и диаметрально противоположного положения на траектории поступательного движения. Для простоты полагать, что движение совершается на Северном полюсе Земли.

Ответ:  $y_1 = a\omega/\Omega$ ,  $y_2 = \pi a\omega/\Omega$ ,

где  $\Omega = \sqrt{g/l}$ ,  $\omega$  – угловая скорость вращения Земли.

Указания. Движение маятника рассматривать в Земной системе отсчета. Применить метод возмущений. Частное решение уравнения бокового движения искать в виде  $y_{\text{ч}} = bt \cos(\Omega t)$ , где  $b$  – неизвестная постоянная.

2.42. Стрелок и мишень находились в диаметрально противоположных точках карусели радиусом  $R$ , вращавшейся вокруг вертикальной оси с постоянным угловым ускорением  $\beta$ . Найдите боковое отклонение пули  $s$ , пущенной со скоростью  $v_0$  строго в мишень, если в момент выстрела угловая скорость карусели имела значение  $\omega_0$ . Полагать выполненным условие  $\omega_0 R \ll v_0$ .

Ответ:  $s = 2(R/v_0)^2 (2v_0\omega_0 + \beta R)$ .

Указания. Полезно решить задачу как в инерциальной системе отсчёта, так и в системе, связанной с каруселью. В первом случае следует учесть боковую скорость пули, вызванную вращением карусели при выстреле, и смещение мишени от линии прицеливания. Последнее определяется углом поворота карусели за время полёта пули.

Во втором случае следует применить метод возмущений. В системе координат  $x$ ,  $y$ , отсчитываемых от стрелка соответственно в сторону мишени и в боковом направлении, невозмущённое движение пули будет задаваться в виде  $x = v_0 t$ . Его и нужно использовать, выражая силы инерции, действующие в боковом направлении. Влиянием центробежной силы, вообще, можно пренебречь.

2.43. Подвешенный на нити длиной  $l$  шарик массой  $m$  совершает малые колебания с амплитудой  $a$ . Насколько изменится амплитуда колебаний за период, если со стороны воздуха на

шарик будет действовать слабая сила сопротивления  $F_c = -bv$ , где  $v$  – скорость,  $b$  – положительная постоянная?

Ответ:  $\Delta a = -\frac{\pi ab}{m\Omega}$ , где  $\Omega = \sqrt{g/l}$ .

Указания. Согласно методу возмущений представьте закон движения шарика в виде  $x = a \cos(\Omega t) + \xi(t)$ , где  $\xi(t)$  – небольшая добавка. Для её отыскания выведите уравнения и начальные условия, отбросив члены второго порядка малости. Частное решение уравнения добавочного движения ищите в виде  $\xi_{\text{ч}} = ct \cdot \cos(\Omega t)$ , где  $c$  – неизвестная постоянная.

### 3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

- Определение работы  $A$  и потенциальной энергии  $U$  частицы в поле консервативных сил:

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_1^2 F_s ds, \quad U_1 - U_2 = A_{\text{конс}}.$$

Здесь и ниже индексы 1, 2 указывают на два последовательных момента времени.

- Связь консервативной силы с потенциальной энергией:

$$\mathbf{F} = -\nabla U.$$

- Закон изменения кинетической энергии  $K$  частицы:

$$K_2 - K_1 = A_{\text{рез}},$$

где  $A_{\text{рез}}$  – работа результирующей силы.

- Теорема Кёнига для кинетической энергии  $K$  системы материальных точек в двух системах отсчёта:

$$K = K' + \frac{1}{2}mv_C^2.$$

Здесь  $K'$  – энергия в поступательно движущейся (по отношению к исходной) системе центра масс  $C$ ,  $m$  – полная масса.

- Закон изменения полной механической энергии  $E$  системы тел:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{стор}} + A_{\text{тр}}.$$

Здесь  $E = K + U$ , а справа стоит работа сторонних сил и сил трения в системе.

- Закон изменения полного импульса  $\mathbf{P}$  и уравнение движения центра масс  $\mathbf{C}$  системы тел:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}, \quad m \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \mathbf{F},$$

где  $\mathbf{F}$  – результирующая внешних сил,  $m$  – полная масса системы.

- Определение момента импульса  $\mathbf{L}$  частицы и момента силы  $\mathbf{M}$  относительно точки  $O$ :

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}], \quad \mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{F}].$$

- Закон изменения полного момента импульса  $\mathbf{L}$  системы тел относительно движущегося начала  $O$ :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} - m[\mathbf{v}_O \mathbf{v}_C],$$

где  $\mathbf{M}$  – результирующий момент внешних сил.

## ***Работа и энергия***

3.1. "Однажды, в студеную зимнюю пору" поэт глядел, как "поднимается медленно в гору лошадка, везущая хворосту воз". Какую работу  $A$  совершила лошадка, если высота горы была равна  $h$ , длина ее основания –  $l$ , масса воза –  $m$ , а коэффициент трения его полозьев о снег –  $k$ ? Подъем происходил при меняющемся угле наклона дороги.

Ответ:  $A = mg(h + kl)$ .

3.2. Тело массой  $m$  пустили вверх по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом. Начальная скорость тела равна  $v_0$ , его коэффициент трения –  $k$ . Найдите путь  $s$ , пройденный телом до остановки, и работу  $A_{\text{тр}}$  силы трения на этом пути. Какую скорость  $v_{\text{п}}$  будет иметь тело при возвращении в исходное положение, если  $k < \text{tg}(\alpha)$ ?

$$\text{Ответ: } s = \frac{v_0^2}{2g\eta}, \quad A_{\text{тр}} = -\frac{k}{2\eta}mv_0^2 \cos(\alpha), \quad v_{\text{п}} = v_0 \sqrt{\frac{\text{tg}(\alpha) - k}{\text{tg}(\alpha) + k}},$$

где  $\eta = \sin(\alpha) + k \cos(\alpha)$ .

Указание. Примените закон изменения энергии для начального, наивысшего и конечного положений тела.

3.3. Лыжник А соскальзывает без начальной скорости с вершины горы, имеющей горизонтальный трамплин (рис. 3.1). Высота горы равна  $H$ , длина ее основания —  $l$ , а коэффициент трения лыж по снегу —  $k$ . При какой высоте трамплина  $h$  лыжник пролетит наибольшее расстояние  $s_{\text{max}}$ ? Чему оно равно?

$$\text{Ответ: } h = \frac{1}{2}(H - kl), \quad s_{\text{max}} = H - kl.$$

3.4. Метеорит массой  $m$  со скоростью  $v_0$  вонзается в почву перпендикулярно её поверхности. На какую глубину  $h$  он проникнет, если будет испытывать со стороны почвы зависящую от скорости  $v$  силу сопротивления  $F_c = czv$ , где  $z$  — расстояние от поверхности,  $c$  — постоянная. Силой тяжести пренебречь.

$$\text{Ответ: } h = \sqrt{2mv_0/c}.$$

Указание. Примените к метеориту закон изменения энергии в дифференциальной форме  $dK = -F_c dz$ .

3.5. По дну вертикального стакана радиусом  $R$ , прижимаясь к его боковой стенке, крутится шайбочка. Её начальная скорость  $v_0$ , а коэффициент трения по обеим поверхностям равен  $k$ . Сколько  $N$  оборотов совершит шайбочка до остановки?

$$\text{Ответ: } N = \frac{1}{4\pi k} \ln \left( 1 + \frac{v_0^2}{gR} \right).$$

Указание. Примените к шайбочке закон изменения энергии в дифференциальной форме  $dK = -\delta A_{\text{тр}}$ .

3.6. На расположенное горизонтально проволочное кольцо радиусом  $R$  надета бусинка. Коэффициент трения между телами

равен  $k$ . Сколько  $N$  оборотов совершит бусинка, если ей сообщить начальную скорость  $v_0$ ?

Ответ:  $N = \frac{1}{4\pi k} \ln(b + \sqrt{b^2 + 1})$ , где  $b = \frac{v_0^2}{gR}$ .

Указание. Примените к бусинке закон изменения энергии в дифференциальной форме  $dK = -F_{\text{тр}} ds$ .

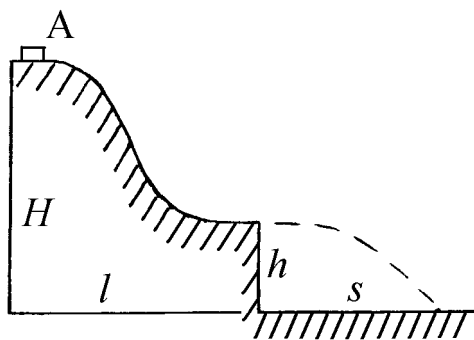


Рис. 3.1

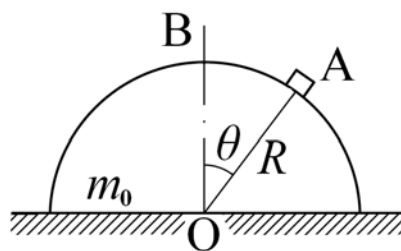


Рис. 3.2

3.7. С вершины В гладкого полушара радиусом  $R$ , лежащего на шероховатом столе, соскальзывает небольшое тело А массой  $m$  (рис. 3.2). Найдите угол  $\theta_0$  между вертикалью ОВ и радиусом, проведённым к телу А в точке его отрыва от поверхности полушара, а также скорость тела  $v_0$  в этой точке. Считайте, что полушар неподвижен при соскальзывании тела. При каком значении угла  $\theta_n$  сила трения покоя  $F_{\text{тр}}$ , удерживающая полушар на столе, будет наибольшей? Каково её значение  $F_{\text{тр}}^{\text{max}}$ ?

Ответ:  $\cos(\theta_0) = 2/3$ ,  $v_0 = \sqrt{2gR/3}$ ,

$$\cos(\theta_n) = \frac{\sqrt{19} + 1}{6}, \quad F_{\text{тр}}^{\text{max}} = mg \left( \frac{\sqrt{19}}{3} - 1 \right) \sqrt{1 - \frac{\sqrt{19}}{8}}.$$

Указания. Задавая положение тела углом  $\theta$ , примените закон сохранения энергии и уравнение движения тела в проекции на нормаль к поверхности полушара. Получите в зависимости от угла  $\theta$  скорость тела  $v$  и силу  $P$  его давления на полушар.

3.8. Насколько изменится угол  $\theta_0$ , при котором произойдет отрыв тела  $A$  от поверхности полушара в задаче 3.7, если на тело будет влиять:

а) слабая сила сопротивления  $F_c = -av$  со стороны воздуха, где  $a$  – положительная постоянная;

б) трение о поверхность с небольшим коэффициентом  $k$ ?

Ответ: а)  $\Delta\theta_0 = \frac{8a}{m} \sqrt{\frac{R}{g}} \left( \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right);$

б)  $\Delta\theta_0 = 2k \left( 1 - \frac{2\theta_0}{3 \sin(\theta_0)} \right).$

Указания. Для невозмущенного движения тела найдите зависимость скорости  $v$  от угла  $\theta$ . С её помощью выразите работу возмущающей силы до момента отрыва, пренебрегая изменением угла  $\Delta\theta$ . В законе изменения энергии не учитывайте членов второго порядка малости.

3.9. Небольшое тело  $A$  начинает скользить с высоты  $2R$  по наклонному желобу, переходящему в полуокружность радиусом  $R$  (рис. 3.3). Пренебрегая трением, найдите:

а) скорость тела  $v_0$  в точке отрыва от желоба и его высоту  $h_0$  над нижней точкой желоба;

б) скорость тела  $v_n$  в наивысшей точке траектории (после отрыва от желоба) и его высоту  $h_n$  в этой точке.

Ответ: а)  $v_0 = \sqrt{2gR/3}, \quad h_0 = 5R/3.$

б)  $v_n = \sqrt{8gR/27}, \quad h_n = 50R/27.$

3.10. Небольшая шайба с массой  $m$  без начальной скорости соскальзывает с гладкой горки высотой  $h$  и попадает на тонкую доску массой  $m_0$ , лежащую у основания горки на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 3.4). Вследствие трения между шайбой и доской, спустя некоторое время тела начинают двигаться как единое целое. Найдите полную работу  $A_{тр}$  сил трения и путь  $s$ , пройденный шайбой по доске, если их коэффициент трения равен  $k$ .

Ответ:  $A_{\text{тр}} = -\mu gh$ ,  $s = \frac{\mu h}{km}$ , где  $\mu = \frac{m_0 m}{m_0 + m}$ .

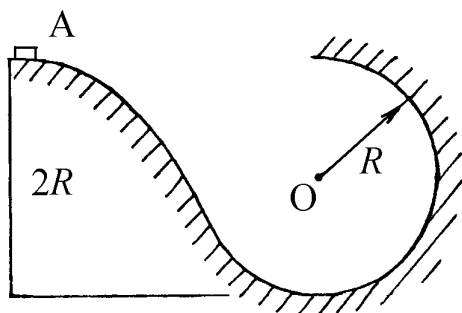


Рис. 3.3

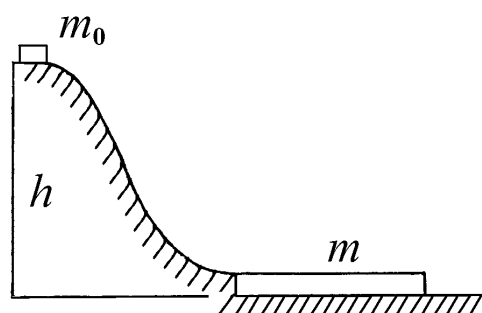


Рис. 3.4

3.11. Через застопоренный блок В, висящий над цирковой ареной, переброшен замкнутый канат длиной  $l$  с массой  $m$ , нижний заворот которого почти касается пола (рис. 3.5). Чтобы снять стопор с блока, на канат взбирается гимнаст массой  $m_{\text{г}}$ , который пытается подняться вверх. Однако ему удастся лишь держаться на одном и том же уровне, так как канат начинает скользить по блоку с коэффициентом трения  $k$ . Найдите ускорение каната  $w$  и время  $t_{\text{пред}}$ , в течение которого гимнаст сможет удерживаться на нем, если его предельная мощность равна  $P_{\text{пред}}$ . Какая часть мощности гимнаста будет затрачиваться на преодоление сил трения? При какой величине  $\eta = 2m_{\text{г}}/m$  скольжение каната по блоку не будет происходить?

Ответ:  $w = \frac{2F}{m(\varepsilon + 1)} - g \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}$ ,  $t_{\text{пред}} = \frac{P_{\text{пред}}}{Fw}$ ,

$$P_{\text{тр}}/P_{\text{полн}} = 1 - mw/F, \quad \eta < \varepsilon - 1,$$

где  $F = m_{\text{г}}g$ ,  $\varepsilon = e^{k\pi}$ .

Указания. Пренебрегая диаметром блока по сравнению с длиной каната, составьте уравнения движения его свисающих частей и гимнаста. Используйте ответ задачи 2.21. Полную и полезную мощность гимнаста выразите по формулам

$$P_{\text{полн}} = Fv, \quad P_{\text{полез}} = dK/dt,$$



где  $F$  – сила гимнаста, приложенная к канату,  $v$  – их относительная скорость,  $K$  – кинетическая энергия системы. Мощность, расходуемую против сил трения, определите как  $P_{\text{тр}} = P_{\text{полн}} - P_{\text{полез}}$ .

3.12. В условиях задачи 3.11 другой гимнаст, подтягиваясь на канате с силой  $F > m_{\Gamma}g$ , несмотря на его скольжение, поднимается до площадки А, расположенной на уровне блока, и раскрепляет его (рис. 3.5). Найдите время  $t_{\text{под}}$  подъёма гимнаста на площадку, наибольшую мощность  $P_{\text{max}}$ , развиваемую им, и его полную работу  $A_{\text{полн}}$ . При каком значении  $F_{\text{min}}$  силы гимнаста эта работа будет наименьшей?

Ответ:  $t_{\text{под}} = \sqrt{l/w_{\Gamma}}$ ,  $P_{\text{max}} = F(w + w_{\Gamma})t_{\text{под}}$ ,  $A_{\text{полн}} = P_{\text{max}}t_{\text{под}}/2$ ,

$$F_{\text{min}} = m_{\Gamma}g \left[ 1 + \sqrt{\frac{\eta - \varepsilon + 1}{\eta + \varepsilon + 1}} \right], \quad \eta = \frac{2m_{\Gamma}}{m},$$

где  $w_{\Gamma} = F/m_{\Gamma} - g$ , а ускорение каната  $w$  даётся в ответе задачи 3.11.

Указание. Пренебрегая размерами блока и гимнаста по сравнению с длиной каната, считайте, что гимнаст поднимается на высоту  $h = l/2$ .

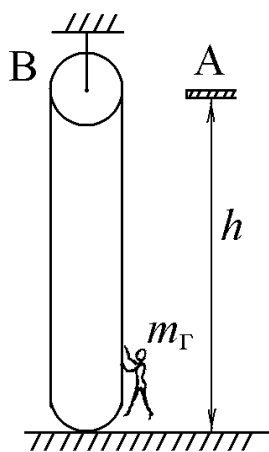


Рис. 3.5

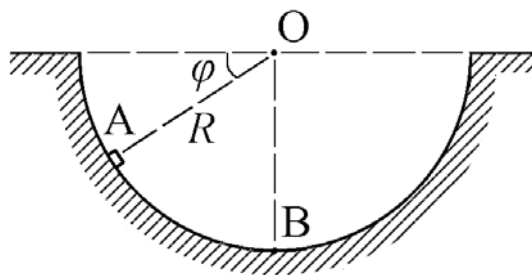


Рис. 3.6

3.13. Небольшое тело А съезжает без начальной скорости с верхнего края полукруглого жёлоба радиусом  $R$  с коэффициентом трения  $k$  (рис. 3.6). Найдите зависимость квадрата скорости

тела  $v$  от угла  $\varphi$  между радиусами, проведёнными из центра жёлоба  $O$  к произвольному и начальному положениям тела. При каком условии тело не достигнет нижней точки жёлоба  $B$ ?

Ответ:  $v^2 = \frac{2gR}{4k^2 + 1} \left[ (1 - 2k^2) \sin(\varphi) + 3k \cos(\varphi) - 3ke^{-2k\varphi} \right],$

при  $k > 0.603$ , где значение  $0.603$  – корень уравнения  $1 - 2k^2 - 3ke^{-k\pi} = 0$ , найденный в пакете MathCad.

Указания. Из закона изменения полной энергии  $E$ , взятого в дифференциальной форме  $dE = -F_{\text{тр}} ds$ , и уравнения движения тела в проекции на внутреннюю нормаль к жёлобу получите уравнение

$$dE/d\varphi + 2kE = -3km g R \sin(\varphi),$$

где  $m$  – масса тела, а его высота (в формуле для полной энергии) отсчитывается от уровня точки  $O$ . Представьте решение данного уравнения в виде  $E(\varphi) = c(\varphi)e^{-2k\varphi}$ , где  $c(\varphi)$  – искомая функция. Используя выражение [7] табличного интеграла  $\int e^{a\varphi} \sin(\varphi) d\varphi$  и начальное условие  $E = 0$  при  $\varphi = 0$ , получите функцию  $E(\varphi)$ .

3.14. Шарику массой  $m$ , подвешенному в точке  $O$  на нити длиной  $l$ , сообщили скорость  $v_0$  в горизонтальном направлении. Найдите:

а) натяжение нити  $T$  в зависимости от угла  $\varphi$  её отклонения от вертикали;

б) минимальные значения начальной скорости  $v_{01}$ , при которой шарик достигнет уровня точки  $O$ , и  $v_{02}$ , при которой он станет двигаться по окружности вокруг этой точки;

в) высоту  $h_1$ , на которой пропадёт натяжение нити, и скорость шарика  $v_1$  в этом месте, если  $v_{01} < v_0 < v_{02}$ .

Ответ: а)  $T = \frac{mv_0^2}{l} + mg(3\cos(\varphi) - 2);$

б)  $v_{01} = \sqrt{2gl}, \quad v_{02} = \sqrt{5gl};$

в)  $h_1 = \frac{1}{3} \left( l + \frac{v_0^2}{g} \right), \quad v_1 = \sqrt{\frac{v_0^2 - 2gl}{3}}.$

3.15. Как изменится величина  $v^2$  в случае  $v_0 > v_{02}$  за один оборот шарика в задаче 3.14, если на него будет действовать слабая сила сопротивления  $F_c = -cv^2$  со стороны воздуха, где  $c$  – положительная постоянная? Обозначить скорость в конце оборота как  $v_1$ .

$$\text{Ответ: } v_0^2 - v_1^2 = \frac{4\pi cl}{m}(v_0^2 - 2gl).$$

Указание. Применяя метод возмущений, сначала найдите зависимость скорости  $v$  от угла  $\varphi$  в пренебрежении сопротивлением воздуха. Используйте её при расчете работы  $A_c$  силы сопротивления в законе изменения энергии для возмущенного движения шарика.

3.16. Решите задачу 2.43 (из темы 2), используя закон изменения энергии. Предварительно найдите работу  $A_c$  силы сопротивления за период колебаний, пренебрегая возмущением закона движения.

$$\text{Ответ: } A_c = -\pi a^2 b \Omega, \quad \Delta a = -\frac{\pi a b}{m \Omega}, \quad \text{где } \Omega = \sqrt{g/l}.$$

3.17. Подвешенный на нити длиной  $l$  шарик с массой  $m$  отвели от вертикали на угол  $\theta_0$  и отпустили. Найдите уменьшение  $\Delta\theta$  угла наибольшего отклонения шарика за первый период колебаний, если со стороны воздуха на него действовала слабая сила сопротивления  $F_c = -bv^2$ , где  $v$  – скорость,  $b$  – положительная постоянная?

$$\text{Ответ: } \Delta\theta = \frac{8bl}{m}[1 - \theta_0 \operatorname{ctg}(\theta_0)].$$

Указание. Согласно методу возмущений сначала из закона сохранения энергии (пренебрегая сопротивлением воздуха) получите зависимость скорости шарика  $v$  от угла  $\theta$  его отклонения. Используя её, найдите работу силы сопротивления за период колебаний. К возмущенному движению примените закон изменения энергии. Учтите малость величины  $\Delta\theta$ .

### Задачи с пружинками

3.18. Имеется система из двух пружин с коэффициентами жесткости  $\chi_1$  и  $\chi_2$ . Какую работу  $A$  следует совершить, чтобы медленно растянуть эту систему на величину  $s$ , если пружинки соединены:

- а) последовательно;
- б) параллельно?

Ответ: а)  $A = \frac{\chi_a s^2}{2}$ , где  $\chi_a = \frac{\chi_1 \chi_2}{\chi_1 + \chi_2}$ .

б)  $A = \chi_6 s^2 / 2$ , где  $\chi_6 = \chi_1 + \chi_2$ .

3.19. На горизонтальной плоскости лежали два бруска с массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенные легкой недеформированной пружинкой жесткостью  $\chi$ . Коэффициенты трения брусков о плоскость соответственно равны  $k_1$  и  $k_2$ . К бруску с массой  $m_1$  приложили постоянную силу  $F$ , направленную по оси пружинки. При каком её наименьшем значении  $F_{\min}$  другой брусок сдвинется с места? Какой импульс  $P$  в момент сдвига будет иметь система, если  $F > F_{\min}$ ?

Ответ:  $F_{\min} = g \left( k_1 m_1 + \frac{k_2 m_2}{2} \right)$ ,  $P = \sqrt{\frac{2k_2}{\chi} m_1 m_2 g (F - F_{\min})}$ .

Указание. Используйте закон изменения энергии, учитывая, что брусок с массой  $m_2$  будет покоиться, пока сила упругости пружинки не достигнет величины его силы трения скольжения.

3.20. На гладкой горизонтальной плоскости свободно лежали две небольшие шайбы с массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенные лёгкой пружинкой жесткостью  $\chi$ . Шайбам сообщили горизонтальные скорости  $v_1$  и  $v_2$  в произвольных направлениях. Найдите начальную кинетическую энергию  $K'$  этих тел в системе центра масс. Каким будет наибольшее растяжение  $s_+$  и сжатие  $s_-$  пружинки при дальнейшем движении тел, если вектор их относительной скорости  $v_{\text{отн}}$  вначале был направлен по оси пружинки.

Ответ:  $K' = \frac{1}{2} \mu v_{\text{отн}}^2$ ,  $s_+ = s_- = v_{\text{отн}} \sqrt{\frac{\mu}{\chi}}$ ,  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ,

где  $v_{\text{отн}} = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|$ .

Указание. Примените теорему Кёнига.

3.21. На гладкой горизонтальной плоскости свободно лежали два кубика с массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенные лёгкой пружинкой жесткостью  $\chi$ , причём кубик 1 располагался у вертикальной стенки (рис. 3.7). Затем кубик 2 переместили влево на небольшое расстояние  $s$  и отпустили. Найдите скорость  $v_C$  центра масс системы после отрыва кубика 1 от стенки, а также наибольшее растяжение  $s_+$  и сжатие  $s_-$  пружинки при дальнейшем движении кубиков.

Ответ:  $v_C = \frac{s \sqrt{\chi m_2}}{m_1 + m_2}$ ,  $s_+ = s_- = s \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}$ .

Указание. Рассмотрите движение кубиков после отрыва в системе центра масс. Примените закон сохранения энергии.

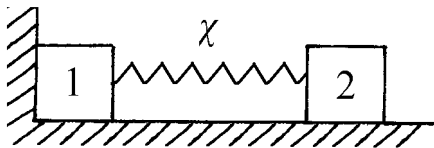


Рис. 3.7

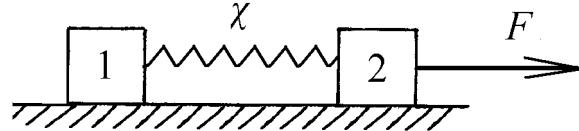


Рис. 3.8

3.22. В условиях задачи 3.21 проверьте выполнение теоремы Кёнига в момент отрыва. Какая часть полной энергии, приобретённой системой тел после её отрыва от стенки, может перейти в упругую энергию деформированной пружинки?

Ответ:  $\eta = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$ .

Указание. Последовательно найдите для момента отрыва скорость  $v_2$  кубика 2, скорость  $v_C$  центра масс и кинетическую энергию  $K'$  движения кубиков в системе центра масс. При их дальнейшем движении эта энергия целиком превращается в упругую

энергию пружинки в моменты её наибольшего растяжения и сжатия.

3.23. В условия задачи 3.21 добавьте одинаковый для тел коэффициент трения  $k$ . Найдите минимальное смещение  $s_{\min}$  кубика 2, при котором кубик 1 может оторваться от стенки. Каким будет импульс системы  $P$  в момент отрыва при  $s > s_{\min}$ ?

Ответ:  $s_{\min} = s_0(1 + 2m_2/m_1)$ ,  $P = \sqrt{\chi m_2(s - s_0)(s - s_{\min})}$ ,  
где  $s_0 = km_1g/\chi$  – смещение отрыва.

3.24. На гладкой горизонтальной плоскости свободно лежали одинаковые кубики 1 и 2 с массой  $m$ , соединенные лёгкой пружинкой жесткостью  $\chi$  (рис. 3.8). На один из них по оси пружинки начала действовать постоянная растягивающая сила  $F$ . Найдите зависимость скорости  $u$  относительного движения кубиков от растяжения пружинки  $s$ . Какими будут их наибольшие значения  $u_{\max}$  и  $s_{\max}$  при дальнейшем движении кубиков?

Ответ:  $u = \sqrt{\frac{2s}{m}(F - \chi s)}$ ,  $u_{\max} = \frac{F}{\sqrt{2\chi m}}$ ,  $s_{\max} = F/\chi$ .

Указания. Определите ускорение центра масс и рассмотрите движение кубиков в системе отсчёта, движущейся поступательно с этим ускорением. Учитывая действие сил инерции, примените закон изменения полной энергии для начального и произвольного моментов времени.

3.25. Решите задачу 3.24 в случае разных масс кубиков  $m_1$  и  $m_2$ , когда растягивающая пружинку сила  $F$  приложена к кубику 2 (рис. 3.8).

Ответ:  $u = \sqrt{\frac{2Fs}{m_2} - \frac{\chi s^2}{\mu}}$ ,  $u_{\max} = \frac{F}{m_2} \sqrt{\frac{\mu}{\chi}}$ ,  $s_{\max} = \frac{2\mu F}{\chi m_2}$ ,  
где  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ .

Указания смотрите в задаче 3.24. Используйте выражение для энергии относительного движения кубиков  $K' = \mu u^2 / 2$ .

3.26. Система из двух одинаковых дисков массой  $m$ , соединенных лёгкой пружинкой жесткостью  $\chi$ , располагалась на подставке В (рис. 3.9). Верхний диск опустили на расстояние  $s$  по отношению к его положению равновесия А, а затем отпустили. При каком наименьшем значении  $s_{\min}$  нижний диск оторвется от подставки? Какую скорость  $v_C$  приобретёт центр масс системы после такого отрыва, если  $s > s_{\min}$ ?

Ответ:  $s_{\min} = 2a$ ,  $v_C = \sqrt{\frac{g}{4a}(s^2 - 4a^2)}$ , где  $a = mg/\chi$ .

Указания. Введите вертикальную координату  $y$ , откладывая её от положения О верхнего диска, при котором пружинка недеформирована. Определите величину  $a$  сжатия пружинки в положении равновесия верхнего диска А и её растяжение в момент отрыва нижнего диска от подставки. (Верхний диск при этом будет занимать положение А' на рис. 3.9). Примените закон сохранения энергии для исходного момента времени и момента отрыва. Скорость центра масс системы определите по скорости верхнего диска.

3.27. В условиях задачи 3.26 при  $s > s_{\min}$  найдите высоту  $h_C$ , на которую поднимется центр масс системы после отрыва нижнего диска от подставки В, а также наибольшее растяжение пружинки  $s_{\max}$  по отношению к её недеформированному состоянию О на рис. 3.9. Считайте, что после такого отрыва подставку сразу убирают, дабы не помешать свободному движению системы.

Ответ:  $h_C = \frac{s^2 - 4a^2}{8a}$ ,  $s_{\max} = \sqrt{\frac{s^2 - 2a^2}{2}}$ , где  $a = mg/\chi$ .

Указания. Сначала используйте теорему о движении центра масс системы тел. Затем рассмотрите движение дисков в системе центра масс. Примените в этой системе отсчёта закон сохранения энергии для момента отрыва и момента наибольшего растяжения пружинки.

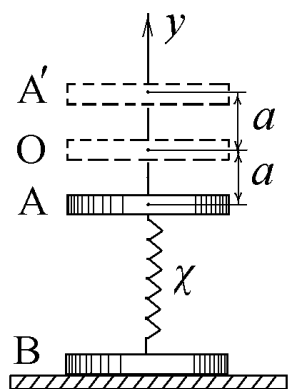


Рис. 3.9

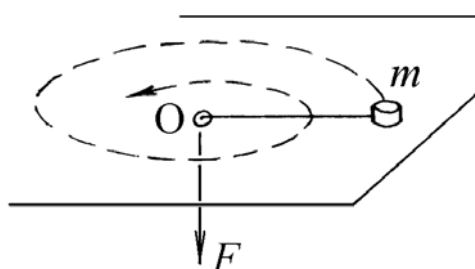


Рис. 3.10

## Вращение тел

3.28. Лёгкий и гладкий горизонтальный стержень АВ длиной  $l$  может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец А. На стержень надета небольшая муфточка массой  $m$ , соединенная с концом А невесомой пружинкой жесткостью  $\chi$  и длиной  $l_0$ , где  $l_0 < l$ . Какую работу надо совершить, медленно раскручивая систему, чтобы муфточка достигла конца В? Какой будет при этом угловая скорость  $\omega$  стержня?

Ответ:  $A = \chi(l - l_0) \left( l - \frac{l_0}{2} \right), \quad \omega = \sqrt{\frac{\chi}{m} \left( 1 - \frac{l_0}{l} \right)}.$

3.29. Муфточку из задачи 3.28 в состоянии покоя дополнительно к пружинке соединили с концом стержня А нерастяжимой нитью длиной  $l_0$ . После раскручивания стержня до угловой скорости  $\omega$  нить пережгли. Пренебрегая трением, найдите зависимость относительной скорости муфточки  $v'$  от её смещения  $s$  из начального положения и его наибольшую величину  $s_{\max}$ . Каким будет дальнейшее движение муфточки? Стержень полагите достаточно длинным для выполнения условия  $l > l_0 + s_{\max}$ .

Ответ:  $v' = \sqrt{\omega^2 s(2l_0 + s) - \frac{\chi s^2}{m}}, \quad s_{\max} = \frac{2m\omega^2 l_0}{\chi - m\omega^2}.$

Указания. Во вращающейся системе отсчёта, привязанной к стержню, получите выражение для потенциальной энергии, свя-



занной с центробежной силой. Примените в этой системе отсчёта закон сохранения энергии для начального и произвольного положений муфточки.

3.30. Небольшой шарик массой  $m$ , подвешенный на нити длиной  $l$  к точке  $O$ , равномерно вращается в горизонтальной плоскости так, что нить составляет угол  $\theta$  с вертикалью. Найдите угловую скорость шарика  $\omega$  и абсолютные величины векторов момента импульса  $\mathbf{L}$  относительно точки  $O$  и его приращения  $d\mathbf{L}$  за малое время  $dt$ . Покажите, что эти векторы связаны соотношением

$$d\mathbf{L} = [\omega \mathbf{L}] dt, \text{ где } \omega - \text{вектор.}$$

$$\text{Ответ: } \omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos(\theta)}}, \quad |\mathbf{L}| = ml \sin(\theta) \sqrt{\frac{gl}{\cos(\theta)}}, \\ |d\mathbf{L}| = mgl \sin(\theta) dt.$$

3.31. По гладкой горизонтальной плоскости движется небольшое тело массой  $m$ , привязанное к нерастяжимой нити, которую вытягивают с постоянной скоростью  $v$  в малое отверстие  $O$ , показанное на рис. 3.10. Найдите натяжение нити  $F$  в зависимости от расстояния тела  $r$  до отверстия  $O$ , если при  $r = r_0$  угловая скорость нити была равна  $\omega_0$ . Получите уравнение траектории тела в полярных координатах  $r, \varphi$ .

$$\text{Ответ: } F = \frac{m\omega_0^2 r_0^4}{r^3}, \quad r = \frac{r_0}{1 + a\varphi}, \quad \text{где } a = \frac{v}{\omega_0 r_0}.$$

Указания. Примените к данному телу закон сохранения момента импульса для начального и произвольного моментов времени, а также закон изменения энергии в дифференциальном виде  $dK = -Fdr$ . Последний закон можно заменить уравнением движения тела в системе отсчёта, вращающейся с его скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей через отверстие  $O$ .

3.32. Небольшое тело массой  $m$ , привязанное к нерастяжимой нити, вращалось по окружности радиусом  $r_0$  с угловой скоростью

$\omega_0$  на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 3.10). В некоторый момент времени нить стали тянуть через малое отверстие О, находящееся в центре окружности, с постоянной силой  $F > m\omega_0^2 r_0$ . Найдите радиальную скорость тела  $v$  в зависимости от его расстояния  $r$  до отверстия О.

Ответ:  $v = \sqrt{\frac{2F}{m}(r_0 - r) - (\omega_0 r_0)^2 (\eta^2 - 1)}$ , где  $\eta = \frac{r_0}{r}$ .

Указания смотрите к задаче 3.31.

3.33. Подвешенный на нити длиной  $l$  небольшой шарик отвели в сторону так, что нить отклонилась от вертикали на угол  $\theta_1$ , а затем толкнули перпендикулярно вертикальной плоскости, проходящей через нить. Какой была скорость  $v_0$  шарика, если он стал двигаться по горизонтальной окружности? Каким будет угол отклонения  $\theta_2$  нити в наивысшей точке траектории, если толкнуть шарик вначале со скоростью  $v_1 > v_0$ ?

Ответ:  $v_0 = \sin(\theta_1)\sqrt{gl/\cos(\theta_1)}$ ,

$$\cos(\theta_2) = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - a\cos(\theta_1) + 1}, \quad \text{где } a = \frac{v_1^2}{2gl}.$$

3.34. Один конец легкой недеформированной пружинки длиной  $l$  с жесткостью  $\chi$  закреплен на вертикальной оси, которая может свободно поворачиваться в подшипнике, заделанном на гладком горизонтальном столе. На другом конце пружинки имеется лежащая на столе небольшая шайба массой  $m$ . В некоторый момент времени ей сообщают горизонтальную скорость  $v_0$  в направлении перпендикулярном оси пружинки. Найдите максимальное удлинение пружинки  $s_{\max}$  и минимальную скорость шайбы  $v_{\min}$  при её дальнейшем движении.

Ответ:  $s_{\max} = \frac{1}{3c}[(l - c)^2 + 3a]$ ,  $v_{\min} = \frac{lv_0}{l + s_{\max}}$ , где  $a = \frac{mv_0^2}{\chi}$ ,

$$c = \sqrt[3]{l^3 + 18al + 3b\sqrt{3a}}, \quad b = \sqrt{l^4 + 11al^2 - a^2}.$$

Указания. Примените законы сохранения энергии и момента импульса для начального и искомого положения шайбы. Полученное для величины  $s_{\max}$  кубическое уравнение

$$s^3 + 2ls^2 + (l^2 - a)s - 2al = 0$$

решается в пакете MathCad, где берётся его действительный корень.

3.35. На гладкой горизонтальной плоскости лежали две небольшие шайбы с массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенные вытянутой нитью длиной  $l$ . В некоторый момент времени шайбе массой  $m_2$  сообщили горизонтальную скорость  $v_0$  в направлении перпендикулярном нити. Найдите в системе центра масс  $S$  кинетическую энергию  $K_C$  и момент импульса  $L_C$  системы тел, а также скорость вращения  $\omega$  и натяжение нити  $T$ .

Ответ:  $K_C = \frac{\mu v_0^2}{2}$ ,  $L_C = \mu l v_0$ ,  $\omega = \frac{v_0}{l}$ ,  $T = \frac{\mu v_0^2}{l}$ ,

где  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ .

3.36. На гладкой горизонтальной плоскости лежали две небольшие шайбы с массой  $m_1$  и  $m_2$ , соединенные легкой недеформированной пружинкой длиной  $l$  с жесткостью  $\chi$ . В некоторый момент времени шайбе с массой  $m_2$  сообщили горизонтальную скорость  $v_0$  в направлении перпендикулярном оси пружинки. Найдите в системе центра масс  $S$  кинетическую энергию  $K_C$  и момент импульса  $L_C$  системы тел.

Ответ:  $K_C = \mu v_0^2 / 2$ ,  $L_C = \mu l v_0$ .

## **Столкновения**

3.37. В тело массой  $m_T$ , подвешенное на нити длиной  $l$ , попала горизонтально летевшая пуля с массой  $m \ll m_T$  и застряла в нём на линии центра масс. В результате нить отклонилась на угол  $\theta$ . Пренебрегая размерами тела, найдите первоначальную скорость пули  $v_0$  и долю  $\eta$  сохранившейся механической энергии.

Ответ:  $v_0 \approx \frac{2m_T}{m} \sqrt{gl} \sin(\theta/2)$ ,  $\eta \approx \frac{m}{m_T}$ .

3.38. Частица с массой  $m_1$  произвела абсолютно упругое столкновение с покоившейся частицей массой  $m_2$ . Найдите долю  $\eta$  кинетической энергии, теряемую налетающей частицей, если она:

а) отскочит под прямым углом к первоначальному направлению движения;

б) совершит лобовое столкновение?

При каком отношении масс  $m_2/m_1$  потеря энергии в этих случаях будет наибольшей?

Ответ: а)  $\eta = 2/(m' + 1)$ ;

$$\text{б) } \eta = 4m'/(m' + 1)^2$$

где  $m' = m_2/m_1$ . В обоих случаях величина  $\eta$  максимальна при  $m' = 1$ .

Замечание. Случай а) уверенно реализуется лишь при условии  $m_1 < m_2$ . При столкновении частиц одинаковой массы они разлетаются под прямым углом друг к другу, если столкновение не лобовое. В почти лобовом столкновении налетающая частица отскочит почти под прямым углом и потеряет почти всю энергию, а значит  $\eta \rightarrow 1$ .

3.39. Частица с массой  $m_1$ , летевшая со скоростью  $v_0$ , отклоняется на угол  $\alpha_1$  в результате абсолютно упругого столкновения с покоившейся частицей массой  $m_2$  (рис. 3.11). Полагая, что  $m_1 < m_2$ , найдите в зависимости от угла  $\alpha_1$  скорости частиц  $v_1$ ,  $v_2$  после столкновения и их экстремальные значения  $v_{1\max}$ ,  $v_{2\max}$ .

Ответ:  $v_1 = \frac{v_0}{m' + 1} \left( c_1 + \sqrt{c_1^2 + m'^2 - 1} \right)$ ,  $v_{1\min} = v_0 \frac{m' - 1}{m' + 1}$ ,

$$v_2 = \sqrt{\frac{v_0^2 - v_1^2}{m'}}, \quad v_{2\max} = \frac{2v_0}{m' + 1},$$

где  $m' = m_2/m_1$ ,  $c_1 = \cos(\alpha_1)$ .

Указания. К треугольнику векторов  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  на рис. 3.12, выражающему закон сохранения импульса системы, примените теорему косинусов для угла  $\alpha_1$ . В полученном уравнении исключите абсолютную величину  $p_2$  с помощью закона сохранения энергии. Обратите внимание на то, что функции  $v_1(c_1)$ ,  $v_2(v_1)$  монотонные, и их экстремумы достигаются соответственно на краях отрезков  $-1 < c_1 < 1$ ,  $v_{1\min} < v_1 < v_0$ .

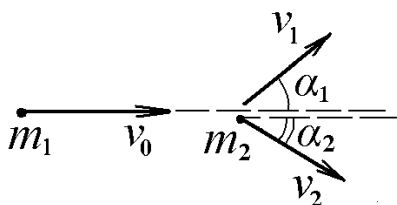


Рис. 3.11

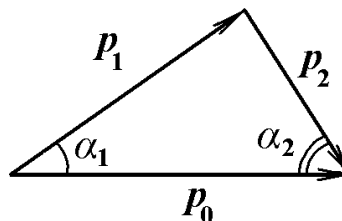


Рис. 3.12

3.40. Частица с массой  $m_1$ , летевшая со скоростью  $v_0$ , получает скорость  $v_1$  в результате абсолютно упругого столкновения с покоившейся частицей массой  $m_2$ . Полагая, что  $m_1 > m_2$ , найдите в зависимости от величины  $v_1$  углы разлета частиц  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  после столкновения (по отношению к направлению первоначального движения налетевшей частицы) и их наибольшие значения  $\alpha_{1\max}$ ,  $\alpha_{2\max}$ .

$$\text{Ответ: } \cos(\alpha_1) = \frac{1-m'}{2} \left( \frac{v_0}{v_1} \right) + \frac{1+m'}{2} \left( \frac{v_1}{v_0} \right), \quad \alpha_{1\max} = \arcsin(m'),$$

$$\cos(\alpha_2) = \frac{1+m'}{2\sqrt{m'}} \sqrt{1 - \left( \frac{v_1}{v_0} \right)^2}, \quad \alpha_{2\max} = \frac{\pi}{2},$$

где  $m' = m_2/m_1$ .

Указания. К треугольнику векторов  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$ , выражающему закон сохранения импульса системы, примените (дважды) теорему косинусов для угла  $\alpha_1$  и угла  $\alpha_2$ . Используйте закон сохранения энергии.

3.41. Частица с массой  $m_1$ , летевшая со скоростью  $v_0$ , получает скорость  $v_1$  после абсолютно упругого столкновения с

покоившейся частицей массой  $m_2$ . Определите угол разлёта частиц  $\alpha_1 + \alpha_2$ . Покажите, что он будет острым при  $m_1 > m_2$ , тупым при  $m_1 < m_2$  и составит  $90^\circ$  при одинаковых массах частиц, если только  $v_1 > 0$  (не лобовое столкновение).

$$\text{Ответ: } \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{1 - m'}{2\sqrt{m'}} \sqrt{\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^2 - 1}, \text{ где } m' = m_2/m_1.$$

Указания. К треугольнику векторов  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ , выражающему закон сохранения импульса системы, примените теорему косинусов для угла противолежащего стороне  $\mathbf{p}_0$ . Исключите абсолютную величину  $p_2$  с помощью закона сохранения энергии.

3.42. Найдите отношение масс  $m_1$  налетевшей и  $m_2$  покоившейся частиц, если после абсолютно упругого столкновения они разлетелись соответственно под углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  к направлению первоначального движения налетевшей частицы. Покажите, что при одинаковых массах частиц угол их разлёта  $\alpha_1 + \alpha_2$  составляет  $90^\circ$ , если  $\alpha_2 \neq 0$ .

$$\text{Ответ: } \frac{m_1}{m_2} = 1 + \frac{2 \sin(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} \cos(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Указания. К треугольнику векторов  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ , выражающему закон сохранения импульса системы, примените теорему косинусов для угла противолежащего стороне  $\mathbf{p}_0$ . Для исключения абсолютных величин  $p_0, p_1, p_2$  используйте закон сохранения энергии и теорему синусов.

3.43. Используйте ответ задачи 3.42, чтобы выразить угол отклонения  $\alpha_1$  налетевшей частицы через угол отлёта  $\alpha_2$  первоначально покоившейся частицы. Отношение масс частиц  $m_1/m_2 = \eta$  считайте известным. Для случая  $\eta < 1$  определите угол отлёта  $\alpha_2$  покоившейся частицы, соответствующий отклонению налетевшей частицы на угол  $90^\circ$ .

$$\text{Ответ: } \operatorname{tg}(\alpha_1) = \frac{\sin(2\alpha_2)}{\eta - \cos(2\alpha_2)}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \arccos(\eta).$$

Замечание. Углом отлёта мы называем угол, под которым отлетает покоившаяся частица по отношению к направлению первоначального движения налетевшей частицы.

3.44. Используйте ответ задачи 3.43, чтобы выразить угол отлёта  $\alpha_2$  первоначально покоившейся частицы через угол отклонения  $\alpha_1$  налетевшей частицы. Отношение масс частиц  $m_1/m_2 = \eta$  считайте известным. Для случая  $\eta > 1$  определите наибольший угол  $\alpha_{1\max}$  отклонения налетевшей частицы и соответствующий ему угол отлёта  $\alpha_2$  покоившейся частицы.

Ответ:  $\cos(2\alpha_2) = \eta \sin^2(\alpha_1) - \cos(\alpha_1)\sqrt{1 - \eta^2 \sin^2(\alpha_1)}$ ,

$$\alpha_{1\max} = \arcsin(1/\eta), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \arccos(1/\eta).$$

## 4. НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

● Сила и потенциальная энергия тяготения двух тел (Ньютон):

$$F = \gamma mM/r^2, \quad U = -\gamma mM/r.$$

● Связь периода  $T$  обращения планеты вокруг Солнца массой  $M_C$  и длины  $a$  большой полуоси её орбиты (Кеплер):

$$a^3/T^2 = K, \quad \text{где } K = \gamma M_C/(2\pi)^2.$$

● Уравнение траектории (орбиты) космического тела  $B$  в поле тяготения уединённой планеты (или звезды), находящейся в центре  $O$ , при произвольном направлении полярной оси  $OO'$ , от которой ведется отсчет углов  $\varphi$  (рис. 4.1):

$$r = \frac{p}{1 \pm e \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

При выборе знака “+” углу  $\varphi_0$  отвечает ближайшая к центру  $O$  точка траектории  $P$  (перигей, перигелий, периселений и т. п.). Для эллиптической орбиты ( $e < 1$ ) иногда удобно брать знак “−”,

при котором углу  $\varphi_0$  отвечает ее самая удаленная точка А (апогей, афелий, апоселений и т. п.).

- Параметр  $p$  и эксцентриситет  $e$  траектории (орбиты):

$$p = \frac{(2\sigma)^2}{\gamma M}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon p}{\gamma M}}.$$

- Секториальная скорость  $\sigma$  и удельная энергия  $\varepsilon$  тела:

$$\sigma = \frac{1}{2} r v_\varphi, \quad \varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\gamma M}{r},$$

где  $v_\varphi$  – его азимутальная скорость,  $M$  – масса планеты (или звезды), находящейся в центре О.

## **Всемирное тяготение**

4.1. Установлено, что ускорение свободного падения  $g_1$  на глубине  $h = 500$  м больше, чем на поверхности Земли, на  $\alpha = 0.005\%$ . Пользуясь этим, найдите среднюю плотность  $\rho_1$  земной коры в 500-метровом слое. Средняя плотность Земного шара  $\rho_0 = 5 \text{ г/см}^3$ , а его радиус  $R = 6370 \text{ км}$ .

Ответ:  $\rho_1 = \rho_0 \left( \frac{2}{3} - \frac{\alpha R}{300\% h} \right).$

Указания. Учтите, что сферический слой вещества не создает тяготения внутри себя. Используйте малость отношения  $h/R$ .

4.2. Как зависит ускорение свободного падения  $g$  от глубины погружения  $z$  в верхних слоях земной коры, если их плотность равна  $\rho_1 = 2.5 \text{ г/см}^3$ , а средняя плотность Земного шара  $\rho_0 = 5 \text{ г/см}^3$ ? Вращением Земли пренебречь.

Ответ:  $g = g_0 + g_0 \left( 2 - \frac{3\rho_1}{\rho_0} \right) \frac{z}{R},$

где  $g_0$  – ускорение свободного падения на поверхности Земли,  $R$  – её радиус.



4.3. Зная средний радиус земной орбиты  $r_3 = 150$  млн км и период обращения Земли вокруг Солнца  $T_3 = 1$  год, выразите ускорение  $g$  свободного падения на Солнце в зависимости от расстояния  $r$  до его центра. Рассчитайте его значения  $g(r_3)$  в районе земной орбиты и  $g_C$  на поверхности Солнца, если радиус последнего  $R_C = 700$  тыс. км.

Ответ:  $g = \left( \frac{2\pi}{T_3} \right)^2 \frac{r_3^3}{r^2}$ .

4.4. Период обращения Луны вокруг Земли составляет  $T_L = 27.32$  дня. Используя лишь величину радиуса Земли  $R_3 = 6370$  км и ускорение свободного падения  $g_3 = 9.8$  м/с<sup>2</sup> на её поверхности, определите средний радиус лунной орбиты  $r_L$ . Сравните его с известными расстояниями от центра Земли до Луны  $r_1 = 363$  тыс. км в перигее и  $r_2 = 405$  тыс. км в апогее.

Ответ:  $r_L = g_3^{1/3} \left( \frac{T_L R_3}{2\pi} \right)^{2/3}$ .

4.5. Используя данные о движении Земли вокруг Солнца из задачи 4.3 и Луны вокруг Земли из задачи 4.4, найдите отношение масс  $M_C/M_3$  Солнца и Земли. Учитывая, что отношение их радиусов  $R_C/R_3 = 110$ , а средняя плотность Земли составляет величину  $\rho_3 = 5.52$  г/см<sup>3</sup>, определите среднюю плотность  $\rho_C$  солнечного вещества.

Ответ:  $\frac{M_C}{M_3} = \left( \frac{T_L}{T_3} \right)^2 \left( \frac{r_3}{r_L} \right)^3$ ,  $\rho_C = \rho_3 \left( \frac{M_C}{M_3} \right) \left( \frac{R_3}{R_C} \right)^3$ .

4.6. Два космических тела с массами  $M$  и  $m$  под действием взаимного притяжения обращаются вокруг общего центра масс  $S$ . Их наименьшее и наибольшее удаления друг от друга равны  $r_1$  и  $r_2$ . Найдите период  $T$  обращения тел в инерциальной системе отсчета, т.е. относительно далёких звёзд. Какой период  $T_{д.зв.}$  будет иметь двойная звезда, если суммарная масса её компонент

вдвое больше массы Солнца, а расстояние между ними постоянно и составляет половину радиуса земной орбиты. Сравните величину  $T_{\text{д.зв.}}$  с периодом Капеллы (104 дня).

Ответ:  $T = \frac{2\pi l^{3/2}}{\sqrt{\gamma(M+m)}}$ , где  $l = \frac{r_1 + r_2}{2}$ .

Указания. Полагая тела центрально симметричными, покажите, что точка С делит отрезок, соединяющий центры тел, в отношении обратном отношению их масс. Для простоты рассмотрите случай круговых орбит:  $r_1 = r_2 = l$ .

Замечание. Строго формула в ответе выводится из уравнения относительного движения тел и представляет обобщение третьего закона Кеплера для системы двух тел с любым отношением масс.

4.7. Найдите отношение масс  $M_{\text{Л}}/M_{\text{З}}$  Луны и Земли, используя данные орбитального движения Луны из задачи 4.4 и обусловленное тяготением Земли ускорение свободного падения  $g_3 = 9.8 \text{ м/с}^2$  на её поверхности. На каком среднем расстоянии  $r_{\text{С}}$  от центра Земли расположен центр масс С системы Земля – Луна?

Ответ:  $\frac{M_{\text{Л}}}{M_{\text{З}}} = \left( \frac{2\pi}{T_{\text{Л}} R_3} \right)^2 \frac{l^3}{g_3} - 1$ ,  $r_{\text{С}} = \frac{M_{\text{Л}} l}{M_{\text{З}} + M_{\text{Л}}}$ , где  $l = \frac{r_1 + r_2}{2}$ .

Указание. Примените ответ задачи 4.6 к системе Земля – Луна.

4.8. Отношение периодов обращения Юпитера и Земли вокруг Солнца составляет величину  $\eta = 12$ . Полагая орбиты планет круговыми, вычислите отношение их радиусов  $\xi$  и отношение скоростей орбитального движения  $\zeta$  в гелиоцентрической системе отсчета.

Ответ:  $\xi = \eta^{2/3}$ ,  $\zeta = \eta^{-1/3}$ .

4.9. Представьте космическое тело, движущееся по лунной орбите вдали от самой Луны. Какую наименьшую скорость  $v_0$  следует сообщить телу против его орбитального движения, чтобы оно попало на Землю? Сколько времени  $t_{\text{полет}}$  будет длиться полёт

к Земле? Данные о движении Луны вокруг Земли и её радиус  $R_3$  взять из задачи 4.4. Влиянием атмосферы Земли пренебречь.

Ответ:  $v_0 = v_L \left( 1 - \sqrt{\frac{2\delta}{1+\delta}} \right)$ ,  $t_{\text{полет}} = \frac{T_L}{4\sqrt{2}} (1+\delta)^{3/2}$ ,  $\delta = R_3/r_L$ .

Указания. Определите орбитальную скорость Луны  $v_L$ . Примените законы сохранения энергии и момента импульса к начальному и конечному положению тела. Учтите, что наименьшей скорости  $v_0$  отвечает, так называемая, стелящаяся траектория — она касается поверхности Земли. Для расчёта времени  $t_{\text{полет}}$  примените закон Кеплера к новой и старой орбите тела.

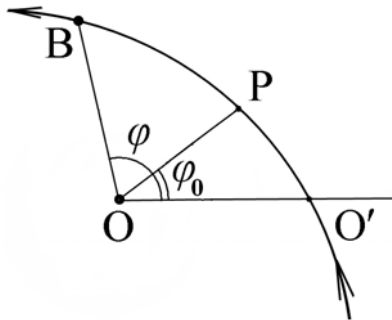


Рис. 4.1

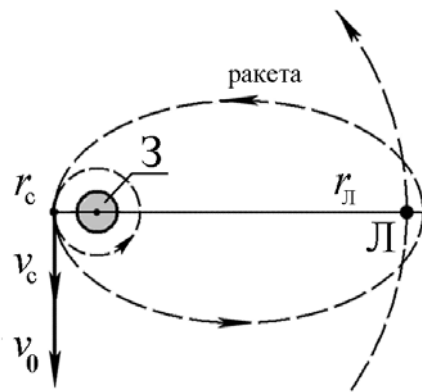


Рис. 4.2

4.10. С какой наименьшей скоростью  $v_0$  должна стартовать ракета с космической станции Земли, находящейся на орбите радиусом  $r_c = 6700 \text{ км}$ , чтобы произвести облёт Луны (рис. 4.2, схематический). Сколько времени  $t_{\text{полет}}$  будет длиться полёт к Луне и обратно? Полагать, что орбиты космической станции и Луны лежат в одной плоскости, а полёт ракеты происходит пассивно. Влиянием тяготения Луны на движение ракеты в её окрестности пренебречь. Для простоты считать, что облёт Луны совершается на малом расстоянии по сравнению с радиусом  $r_L$  её орбиты. Данные о движении Луны вокруг Земли взять из задачи 4.4.

Ответ:  $v_0 = v_c \left( \sqrt{\frac{2}{1+\eta_L}} - 1 \right)$ ,  $t_{\text{полет}} = T_L \left( \frac{1+\eta_L}{2} \right)^{3/2}$ ,

где  $\eta_{\text{Л}} = r_{\text{с}}/r_{\text{Л}}$ ,  $v_{\text{с}} = R\sqrt{g_3/r_{\text{с}}}$  – орбитальная скорость станции,  $R$  – радиус Земли,  $g_3$  – ускорение свободного падения на её поверхности.

Указания. Как видно по рис. 4.2, наименьшей скорости  $v_0$  отвечает старт ракеты в направлении движения станции по орбите. Примените к данному случаю законы сохранения энергии и момента импульса для перигея и апогея траектории ракеты. Выразите отношение величин  $t_{\text{полет}}$  и  $T_{\text{Л}}$  по закону Кеплера.

4.11. Период обращения кометы Галлея вокруг Солнца составляет  $T_{\text{Г}} = 76 \text{ лет}$ . Расстояние между ними в перигелии  $r_1 = 0.587 \text{ а.е.}$ , где *а. е.* так называемая астрономическая единица длины, равная среднему радиусу земной орбиты  $r_3 = 150 \text{ млн км}$ . Каково расстояние  $r_2$  кометы до Солнца в афелии, выраженное в *а. е.*, и её скорость  $v_2$  там? Период обращения Земли вокруг Солнца  $T_3 = 1 \text{ год}$ .

$$\text{Ответ: } r_2 = 2r_3 \left( \frac{T_{\text{Г}}}{T_3} \right)^{2/3} - r_1, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M_{\text{С}} r_1}{(r_1 + r_2)r_2}},$$

где  $M_{\text{С}}$  – масса Солнца.

Указания. Примените третий закон Кеплера к движению Земли и кометы вокруг Солнца. Используйте законы сохранения энергии и момента импульса.

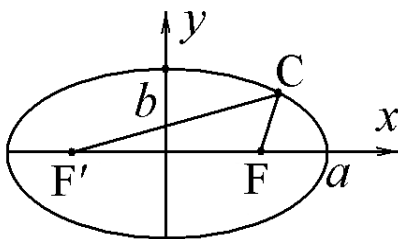


Рис. 4.3

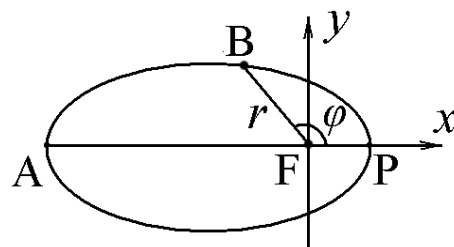


Рис. 4.4

4.12. Эллипс вычерчивается пером  $C$ , натягивающим нитку длиной  $2a$ , концы которой закреплены в точках  $F, F'$ , называемых фокусами (рис. 4.3). Расстояние между ними  $2f$  и длина нитки, т. е. большой оси эллипса, однозначно определяют его размеры и

форму. Эллипс полностью определяется также заданием следующих параметров: длин  $a$  большой и  $b$  малой полуосей; наименьшего  $r_1$  и наибольшего  $r_2$  расстояний пера  $C$  до выбранного фокуса  $F$ ; параметра  $p$  и эксцентриситета  $e$ . Выразите величины:

а)  $r_1, r_2$  через  $a, b$ ;

б)  $p, e$  через  $r_1, r_2$ ;

в)  $p, e$  через  $a, b$ .

Ответ: а)  $r_1 = a - f, r_2 = a + f$ ;

$$\text{б) } p = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}, e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2};$$

$$\text{в) } p = b^2/a, e = f/a,$$

где  $f = \sqrt{a^2 - b^2}$  – расстояние от фокусов  $F, F'$  до центра эллипса  $O$ .

4.13. Космическое тело  $B$  движется по эллиптической орбите вокруг Солнца, находящегося в её фокусе  $F$ , с наименьшим  $r_1$  и наибольшим  $r_2$  расстояниями до него (рис. 4.4). Найдите скорости  $v_1$  и  $v_2$  прохождения тела через перигелий  $P$  и афелий  $A$ . Каков радиус кривизны  $R_k$  траектории тела в этих точках?

Ответ:  $v_1 = \sqrt{cp}/r_1, v_2 = \sqrt{cp}/r_2, R_k = p$ ,

где  $c = \gamma M_C, p = 2r_1r_2/(r_1 + r_2), M_C$  – масса Солнца.

Указание. Радиус кривизны  $R_k$  определите по ускорению  $w$ , сообщаемому телу в точках  $P$  и  $A$ .

4.14. Приближающаяся к Солнцу  $O$  комета была обнаружена со скоростью  $v_0$  в точке  $B$ , находившейся от него на расстоянии  $r_0$  (рис. 4.5). При этом угол между векторами  $r_0$  и  $v_0$  равнялся  $\alpha$ . Считая траекторию кометы эллиптической орбитой, найдите наименьшее  $r_-$  и наибольшее  $r_+$  расстояния кометы до Солнца, массу  $M_C$  которого полагайте известной. Под каким углом  $\varphi$  к радиус-вектору  $r_0$  будет располагаться большая ось эллипса? Каково условие эллиптичности орбиты?

$$\text{Ответ: } r_{\pm} = \frac{r_0}{2 - \eta} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \eta(2 - \eta) \sin^2(\alpha)} \right], \text{ где } \eta = \frac{r_0 v_0^2}{\gamma M_C},$$

$$\varphi_- = \arccos\left(\frac{p - r_0}{er_0}\right), \quad \varphi_+ = \pi - \varphi_-, \quad \eta < 2,$$

где знаки “–” и “+” соответствуют отрезкам ОР и ОА большой оси.

Указания. Для отыскания величин  $r_-$  и  $r_+$  достаточно законов сохранения энергии и момента импульса. Их следует применить к начальному В и искомым положениям кометы, учитывая, что в перигелии Р и афелии А векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$  взаимно перпендикулярны. Для отыскания угла  $\varphi$  необходимо использовать уравнение траектории  $r(\varphi)$ , записав его для точки В с параметрами  $p, e$ , выраженными через начальные данные  $r_0, v_0, \alpha$ . Полагая  $\varphi_0 = 0$ , мы проводим полярную ось  $ОО'$  системы координат через точку Р или А соответственно знакам “+” или “–” в уравнении траектории.

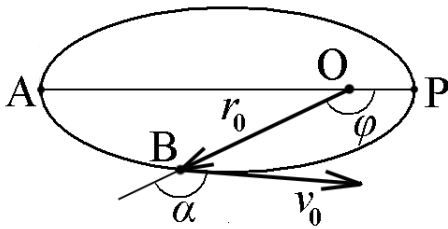


Рис. 4.5

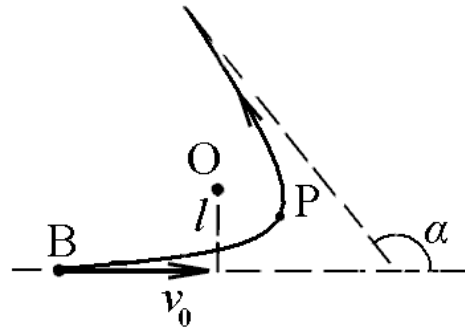


Рис. 4.6

4.15. Космическое тело В движется к Солнцу О издалека со скоростью  $v_0$  и прицельным параметром  $l$  – так называется плечо вектора скорости  $\mathbf{v}_0$  относительно центра Солнца (рис. 4.6). Считая траекторию тела гиперболой, найдите наименьшее расстояние  $r_{\min}$  тела до Солнца и скорость  $v_{\max}$  в перигелии Р. Под каким углом  $\alpha$  к направлению первоначального движения тело уйдёт в бесконечное пространство?

Ответ:  $r_{\min} = \sqrt{d^2 + l^2} - d$ ,  $v_{\max} = v_0 \sqrt{1 + 2d/r_{\min}}$ ,

$$\alpha = \pi - 2 \arccos(1/e), \quad e = \sqrt{1 + l^2/d^2},$$

где  $d = \gamma M_{\text{С}}/v_0^2$ ,  $M_{\text{С}}$  – масса Солнца.

Указания. Следует провести из точки О лучи параллельно асимптотам траектории и найти, согласно указаниям задачи 4.14,

угол  $\varphi$  между каждым из них и полярной осью  $ОО'$ , проведённой через перигелий  $P$ . Угол  $\alpha$  определяется по формуле  $\alpha = 2\varphi - \pi$ , а эксцентриситет  $e$  выражается по начальным данным  $v_0, l$ .

### **Манёвры на орбите**

4.16. Вычислите радиус  $r_c$  круговой орбиты, так называемого стационарного спутника Земли, который остается неподвижным относительно её поверхности в экваториальной плоскости. Определите его скорость  $v_c$  в инерциальной системе отсчёта, которая движется поступательно со скоростью центра Земли.

$$\text{Ответ: } r_c = \sqrt[3]{g_3 \left( \frac{RT}{2\pi} \right)^2}, \quad v_c = \frac{2\pi r_c}{T},$$

где  $T$  – период обращения Земли вокруг своей оси,  $R$  – её радиус,  $g_3$  – ускорение свободного падения на её поверхности.

4.17. Спутник движется в экваториальной плоскости Земли по круговой орбите, появляясь над некоторым пунктом на экваторе через каждые  $\tau = 10$  ч. Вычислите радиус орбиты спутника  $r_+$  в случае его движения с запада на восток и  $r_-$  при движении в противоположном направлении. Радиус Земли  $R$ , период  $T$  её обращения вокруг своей оси и ускорение свободного падения  $g_3$  на её поверхности полагать известными.

$$\text{Ответ: } r_{\pm} = \sqrt[3]{g_3 \left[ \frac{RT\tau}{2\pi(T \pm \tau)} \right]^2}.$$

Замечание. Полезно решить задачу как в инерциальной системе отсчета с неподвижным центром Земли, так и в земной (вращающейся) системе отсчёта, учитывая силы инерции.

4.18. Искусственный спутник Луны массой  $m$ , выведенный на круговую орбиту, будет постепенно снижаться благодаря слабому сопротивлению со стороны космической пыли. Найдите приращение  $\Delta r$  радиуса  $r$  орбиты спутника за один оборот вокруг Луны, если сила сопротивления  $F_c$  зависит от его скорости  $v$  по формуле  $F_c = cv^2$ , где  $c$  – постоянная. Каково время  $t_{\text{пад}}$  движения

спутника до его падения на поверхность Луны, если первоначальная орбита имела радиус  $r_0$ ?

Ответ:  $\Delta r = -\frac{4\pi c}{m} r^2$ ,  $t_{\text{пад}} = \frac{m}{c\sqrt{g_{\text{Л}}R}} \left( \sqrt{\frac{r_0}{R}} - 1 \right)$ ,

где  $R$  – радиус Луны,  $g_{\text{Л}}$  – ускорение свободного падения на её поверхности.

Указания. Выразите ускорение свободного падения  $g$  и потенциальную энергию спутника  $U$  на произвольном расстоянии  $r$  от центра Луны через ускорение  $g_{\text{Л}}$  на её поверхности. Примените к спутнику закон изменения полной энергии  $E$  в дифференциальной форме  $dE = -F_c v dt$ . Представив величины  $E$  и  $v$  в зависимости от радиуса орбиты  $r$ , примените это уравнение сначала к одному обороту спутника, а затем, разделив переменные  $r$  и  $t$ , проинтегрируйте его на временном интервале  $(0, t_{\text{пад}})$ .

4.19. Находившийся на круговой орбите радиусом  $r_0$  искусственный спутник Земли после кратковременного включения реактивного двигателя получил приращение скорости  $\Delta v$ . Характеризуя удаление спутника от Земли величиной  $\eta = r_0/r$ , найдите её значение  $\eta_1$  и скорость  $v_1$  в апогее новой орбиты, если вектор  $\Delta v$  полученной спутником скорости был направлен:

- а) радиально от центра Земли;
- б) по движению спутника на орбите.

Ответ: а)  $\eta_1 = 1 - \Delta v/v_0$ ,  $v_1 = \eta_1 v_0$ ;

б)  $\eta_1 = \frac{2v_0^2}{(v_0 + \Delta v)^2} - 1$ ,  $v_1 = \eta_1 (v_0 + \Delta v)$ ,

где  $v_0 = R\sqrt{g_3/r_0}$  – первоначальная орбитальная скорость,  $R$  – радиус Земли,  $g_3$  – ускорение свободного падения на её поверхности.

Указания. Примените законы сохранения энергии и момента импульса. Учтите, что в апогее у спутника остаётся лишь азимутальная компонента скорости  $v_\varphi$ .



4.20. Для перевода искусственного спутника Земли с круговой орбиты радиусом  $r_0 = 6700 \text{ км}$  в экваториальной плоскости на стационарную орбиту, радиус которой  $r_c$  определён в задаче 4.16, реактивный двигатель дважды включался на краткое время. Сначала он сообщил спутнику некоторую скорость  $\Delta v$ , которая была направлена:

- а) радиально от центра Земли;
- б) по движению спутника на орбите.

А затем, в точке наибольшего удаления от Земли, которая попадала на стационарную орбиту, при повторном включении двигатель увеличил скорость спутника на величину  $\Delta v_1$ . Найдите скорости  $\Delta v$  и  $\Delta v_1$  в указанных случаях. Какой из вариантов а) или б) более экономичный?

Ответ: а)  $\Delta v = (1 - \eta_c)v_0$ ,  $\Delta v_1 = (1 - \sqrt{\eta_c})v_c$ ;

$$\text{б) } \Delta v = \left( \sqrt{\frac{2}{1 + \eta_c}} - 1 \right) v_0, \quad \Delta v_1 = \left( 1 - \sqrt{\frac{2\eta_c}{1 + \eta_c}} \right) v_c,$$

где  $v_0$  и  $v_c$  – скорости спутника на первоначальной и стационарной орбите,  $\eta_c = r_0/r_c$ .

Указания. Используйте ответ задачи 4.19. Экономичность перевода спутника на стационарную орбиту определите по критерию минимума суммы  $\Delta v + \Delta v_1$ .

4.21. Для спуска на Луну космический корабль, находившийся возле неё на круговой орбите радиусом  $r_0$ , отстрелил аппарат со скоростью  $\Delta v$ . При каком наименьшем значении  $\Delta v_{\min}$  скорости отстрела возможна посадка аппарата на лунной поверхности, если её вектор направлен:

- а) радиально к центру Луны;
- б) противоположно движению корабля по орбите?

Радиус Луны  $R$  и ускорение свободного падения  $g_L$  на её поверхности считайте известными.

Ответ: а)  $\Delta v_{\min} = (H - 1)v_0$ ;

$$\text{б) } \Delta v_{\min} = \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{H + 1}} \right) v_0,$$

где  $H = r_0/R$ ,  $v_0 = R\sqrt{g_{\text{Л}}/r_0}$ .

Указания. Определите орбитальную скорость корабля  $v_0$ . Примените законы сохранения энергии и момента импульса к начальному и конечному положениям аппарата. Учтите, что при наименьшей скорости отстрела  $\Delta v$  спускаемый аппарат достигнет поверхности Луны по стелящейся (в месте посадки) траектории.

4.22. В условиях задачи 4.21 установите связь между величиной  $\Delta v$  скорости отстрела в случаях а) и б) при  $\Delta v > \Delta v_{\min}$  и местом посадки спускаемого аппарата. Это место определяется углом поворота  $\varphi$  радиус-вектора  $\mathbf{r}$  аппарата за время спуска в инерциальной системе отсчета с неподвижным центром Луны.

$$\text{Ответ: а) } \varphi = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{H-1}{\delta}\right);$$

$$\text{б) } \varphi = \pi - \arccos\left(\frac{H-1}{\delta(2-\delta)} - H\right),$$

где  $H = r_0/R$ ,  $\delta = \Delta v/v_0$ .

Указания. Примените уравнение траектории  $r(\varphi)$ , взятое со знаком “+”, к точкам отстрела и посадки аппарата на поверхность Луны. Получите общую формулу для искомого угла

$$\varphi = \arccos\left(\frac{p-r_0}{er_0}\right) - \arccos\left(\frac{p-R}{eR}\right)$$

и выражения для параметров траектории в указанных случаях:

$$\text{а) } p = r_0, e = \delta;$$

$$\text{б) } p = r_0(1-\delta)^2, e = \delta(2-\delta).$$

4.23. Баллистический снаряд выпущен с поверхности Луны со скоростью  $v_0 < \sqrt{g_{\text{Л}}R}$  под углом  $\alpha$  к горизонту, где  $g_{\text{Л}}$  — ускорение свободного падения на поверхности Луны,  $R$  — её радиус. Пренебрегая вращением Луны, найдите дальность полета снаряда, определяемую углом поворота  $\varphi$  его радиус-вектора  $\mathbf{r}$ .

Какой угол  $\alpha_m$  обеспечивает наибольшую дальность полета снаряда, и какова её величина  $\varphi_m$ ?

Ответ:  $\varphi = 2 \arccos \left[ \frac{1 - \beta \cos^2(\alpha)}{\sqrt{1 - \beta(2 - \beta) \cos^2(\alpha)}} \right]$ , где  $\beta = \frac{v_0^2}{g_0 R}$ ,

$$\cos(\alpha_m) = \frac{1}{\sqrt{2 - \beta}}, \quad \varphi_m = 2 \arccos \left[ \frac{2\sqrt{1 - \beta}}{2 - \beta} \right],$$

Указания. Примените уравнение траектории  $r(\varphi)$ , взятое со знаком “—”, к точкам выпуска и падения снаряда на поверхности Луны. Получите общие формулы для искомого угла

$$\varphi = 2\varphi_0, \quad \cos(\varphi_0) = (R - p)/(eR)$$

и выражения для параметров траектории

$$p = \beta R \cos^2(\alpha), \quad e = \sqrt{1 - a\beta}, \quad a = (2 - \beta)/R,$$

где параметр  $\beta < 1$  определен выше. Минимизируя величину  $\cos(\varphi_0)$  по параметру  $p$ , его значение  $p_m = 2/a - R$ , соответствующее углу  $\alpha_m$ , найдите из уравнения

$$d(\cos(\varphi_0))/dp = 0.$$

## 5. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

- Момент инерции тела:  $J = \int r^2 dm$ .
- Уравнение вращательного движения твердого тела с закрепленной осью z:

$$J\beta_z = M_z,$$

где  $M_z$  – результирующий момент приложенных сил.

- Уравнение движения центра масс С твердого тела:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F},$$

где  $\mathbf{F}$  – результирующая внешних сил,  $m$  – масса тела.

• Теорема Штейнера для момента инерции тела относительно оси, смещённой на расстояние  $a$  от его центра масс  $C$ :

$$J = J_C + ma^2.$$

• Кинетическая энергия твёрдого тела при плоском движении:

$$K = \frac{1}{2} J_C \omega^2 + \frac{1}{2} m v_C^2.$$

• Уравнение прецессии гироскопа:

$$[\mathbf{\Omega L}] = \mathbf{M}.$$

### ***Задачи с чистым вращением***

5.1. Путём интегрирования найдите моменты инерции:

а) тонкого однородного стержня с массой  $m$  и длиной  $l$  относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно стержню;

б) однородного диска с массой  $m$  и радиусом  $R$  относительно оси симметрии перпендикулярной плоскости диска;

в) тонкого однородного сферического слоя с массой  $m$  и радиусом  $R$  относительно оси, проходящей через его центр;

г) однородного шара с массой  $m$  и радиусом  $R$  относительно оси, проходящей через его центр;

д) пластины с массой  $m$  и диагональю  $d$  относительно оси, проходящей через её угол перпендикулярно пластине.

Ответ: а)  $J = ml^2/3$ ;

б)  $J = mR^2/2$ ;

в)  $J = 2mR^2/3$ ;

г)  $J = 2mR^2/5$ ;

д)  $J = md^2/3$ .

5.2. Блок на рис. 5.1, представляющий собой однородный диск массой  $m$  с радиусом  $R$ , начинает вращаться под влиянием

небольшого тела массой  $m_1$ , которое подвешено на легкой нити, намотанной на блок. Пренебрегая трением в его оси, найдите ускорение тела  $w$  и силу  $F$ , действующую на подвеску блока, в процессе движения предоставленной себе системы. Какой будет угловая скорость  $\omega$  блока, если тело, находившееся вначале почти на уровне его оси, опустится с высоты  $h \gg R$ ?

Ответ:  $w = 2\eta g$ ,  $F = (\eta + 1)mg$ ,  $\omega = \frac{2}{R}\sqrt{\eta gh}$ ,

где  $\eta = m_1/(m + 2m_1)$ .

Указание. Помимо уравнений движения тела и блока, используйте закон сохранения полной энергии системы.

5.3. Через блок на рис. 5.2, имеющий вид однородного диска массой  $m$  с радиусом  $R$ , переброшена лёгкая нить, к концам которой привязаны тела разной массы  $m_1 < m_2$ . Найдите их ускорение  $w$ , если при движении системы нить не будет скользить по блоку, а трение в его оси отсутствует. Получите условие нескольжения из неравенства  $T_2/T_1 < e^{k\pi}$ , где  $T_1$ ,  $T_2$  – натяжения нити по разные стороны блока,  $k$  – её коэффициент трения.

Ответ:  $w = \frac{(m_2 - m_1)g}{[m_1 + m_2 + m/2]}$ ,  $e^{k\pi} > \frac{m_2(m + 4m_1)}{m_1(m + 4m_2)}$ .

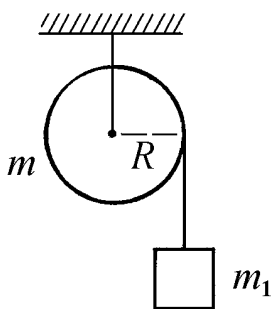


Рис. 5.1

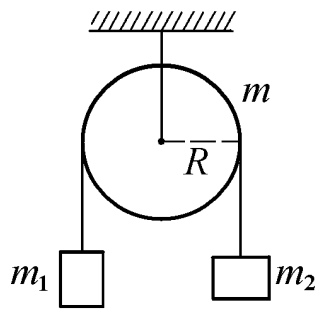


Рис. 5.2

5.4. В условиях задачи 5.3 рассмотрите движение системы на рис. 5.2 при скольжении нити по блоку с коэффициентом трения  $k$ . Исключая трение в его оси, найдите линейное ускорение  $w$  тел с массами  $m_1$  и  $m_2$  и угловое ускорение блока  $\beta$ . Получите

условие скольжения из неравенства  $w > \beta R$ . Сравните его с условием нескольжения в ответе задачи 5.3.

$$\text{Ответ: } w = \frac{(m_2 - m_1 \varepsilon)g}{m_2 + m_1 \varepsilon}, \quad \beta = \frac{4m_1 m_2 g (\varepsilon - 1)}{m(m_2 + m_1 \varepsilon)R}, \quad \varepsilon < \frac{m_2(m + 4m_1)}{m_1(m + 4m_2)},$$

где  $\varepsilon = e^{k\pi}$ .

Указание. Используйте ответ задачи 2.21.

5.5. В установке на рис. 5.3 известны массы тел  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных лёгкой нитью, радиус  $R$  и масса  $m$  сплошного однородного диска. Коэффициент трения между телом массой  $m_1$  и горизонтальным столом равен  $k$ . Найдите угловое ускорение диска  $\beta$  и скорость  $v$  тела массой  $m_2$  после его опускания с высоты  $h$ . Скольжение нити по диску и трение в его оси отсутствуют.

$$\text{Ответ: } \beta = \frac{(m_2 - km_1)g}{(m_1 + m_2 + m/2)R}, \quad v = \sqrt{2\beta R h}.$$

Замечание. Ответ можно получить из уравнений движения тел и диска, а также с помощью закона изменения полной энергии системы.

5.6. На блок с моментом инерции  $J$  и радиусом  $R$  был намотан тонкий шнур длиной  $l$  с массой  $m$ . Найдите угловую скорость  $\omega_c$  выведенного из равновесия блока после соскальзывания с него шнура. При какой длине  $x_0$  свешивающейся части шнура его натяжение  $T$  в месте отхода от блока будет наибольшим, если  $J < mR^2$ ? Каким будет его значение  $T_0$  в этот момент времени? Трением в оси блока и смещением от неё центра масс намотанной части шнура пренебечь.

$$\text{Ответ: } \omega_c = \sqrt{\frac{gl}{\eta R^2}}, \quad x_0 = \frac{1}{2}\eta l, \quad T_0 = \frac{1}{4}\eta mg, \quad \text{где } \eta = 1 + \frac{J}{mR^2}.$$

Указание. Из уравнений движения найдите угловую скорость блока  $\omega$  и натяжение шнура  $T$  в указанном месте в зависимости от длины  $x$  его свешивающейся части.

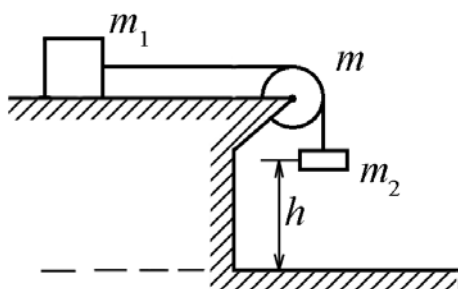


Рис. 5.3

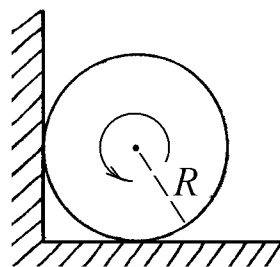


Рис. 5.4

5.7. Однородный цилиндр радиусом  $R$ , вращавшийся со скоростью  $\omega_0$  вокруг своей горизонтально ориентированной оси, поместили в угол между двумя плоскостями (рис. 5.4). Коэффициент трения цилиндра о стенки угла равен  $k$ . Найдите время движения  $t$  и число оборотов  $N$  цилиндра до его остановки.

Ответ:  $t = \frac{(1+k^2)\omega_0 R}{2k(1+k)g}$ ,  $N = \frac{\omega_0 t}{4\pi}$ .

Указание. Наряду с уравнением равновесия центра масс цилиндра используйте уравнение вращательного движения (или закон изменения энергии).

5.8. Однородный диск радиусом  $R$  раскрутили до угловой скорости  $\omega_0$  вокруг его вертикально ориентированной оси и плашмя опустили на горизонтальную плоскость. Сколько времени  $t$  будет вращаться диск, если коэффициент его трения о плоскость будет равен  $k$ ? Давление диска на плоскость считать равномерным.

Ответ:  $t = \frac{3\omega_0 R}{4kg}$ , где  $g$  – ускорение свободного падения.

Указание. Сначала найдите момент силы трения, приложенный к малому элементу диска, ограниченному двумя окружностями с радиусами  $r$ ,  $r+dr$  и двумя радиальными прямыми с углом  $d\varphi$  между ними. Полный момент сил трения получите интегрированием по переменным  $r$  и  $\varphi$ .

## Качение круглых тел

5.9. Однородный шар скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом. Найдите ускорение  $w_C$  центра шара  $C$  и величину коэффициента трения  $k$ , при котором скольжение не будет происходить.

Ответ:  $w_C = \frac{5}{7} g \sin(\alpha)$ ,  $k > \frac{2}{7} \operatorname{tg}(\alpha)$ .

5.10. Однородный шар вкатился на высоту  $h$  по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом. Найдите начальную скорость  $v_0$  центра шара и время  $t$  его подъёма, если скольжения не происходило. Какому условию должен удовлетворять для этого коэффициент трения  $k$  шара о плоскость?

Ответ:  $v_0 = \sqrt{\frac{10gh}{7}}$ ,  $t = \frac{1}{\sin(\alpha)} \sqrt{\frac{14h}{5g}}$ ,  $k > \frac{2}{7} \operatorname{tg}(\alpha)$ .

5.11. Однородный цилиндр массой  $m$  катится по горизонтальной плоскости под действием постоянной горизонтальной силы  $F$ , с которой тянут перпендикулярно оси цилиндра намотанную на него нить (рис. 5.5). Найдите ускорение  $w_O$  оси цилиндра в отсутствие его скольжения по плоскости. При какой величине силы  $F$  начнется скольжение цилиндра, если его коэффициент трения равен  $k$ ?

Ответ:  $w_O = 4F/(3m)$ ,  $F \geq 3kmg$ .

5.12. Однородный цилиндр массой  $m$  катится по горизонтальной плоскости под действием постоянной вертикальной силы  $F$ , с которой тянут вверх намотанную на него нить (рис. 5.6). Найдите ускорение  $w_O$  оси цилиндра в отсутствие его скольжения по плоскости. При какой величине силы  $F$  начнется скольжение цилиндра, если его коэффициент трения равен  $k$ ?

Ответ:  $w_O = \frac{2F}{3m}$ ,  $F \geq \frac{3kmg}{2+3k}$ .



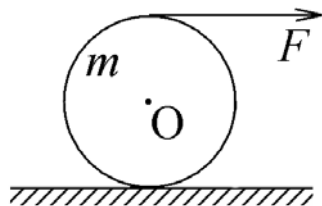


Рис. 5.5

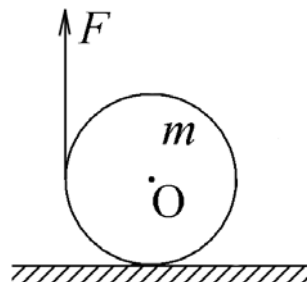


Рис. 5.6

5.13. Однородный цилиндр с массой  $m$  катится по горизонтальным брускам ВВ' под действием постоянной вертикальной силы  $F$ , с которой тянут вниз намотанную на него нить, проходящую через зазор между брусками (рис. 5.7). Найдите ускорение  $w_O$  оси цилиндра в отсутствие его скольжения по брускам. При какой величине силы  $F$  начнется скольжение, если коэффициент трения цилиндра о брусья равен  $k$ ?

Ответ:  $w_O = \frac{2F}{3m}$ ,  $F \geq \frac{3kmg}{2-3k}$ , если  $k \leq 2/3$ ,  
ни при какой  $F$ , если  $k \geq 2/3$ .

5.14. На гладкой горизонтальной плоскости лежала доска массой  $m_1$ , а на ней однородный шар с массой  $m$ . К доске приложили постоянную горизонтальную силу  $F$ . Найдите ускорения доски  $w_1$  и центра шара  $w_C$  в отсутствие скольжения между ними. При какой величине силы  $F$  начнется скольжение, если коэффициент трения шара по доске равен  $k$ ?

Ответ:  $w_1 = \frac{F}{m_1 + 2m/7}$ ,  $w_C = \frac{2}{7}w_1$ ,  $F \geq kg\left(\frac{7}{2}m_1 + m\right)$ .

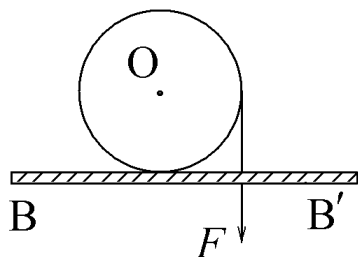


Рис. 5.7

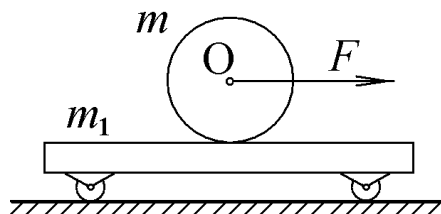


Рис. 5.8

5.15. По легкоподвижной платформе массой  $m_1$  движется сплошной цилиндрический каток с массой  $m$  под действием горизонтальной силы  $F$ , приложенной к его оси О (рис. 5.8). Найдите ускорения платформы  $w_1$  и оси катка  $w_0$  в отсутствие скольжения между ними. При какой величине силы  $F$  начнется скольжение, если коэффициент трения катка на платформе равен  $k$ ? Трением платформы о рельсы пренебречь.

Ответ:  $w_1 = \frac{F}{3m_1 + m}$ ,  $w_0 = w_1 \left(1 + \frac{2m_1}{m}\right)$ ,  $F \geq kmg \left(3 + \frac{m}{m_1}\right)$ .

5.16. Большое полое колесо с массой  $m$  катится по горизонтальной плоскости без скольжения. Внутри него бежит собачка массой  $m_c$  так, что радиус колеса, проведенный к ней, всё время составляет угол  $\alpha$  с вертикалью. Найдите ускорение  $w_0$  оси колеса и мощность  $P$ , развиваемую собачкой в зависимости от времени  $t$ . Сколько времени  $t_{\text{пред}}$  сможет бежать собачка в заданном положении внутри колеса, если её мощность ограничена значением  $P_{\text{пред}}$ ? Полагать, что движение системы началось из состояния покоя.

Ответ:  $w_0 = \frac{g \sin(\alpha)}{\eta - \cos(\alpha)}$ ,  $P = \eta m_c w_0^2 t$ ,  $t_{\text{пред}} = \frac{P_{\text{пред}}}{\eta m_c w_0^2}$ ,

где  $\eta = 2m/m_c + 1$ .

Указания. Для простоты считайте, что вся масса колеса заключена в его ободе на расстоянии  $R$  от оси колеса. Пренебрегая размерами собачки по сравнению с величиной  $R$ , запишите векторное уравнение её движения и уравнение вращательного движения колеса относительно мгновенной оси, лежащей на плоскости. Примените формулу  $P = dK/dt$ , где  $K$  – кинетическая энергия системы.

5.17. В условиях задачи 5.16 найдите тангенциальную  $F$  и нормальную  $N$  силы, с которыми собачка действует на колесо. При каких значениях угла  $\alpha$  и коэффициента трения собачки  $k_c$  она ещё сможет удерживаться на внутренней поверхности колеса?

$$\text{Ответ: } F = m_c g \frac{\eta \sin(\alpha)}{\eta - \cos(\alpha)}, \quad N = m_c g \frac{\eta \cos(\alpha) - 1}{\eta - \cos(\alpha)},$$

$$\cos(\alpha) > \frac{1}{\eta}, \quad k_c > \frac{\eta \sin(\alpha)}{\eta \cos(\alpha) - 1},$$

где  $\eta = 2m/m_c + 1$ .

5.18. Рассмотрите качения колеса с собачкой, данного в задаче 5.16, в случае его скольжения по плоскости с коэффициентом трения  $k$ . Найдите тангенциальную  $F$  и нормальную  $N$  силы, с которыми собачка действует на колесо. При каких значениях угла  $\alpha$  и коэффициента трения собачки  $k_c$  она ещё сможет удерживаться на внутренней поверхности колеса?

$$\text{Ответ: } F = m_c g [\sin(\alpha) + k \cos(\alpha)], \quad N = m_c g [\cos(\alpha) - k \sin(\alpha)],$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) < \frac{1}{k}, \quad k_c > \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + k}{1 - k \operatorname{tg}(\alpha)}.$$

Указание. Пренебрегая размерами собачки по сравнению с радиусом колеса  $R$ , запишите векторные уравнения движения для неё и центра масс колеса, учитывая его скольжение по плоскости.

5.19. В условиях задачи 5.18 найдите ускорение  $w_O$  оси колеса и его угловое ускорение  $\beta$ . При каком коэффициенте трения  $k$  возникает скольжения колеса по плоскости? Считать, что вся масса колеса заключена в его ободе радиусом  $R$ .

$$\text{Ответ: } w_O = kg, \quad \beta = \frac{g}{R} \{m' [\sin(\alpha) + k \cos(\alpha)] - k(1 + m')\},$$

$$2k < \frac{m' \sin(\alpha)}{1 + m' \sin^2(\alpha/2)}, \quad \text{где } m' = m_c/m.$$

Указания. Запишите уравнение вращательного движения колеса относительно его оси. Полагая, что движение системы началось из состояния покоя, получите условие скольжения в виде неравенства  $w_O < \beta R$ .

5.20. В условиях задачи 5.18 найдите в зависимости от времени  $t$  полную мощность  $P_{\text{полн}}$  собачки и мощность  $P_{\text{тр}}$ , затрачиваемую на преодоление сил трения.

Ответ:  $P_{\text{полн}} = m\beta^2 R^2 t + (m + m_c)w_0\beta R t,$

$$P_{\text{тр}} = (m + m_c)w_0(\beta R - w_0)t,$$

где ускорения  $w_0$  и  $\beta$  даны в ответе задачи 5.19.

Указания. Полную и полезную мощность собачки выразите по формулам

$$P_{\text{полн}} = Fv', \quad P_{\text{полез}} = dK/dt,$$

где  $F$  – сила собачки, приложенная к колесу,  $v'$  – их относительная скорость,  $K$  – кинетическая энергия системы. Мощность, расходуемую на преодоление сил трения, определите как  $P_{\text{тр}} = P_{\text{полн}} - P_{\text{полез}}$ .

5.21. Однородный цилиндр с массой  $m$  и радиусом  $R$  привели во вращение с угловой скоростью  $\omega_0$  вокруг его горизонтально ориентированной оси, а затем опустили на горизонтальную плоскость с коэффициентом трения  $k$  и предоставили самому себе. Найдите время  $t$  и путь  $s$ , пройденный цилиндром до окончания скольжения. Какой будет после этого угловая скорость цилиндра  $\omega$  и работа  $A_{\text{тр}}$ , совершённая силой трения?

Ответ:  $t = \frac{\omega_0 R}{3kg}, \quad s = \frac{kg}{2} t^2, \quad \omega = \frac{\omega_0}{3}, \quad A_{\text{тр}} = -\frac{m}{6}(\omega_0 R)^2.$

5.22. Бильярдный шар с массой  $m$  и радиусом  $R$  после центрального удара кием приобрел поступательную скорость  $v_0$ . Считая известным коэффициент трения  $k$  шара о сукно, найдите время  $t$  и путь  $s$ , пройденный шаром до окончания скольжения. Какой будет после этого скорость  $v_c$  центра шара и работа  $A_{\text{тр}}$  силы трения?

Ответ:  $t = \frac{2v_0}{7kg}, \quad s = \frac{12v_0^2}{49kg}, \quad v_c = \frac{5v_0}{7}, \quad A_{\text{тр}} = -\frac{mv_0^2}{7}.$

Замечания. Величину  $A_{\text{тр}}$  можно найти через путь, который проходит относительно стола трущаяся о сукно поверхность шара. Он определяется по скорости точки касания шара. Однако проще использовать для этого закон изменения энергии.

5.23. Найдите поступательную  $v_0$  и угловую  $\omega_0$  скорости бильярдного шара с массой  $m$  и радиусом  $R$ , приобретённые им сразу после горизонтального удара кием на высоте  $h$  над центром шара С. Удар наносится в вертикальной плоскости, проходящей через точку С. Полагать, что сила трения шара о сукно  $F_{\text{тр}}$  мала по сравнению с силой удара  $F$ , действовавшей в течении малого промежутка времени  $\Delta t$ . При какой высоте  $h$  последующее качение шара будет происходить без скольжения? (Такой удар называется нормальным.)

$$\text{Ответ: } v_0 = \frac{F \Delta t}{m}, \quad \omega_0 = \frac{5v_0 h}{2R^2}, \quad h = \frac{2}{5}R.$$

Указания. Примените законы изменения импульса и момента импульса. Получите выражение для скорости нижней точки шара сразу после удара.

5.24. В условиях задачи 5.23 рассмотрите случай высокого удара:  $h > 2R/5$ . Найдите ускорение  $w_C$  центра шара и его угловое ускорение  $\beta$ , вызванные трением шара о сукно после удара. По прошествии какого времени  $t$  прекратится скольжение? С какой скоростью  $v_C$  будет катиться после этого шар?

$$\text{Ответ: } w_C = kg, \quad \beta = -\frac{5kg}{2R}, \quad t = \frac{5v_0}{7kgR} \left( h - \frac{2}{5}R \right),$$

$$v_C = \frac{5v_0}{7} \left( 1 + \frac{h}{R} \right).$$

5.25. В условиях задачи 5.23 рассмотрите случай низкого удара:  $-R < h < 2R/5$ . Найдите ускорение  $w_C$  центра шара и его угловое ускорение  $\beta$ , вызванные трением шара о сукно после удара. По прошествии какого времени  $t$  прекратится скольжение? С какой скоростью  $v_C$  будет катиться после этого шар? Возможно ли возвратное движение шара?

$$\text{Ответ: } w_C = -kg, \quad \beta = \frac{5kg}{2R}, \quad t = \frac{5v_0}{7kgR} \left( \frac{2}{5}R - h \right),$$

$$v_C = \frac{5v_0}{7} \left( 1 + \frac{h}{R} \right).$$

5.26. Однородный цилиндр с массой  $m$  и радиусом  $R$  катится без скольжения со скоростью  $v_0$  по горизонтальной плоскости, переходящей под углом  $\alpha$  в наклонную плоскость (рис. 5.9). Найдите зависимость силы давления  $N$  на уступ  $A$  от угла поворота  $\varphi$  на нём цилиндра. При какой скорости  $v_0$  оси цилиндра его скачка на уступе не произойдет?

Ответ:  $N = mgk(\varphi) - mv_0^2/R$ ,  $v_0 \leq \sqrt{Rgk(\alpha)}$ ,  
где  $k(\varphi) = (7 \cos(\varphi) - 4)/3$  – вспомогательная функция.

Указания. Возьмите уравнение движения центра масс цилиндра на уступе  $A$  в проекции на радиальное направление. Скорость центра масс определите из закона сохранения энергии.

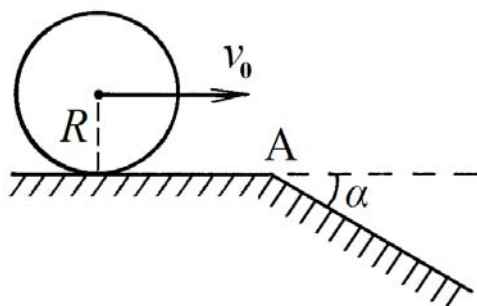


Рис. 5.9

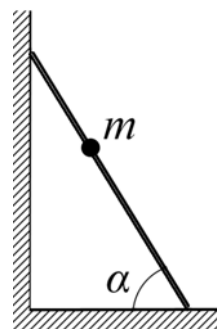


Рис. 5.10

### **Равновесие, падение или опрокидывание тел**

5.27. Легкая, но прочная лестница длиной  $l$ , приставленная к стене, образует угол  $\alpha$  с полом (рис. 5.10). Коэффициенты трения лестницы с полом и стеной соответственно равны  $k_1$  и  $k_2$ . На какое расстояние  $s$  вверх по лестнице может подняться человек прежде, чем она заскользит? При каком значении угла  $\alpha$  он может достичь её верхнего конца?

Ответ:  $s = \frac{lk_1(k_2 + \operatorname{tg}(\alpha))}{1 + k_1k_2}$ ,  $\operatorname{tg}(\alpha) > \frac{1}{k_1}$ .

Указание. Для простоты представьте человека материальной точкой с массой  $m$ . Массой лестницы можно пренебречь.

5.28. Под каким минимальным углом к полу  $\alpha_{\min}$  около вертикальной стены может быть установлена лестница, центр масс которой лежит посередине? Коэффициенты трения лестницы с полом и стеной соответственно равны  $k_1$  и  $k_2$ .

Ответ:  $\operatorname{tg}(\alpha_{\min}) = \frac{1 - k_1 k_2}{2k_1}$ , если  $k_1 k_2 < 1$ . Если  $k_1 k_2 \geq 1$ , то

лестница не будет скользить при любом угле  $\alpha$ .

Указание. Для удобства введите массу  $m$  и длину  $l$  лестницы.

5.29. Доска самоката (его основание, с роликами на концах) с массой  $m$ , длиной  $l$  и постоянным поперечным сечением была поставлена вертикально у стены (рис. 5.11). От небольшого толчка она начала съезжать таким образом, что её осевая линия всё время двигалась в вертикальной плоскости перпендикулярной плинтусу О. Получите зависимость угловой скорости  $\omega$  и ускорения  $\beta$  доски от угла  $\varphi$  её отклонения от стены. При каком значении  $\varphi_0$  этого угла верхний ролик оторвётся от стены? Какую горизонтальную скорость  $v_{Cx}$  будет иметь после этого центр доски С? Размерами роликов, их массой и трением в осях пренебречь.

Ответ:  $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1 - \cos(\varphi))}$ ,  $\beta = \frac{3g}{2l} \sin(\varphi)$ ,

$$\varphi_0 = \arccos(2/3), \quad v_{Cx} = \sqrt{gl}/3.$$

Указания. Образованный стеной и полом прямой угол  $xOy$  вписывается в полуокружность радиусом  $l/2$  с центром в точке С при любом положении доски до её отрыва от стены. Поэтому центр доски сначала будет двигаться по дуге окружности того же радиуса с центром в точке О, а угловая скорость этого движения будет совпадать со скоростью вращения доски  $\omega$  вокруг точки С. Отсюда легко выразить нормальное  $w_n$  и тангенциальное  $w_t$  ускорения точки С через величины  $\omega$  и  $\beta$ . Для определения последних проще всего применить закон сохранения энергии и кинематическую связку  $\beta = \omega d\omega/d\varphi$ . Далее из уравнения движения центра масс доски, взятого в проекции на горизонтальную ось Ох, можно найти нормальную реакцию стены

$$N_1 = \frac{3}{4} mg \sin(\varphi) [3 \cos(\varphi) - 2]$$

и определить угол отрыва  $\varphi_0$ .

5.30. Подпиленный у основания вертикальный столб массой  $m$  с длиной  $l$  падает, зацепившись нижним концом за пенёк. Пренебрегая сопротивлением сцепки, найдите угловую скорость  $\omega$  и ускорение  $\beta$  столба в зависимости от угла  $\theta$  его отклонения от вертикали. Определите горизонтальную  $F_x$  и вертикальную  $F_y$  силу, действующую на пенёк со стороны столба в его горизонтальном положении до удара о землю.

$$\text{Ответ: } \omega = \sqrt{\frac{3g}{l} (1 - \cos(\theta))}, \quad \beta = \frac{3g}{2l} \sin(\theta),$$

$$F_x = 3mg/2, \quad F_y = mg/4.$$

Указания. Примените закон сохранения энергии и уравнение моментов. Проверьте выполнение кинематической связи  $\beta = \omega d\omega/d\theta$ . Используйте теорему о движении центра масс.

5.31. Вертикально стоявший шест с массой  $m$  и длиной  $l$  падает на гладкую горизонтальную плоскость. Пренебрегая трением, найдите угловую скорость шеста  $\omega_k$  в конце падения и импульс  $p_k$ , передаваемый плоскости при абсолютно неупругом ударе об неё шеста.

$$\text{Ответ: } \omega_k = \sqrt{\frac{3g}{l}}, \quad p_k = \frac{m}{2} \sqrt{3gl}.$$

5.32. Вертикально стоявший шест массой  $m$  и длиной  $l$  падает на горизонтальную плоскость со значительным трением об неё. Используя ответ задачи 5.30, получите в зависимости от угла  $\theta$  отклонения шеста от вертикали силу трения  $F_{\text{тр}}$  и нормальную реакцию  $N$  со стороны плоскости на нижнем конце шеста при отсутствии его скольжения. Выясните условия скольжения шеста?

$$\text{Ответ: } F_{\text{тр}} = \frac{3}{4} mg \sin(\theta) (3 \cos(\theta) - 2), \quad N = \frac{1}{4} mg [1 - 3 \cos(\theta)]^2,$$



где сила  $F_{\text{тр}}$  берётся положительной при её направлении в сторону падения шеста.

Указания. Выразите нормальное  $w_n$  и тангенциальное  $w_\tau$  ускорения центра шеста через величины  $\omega$  и  $\beta$ . Спроецируйте уравнение движения центра масс на горизонтальную и вертикальную оси.

Замечание. Полезно проанализировать в пакете MathCad графики функций  $F_{\text{тр}}(\theta)$ ,  $N(\theta)$ , а также их отношения  $F_{\text{тр}}/N$ . Они показывают, что сила  $F_{\text{тр}}$  меняет знак в точке  $\theta_1 = \arccos(2/3)$ ,  $\max(F_{\text{тр}}/N) = 0.3705795$ , а  $\min(F_{\text{тр}}/N) = -\infty$  и достигается он в точке  $\theta_2 = \arccos(1/3)$ . Из этого следует, что скольжение шеста назад (противоположно направлению падения) будет исключено, если  $k \geq 0.3705795$ . А скольжение вперёд (в сторону падения шеста) произойдёт обязательно в интервале углов  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ .

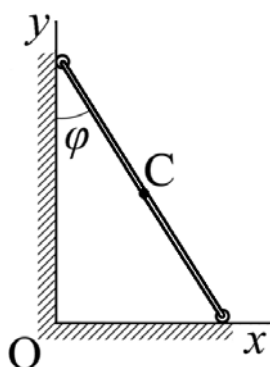


Рис. 5.11

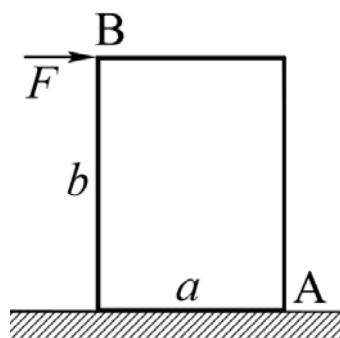


Рис. 5.12

5.33. К верхнему ребру В прямоугольного параллелепипеда массой  $m$ , стоявшего на шероховатом столе, приложили постоянную горизонтальную силу  $F$  параллельно боковой грани с размерами  $a$  и  $b$  (рис. 5.12). Найдите значение силы  $F_1$ , начиная с которого параллелепипед станет поворачиваться вокруг нижнего ребра А, если его скольжение по столу не будет происходить? При каком наименьшем значении силы  $F_2$  он может опрокинуться? Какую угловую скорость  $\omega$  будет иметь параллелепипед в момент опрокидывания, если  $F > F_2$ ?

$$\text{Ответ: } F_1 = \frac{mga}{2b}, \quad F_2 = \frac{mg(d-b)}{2a}, \quad \omega = \sqrt{\frac{6a(F-F_2)}{md^2}},$$

где  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Указания. Примените уравнение моментов и закон сохранения энергии. Используйте ответ задачи 5.1д).

5.34. В верхний край параллелепипеда из задачи 5.33 попадает горизонтально летевшая пуля. При каком импульсе пули  $p_0$  параллелепипед опрокинется? Какой импульс  $p_2^\perp$  при этом ударе будет передан столу в перпендикулярном ему направлении? Полагать, что масса пули пренебрежимо мала, а трение о стол достаточно велико, чтобы не было скольжения.

$$\text{Ответ: } p_0 \geq \frac{1}{b} \sqrt{Jmg(d-b)}, \quad p_2^\perp = \frac{mb}{2} \sqrt{\omega_0^2 + \frac{mg(b-a)}{J}},$$

где  $J = md^2/3$ ,  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\omega_0 = p_0 b / J$ .

Указания. Процесс проникновения пули в материал кратковременный. За его время параллелепипед не успевает повернуться на значительный угол, и момент импульса системы сохраняется. Отсюда можно найти приобретённую параллелепипедом (начальную) угловую скорость  $\omega_0$ . Когда же параллелепипед поворачивается на своём ребре, то сохраняется полная энергия. Из этого можно найти угловую скорость  $\omega_1$  при достижении центром масс параллелепипеда наивысшей точки траектории. В случае опрокидывания  $\omega_1 \geq 0$ . Импульс  $p_2^\perp$ , передаваемый столу в момент удара, определяется по конечной скорости параллелепипеда  $\omega_2$ .

## **Прецессия**

5.35. Тонкий однородный стержень с длиной  $l$  и массой  $m$ , верхний конец которого укреплен в шарнире О, равномерно вращается вокруг вертикальной оси, отклонившись от неё на угол  $\theta$  (рис. 5.13). Найдите угловую скорость стержня  $\omega$  и горизонтальную силу  $F$ , действующую на него в шарнире.

Ответ:  $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l \cos(\theta)}}, F = \frac{3}{4}mg \operatorname{tg}(\theta).$

Указание. Рассмотрите условия равновесия стержня в системе отсчёта, которая вращается вместе с ним со скоростью  $\omega$ . Результирующую центробежных сил, действующих на малые элементы стержня, и результирующий момент этих сил относительно шарнира  $O$  найдите интегрированием.

5.36. Решите задачу 5.35 в лабораторной (инерциальной) системе отсчёта, рассматривая прецессию вектора момента импульса стержня  $\mathbf{L}$  относительно точки  $O$ , происходящую под действием момента силы тяжести  $\mathbf{M}$  относительно той же точки.

5.37. Волчок с массой  $m$  и моментом инерции  $J$  относительно своей оси симметрии быстро вращается вокруг неё со скоростью  $\omega$ . Какой будет угловая скорость  $\Omega$  прецессии волчка под действием силы тяжести, если его ось наклонена под углом  $\theta$  к вертикали, а расстояние между центром масс и точкой опоры равно  $l$ ? Найдите также горизонтальную силу реакции  $F$ , действующую на волчок в этой точке.

Ответ:  $\Omega = \frac{mgl}{J\omega}, F = m\Omega^2 l \sin(\theta).$

5.38. Маховик с моментом инерции  $J$  вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей оси симметрии, укрепленной горизонтально в подшипниках подставки. Расстояние между подшипниками равно  $l$ . Подставку поворачивают вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\Omega$ . Найдите величину и направление вертикальных сил  $F$  давления оси на подшипники. Нужен ли момент внешних сил для равномерного вращения подставки?

Ответ:  $F = J\omega\Omega/l.$

5.39. Диск массой  $m$  с радиусом  $R$  катится без скольжения с угловой скоростью  $\omega$  по горизонтальной плоскости, имея постоянный угол наклона  $\theta$  к вертикали. Найдите радиус

окружности  $r$ , описываемой центром диска при его движении, полагая выполненным условие  $r \gg R$ , а также его угловую скорость  $\Omega$  и горизонтальную силу  $F$ , действующую на диск со стороны плоскости в точке касания. Какому ограничению должен удовлетворять в данном случае угол  $\theta$ ?

$$\text{Ответ: } r = \frac{3\omega^2 R^2}{2g \cdot \operatorname{tg}(\theta)}, \quad \Omega = \frac{2g \cdot \operatorname{tg}(\theta)}{3\omega R}, \quad F = \frac{2mg \cdot \operatorname{tg}(\theta)}{3},$$

$$\operatorname{tg}(\theta) \ll \omega^2 R/g.$$

Указания. Поскольку кривизна описываемой окружности мала, то для линейной скорости центра диска  $C$  справедливо равенство  $v_C = \omega R$ . Отсюда следует, что  $\omega \gg \Omega$ . Учитывая это, рассмотрите прецессию вектора момента импульса  $L$  диска вокруг вертикали. Используйте теорему о движении центра масс и уравнение моментов, взятых относительно точки  $C$ .

### ***Динамика систем***

5.40. Однородный гладкий стержень массой  $m$  с длиной  $l$  свободно вращался с угловой скоростью  $\omega_0$  в горизонтальной плоскости вокруг неподвижной вертикальной оси  $O$ , проходящей через его конец. От этого конца по стержню начинает скользить небольшая муфта массой  $m_1$ . Пренебрегая трением в оси  $O$ , найдите продольную скорость муфты  $v'$  на противоположном конце стержня и угол  $\alpha$ , под которым она слетит с него в лабораторной системе отсчёта.

$$\text{Ответ: } v' = \omega_0 l / \operatorname{ctg}(\alpha), \quad \operatorname{ctg}(\alpha) = \sqrt{1 + 3m_1/m}.$$

Указание. Учтите изменение момента инерции системы и угловой скорости стержня  $\omega$  согласно закону сохранения момента импульса.

5.41. На стержень из задачи 5.40 в состоянии покоя была надета муфта массой  $m_1$ , соединенная с осью  $O$  невесомой пружинкой жесткостью  $\chi$  и длиной  $l_0$ , где  $l_0 < l$ . Дополнительно к пружинке муфту привязали к этой оси нерастяжимой нитью той же длины  $l_0$ . После раскручивания стержня до угловой скорости  $\omega_0$  нить пережгли, предоставив систему самой себе. Найдите

квадрат продольной скорости муфты  $v'$  в зависимости от растяжения пружинки  $s$ . Скорость  $\omega_0$  не слишком велика, так что выполняется условие  $s < l - l_0$ .

Ответ:  $v'^2 = \frac{J_0 \omega_0^2 s (2l_0 + s)}{J_0 + m_1 s (2l_0 + s)} - \frac{\chi s^2}{m_1}$ , где  $J_0 = \frac{ml^2}{3} + m_1 l_0^2$ .

Указание. Примените законы сохранения момента импульса и полной энергии системы тел для их начального и произвольного положений в лабораторной системе отсчёта.

Замечание. Величина  $s_{\max}$  наибольшего растяжения пружинки является корнем кубического уравнения, следующего из условия  $v' = 0$ .

5.42. Концу палочки с массой  $m$  и длиной  $l$ , лежавшей на гладком столе, был сообщён перпендикулярно её оси горизонтальный импульс  $p$ . Найдите приобретённую палочкой угловую скорость  $\omega$  и кинетическую энергию  $K$ ? На каком расстоянии  $r$  от центра палочки  $C$  будет находиться мгновенная ось  $O$  её вращения?

Ответ:  $\omega = 6p/ml$ ,  $K = 2p^2/m$ ,  $r = l/6$ .

Указание. Примените законы сохранения импульса и момента импульса, взятого относительно мгновенной оси вращения или относительно оси, проходящей через центр масс.

5.43. Однородный шест с массой  $m$  и длиной  $l$  подвешен своим верхним концом в шарнире  $O$ . Нижний конец шеста пробивает горизонтально летевшая пуля массой  $m_1 \ll m$ , после чего он отклоняется на угол  $\theta$ . Время пролёта пули сквозь шест —  $\Delta t$ , а её скорость на вылете —  $v_2$ . Найдите первоначальную скорость пули  $v_1$  и горизонтальную силу реакции  $F$  со стороны шарнира. Отклонением шеста за время пролёта пули сквозь него и трением в шарнире пренебrecь.

Ответ:  $v_1 \approx v_2 + \frac{m}{m_1} \sqrt{\frac{2gl}{3}} \sin(\theta/2)$ ,  $F = \frac{m}{\Delta t} \sqrt{\frac{gl}{6}} \sin(\theta/2)$ .

Замечания. Во время пролёта пули сквозь шест сохраняется момент импульса системы  $L$  относительно точки  $O$ , а после

него — полная энергия системы  $E$ . Сила реакции  $F$  в шарнире определяется по приращению импульса  $\Delta P$  системы.

5.44. Рассмотрите задачу 5.43 в предположении, что пуля попадает в шест на расстоянии  $x$  от его верхнего конца и застревает там. Полагая, что она летела с известной скоростью  $v_1$ , найдите импульс  $\Delta P$ , приобретаемый шестом в шарнире. При каком значении  $x$  шарнир не испытает удара?

Ответ:  $\Delta P \approx m_1 v_1 \left( \frac{3x}{2l} - 1 \right)$ ,  $x \approx \frac{2}{3}l$ .

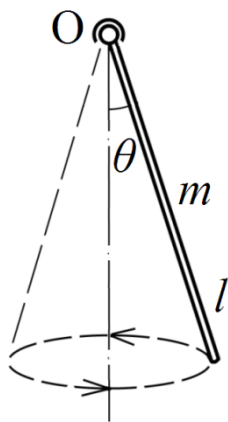


Рис. 5.13

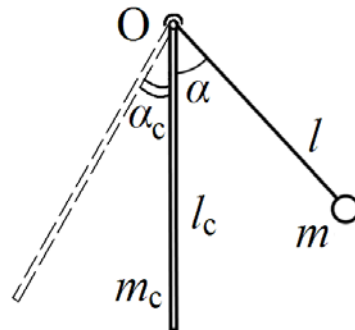


Рис. 5.14

5.45. Однородный стержень с массой  $m$  и длиной  $l$  подвешен своим верхним концом в шарнире и может свободно поворачиваться в нём. В нижний конец стержня попадает горизонтально летевший шарик с массой  $m_0 < m/3$ , который отскакивает назад. После чего стержень отклоняется на угол  $\theta$ . Найдите скорость шарика  $v_1$  до и  $v_2$  после удара, полагая его абсолютно упругим.

Ответ:  $v_1 = (m/m_0 + 3)f(\theta)$ ,  $v_2 = (m/m_0 - 3)f(\theta)$ ,  
где  $f(\theta) = \sqrt{gl/6} \sin(\theta/2)$  — вспомогательная функция.

5.46. Однородный стержень с массой  $m_c$  и длиной  $l_c$  подвешен шарнирно за свой верхний конец в точке  $O$ . К той же точке на нити длиной  $l < l_c$  был подвешен шарик массой  $m$  (рис. 5.14). Шарик отклонили на угол  $\alpha$  и отпустили. Найдите угловые скорости стержня  $\omega_c$  и шарика  $\omega_2$  сразу после соударения,

полагая его абсолютно упругим. При каком отношении длин  $l/l_c$  шарик после удара остановится? На какой угол  $\alpha_c$  в этом случае отклонится стержень, если трением в шарнире пренебречь?

$$\text{Ответ: } \omega_c = \frac{2\omega_1}{1+\eta}, \quad \omega_2 = \frac{1-\eta}{1+\eta}\omega_1, \quad \eta = \frac{J_c}{J}, \quad \omega_1 = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sin(\alpha/2),$$

$$l/l_c = \sqrt{\frac{m_c}{3m}}, \quad \sin(\alpha_c/2) = \sqrt{\frac{2l_c}{3l}}\sin(\alpha/2).$$

Здесь  $\omega_1$  – угловая скорость шарика перед ударом,  $J_c$  и  $J$  – моменты инерции стержня и шарика относительно точки О.

Указание. Для процесса соударения примените законы сохранения энергии и момента импульса системы относительно точки О.

5.47. В условиях задачи 5.46 найдите угловые скорости шарика  $\omega$  и стержня  $\omega_{c2}$  сразу после их абсолютно упругого соударения, если вместо шарика первоначально будет отклонён стержень на угол  $\alpha_c$ . При каком отношении длин  $l_c/l$  стержень после удара остановится? Трением в шарнире пренебречь?

$$\text{Ответ: } \omega = \frac{2\omega_{c1}}{1+\xi}, \quad \omega_{c2} = \frac{1-\xi}{1+\xi}\omega_{c1}, \quad \xi = \frac{J}{J_c}, \quad \omega_{c1} = \sqrt{\frac{6g}{l_c}}\sin(\alpha_c/2),$$

$$l_c/l = \sqrt{3m/m_c}.$$

Здесь  $\omega_{c1}$  – угловая скорость стержня перед ударом,  $J$  и  $J_c$  – моменты инерции шарика и стержня относительно точки О.

## 6. МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ

- Основное уравнение динамики идеальной жидкости (Эйлер):

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \text{grad } P,$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $\mathbf{f}$  – объемная плотность массовых сил ( $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}$  для силы тяжести),  $P$  – давление. При  $\mathbf{v} = 0$  уравнение Эйлера превращается в уравнение гидростатики.

- Интеграл Бернулли для линии тока стационарного течения:

$$\frac{v^2}{2} + u + \frac{P}{\rho} = \text{const},$$

где  $u$  – удельная потенциальная энергия ( $u = gz$  для силы тяжести).

- Уравнение сплошности для двух сечений трубки тока:

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2.$$

- Закон вязкости для плоского течения жидкости (Ньютон):

$$\tau_{xy} = \eta \frac{dv_x}{dy},$$

где  $\tau_{xy}$  – касательное напряжение,  $\eta$  – коэффициент вязкости.

- Число Рейнольдса:  $Re = \rho v l / \eta$ , где  $l$  – характерный размер.
- Формула Пуазейля для объёмного расхода  $Q$  жидкости через поперечное сечение трубки:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{P_1 - P_2}{l},$$

где  $R$  и  $l$  – радиус и длина трубки,  $P_1, P_2$  – давления на её концах.

## ***Статика. Динамика идеальной жидкости***

6.1. Представляя Землю как гигантский жидкий шар радиусом  $R = 6370$  км с плотностью  $\rho_0 = 5 \text{ г/см}^3$ , получите зависимость давления  $P$  от расстояния  $r$  до центра Земли и вычислите его там. Атмосферным давлением и вращением Земли пренебречь.

Ответ: 
$$P = \frac{1}{2} \rho_0 g_0 R \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Указание. Используя формулу для ускорения свободного падения  $g = g_0 r/R$ , проинтегрируйте уравнение гидростатики.

6.2. На какую величину  $\Delta P$  уменьшается давление в центре Земного шара из-за его вращения вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ ? Какая высота  $h$  гор с плотностью  $\rho_1 = 2.5 \text{ г/см}^3$  бу-



дет создавать такое же давление? Землю представлять однородным жидким шаром с плотностью  $\rho_0 = 5 \text{ г/см}^3$  и радиусом  $R = 6370 \text{ км}$ .

$$\text{Ответ: } \Delta P = \frac{\rho_0 (\omega R)^2}{2}, \quad h = \frac{\Delta P}{\rho_1 g_0}.$$

Указание. Пренебрегая изменением формы Земли за счёт вращения, запишите дифференциальное уравнение равновесия жидкого вещества в экваториальной плоскости в проекции на радиальное направление для случаев вращения планеты и его отсутствия.

6.3. Учитывая вращение Земли с угловой скоростью  $\omega$ , в условиях задачи 6.1 найдите разницу в расстояниях  $R_{\text{э}}$  и  $R_{\text{п}}$  от поверхности до центра Земли на экваторе и полюсах. Влиянием несферичности Земли на её поле тяготения пренебечь.

$$\text{Ответ: } R_{\text{э}} - R_{\text{п}} \approx \frac{(\omega R_{\text{э}})^2}{2g_0},$$

где  $g_0$  – ускорение свободного падения на поверхности Земли.

Указание. Проинтегрируйте уравнение гидростатики, записанное для земного шара во вращающейся системе отсчета в проекциях на экваториальную плоскость и Земную ось.

6.4. Идеальная жидкость с плотностью  $\rho$  стационарно течёт по плоскому горизонтальному жёлобу шириной  $b$ , который плавно поворачивает на угол  $90^\circ$  (рис. 6.1). Внутренний радиус закругления равен  $R_1$ , внешний –  $R_2$  с общим центром в точке О. Найдите скорость  $v$  и давление  $P$  в среднем сечении ВВ' закруглённой части жёлоба в зависимости от радиальной координаты  $r$ . Линии тока в этой части жёлоба приближенно полагайте дугами окружностей с центром в точке О. Скорость  $v_0$  и давление  $P_0$  в удалённом сечении АА' считайте постоянными.

$$\text{Ответ: } v = \frac{c}{r}, \quad P = P_0 + \frac{\rho}{2} \left( v_0^2 - \frac{c^2}{r^2} \right), \quad \text{где } c = \frac{v_0 b}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Указания. Возьмите в сечении  $BB'$  уравнение Эйлера в проекции на радиальное направление. Используйте интеграл Бернулли. Учтите равенство объёмных расходов жидкости в сечениях  $AA'$  и  $BB'$ .

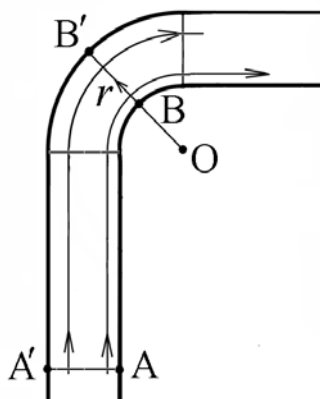


Рис. 6.1

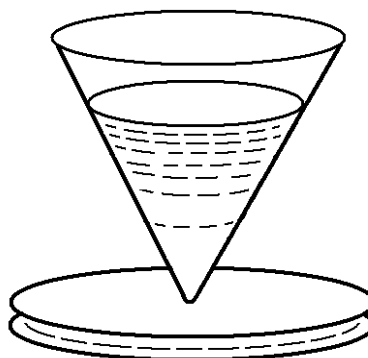


Рис. 6.2

6.5. Как будет меняться скорость  $v$  и давление  $P$  идеальной жидкости, текущей по горизонтальной трубе переменного сечения  $S$ , если в её входном сечении площадью  $S_1$  эти параметры будут равны  $v_1$  и  $P_1$ ? Каким будет в сечении  $S$  число Рейнольдса  $Re$ , если учесть небольшую вязкость жидкости  $\eta$ ? При каком объёмном расходе  $Q$  течение в круглом сечении трубы  $S$  ещё будет ламинарным?

Ответ:  $v = \frac{v_1 S_1}{S}$ ,  $P = P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} \left( 1 - \frac{S_1^2}{S^2} \right)$ ,  $Re = \frac{\rho v_1 S_1}{\eta \sqrt{\pi S}}$ ,  
 $Q < 10^3 (\eta / \rho) \sqrt{\pi S}$ .

6.6. Идеальная жидкость с плотностью  $\rho$  течёт по горизонтальной трубе переменного сечения в сторону её сужения. Найдите объёмный расход  $Q$  жидкости через поперечное сечение трубы, если разность давлений  $P_1 - P_2$  между входным  $S_1$  и выходным  $S_2$  сечениями трубы составляет величину  $\Delta P > 0$ ?

Ответ:  $Q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2 \Delta P}{\rho (S_1^2 - S_2^2)}}$ .

6.7. Какую величину  $S_1/S_2$  составит сжатие потока идеальной жидкости плотностью  $\rho$  при переходе из горизонтальной трубы с поперечным сечением  $S_1$  в её расширение, если давление при этом упадёт на величину  $\Delta P$ . Начальная скорость жидкости в трубе  $v_1$ .

$$\text{Ответ: } S_1/S_2 = \sqrt{1 + \frac{2\Delta P}{\rho v_1^2}},$$

где  $S_2$  – площадь поперечного сечения притоленной струи в расширении трубы.

6.8. С какой силой  $F$  действует на сужающуюся часть горизонтальной трубы идеальная жидкость при её установившемся течении между прямыми отрезками трубы с поперечным сечением  $S_1$  и  $S_2$ , в которых соответственно поддерживается давление  $P_1$  и  $P_2$ ?

$$\text{Ответ: } F = (P_1 S_1 + P_2 S_2)(S_1 - S_2)/(S_1 + S_2).$$

Указания. Составьте уравнение баланса импульса для жидкости, заключенной между сечениями  $S_1$ ,  $S_2$ , учитывая как его перенос через них, так и действие внешних сил, включая силу  $F'$ , действующую со стороны стенки трубы. При установившемся течении импульс жидкости в выделенной части трубы не будет меняться. Используйте интеграл Бернулли, уравнение сплошности и третий закон Ньютона:  $F' = -F$ .

6.9. С какой силой  $F_0$  будет действовать на сужающуюся часть трубы в задаче 6.8 наружный воздух, если его давление равно  $P_0$ ?

$$\text{Ответ: } F_0 = P_0 (S_2 - S_1).$$

Указание. Запишите уравнения равновесия выделенной части пустой трубы и воздуха в ней.

6.10. В узком зазоре шириной  $\delta$  между двумя соосными горизонтальными дисками радиусом  $R_2$  течёт жидкость, которая поступает туда из открытой воронки через небольшое отверстие

радиусом  $R_1$ , проделанное в середине верхнего диска (рис. 6.2). Пренебрегая вязкостью, найдите среднюю скорость  $v_1$  и давление  $P_1$  в этом отверстии, если высота жидкости в воронке равна  $h$ , а давление наружного воздуха –  $P_0$ .

Ответ:  $v_1 = c\sqrt{2gh}$ ,  $P_1 = P_0 + \rho gh(1 - c^2)$ , где  $c = 2\delta R_2 / R_1^2$ .

Указания. Площадь открытой части зазора  $S_2$ , через которую вытекает жидкость, считайте малой по сравнению с площадью  $S_0$  свободной поверхности жидкости в воронке. Течение полагайте квазистационарным.

6.11. Пластиковую бутылку в форме цилиндра диаметром  $D = 9$  см и высотой  $h = 24$  см наполнили водой. Не закрывая её, в дне проделали круглое отверстие диаметром  $d = 0.4$  см. Каково время  $t_k$  вытекания всей воды?

Ответ:  $t_k = \sqrt{\frac{2h}{g} \left( \frac{D^4}{d^4} - 1 \right)}$ .

Замечания. Ответ получен с помощью интеграла Бернулли в предположении квазистационарности течения. Однако при  $d \sim D$  течение в бутылке таковым не будет. Для этого случая ответ должен быть другим, что предлагается проверить на опыте.

6.12. Горизонтальная трубка АВ длиной  $l$ , заполненная идеальной жидкостью, быстро вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей через её открытый конец А. На другом первоначально закрытом конце В открывается отверстие, площадь которого  $\sigma$  мала по сравнению с площадью  $S$  поперечного сечения трубки. Найдите скорость  $v_B$  истечения жидкости через отверстие в зависимости от положения  $r$  её свободной поверхности в трубке и полное время истечения  $t_k$ .

Ответ:  $v_B = \omega\sqrt{l^2 - r^2}$ ,  $t_k = \frac{\pi S}{2\sigma\omega}$ .

Указания. Определите удельную потенциальную энергию во вращающейся системе отсчета. Учитывая её, примените интеграл Бернулли.

6.13. Порожный танкер с массой  $M$  получил в днище небольшую пробоину площадью  $\sigma$ . Первоначальная высота борта танкера над уровнем воды составляла величину  $\Delta h$ . Через какое время  $t_k$  он потонет, если при погружении в море не будет опрокидываться? Для простоты площадь горизонтального сечения танкера  $S$  считайте постоянной (рис. 6.3).

Ответ:  $t_k = \frac{S\Delta h}{\sigma} \sqrt{\frac{\rho S}{2Mg}}$ .

Указания. Запишите условие плавучести, используя вспомогательные переменные:  $h_0$  – осадку танкера и  $h_n$  – высоту столба натекшей в него воды. Задав скорость погружения  $u$  танкера, в его системе отсчета примените интеграл Бернулли к линии тока, начинающейся в невозмущенной области под пробоиной и оканчивающейся в ней. Давление на притопленную струю, бьющую из пробоины внутрь танкера, определите, полагая состояние остальной воды в нём близким к статическому. Выражая скорость воды  $v$  в пробоине через величины  $h_0$  и  $h_n$ , покажите, что она постоянная. Скорость погружения  $u$  равную скорости подъёма воды в танкере определите с помощью уравнения сплошности.

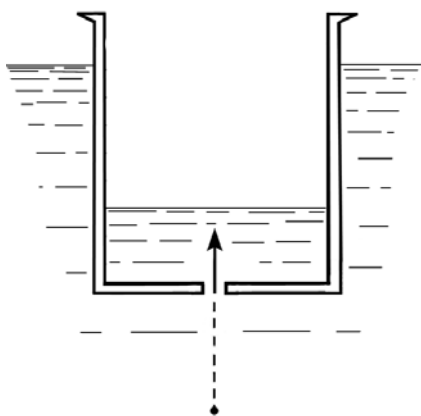


Рис. 6.3

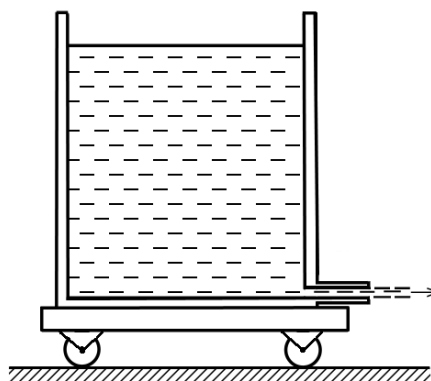


Рис. 6.4

6.14. Тонкостенный цилиндрический сосуд с площадью горизонтального сечения  $S$  заполнили водой до высоты  $h$ . Как будет понижаться с течением времени  $t$  её уровень  $y$ , если в бо-

ковой стенке у дна сосуда открыть отверстие площадью  $\sigma \ll S$ ? Каково время  $t_k$  вытекания всей воды? Вязкостью пренебречь.

$$\text{Ответ: } y = \left( \sqrt{h} - \frac{\sigma}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t \right)^2, \quad t_k = \frac{S}{\sigma} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

6.15. Сосуд из задачи 6.14 перед открыванием отверстия поставили на легкоподвижную тележку массой  $m_0$  (рис. 6.4). Как будет меняться скорость тележки  $u$  в зависимости от уровня воды  $y$  в сосуде, если вытекающая вода не будет попадать на тележку?

$$\text{Ответ: } \frac{u}{2\sqrt{2gb}} = f(\sqrt{h/b}) - f(\sqrt{y/b}), \quad f(z) = z - \arctg(z),$$

где  $b = m_0/(\rho S)$ ,  $\rho$  – плотность воды.

Указания. При малой площади отверстия сила инерции, действующая на жидкость в системе отсчёта, связанной с тележкой, мала по сравнению с силой тяжести, и свободная поверхность жидкости в сосуде почти горизонтальна. Поэтому скорость струи  $v$  можно выразить по формуле Торричелли. Далее, используя уравнение сплошности, в уравнении Мещерского надо перейти к переменным  $u$ ,  $y$ . Разделяя их, проинтегрируйте полученное уравнение с начальным условием  $u = 0$  при  $y = h$ .

### ***Вязкая жидкость***

6.16. В зазоре (промежутке) между двумя неподвижными горизонтальными пластинами прямоугольной формы параллельно их ребру длиной  $a$  течёт жидкость с вязкостью  $\eta$ . Расстояние  $\delta$  между пластинами мало по сравнению с их шириной  $b$  (поперечный размер). Полагая профиль скорости течения  $v_x(y)$  параболическим, найдите его и касательное напряжение  $\tau_{xy}$  на пластинах, если объемный расход жидкости через поперечное сечение зазора равен  $Q$ .

$$\text{Ответ: } v_x(y) = cy(\delta - y), \quad \tau_{xy} = c\eta\delta, \quad c = \frac{6Q}{b\delta^3},$$

где вертикальная координата  $y$  отсчитывается от нижней пластины.

Указание. Используйте условие прилипания жидкости на пластинах и закон вязкости Ньютона.

6.17. Какой разностью давлений  $\Delta P$  может быть обеспечено течение жидкости между пластинами в задаче 6.16?

Ответ:  $\Delta P = \frac{12a\eta Q}{b\delta^3}$ .

Указание. Учитывая неизменность импульса жидкости, находящейся между пластинами, запишите условие равновесия сил давления во входном и выходном сечениях зазора и сил вязкого трения на пластинах.

6.18. При стационарном течении газа между пластинами в условиях задачи 6.16 ввиду его сжимаемости одинаковым во всех поперечных сечениях зазора будет не объёмный  $Q$ , а массовый расход  $G = \rho Q$ . Выразите его величину через давления  $P_1$  и  $P_2$  во входном и выходном сечениях зазора, полагая течение газа изотермическим.

Ответ:  $G = \frac{b\delta^3 \mu}{24a\eta RT} (P_1^2 - P_2^2)$ ,

где  $\mu$  — молярная масса газа,  $R$  — универсальная газовая постоянная.

Указания. Запишите условие равновесия сил давления, действующих на газ, находящийся между двумя близкими сечениями зазора с координатами  $x$  и  $x + dx$ , и сил вязкого трения на пластинах. По ответу задачи 6.16 выразите касательное напряжение  $\tau_{xy}$  на пластинах через объёмный  $Q$ , а потом и массовый расход  $G$ . Используя уравнение состояния, получите дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными  $P$ ,  $x$ . Проинтегрируйте его с граничными условиями  $P(0) = P_1$ ,  $P(a) = P_2$ .

6.19. Получите профиль скорости  $v_x(y)$ , приведённый в ответе задачи 6.16, рассматривая условие равновесия сил давления и вязкого трения, действующих на произвольный прямоугольный

элемент жидкости толщиной  $dy$ , выделенный между двумя близкими сечениями зазора с координатами  $x$  и  $x + dx$ . Давление в данных сечениях полагайте постоянным.

6.20. В противень налит слой масла толщиной  $h = 2 \text{ мм}$  с плотностью  $\rho = 0.9 \text{ г/см}^3$ . Какова его вязкость  $\eta$ , если при наклоне противня на угол  $\alpha = 4^\circ$  по отношению к горизонту скорость соринок на поверхности масла составляет  $v_{\max} = 1.25 \text{ мм/с}$ ?

Ответ:  $\eta = \frac{\rho g h^2}{2 v_{\max}} \sin(\alpha)$ .

Указания. Выделите в жидкости произвольный элемент в виде тонкого параллелепипеда толщиной  $dy$ , где  $y$  – поперечная координата, отсчитываемая от противня. Запишите уравнение равновесия приложенных к элементу сил тяжести и вязкости в проекции на направление движения. Дважды проинтегрируйте его, используя условие  $\tau_{xy} = 0$  на свободной поверхности масла и условие его прилипания к противню. Профиль скорости будет иметь вид  $v_x(y) = cy(2h - y)$ , где  $c = \rho g \cdot \sin(\alpha) / (2\eta)$ .

6.21. Скорость течения на поверхности реки  $v_{\max} = 0.5 \text{ м/с}$ . Её глубина  $h = 10 \text{ м}$ , а уклон русла  $k$  составляет  $7 \text{ см}$  на  $1 \text{ км}$ . Полагая эффективный коэффициент “турбулентной” вязкости  $\eta_{\text{эф}}$  величиной постоянной, соотнесите его с коэффициентом вязкости воды  $\eta = 1 \text{ сПз}$ .

Ответ:  $\frac{\eta_{\text{эф}}}{\eta} = \frac{\rho g h^2 k}{2 v_{\max} \eta}$ .

Указания. Закон турбулентного трения можно записать в форме ньютоновского закона вязкости, а далее использовать методику решения, данную в указаниях к задаче 6.20.

6.22. Массивный поршень с плотностью  $\rho$  и радиусом  $R$  медленно опускается в открытой с обоих концов гладкой вертикальной трубе. Узкий зазор шириной  $\delta$  между поршнем и



стенкой трубы заполнен жидкой смазкой с коэффициентом вязкости  $\eta$ . Найдите скорость  $u$  опускания поршня.

Ответ:  $u = \frac{\rho g R \delta}{2\eta}$ .

Указания. Ввиду неравенства  $\delta \ll R$  движение смазки в зазоре будет иметь линейный профиль скорости  $v_x(y)$  по отношению к осям координат  $x, y$ , которые направлены соответственно вниз и перпендикулярно стенке трубы. Учитывая условия прилипания смазки к поверхности трубы и поршня, получите выражение для касательного напряжения  $\tau_{xy}$  в зазоре. Запишите уравнение равновесия приложенных к поршню сил тяжести и вязкости.

6.23. В открытом сверху цилиндрическом сосуде диаметром  $D$  под лёгким поршнем массой  $m$  находится воздух. Толщина поршня равна  $h$ , а первоначальная высота его над дном сосуда —  $H$ . Полагая избыточное давление  $\Delta P$  (не дано) воздуха в сосуде небольшим (по сравнению с атмосферным), найдите время  $t_k$  опускания поршня на дно сосуда. Ширину зазора  $\delta$  между поршнем и стенкой цилиндра считайте постоянной, а коэффициент вязкости воздуха равным  $\eta$ .

Ответ:  $t_k = \frac{3\pi\eta h H}{4mg} \left(\frac{D}{\delta}\right)^3$ .

Замечания. Ввиду неравенства  $\delta \ll D$  профиль скорости  $v_x(y)$  течения газа в зазоре будет параболическим. Пренебрегая сжимаемостью газа и движением поршня, его можно представить в виде  $v_x(y) = cy(\delta - y)$ , где  $y$  — поперечная координата,  $c$  — неизвестная постоянная. Касательное напряжение  $\tau_{xy}$  на стенках в зазоре также будет постоянным. По закону Ньютона его легко выразить через постоянную  $c$ .

Указания. При установившемся движении поршня и газа в зазоре приложенные к ним силы должны уравновешиваться. Соответствующие уравнения имеют вид

$$mg = \Delta P \cdot S_0 + \tau_{xy} \cdot S_6, \quad 2\tau_{xy} S_6 = \Delta P \cdot S_3,$$

где  $S_0$ ,  $S_6$ ,  $S_3$  – площади основания поршня, его боковой поверхности и поперечного сечения зазора. Полагая  $\delta \ll h$ , из данных уравнений найдите величину  $\tau_{xy}$ , а затем неизвестную  $c$  и объёмный расход газа  $Q$  через зазор (см. ответ задачи 6.16). Приравняйте объёмы первоначального газа в сосуде и газа, протекшего через зазор за всё время  $t_k$ .

6.24. В открытом сверху вертикальном цилиндре диаметром  $D$  находится легкоподвижный поршень с массой  $m$  и толщиной  $h$ , в котором просверлено узкое отверстие диаметром  $d$ . Пренебрегая сжимаемостью воздуха и трением поршня о стенки цилиндра, найдите скорость  $u$  опускания поршня. Коэффициент вязкости воздуха –  $\eta$ .

Ответ:  $u = \frac{mgd^4}{8\pi h D^4 \eta}$ .

Указание. Полагая течение воздуха в отверстии вязким, используйте формулу Пуазейля.

6.25. Из широкого сосуда по тонкой горизонтальной трубке длиной  $l$  и радиусом  $a$  вытекает жидкость, уровень которой в сосуде (над трубкой) равен  $h$ . Найдите объёмный расход жидкости  $Q$ , если её кинематический коэффициент вязкости равен  $\nu$ .

Ответ:  $Q = -8\pi\nu l + \sqrt{(8\pi\nu l)^2 + 2\pi^2 g h a^4}$ .

Указания. Пренебрегите внутренним трением жидкости в сосуде. Профиль скорости на входе в трубку считайте плоским, а длину участка установления в ней параболического профиля скорости – малой по сравнению с  $l$ .

6.26. Из широкого сосуда А по тонкой горизонтальной трубке В длиной  $l$  и радиусом  $a$ , находящейся у дна сосуда (рис. 6.5), вытекает жидкость. Уровень её в сосуде равен  $h$ , а в вертикальной трубке С, отстоящей на расстоянии  $l_1$  от выходного отверстия трубки В, равен  $h_1$ . Найдите кинематический коэффициент  $\nu$  вязкости жидкости.

Ответ: 
$$v = \frac{gh_1 a^2}{8\sqrt{2gl_1(hl_1 - h_1l)}}.$$

Указания. Пренебрегите внутренним трением жидкости в сосуде. Профиль скорости на входе в трубку В считайте плоским, а длину участка установления в ней параболического профиля скорости – малой по сравнению с расстоянием до трубки С.

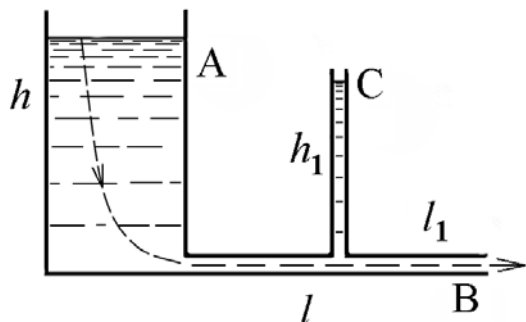


Рис. 6.5

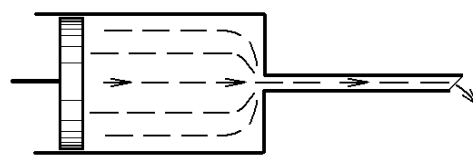


Рис. 6.6

6.27. Какую работу  $A$  надо совершить постоянной силой, чтобы выдавить из шприца за время  $t$  (рис. 6.6) лекарственную жидкость объёмом  $V$  через иглу длиной  $l$  с малой площадью поперечного сечения  $\sigma$ ? Трением поршня о стенки шприца и силой тяжести пренебречь.

Ответ: 
$$A = \frac{\rho V^3}{2(\sigma t)^2} + \frac{8\pi\eta l V^2}{\sigma^2 t},$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $\eta$  – её коэффициент вязкости.

Указания. Пренебрегая внутренним трением жидкости в широкой части шприца, используйте интеграл Бернулли. Её течение в игле полагайте всюду вязким и примените формулу Пуазейля.

Замечание. Полезно решить задачу в упрощённых вариантах: а) шприц без иглы, б) очень длинная игла. В ответе должны остаться соответственно первое и второе слагаемые.

6.28. У крышки люка космического аппарата с внутренним объёмом  $V$  образовался зазор шириной  $\delta$  с горловиной, через который воздух стал выходить наружу. Как будет меняться его

давление  $P$  в аппарате, если течение газа в зазоре будет вязким, а весь процесс изотермическим? Движением газа в аппарате пренебречь.

$$\text{Ответ: } P = \frac{P_0}{1 + P_0 k t}, \quad k = \frac{b \delta^3}{24 a \eta V},$$

где  $P_0$  – начальное давление,  $t$  – время,  $a$  и  $b$  – глубина и длина зазора,  $\eta$  – коэффициент вязкости воздуха.

Указания. Запишите уравнение баланса массы воздуха в виде  $-dm = Gdt$ . Выразите массу газа  $m$  в аппарате по уравнению состояния, а массовый расход  $G$  через зазор по ответу задачи 6.18.

6.29. По периметру кольца уплотнения вакуумной камеры объёмом  $V$ , откачанной до давления  $P_1$ , возникла щель шириной  $\delta$ . По прошествии какого времени  $t$  давление в камере поднимется до значения  $P_2$ ? Течение наружного воздуха через щель полагайте вязким изотермическим. Его движением на подходе к щели пренебречь.

$$\text{Ответ: } t = \frac{1}{2P_0 k} \ln \left( \frac{P_0 - P_1}{P_0 - P_2} \cdot \frac{P_0 + P_2}{P_0 + P_1} \right), \quad k = \frac{\pi D \delta^3}{24 a \eta V},$$

где  $a$  – ширина кольца уплотнения,  $D$  – его средний диаметр, причём  $a \ll D$ ,  $\eta$  – вязкость воздуха.

Указания. Запишите уравнение баланса массы воздуха в виде  $dm = Gdt$ . Выразите массу газа  $m$  в камере по уравнению состояния, а массовый расход  $G$  через щель по ответу задачи 6.18.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### *Идея метода возмущений*

Физические явления обычно протекают под влиянием многих факторов. Однако немногие из них в конкретной ситуации оказываются определяющими, поскольку могут иметь разные масштабы, которые к тому же заранее неизвестны. Поэтому в науке решение любой сложной задачи проводится в несколько этапов.

Сначала путём анализа и численных оценок по порядку величины производится сравнение масштабов действующих факторов (в механике – сил). Выделяются главные из них, и задача рассматривается в первом, иногда весьма грубом приближении. Главное требование к такой задаче – её решаемость в общем (аналитическом) виде. В механике она называется задачей о невозмущённом движении, и получение интегралов её уравнений – необходимое условие дальнейших действий.

На следующем этапе в оставшейся группе как бы второстепенных факторов ещё раз выделяются более значимые и ставится задача о возмущающей поправке к основному решению. Уравнения для неё получаются из исходных путём разложения искомых величин на уже найденные (в первой задаче) и поправки.

При подстановке таких разложений в исходные уравнения часть членов (нулевого порядка) сокращается в силу решения первой задачи. Некоторые члены отбрасываются по причине их более высокого (второго) порядка малости. И тогда оставшиеся члены (первого порядка) оказываются связанными более простыми по сравнению с исходными уравнениями. Их решение и должно давать искомую поправку.

В научном исследовании на этом дело не кончается. Найденную поправку сопоставляют с невозмущённым решением. Если предварительные оценки масштабов были произведены правильно (удачно), то поправка будет значительно меньше невозмущённого решения. И тогда вопрос закрывается, или аналогично производится учёт других факторов. В противном случае происходит переоценка значимости действующих факторов и метод применяется в ином варианте.

Описанный подход в науке называется декомпозицией, а его детализация (алгоритм) – собственно методом возмущений.

### ***Пример применения метода***

В качестве примера рассмотрим решение задачи 2.28, повторив её условие:

Найдите величину  $\Delta x$  недолёта пули до цели, вызванного сопротивлением воздуха согласно формуле  $F_c = -cvv$ , где  $v$  – модуль скорости,  $c$  – положительная постоянная. Выстрел производится из точки  $O$  под углом  $\alpha$  к горизонту при начальной скорости  $v_0$  (рис. 2.15). Цель  $A$  находится на уровне стрелка.

Представим полный вектор  $v_{\Pi}$  скорости пули суммой

$$v_{\Pi} = v + u,$$

где  $v$  – скорость невозмущённого движения,  $u$  – возмущающая добавка, вызванная сопротивлением воздуха. Подставим данное выражение в уравнение движения

$$m \frac{dv_{\Pi}}{dt} = mg + F_c \quad (1)$$

и воспользуемся первым интегралом  $v = v_0 + gt$  задачи о невозмущённом движении, проекции которого на оси координат  $x$ ,  $y$  имеют вид

$$v_x = v_0 \cos(\alpha), \quad v_y = v_{y0} - gt, \quad \text{где } v_{y0} = v_0 \sin(\alpha). \quad (2)$$

Тогда из полного уравнения (1), пренебрегая членами второго порядка малости, получим следующее уравнение добавочного движения:

$$m \frac{du}{dt} = -cvv.$$

Поскольку мы интересуемся недолётом пули от цели по горизонтали, спроецируем полученное уравнение только на ось  $x$ :

$$m \frac{du_x}{dt} = -cv_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (3)$$

При подстановке сюда выражений (2) данное уравнение интегрируется по  $t$  путём выделения полного квадрата в подко-

ренном выражении. Однако он фактически уже выделен в виде величины  $v_y^2$ . Поэтому в уравнении (3) целесообразно перейти к новой монотонной переменной  $v_y$ , исключив время  $t$  посредством формулы  $dv_y = -gdt$ . Разделяя переменные  $u_x$  и  $v_y$ , получим

$$du_x = bv_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dv_y, \quad (4)$$

где  $b = c/(mg)$ .

Уравнение (4) интегрируется с помощью табличного интеграла [7]

$$\int r dx = \frac{x}{2} r + \frac{a^2}{2} \ln|x + r|, \text{ где } r = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Постоянная интегрирования определяется из начальных условий  $u_x = 0$ ,  $v_y = v_{y0}$  при  $t = 0$ . Окончательно имеем выражение

$$u_x = \frac{bv_x}{2} (v_y v - v_{y0} v_0) + \frac{bv_x^3}{2} \ln \left( \frac{v_y + v}{v_{y0} + v_0} \right), \quad (5)$$

где  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ .

Аналогично представим полный радиус-вектор  $r_{\Pi}$  пули суммой

$$r_{\Pi} = r + s,$$

где  $r$  – радиус-вектор невозмущённого движения,  $s$  – смещение пули, вызванное сопротивлением воздуха. Учитывая, что  $r = v_0 t + gt^2/2$ , выделим из первой кинематической формулы

$$\frac{dr_{\Pi}}{dt} = v_{\Pi} \text{ таковую же формулу } \frac{ds}{dt} = u$$

для добавочного движения и спроецируем её на ось  $x$ :

$$\frac{ds_x}{dt} = u_x.$$

Исключив отсюда время  $t$  с помощью той же замены переменных  $dv_y = -gdt$ , приведём последнюю формулу к виду удобному для интегрирования:

$$ds_x = -\frac{1}{g}u_x(v_y)dv_y, \quad (6)$$

где  $u_x(v_y)$  – найденная выше функция (5).

Уравнение (6) интегрируется с помощью табличного интеграла [7]

$$\int \ln(x+r)dx = x \ln(x+r) - r, \text{ где } r = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Постоянная интегрирования определяется из начальных условий  $s_x = 0$ ,  $v_y = v_{y0}$  при  $t = 0$ . Результат для удобства представим в виде

$$-\frac{2g}{bv_x}s_x = \frac{1}{3}v^3 - v_{y0}v_0v_y + v_x^2 \left[ v_y \ln \left( \frac{v_y + v}{v_{y0} + v_0} \right) - v \right] + \frac{2}{3}v_0^3, \quad (7)$$

где  $s_x$  – искомая функция от  $v_y$ .

Отсюда уже легко найти величину недолёта пули  $\Delta x = -s_x$  при её падении на землю, когда  $v_y = -v_{y0}$  и  $v = v_0$ . Подставляя эти значения в формулу (7), имеем

$$\frac{2g}{bv_x}\Delta x = 2v_0v_{y0}^2 + v_x^2v_{y0} \ln \left( \frac{v_0 + v_{y0}}{v_0 - v_{y0}} \right).$$

А, используя выражения (2), окончательно получаем ответ задачи в виде

$$\Delta x = \frac{bv_0^4}{g} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \left[ \sin(\alpha) + \frac{\cos^2(\alpha)}{2} \ln \left( \frac{1 + \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)} \right) \right].$$



## ОБОЗНАЧЕНИЯ

$t$  – время

$\mathbf{r}$  – радиус-вектор

$\varphi$  – вектор угла поворота

$\mathbf{v}$  – вектор скорости,  $v$  – его модуль

$\mathbf{w}$  – вектор ускорения,  $w$  – его модуль

$\boldsymbol{\omega}$  – вектор угловой скорости,  $\omega$  – его модуль

$\boldsymbol{\beta}$  – вектор углового ускорения,  $\beta$  – его модуль

$\mathbf{F}$  – вектор силы

$A$  – работа

$U$  – потенциальная энергия

$K$  – кинетическая энергия

$E$  – полная механическая энергия

$\mathbf{p}$  – вектор импульса

$\mathbf{L}$  – вектор момента импульса

$\mathbf{M}$  – вектор момента силы

$\gamma$  – гравитационная постоянная

$J$  – момент инерции

$\Omega$  – скорость прецессии

$\rho$  – плотность жидкости

$P$  – давление

$Q$  – объёмный расход

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 1: Механика. М.: Наука, 1974. 520 с.
2. Стрелков С. П., Сивухин Д. В., Угаров В. А., Яковлев И. Я. Сборник задач по общей физике: Механика / Под ред. И. Я. Яковлева. М.: Наука, 1977. 288 с.
3. Иродов И. Е. Задачи по общей физике. М.: Наука, 1979. 368 с.
4. Козел С. М., Рашба Э. И., Славатинский С. А. Сборник задач по физике: Задачи МФТИ. М.: Наука, 1978. 192 с.
5. Образованный учёный / Пер. с англ. А. В. Митрофанова. М.: Наука, 1979. 160 с.
6. Фейнмановские лекции по физике: Задачи и упражнения / Под ред. Я. А. Смородинского. М.: Мир, 1967. 208 с.
7. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1983. 176 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ И РЕКОМЕНДАЦИИ .....	4
1. КИНЕМАТИКА .....	6
Прямолинейное движение .....	7
Плоское движение .....	9
Задачи на достижение целей .....	13
Баллистика .....	16
Вращательное движение. Качение.....	19
2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПРОСТЫХ СИСТЕМ.....	23
Равноускоренное движение.....	24
Интегрирование уравнений движения .....	33
Вращающиеся системы отсчёта .....	37
3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ .....	43
Работа и энергия.....	44
Задачи с пружинками.....	52
Вращение тел .....	56
Столкновения .....	59
4. НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА .....	63
Всемирное тяготение .....	64
Манёвры на орбите .....	71
5. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА .....	75
Задачи с чистым вращением .....	76
Качение круглых тел.....	80
Равновесие, падение или опрокидывание тел.....	86
Прецессия.....	90
Динамика систем.....	92
6. МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ .....	95
Статика. Динамика идеальной жидкости.....	96
Вязкая жидкость .....	102
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	109
ОБОЗНАЧЕНИЯ .....	113
ЛИТЕРАТУРА.....	114

Учебное издание

**Митрофанов Виктор Анатольевич**

**Избранные задачи  
по механике**

*Учебное пособие*

Редактор, корректор М. В. Никулина  
Компьютерная верстка И. Н. Иванова

Подписано в печать 13.05.10. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бум. офсетная. Гарнитура "Times New Roman".  
Усл. печ. л. 6,74. Уч.-изд. л. 5,38.  
Тираж 150 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе  
Ярославского государственного университета  
им. П. Г. Демидова.

Отпечатано на ризографе.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.  
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.



**В. А. Митрофанов**

**Избранные задачи  
по механике**