

8161.55983
Н40

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. П. Г. ДЕМИДОВА

М. В. НЕВСКИЙ

УПРАЖНЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
"ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО"

Методические указания

Рекомендовано

*Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальности
"Компьютерная безопасность"*

ЯРОСЛАВЛЬ 2008

БИБЛИОТЕКА ЯрГУ
УЧЕБНЫЙ ФОНД

УДК 517.53/.55
ББК В161.55я73
Н 40

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2008 года*

Рецензент: кафедра теории функций и функционального анализа
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Невский, М. В. Упражнения по дисциплине "Теория функций комплексного переменного": метод. указания / М. В. Невский; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2008. – 60 с.

Методические указания содержат материалы по решению упражнений в рамках изучения дисциплины "Теория функций комплексного переменного". Предназначены для студентов специальности "Компьютерная безопасность".

© Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 2008
© М. В. Невский, 2008

Содержание

Предисловие	4
1. Комплексные числа	5
2. Изображение комплексных чисел	10
3. Функции e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$, $\ln z$	13
4. Дробно-линейная функция	17
5. Дифференцирование функций комплексного переменного	20
6. Интегрирование функций комплексного переменного	24
7. Области сходимости рядов	32
8. Разложение функций в ряды Тейлора и Лорана	35
9. Изолированные особые точки. Вычеты	40
10. Вычисление с помощью вычетов комплексных интегралов	46
11. Вычисление с помощью вычетов действительных интегралов	48
Литература	53
Приложения. О содержании дисциплины "Теория функций комплексного переменного"	54

Предисловие

В математике связь теории с конкретными задачами является, возможно, более тесной, чем в любой другой науке. Эта особенность математики проявляется и в постановке математического образования на всех уровнях. Поэтому и изучение дисциплины, называемой теорией функций комплексного переменного (ТФКП), должно сопровождаться решением учебных задач.

Настоящие методические указания предназначены студентам специальности "Компьютерная безопасность". Они содержат материалы по решению тех упражнений, которые, по мнению автора, относятся к первым и обязательным при ознакомлении с основами ТФКП, но, конечно, не исчерпывают всю эту совокупность.

Структура методических указаний следующая. В каждом пункте сначала излагаются нужные теоретические сведения (без доказательств), затем, как правило, даются примеры, после чего формулируются упражнения для самостоятельной работы. Однотипные задачи разбиты на 10 или 5 вариантов, что даёт возможность использовать их в контрольных заданиях. Для заинтересованных читателей приводятся некоторые дополнительные упражнения. Общее число всех упражнений — около 400.

В приложении даются некоторые методические материалы, ознакомление с которыми представляется полезным для студентов, начавших изучение ТФКП. К этим материалам относятся выдержки из Государственного образовательного стандарта, рабочей учебной программы, программы государственного междисциплинарного экзамена по специальности "Компьютерная безопасность", а также примерная программа зачёта по ТФКП.

Автор ни в коей мере не претендовал на новизну и оригинальность. Его главная задача заключалась в отборе, систематизации и ясном изложении материала в целях направления и облегчения самостоятельной работы студентов. Часть упражнений и примеров заимствована из задачникков [2 – 4]. При подготовке методических указаний использовались также книги [1, 5], которые могут быть рекомендованы студентам для систематического изучения дисциплины.

1. Комплексные числа

Для комплексного числа в алгебраической форме $z = x + iy$ его действительная часть, мнимая часть, модуль и сопряжённое число определяются равенствами

$$\operatorname{Re} z := x, \quad \operatorname{Im} z := y, \quad r = |z| := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \bar{z} := x - iy.$$

Равенство $z_1 = z_2$ по определению означает, что $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$, $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.

Основные операции с комплексными числами — их сложение и умножение:

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &:= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &:= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).\end{aligned}$$

В приложениях часто используются равенства

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z, \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z, \quad z\bar{z} = |z|^2,$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2,$$

неравенство треугольника $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, а также вытекающее из него соотношение $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

Для $z \neq 0$ любое число φ , удовлетворяющее условиям $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, называется аргументом z и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Значение φ из полуинтервала $[0, 2\pi)$ или из полуинтервала $(-\pi, \pi]$ называется главным значением аргумента и обозначается $\arg z$. Для числа $z = 0$ аргумент не определён.

Тригонометрическая форма комплексного числа даётся равенством $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Действия в тригонометрической форме имеют следующие свойства:

$$\begin{aligned}r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) &= \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \\ (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n &= r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),\end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (r_2 \neq 0). \tag{1.2}$$

Здесь $n \in \mathbb{N}$. Если $w^n = z$, полагают $\sqrt[n]{z} = w$. Существует ровно n различных значений этого корня. Если $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то значения $\sqrt[n]{z}$ имеют вид:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{1.3}$$

Полагая $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, переходим от тригонометрической формы комплексного числа к показательной форме: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$.

В этом и следующем пунктах считается $\arg z \in [0, 2\pi)$.

Пример 1.1.

$$\frac{-1 + 2i}{2 + 5i} = \frac{(-1 + 2i)(2 - 5i)}{(2 + 5i)(2 - 5i)} = \frac{8 + 9i}{29} = \frac{8}{29} + \frac{9}{29}i.$$

Пример 1.2. Решим уравнение $\operatorname{Im} z + |\bar{z} - 2z| \cdot i = 2i$.

Пусть $z = x + iy$. Тогда $\bar{z} = x - iy$, $\operatorname{Im} z = y$,

$$\begin{aligned} |\bar{z} - 2z| &= |x - iy - 2x - 2iy| = |-x - 3iy| = \\ &= \sqrt{(-x)^2 + (-3y)^2} = \sqrt{x^2 + 9y^2}. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение, получим:

$$y + \sqrt{x^2 + 9y^2} \cdot i = 2i.$$

Сравнение действительной и мнимой частей даёт $y = 0$, $\sqrt{x^2 + 9y^2} = 2$. Это означает, что $x = \pm 2$. Итак, $z = \pm 2$.

Пример 1.3. Пусть $z = 1$. Так как $\operatorname{Re} z = 1$, $\operatorname{Im} z = 0$, то $|z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$, $\arg z = 0$. Поэтому $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0) = e^{i \cdot 0}$. Аналогично

$$-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi) = e^{i\pi},$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i \cdot 7\pi/4},$$

$$3 + 4i = 5(\cos \alpha + i \sin \alpha) = 5e^{i\alpha}.$$

Здесь α — угол первой четверти, для которого $\cos \alpha = 3/5$.

Пример 1.4. Вычислим $(1 + i)^{25}$. Для этого переведём $z = 1 + i$ в тригонометрическую форму. Так как $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \pi/4$, то

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Применение (1.1) с $n = 25$ даёт:

$$\begin{aligned} z^{25} &= (\sqrt{2})^{25} \left(\cos \frac{25\pi}{4} + i \sin \frac{25\pi}{4} \right) = 2^{12} \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= 2^{12} \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2^{12} (1 + i). \end{aligned}$$

Пример 1.5. Пусть требуется найти все значения корня

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}.$$

Сначала переведём числитель и знаменатель в тригонометрическую форму, затем выполним деление по формуле (1.2) и, наконец, применим (1.3). Такой порядок действий является самым экономичным.

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right), \quad z_2 = \sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right),$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} (\cos 7\pi/4 + i \sin 7\pi/4)}{2 (\cos \pi/6 + i \sin \pi/6)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

Применение формулы (1.3) с $n = 6$ даёт:

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left(\cos \frac{19\pi/12 + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{19\pi/12 + 2k\pi}{6} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left(\cos \frac{19\pi + 24k\pi}{72} + i \sin \frac{19\pi + 24k\pi}{72} \right). \end{aligned}$$

Все значения w_k корня $\sqrt[6]{z}$ получаются, если взять последовательно $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

У п р а ж н е н и я

1) Вычислить, используя алгебраическую форму комплексного числа.

$$1.1. \quad \left| (2+i)(3-i)^2 + (2+3i)(3+4i) \right|.$$

$$1.2. \quad \left| (2+i)^2(3+7i) - (1+2i)(5+3i) \right|.$$

$$1.3. \quad \left| (4+i)(5+3i) - (3+i)(3-i) \right|^2.$$

$$1.4. \quad \operatorname{Re} \frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}; \quad 1.5. \quad \operatorname{Im} \frac{(2+i)(4+i)}{1+i}.$$

$$1.6. \quad \left| \frac{(5+i)(7-6i)}{3+i} \right|; \quad 1.7. \quad \operatorname{Re} \frac{2+15i}{(1+i)^3}.$$

$$1.8. \quad \operatorname{Im} \frac{(2-5i)(6+7i)}{(4-i)(5+i)}.$$

$$1.9. \quad \operatorname{Re}(1+2i) - \operatorname{Im}(1+2i)^2 + \operatorname{Re}(1+2i)^3.$$

$$1.10. \quad \operatorname{Re} \frac{1-i}{2-i} - \operatorname{Im} \frac{2+i}{1+3i}.$$

2) Решить уравнение относительно неизвестного $z \in \mathbb{C}$.

$$1.11. \quad iz - 3\bar{z} = -5 + 7i. \quad 1.12. \quad (iz - 1)\bar{z} = -3 + 15i.$$

$$1.13. \quad \frac{z+2i}{\bar{z}-i} = 1+2i. \quad 1.14. \quad \operatorname{Re} z - \frac{z}{|z|} = 2.$$

$$1.15. \quad 2z + |z + \bar{z}| \cdot i = 4 + 2i. \quad 1.16. \quad 2\operatorname{Re} z - 3|z - \bar{z}| \cdot i = 2 - 9i.$$

$$1.17. \quad iz^2 - 3\bar{z} = 2i. \quad 1.18. \quad |z - 8i|^2 + 2\bar{z} = 3 - 12i.$$

$$1.19. \quad z^2 - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z. \quad 1.20. \quad z^2 + \bar{z} = 2\operatorname{Re} \frac{1+i}{1-i}.$$

3) Найти все значения квадратного корня, проводя вычисления в алгебраической форме.

$$1.21. \quad \sqrt{2i}. \quad 1.22. \quad \sqrt{-8i}.$$

$$1.23. \quad \sqrt{-15+8i}. \quad 1.24. \quad \sqrt{-11+60i}.$$

$$1.25. \quad \sqrt{-8+6i}. \quad 1.26. \quad \sqrt{-8-6i}.$$

$$1.27. \quad \sqrt{8-6i}. \quad 1.28. \quad \sqrt{8+6i}.$$

$$1.29. \quad \sqrt{2-3i}. \quad 1.30. \quad \sqrt{-3-4i}.$$

4) Решить квадратное уравнение с неизвестным $z \in \mathbb{C}$.

$$1.31. \quad z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0. \quad 1.32. \quad z^2 - (3-2i)z + 5 - 5i = 0.$$

$$1.33. \quad iz^2 + 1 = 0. \quad 1.34. \quad z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0.$$

$$1.35. \quad z^2 - 5z + 4 + 10i = 0. \quad 1.36. \quad z^2 + (-7+2i)z + 13 - i = 0.$$

$$1.37. \quad z^2 + (-1+4i)z - 4i = 0. \quad 1.38. \quad z^2 + (-1+3i)z - 2 - i = 0.$$

$$1.39. \quad z^2 + (-5+i)z - 5i = 0. \quad 1.40. \quad z^2 + (-1+6i)z - 6i = 0.$$

5) Представить комплексное число в тригонометрической и показательной формах.

$$1.41. \quad 4 + 4i. \quad 1.42. \quad 2\sqrt{3} + 2i.$$

$$1.43. \quad 5. \quad 1.44. \quad 4i.$$

$$1.45. \quad -2 + 2i. \qquad 1.46. \quad -1 + \sqrt{3}i.$$

$$1.47. \quad -2i. \qquad 1.48. \quad 4 + 4i.$$

$$1.49. \quad 1 - \sqrt{3}i. \qquad 1.50. \quad \sqrt{3} + i.$$

6) Доказать неравенство, используя свойства модуля комплексного числа.

$$1.51. \quad |(1+i)z - iz^2| < 3, \quad \text{если } |z| < 1.$$

$$1.52. \quad |z^2 - \bar{z}^2 + i| < 3, \quad \text{если } |z| < 1.$$

$$1.53. \quad 1 \leq |z^2 + 5| \leq 9, \quad \text{если } |z| \leq 2.$$

$$1.54. \quad |(3+2i)z + 2\bar{z}| < 2, \quad \text{если } |z| < \frac{1}{3}.$$

$$1.55. \quad |(5-12i)z^3 - \bar{z}| > 12, \quad \text{если } |z| > 1.$$

$$1.56. \quad 1 < |z^3 - 5i| < 13, \quad \text{если } |z| < 2.$$

$$1.57. \quad \left| \frac{i}{z-6+8i} \right| \geq \frac{1}{12}, \quad \text{если } |z| < 2.$$

$$1.58. \quad \left| \frac{z-2i}{z+i} \right| \leq 8, \quad \text{если } \frac{3}{2} \leq |z| \leq 2.$$

$$1.59. \quad |(3-4i)\bar{z} - z^2| > 6, \quad \text{если } |z| > 6.$$

$$1.60. \quad \left| \frac{1-3z^2\bar{z}}{2+i} \right| < 12, \quad \text{если } |z| \leq 2.$$

7) Вычислить, применяя тригонометрическую форму комплексного числа.

$$1.61. \quad \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i} \right)^{30}. \qquad 1.62. \quad \left(\frac{2+2i}{\sqrt{3}-i} \right)^{10}.$$

$$1.63. \quad \left(\frac{1-i}{i} \right)^{15}. \qquad 1.64. \quad \left(\frac{-2i}{-3+3i} \right)^6.$$

$$1.65. \quad (1-i)^{30}. \qquad 1.66. \quad \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i} \right)^{60}.$$

$$1.67. \quad \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+i} \right)^{12}. \qquad 1.68. \quad (1+\sqrt{3}i)^{150}.$$

$$1.69. \quad (\sqrt{3}+i)^{30}. \qquad 1.70. \quad \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-i} \right)^{20}.$$

8) Найти все значения корня, применяя тригонометрическую форму комплексного числа.

$$1.71. \sqrt[6]{\frac{(1+i)^3}{\sqrt{3}+i}}.$$

$$1.72. \sqrt[10]{\frac{-i^5}{(-1+i)^3}}.$$

$$1.73. \sqrt[5]{\frac{i^3}{2+2i}}.$$

$$1.74. \sqrt[8]{\frac{(1-i)^{10}}{2i}}.$$

$$1.75. \sqrt[6]{\frac{(1-i)^2}{2\sqrt{3}-2i}}.$$

$$1.76. \sqrt[4]{\frac{16\sqrt{3}-16i}{(1+i)^{10}}}.$$

$$1.77. \sqrt[3]{\frac{(1-i)^{10}}{8+8\sqrt{3}i}}.$$

$$1.78. \sqrt[6]{\frac{(\sqrt{3}+i)^5}{1+\sqrt{3}i}}.$$

$$1.79. \sqrt[5]{\frac{-2i}{(\sqrt{3}-i)^7}}.$$

$$1.80. \sqrt[7]{\frac{-2\sqrt{3}-2i}{1-i}}.$$

9) Дополнительные задачи.

1.81. Пусть $n \geq 2$, $w^n = 1$. Чему равна сумма $1 + w + \dots + w^{n-1}$?

1.82. Доказать, что если $z + z^{-1} = 2 \cos \alpha$ и $n \in \mathbb{N}$, то $z^n + z^{-n} = 2 \cos n\alpha$.

1.83. Доказать, что совокупность M матриц второго порядка вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

с операциями сложения и умножения матриц образует поле, изоморфное полю \mathbb{C} комплексных чисел.

2. Изображение комплексных чисел

Пусть

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

На плоскости с декартовой системой координат число z изображается точкой Q с координатами (x, y) . Соответствие точек плоскости и комплексных чисел, осуществляемое по правилу $Q(x, y) \longleftrightarrow z = x + iy$, является взаимно-однозначным. Поэтому декартову плоскость часто называют комплексной плоскостью, отождествляя её точки с числами $z \in \mathbb{C}$. Оси

координат, по которым откладываются величины $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$, называются соответственно действительной и мнимой осями. Их уравнения $\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Re} z = 0$.

Числа $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$ представляют собой полярные координаты точки $Q(x, y)$. Мы считаем, что полярная система координат обычным образом ассоциирована с декартовой: полюс совпадает с началом декартовой системы — точкой O , а направление полярного луча совпадает с направлением оси абсцисс. Из определения модуля и аргумента следует, что r — длина вектора \overrightarrow{OQ} , а φ — угол, образованный \overrightarrow{OQ} и направлением действительной оси.

Множество комплексных чисел z , удовлетворяющих соотношению $a \cdot \operatorname{Re} z + b \cdot \operatorname{Im} z + c = 0$ или соотношению $a \cdot \operatorname{Re} z + b \cdot \operatorname{Im} z + c \geq 0$ (a, b, c — действительные, $a^2 + b^2 \neq 0$), изображается соответственно прямой с нормальным вектором $\vec{n} = \{a, b\}$ или полуплоскостью (с границей), в которую направлен вектор \vec{n} .

Величина $|z_1 - z_2|$ есть расстояние между точками z_1, z_2 , так как в стандартных обозначениях

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Отсюда следует, что при фиксированных $z_0 \in \mathbb{C}$, $R \geq 0$ множество

$$G = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$$

изображается кругом (с границей) радиуса R с центром в z_0 . Граница Γ этого круга (окружность) задаётся равенством $|z - z_0| = R$, внешность круга (без границы) — неравенством $|z - z_0| > R$. Если $R = 0$, то $G = \Gamma = \{z_0\}$. В связи с этим

$$G' = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z - z_0| \leq R\}, \quad 0 < r < R,$$

представляет собой кольцо, ограниченное окружностями радиусов r и R с центрами в z_0 . Множество

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = s\}, \quad 0 \leq s < 2\pi,$$

есть луч (без начала координат), образующий с действительной осью угол s ,

$$H' = \{z \in \mathbb{C} : s_1 \leq \arg z \leq s_2\}, \quad 0 \leq s_1 < s_2 \leq 2\pi,$$

— внутренность углового сектора, образованного лучами $\arg z = s_1$, $\arg z = s_2$ (с границей за исключением точки $z = 0$). Уравнения

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2q, \quad 2c = |z_1 - z_2| < 2q,$$

$$\left| |z - z_1| - |z - z_2| \right| = 2q, \quad 2c = |z_1 - z_2| > 2q > 0$$

при фиксированных z_1, z_2 задают на комплексной плоскости соответственно эллипс и гиперболу с фокусами в точках z_1, z_2 и полуосью q .

У п р а ж н е н и я

1) Изобразить на комплексной плоскости множество точек $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих указанной системе соотношений.

$$2.1. \quad 1 \leq |z + 3 - 4i| \leq 2, \quad 0 < \arg z < \frac{3\pi}{4}.$$

$$2.2. \quad 2\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z \geq 0, \quad |z - 1| \leq 2.$$

$$2.3. \quad 1 \leq |z + 4i| \leq 3, \quad \operatorname{Im} z > 4.$$

$$2.4. \quad |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq 1, \quad |z - i| \leq 1.$$

$$2.5. \quad -4 \leq \operatorname{Re} z \leq -3, \quad |z + 5 - 2i| \leq 3.$$

$$2.6. \quad \arg z = \frac{\pi}{2}, \quad |\bar{z} + i| \leq 1.$$

$$2.7. \quad |z - 2 + i| \geq |z + 1 - 5i|.$$

$$2.8. \quad |z| > 2 + \operatorname{Im} z.$$

$$2.9. \quad |z| \leq \operatorname{Re} z.$$

$$2.10. \quad 4 \leq |z - 1| + |z + 1| \leq 8.$$

2) Изобразить линию, задаваемую данным уравнением.

$$2.11. \quad |z + 2| - |z - 2| = 3.$$

$$2.12. \quad |z - i| - |z + i| = 2.$$

$$2.13. \quad |z - 2| = \operatorname{Re} z. \quad 2.14. \quad \operatorname{Im} z^2 = 2.$$

$$2.15. \quad \operatorname{Re} \bar{z}^2 = 1. \quad 2.16. \quad |z - 2| = \operatorname{Re} z.$$

$$2.17. \quad \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2}. \quad 2.18. \quad z^2 + \bar{z}^2 = 1.$$

$$2.19. \quad \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\bar{z}} \right) = 1. \quad 2.20. \quad 2z\bar{z} + (2 + i)z + (2 - i)\bar{z} = 2.$$

3) Задать с помощью соотношений на $z \in \mathbb{C}$ указанное множество.

2.21. Внешность круга с центром $z_0 = -1 + 2i$ и радиусом $r = 5$ с границей.

2.22. Правый полукруг без границы из круга с центром $z_0 = 2 - i$ и радиусом $r = 2$.

2.23. Концентрическое кольцо с центром $z_0 = -i$, внутренним радиусом $r = 1$ и внешним радиусом $r = 4$ без границы.

2.24. Внутренность эллипса с фокусами $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 4 - 3i$ и эксцентриситетом $\varepsilon = 1/2$.

2.25. Внешность эллипса с фокусами $z_1 = 2 + 6i$, $z_2 = 8 - 2i$ и эксцентриситетом $\varepsilon = 1/3$.

4) Дополнительные задачи.

2.26. Изобразить на комплексной плоскости множество точек

$$z = \frac{1 + it}{1 - it}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.27. Применяя геометрический подход, доказать для $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ неравенство

$$|z_1 - z_2| \leq \left| |z_1| - |z_2| \right| + \min\{|z_1|, |z_2|\} \cdot |\arg z_1 - \arg z_2|.$$

2.28. Точка z движется по линии $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 1$ в направлении против часовой стрелки. Определить траекторию и направление движения точки $w = 1/z$.

3. Функции e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$, $\ln z$

Однозначные функции комплексного переменного e^z , $\sin z$ и $\cos z$ могут быть первоначально определены с помощью следующих степенных рядов, сходящихся для всех $z \in \mathbb{C}$:

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad (3.1)$$

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (3.2)$$

Из (3.1) – (3.2) получаются равенства:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z, \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \\ \cos(-z) &= \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{z_1+z_2} &= e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \\
\cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \\
\sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \\
\cos^2 z + \sin^2 z &= 1, \\
e^z = e^{x+iy} &= e^x (\cos y + i \sin y). \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Равенство (3.3) может быть принято за другое, эквивалентное определение экспоненты. Эти функции являются периодическими, а именно

$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2k\pi) = \sin z, \quad e^{z+2k\pi i} = e^z; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

В отличие от действительного случая функции $|\cos z|$ и $|\sin z|$ не являются ограниченными на \mathbb{C} .

Гиперболические функции вводятся с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} z &:= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \\
\operatorname{th} z &:= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z := \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.
\end{aligned}$$

При всех z имеют место равенства

$$\cos iz = \operatorname{ch} z, \quad \sin iz = i \operatorname{sh} z.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ n -значная функция $w = \sqrt[n]{z}$ задаётся с помощью формулы

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Упражнения на вычисление значений $\sqrt[n]{z}$ даны в пункте 1.

Бесконечнозначная логарифмическая функция $\operatorname{Ln} z$, $z \neq 0$, вводится следующим образом:

$$\operatorname{Ln} z := \ln |z| + i \arg z + i \cdot 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Выражение, не содержащее слагаемого $i \cdot 2k\pi$, называется главным значением логарифма и обозначается $\ln z$.

Для произвольных комплексных чисел $\alpha \neq 0$ и β полагают

$$\alpha^\beta := e^{\beta \operatorname{Ln} \alpha}.$$

Пример 3.1. Найдём действительную и мнимую части функции $\sin z$ и убедимся, что $|\sin z| \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$ вдоль некоторых путей.

Применяя формулы сложения и связи с гиперболическими функциями, запишем: $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$. Поэтому

$$\begin{aligned} |\sin z| &= \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \\ &= \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + (1 - \sin^2 x) \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}. \end{aligned}$$

Мы использовали равенство $\operatorname{ch}^2 w - \operatorname{sh}^2 w = 1$, $w \in \mathbb{C}$. Если $x = \operatorname{const}$, а $y \rightarrow \pm\infty$, то $|\sin z| \rightarrow \infty$.

Пример 3.2. Вычислим $\operatorname{Ln}(1 + i)$, $\ln(1 + i)$, 2^{1+i} .

Так как

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad 2 = 2(\cos 0 + i \sin 0),$$

то

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(1 + i) &= \frac{1}{2} \ln 2 + i \cdot \frac{\pi}{4} + i \cdot 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \ln(1 + i) &= \frac{1}{2} \ln 2 + i \cdot \frac{\pi}{4}, \\ 2^{1+i} &= e^{(1+i)\operatorname{Ln} 2} = e^{(1+i)(\ln 2 + i \cdot 0 + i \cdot 2k\pi)} = e^{\ln 2 - 2k\pi + i(\ln 2 + 2k\pi)} = \\ &= e^{\ln 2 - 2k\pi + i \ln 2} = e^{\ln 2 + 2m\pi} \left(\cos(\ln 2) + i \sin(\ln 2) \right) = \\ &= 2e^{2m\pi} \left(\cos(\ln 2) + i \sin(\ln 2) \right), \quad m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

У п р а ж н е н и я

1) Вычислить выражение.

3.1. $\operatorname{Re} e^{2+4i}$.

3.2. $|\sin(3 - 4i)|$.

3.3. $\operatorname{Im} \cos(6 + 2i)$.

3.4. $|\cos(1 + 10i)|$.

3.5. $\operatorname{Re} \operatorname{ch}(1 - i)$.

3.6. $|\sin(4 + 7i)|$.

3.7. $\operatorname{Im} \operatorname{sh}(1 + 2i)$.

3.8. $|\cos(3 + 20i)|$.

3.9. $\operatorname{Re} \operatorname{ch}(2 - i)$.

3.10. $\operatorname{Im} e^{2-5i}$.

2) Найти действительную, мнимую части и модуль функции f .

3.11. $f(z) = e^z$.

3.12. $f(z) = \sin z$.

3.13. $f(z) = \cos z$.

3.14. $f(z) = \operatorname{sh} z$.

$$3.15. \quad f(z) = \operatorname{ch} z .$$

3) Выяснить, в каких точках функция f принимает действительные значения, а в каких — чисто мнимые значения.

$$3.16. \quad f(z) = \cos z . \qquad 3.17. \quad f(z) = \operatorname{sh} z .$$

$$3.18. \quad f(z) = \operatorname{ch} z . \qquad 3.19. \quad f(z) = e^z .$$

$$3.20. \quad f(z) = \sin z .$$

4) Вычислить значения логарифмов.

$$3.21. \quad \operatorname{Ln} (\sqrt{3} + i), \quad \ln (\sqrt{3} + i) .$$

$$3.22. \quad \operatorname{Ln} (1 + i), \quad \ln (1 + i) .$$

$$3.23. \quad \operatorname{Ln} (-1 + \sqrt{3}i), \quad \ln (-1 + \sqrt{3}i) .$$

$$3.24. \quad \operatorname{Ln} (-3 + 3i), \quad \ln (-3 + 3i) .$$

$$3.25. \quad \operatorname{Ln} (-i), \quad \ln (-i) .$$

$$3.26. \quad \operatorname{Ln} (\sqrt{3} - i), \quad \ln (\sqrt{3} - i) .$$

$$3.27. \quad \operatorname{Ln} (-1 - i), \quad \ln (-1 - i) .$$

$$3.28. \quad \operatorname{Ln} (4i), \quad \ln (4i) .$$

$$3.29. \quad \operatorname{Ln} (1 - \sqrt{3}i), \quad \ln (1 - \sqrt{3}i) .$$

$$3.30. \quad \operatorname{Ln} 10, \quad \ln 10 .$$

5) Найти все значения указанного выражения.

$$3.31. \quad (1 + i)^i . \qquad 3.32. \quad (-2)^{\sqrt{5}} .$$

$$3.33. \quad (-1 + i)^{-1+i} . \qquad 3.34. \quad 3^i .$$

$$3.35. \quad (\sqrt{3} + i)^{-i} . \qquad 3.36. \quad (-2 - 2i)^{-3i} .$$

$$3.37. \quad i^{-1-i} . \qquad 3.38. \quad (-3 + 3i)^{\sqrt{7}} .$$

$$3.39. \quad (2i)^{2i} . \qquad 3.40. \quad (-4)^{-4} .$$

6) Дополнительные задачи.

3.41. С помощью свойства $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ доказать тождество

$$e^{i(z_1+z_2)} \pm e^{-i(z_1+z_2)} = \\ = \frac{1}{2} [(e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} \pm e^{-iz_2}) + (e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} \mp e^{-iz_2})],$$

из которого затем получить равенства

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

3.42. Установить с помощью равенств для $\cos(z_1 + z_2)$ и $\sin(z_1 + z_2)$ аналогичные соотношения для $\operatorname{ch}(z_1 + z_2)$ и $\operatorname{sh}(z_1 + z_2)$. Использовать связь $\sin(iz) = i \operatorname{sh} z$, $\cos(iz) = \operatorname{ch} z$.

3.43. Найти все нули каждой из функций e^z , $\cos z$, $\sin z$.

4. Дробно-линейная функция

Невырожденной дробно-линейной функцией называется функция вида

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

При отмеченном ограничении из $z_1 \neq z_2$ следует $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Важнейшим свойством дробно-линейных отображений является так называемое круговое свойство. Любое такое отображение переводит окружность или прямую в окружность или прямую (или, проще, окружность в окружность; при таком подходе прямая считается окружностью бесконечного радиуса).

Невырожденная дробно-линейная функция содержит три комплексных параметра, представляющих собой отношения трёх из четырёх коэффициентов к четвёртому, отличному от 0. Эти параметры однозначно определяются из требования, чтобы три заданные точки z_1, z_2, z_3 переходили в заданные w_1, w_2, w_3 . Какие-то из этих чисел могут быть равны ∞ . Зная эти шесть точек, функцию $w = f(z)$ можно найти из равенства

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}. \quad (4.1)$$

Величина, стоящая в правой части, называется ангармоническим отношением чисел z, z_3, z_1, z_2 . Равенство (4.1), таким образом, означает, что

f сохраняет ангармоническое отношение. Разрешая (4.1) относительно w , получим искомую дробно-линейную функцию. Если какая-то из точек z_j или w_j равна ∞ , то в (4.1) следует заменить на 1 каждую разность, содержащую эту точку.

Найденное дробно-линейное отображение переводит точки z_j и проходящую через них окружность Γ_z в точки w_j и проходящую через них окружность Γ_w . Тройки точек z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 определяют направления обхода на Γ_z и Γ_w , причём области, остающиеся при этом обходе слева (справа), при отображении $w = f(z)$ соответствуют друг другу.

Пример 4.1. Найдём дробно-линейную функцию $w = f(z)$, переводящую точки $z_1 = 0, z_2 = -i, z_3 = 2i$ в точки $w_1 = -1, w_2 = 0$ и $w_3 = 3$. Равенство (4.1) в данном случае имеет вид

$$\frac{w+1}{w} : \frac{3+1}{3} = \frac{z}{z+i} : \frac{2i}{3i},$$

что после несложных вычислений даёт $w = (z+i)/(z-i)$.

Пример 4.2. Найдём функцию, отображающую единичный круг $|z| \leq 1$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w \geq 0$.

Ясно, что ответ можно искать в классе дробно-линейных функций. Внутренность единичной окружности остаётся слева при движении в направлении от $z_1 = 1$ через $z_2 = i$ к $z_3 = -1$. Верхняя полуплоскость остаётся слева от прямой $\operatorname{Im} z = 0$ при прохождении этой прямой в направлении от $w_1 = 0$ через $w_2 = 1$ к $w_3 = \infty$. Поэтому искомым будет дробно-линейное отображение $w = f(z)$ такое, что $w_j = f(z_j)$. Так как $w_3 = \infty$, то равенство (4.1) сводится к пропорции

$$\frac{w}{w-1} : \frac{1}{1} = \frac{z-1}{z-i} : \frac{2}{1+i}.$$

После вычислений получаем ответ: $w = (-iz+i)/(z+1)$.

Пример 4.3. Ответим на вопрос: во что переходит полуплоскость $\operatorname{Re} z \geq 0$ при отображении $w = (iz+1)/(z-1)$?

Выберем на границе полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ три точки $z_1 = i, z_2 = 0, z_3 = -i$, при обходе которых область остаётся слева. Вычислим их образы: $w_1 = 0, w_2 = -1, w_3 = -1+i$. Изобразив w_j на комплексной плоскости w , заметим, что w_j принадлежат окружности с центром в точке $-1/2 + i/2$ радиуса $\sqrt{2}/2$. При движении по этой окружности от w_1 через w_2 к w_3 слева от линии остаётся внешность круга. Поэтому наше отображение переводит полуплоскость $\operatorname{Re} z \geq 0$ во множество

$$\left\{ w \in \mathbb{C} : \left| w + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

У п р а ж н е н и я

1) Найти дробно-линейное отображение $w = f(z)$, которое переводит точки z_1, z_2, z_3 в точки w_1, w_2, w_3 соответственно.

$$4.1. \quad z_1 = -1, z_2 = i, z_3 = 1 + i; \quad w_1 = 0, w_2 = 2i, w_3 = 1 - i.$$

$$4.2. \quad z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = 1 - i; \quad w_1 = 1 - i, w_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, w_3 = 2 - i.$$

$$4.3. \quad z_1 = 1, z_2 = 1 + i, z_3 = 2 + i; \quad w_1 = -1 + i, w_2 = \infty, w_3 = 2 + 2i.$$

$$4.4. \quad z_1 = 1 - i, z_2 = 0, z_3 = \infty; \quad w_1 = 1 + i, w_2 = \infty, w_3 = 0.$$

$$4.5. \quad z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 3 + i; \quad w_1 = -4, w_2 = -4 + 2i, w_3 = -6 + 6i.$$

$$4.6. \quad z_1 = -1, z_2 = i, z_3 = 1 + i; \quad w_1 = i, w_2 = \infty, w_3 = 1.$$

$$4.7. \quad z_1 = -1, z_2 = \infty, z_3 = i; \quad w_1 = i, w_2 = 1, w_3 = 1 + i.$$

$$4.8. \quad z_1 = -1, z_2 = \infty, z_3 = i; \quad w_1 = \infty, w_2 = i, w_3 = 1.$$

$$4.9. \quad z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = 0; \quad w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1.$$

$$4.10. \quad z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1; \quad w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1.$$

2) Найти дробно-линейную функцию $w = f(z)$, отображающую множество G на множество H .

$$4.11. \quad G - \text{круг } |z| \leq 1, \quad H - \text{полуплоскость } \operatorname{Im} w \geq 0.$$

$$4.12. \quad G - \text{круг } |z - i| \leq 1, \quad H - \text{полуплоскость } \operatorname{Re} w \leq 0.$$

$$4.13. \quad G - \text{круг } |z - 1 + i| \leq 1, \quad H - \text{полуплоскость } \operatorname{Im} w \geq 1.$$

$$4.14. \quad G - \text{круг } |z| \leq 1, \quad H - \text{круг } |w - i| \leq 1.$$

$$4.15. \quad G - \text{полуплоскость } \operatorname{Re} z \geq 1, \quad H - \text{множество } |w| \geq 1.$$

$$4.16. \quad G - \text{полуплоскость } \operatorname{Im} z \geq -1, \quad H - \text{круг } |w - i| \leq 1.$$

$$4.17. \quad G - \text{полуплоскость } \operatorname{Re} z \geq 0, \quad H - \text{полуплоскость } \operatorname{Im} w \leq -1.$$

$$4.18. \quad G - \text{полуплоскость } \operatorname{Re} z \leq -1, \quad H - \text{полуплоскость } \operatorname{Re} w \geq 1.$$

$$4.19. \quad G - \text{множество } |z - 1| \geq 1, \quad H - \text{круг } |w - i| \leq 1.$$

$$4.20. \quad G - \text{круг } |z - 1| \leq 1, \quad H - \text{полуплоскость } \operatorname{Im} z \leq 2.$$

3) Выяснить, в какое множество переходит множество M при отображении $w = f(z)$.

$$4.21. \quad M - \text{квадрант } \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0, \quad w = (z - i)/(z + i).$$

$$4.22. \quad M - \text{полукруг } |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0, \quad w = (2z - i)/(iz + 2).$$

$$4.23. \quad M - \text{полоса } 0 < \operatorname{Re} z < 1, \quad w = (z - 1)/(z - 2).$$

$$4.24. \quad M - \text{кольцо } 1 < |z| < 2, \quad w = z/(z - 1).$$

4.25. M — полуплоскость $\operatorname{Re} z \geq 1$, $w = (z - 1)/z$.

4) Дополнительные задачи.

4.26. Доказать, что совокупность невырожденных дробно-линейных функций относительно операции суперпозиции образует группу.

4.27. Доказать, что каждое из отображений $w = az$, $w = z + b$ ($a, b \in \mathbb{C}$), $w = 1/z$ обладает круговым свойством.

4.28. Доказать, что невырожденное дробно-линейное отображение редуцируется к отображениям предыдущей задачи и тем самым обладает круговым свойством.

4.29. Установить круговое свойство невырожденного дробно-линейного отображения иным способом, нежели тот, который был отмечен в двух предыдущих задачах. Использовать для этого следующий факт. Любая окружность или прямая на комплексной плоскости может быть задана уравнением Аполлония

$$\left| \frac{z - p}{z - q} \right| = k, \quad k > 0, \quad p, q \in \mathbb{C} \text{ — фиксированы,}$$

и любое такое уравнение задаёт окружность или прямую.

5. Дифференцирование функций комплексного переменного

Пусть комплекснозначная функция f комплексного переменного z определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Функция f называется дифференцируемой в точке z_0 тогда и только тогда, когда при любом способе стремления $z \rightarrow z_0$ существует конечный предел отношения $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. В этом случае полагают

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Если f дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то в точке (x_0, y_0) существуют частные производные функций u и v и выполняются условия Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5.1)$$

Выполнение условий (5.1) при дополнительном требовании дифференцируемости функций u и v в точке (x_0, y_0) является достаточным для дифференцируемости f в точке z_0 . Дифференцируемость u и v означает возможность представления приращений этих функций в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \eta_1, \quad \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \eta_2, \quad (5.2)$$

где $\eta_{1,2} = o(|\Delta z|)$, $|\Delta z| := \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Громоздкие и трудно проверяемые непосредственно условия (5.2) во всяком случае выполнены, если частные производные функций u и v непрерывны в точке z_0 .

Функция f , дифференцируемая во всех точках области D , называется аналитической (или голоморфной) в этой области. Термин "аналитическая в точке" иногда применяется в смысле "аналитическая в некоторой окрестности точки". Для аналитической в области D функции f во всех точках D существуют частные производные функций u и v и выполняются условия Коши – Римана (5.1). Если функции u и v дифференцируемы в области D , то выполнение условий (5.1) достаточно для аналитичности f в D . Отметим также, что в предположении непрерывности u и v в области D выполнение условий Коши – Римана всюду в D необходимо и достаточно для аналитичности f в этой области.

В случае существования производная $f'(z)$ может быть вычислена по любому из равенств

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отметим, что аналитическая в области D функция имеет в D производную любого порядка. В этом смысле в комплексном анализе из однократной дифференцируемости следует бесконечная дифференцируемость.

Условия Коши – Римана могут быть сформулированы в других терминах. Пусть, например, $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = U(r, \varphi) + iV(r, \varphi)$. Тогда соотношения (5.1) эквивалентны равенствам

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Пример 5.1. Найдём области дифференцируемости и аналитичности функций $f(z) = e^z$, $g(z) = \bar{z}$, $h(z) = \operatorname{Re} z^2$.

Так как $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, то $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$. Функции u и v действительных переменных x, y дифференцируемы в любой точке (x, y) , так как имеют непрерывные частные производные. Как нетрудно видеть, условия (5.1) выполняются также в любой точке. Следовательно, f дифференцируема всюду в \mathbb{C} , а значит, является аналитической на всей комплексной плоскости.

Действительная и мнимая части $g(z)$ есть соответственно x и $-y$. Первое из условий (5.1) не выполняется ни в одной точке. Поэтому g нигде не дифференцируема и, следовательно, не является аналитической ни в какой области.

Для функции $h(z) = \operatorname{Re} z^2 = x^2 - y^2$ условия Коши – Римана выполняются лишь в точке $x = y = 0$. Так как частные производные действительной и мнимой частей h всюду непрерывны, то h дифференцируема в точке $z = 0$, но только в этой единственной точке. Поэтому h не является аналитической ни в какой области.

Пример 5.2. Найдём аналитическую функцию f по известной её действительной части $u(x, y) = 2e^x \cos y$ и условию $f(0) = 2$.

По левому из условий (5.1)

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y,$$

откуда

$$v(x, y) = \int 2e^x \cos y \, dy = 2e^x \sin y + \lambda(x).$$

Продифференцируем v по x и используем правое условие (5.1):

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^x \sin y + \lambda'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^x \sin y,$$

откуда $\lambda'(x) = 0$, то есть $\lambda(x) = C = \text{const}$. Мы получили, что

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = 2e^x \cos y + i(2e^x \sin y + C).$$

Условие $f(0) = 2$ даёт теперь $C = 0$. Поэтому

$$f(z) = 2e^x (\cos y + i \sin y) = 2e^{x+iy} = 2e^z.$$

У п р а ж н е н и я

1) Проверить выполнение условий Коши – Римана для функции f .

5.1. $f(z) = z^2$.

5.2. $f(z) = z^3$.

5.3. $f(z) = z^4$.

5.4. $f(z) = z^n$.

5.5. $f(z) = e^z$.

5.6. $f(z) = \cos z$.

5.7. $f(z) = \sin z$.

5.8. $f(z) = \operatorname{sh} z$.

5.9. $f(z) = \operatorname{ch} z$.

5.10. $f(z) = ze^z$.

2) Определить точки дифференцируемости и область аналитичности функции f . Найти производную в точках существования.

$$5.11. \quad f(z) = z^2 \bar{z}.$$

$$5.12. \quad f(z) = z^2 + \bar{z}.$$

$$5.13. \quad f(z) = |z| \bar{z}.$$

$$5.14. \quad f(z) = |z|^2 \operatorname{Re} \bar{z}.$$

$$5.15. \quad f(z) = |z|^2 \operatorname{Im} z.$$

$$5.16. \quad f(z) = z \operatorname{Im} z.$$

$$5.17. \quad f(z) = z \operatorname{Re} z.$$

$$5.18. \quad f(z) = 2|z|^2.$$

$$5.19. \quad f(z) = iz + z\bar{z}.$$

$$5.20. \quad f(z) = f(x + iy) = 2xy + iy^2.$$

3) Выяснить, существует ли аналитическая функция, имеющая данную действительную часть $u(x, y)$ или данную мнимую часть $v(x, y)$.

$$5.21. \quad u(x, y) = x^2 y.$$

$$5.22. \quad v(x, y) = x^2 - y^2.$$

$$5.23. \quad v(x, y) = 4e^x \sin 2y.$$

$$5.24. \quad u(x, y) = x + y.$$

$$5.25. \quad v(x, y) = 6xy.$$

4) Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по её указанным свойствам.

$$5.26. \quad u(x, y) = e^{-y} \cos x + 2x + 3, \quad f(0) = 4 - i.$$

$$5.27. \quad u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x, \quad f(i) = -1 + 2i.$$

$$5.28. \quad v(x, y) = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy), \quad f(0) = 0.$$

$$5.29. \quad u(x, y) = 2 \sin x \operatorname{ch} y - x, \quad f(0) = 0.$$

$$5.30. \quad v(x, y) = 4 \operatorname{sh} x \sin y + 2xy, \quad f(0) = 3.$$

5) Дополнительные задачи.

5.31. Доказать, что если аналитическая функция является действительной, то она постоянна.

5.32. Доказать, что для функции $f(z) = \sqrt{|xy|}$ условия Коши – Римана (5.1) в точке $z = 0$ выполняются, но производная не существует.

5.33. Доказать, используя определение дифференцируемости, что если функция $f(z) = f(r(\cos \varphi + i \sin \varphi)) = U(r, \varphi) + iV(r, \varphi)$ имеет производную в некоторой точке, то в этой точке выполняются следующие условия Коши – Римана в полярных координатах r, φ :

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial V}{\partial r}.$$

5.34. Вывести условия Коши – Римана в полярных координатах (см. предыдущую задачу) из стандартных условий (5.1) и равенств

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad U(r, \varphi) = u(x, y), \quad V(r, \varphi) = v(x, y).$$

6. Интегрирование функций комплексного переменного

Пусть Γ — кусочно-гладкая кривая Жордана с концами в точках α и β ; f — однозначная функция комплексного переменного z , заданная на Γ . Обозначим через z_k , $k = 1, 2, \dots, n$, точки на Γ , $z_0 := \alpha$, $z_{n+1} := \beta$, следующие в положительном направлении; через ω_k — точку дуги $z_k z_{k+1}$. Положим $\Delta z_k := z_{k+1} - z_k$. Предположим, что при $\max |\Delta z_k| \rightarrow 0$ существует предел интегральных сумм

$$\sum_{k=0}^n f(\omega_k) \Delta z_k,$$

не зависящий ни от способа деления Γ точками z_k , ни от выбора точек ω_k на дугах $z_k z_{k+1}$. В этом случае f называется интегрируемой по Γ и

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \lim \sum_{k=0}^n f(\omega_k) \Delta z_k. \quad (6.1)$$

Будем считать, что f непрерывна или хотя бы кусочно-непрерывна на кривой Γ ; тогда f является интегрируемой по этой кривой.

Пусть $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Из (6.1) следует, что

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u dx - v dy + i \int_{\Gamma} u dy + v dx. \quad (6.2)$$

Если Γ — гладкая кривая, заданная параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, то каждый из криволинейных интегралов 2 рода, стоящих в (6.2), может быть вычислен по формуле

$$\int_{\Gamma} p(x, y) dx + q(x, y) dy = \int_{t_0}^{t_1} [p(x(t), y(t))x'(t) + q(x(t), y(t))y'(t)] dt. \quad (6.3)$$

Более короткая формула для интеграла имеет вид

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f[z(t)]z'(t) dt. \quad (6.4)$$

Здесь $z(t) = x(t) + iy(t)$ — параметрическое задание гладкой кривой Γ в комплексном виде; $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Если f — однозначная аналитическая функция в области D , Γ — контур, лежащий в D , то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

(теорема Коши; равенство верно и в случае, если Γ — кусочно-гладкая граница D , f аналитична в D и непрерывна на Γ). Для аналитической функции интеграл по кривой, соединяющей точки $z_0, z_1 \in D$, не зависит от пути интегрирования и справедлив аналог формулы Ньютона — Лейбница:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0), \quad (6.5)$$

F — любая первообразная f , то есть такая функция, что $F'(z) = f(z)$.

Для аналитических в односвязной области D функций f и g и любых точек $z_0, z_1 \in D$ справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z) dz = f(z)g(z) \Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} g(z)f'(z) dz. \quad (6.6)$$

Если функция f является аналитической в области D , ограниченной контуром Γ , и на самом контуре, точка z_0 принадлежит D , то справедливы интегральная формула Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad (6.7)$$

а также её обобщение на случай произвольного $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (6.8)$$

Формулы (6.7) — (6.8) могут применяться для вычисления некоторых интегралов.

Пример 6.1. Вычислим интеграл

$$\int_{\Gamma} (1 + i - 2\bar{z}) dz$$

1) по отрезку, соединяющему точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$; 2) по части параболы $y = x^2$, соединяющей точки z_1, z_2 . Убедимся, что при изменении пути интегрирования значение интеграла здесь меняется. (Как отмечалось, свойство независимости интеграла от пути имеет место для аналитической функции; нетрудно проверить, что в этом примере интегрируемая функция таковой не является.)

Пусть $f(z) = 1 + i - 2\bar{z}$, тогда $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = 1 - 2x$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = 1 + 2y$.

1) Запишем действительные параметрические уравнения Γ в виде $x(t) = t, y(t) = t, 0 \leq t \leq 1$, и применим формулы (6.2) и (6.3):

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (1 + i - 2\bar{z}) dz &= \\ &= \int_{\Gamma} (1 - 2x) dx - (1 + 2y) dy + i \int_{\Gamma} (1 - 2x) dy + (1 + 2y) dx = \\ &= \int_0^1 [(1 - 2t) - (1 + 2t)] dt + i \int_0^1 [(1 - 2t) + (1 + 2t)] dt = -2 + 2i. \end{aligned}$$

Тот же результат получится, если воспользоваться параметрическим уравнением отрезка $z_1 z_2$ в комплексном виде: $z(t) = t + it, 0 \leq t \leq 1$, и затем применить равенство (6.4). Заметим, что $\bar{z} = t - it, z'(t) = 1 + i$. На этот раз интегрируется комплекснозначная функция действительного аргумента t :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_0^1 f[z(t)] z'(t) dt = \\ &= \int_0^1 (1 + i - 2(t - it))(1 + i) dt = \int_0^1 (-4t + 2i) dt = -2 + 2i. \end{aligned}$$

2) Комплексное параметрическое уравнение части параболы $y = x^2$ между точками $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$ есть $z(t) = t + it^2, 0 \leq t \leq 1$. Значит, $\bar{z} = t - it^2, z'(t) = 1 + 2ti$. По формуле (6.4)

$$\int_{\Gamma} (1 + i - 2\bar{z}) dz = \int_0^1 (1 + i - 2(t - it^2))(1 + 2ti) dt =$$

$$= \int_0^1 (-4t^3 - 4t + 1 + i(-2t^2 + 2t + 1)) dt = -2 + \frac{4}{3}i.$$

Пример 6.2. Вычислим интеграл

$$\int_{\Gamma} (z^2 + z\bar{z}) dz$$

по дуге Γ окружности $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$.

Параметрическое уравнение Γ есть $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Так как $dz = ie^{it} dt$, $z\bar{z} = |z|^2 = 1$, то по (6.4)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (z^2 + z\bar{z}) dz &= \int_0^{\pi} (e^{i \cdot 2t} + 1) ie^{it} dt = \\ i \int_0^{\pi} (e^{i \cdot 3t} + e^{it}) dt &= i \left(\frac{1}{3i} e^{i \cdot 3t} + \frac{1}{i} e^{it} \right) \Big|_0^{\pi} = -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Пример 6.3. Вычислим интеграл

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz.$$

Подынтегральная функция является аналитической всюду, её первообразная есть $z^3 + z^2$. Поэтому по формуле Ньютона – Лейбница (6.5)

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz = (z^3 + z^2) \Big|_{1-i}^{2+i} = 7 + 19i.$$

Пример 6.4. Вычислим интеграл

$$\int_0^i z \cos z dz.$$

Так как $f(z) = z$ и $g(z) = \cos z$ являются аналитическими всюду, то можно применить интегрирование по частям (6.6):

$$\int_0^i z \cos z dz = \int_0^i z(\sin z)' dz = (z \sin z) \Big|_0^i - \int_0^i \sin z dz =$$

$$\begin{aligned}
&= i \sin i + \cos z \Big|_0^i = -\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1 - 1 = \\
&= -\frac{e - e^{-1}}{2} + \frac{e + e^{-1}}{2} - 1 = \frac{1}{e} - 1.
\end{aligned}$$

Пример 6.5. Вычислим интеграл

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z^2 - 6z} dz$$

по следующим окружностям: 1) $\Gamma : |z - 2| = 1$; 2) $\Gamma : |z - 2| = 3$; 3) $\Gamma : |z - 2| = 5$.

1) В замкнутой области $|z - 2| \leq 1$ подынтегральная функция является аналитической, поэтому по теореме Коши интеграл равен 0.

2) Внутри замкнутой области $|z - 2| \leq 3$ имеется единственный простой нуль знаменателя $z = 0$. Так как функция $e^z/(z - 6)$ в этой области является аналитической, то по интегральной формуле Коши (6.7)

$$\begin{aligned}
\int_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^2 - 6z} dz &= \int_{|z-2|=3} \frac{e^z/(z - 6)}{z} dz = \\
&= 2\pi i \frac{e^z}{z - 6} \Big|_{z=0} = -\frac{\pi i}{3}.
\end{aligned}$$

3) Внутри замкнутой области $|z - 2| \leq 5$ находятся оба простых нуля знаменателя $z = 0$, $z = 6$. Окружим эти точки непересекающимися контурами γ_1 и γ_2 , целиком лежащими внутри Γ . В трёхсвязной области, ограниченной Γ , γ_1 и γ_2 , подынтегральная функция является аналитической, поэтому по теореме Коши для многосвязной области

$$I = \int_{\Gamma} \frac{e^z}{z^2 - 6z} dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^2 - 6z} dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z^2 - 6z} dz.$$

Каждый из двух интегралов, стоящих в правой части, может быть вычислен с помощью интегральной формулы Коши. Здесь важна правильная запись подынтегральной функции:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^2 - 6z} dz &= \int_{\gamma_1} \frac{e^z/(z - 6)}{z} dz = 2\pi i \frac{e^z}{z - 6} \Big|_{z=0} = -\frac{\pi i}{3}, \\
\int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z^2 - 6z} dz &= \int_{\gamma_2} \frac{e^z/z}{z - 6} dz = 2\pi i \frac{e^z}{z} \Big|_{z=6} = \frac{e^6 \pi i}{3}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$I = -\frac{\pi i}{3} + \frac{e^6 \pi i}{3} = \frac{e^6 - 1}{3} \pi i.$$

Пример 6.6. Вычислим интеграл

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2 - 1)^2} dz.$$

Представим этот интеграл в виде

$$J = \int_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z / (z+1)^2}{(z-1)^2} dz.$$

Числитель подынтегрального выражения есть функция, аналитическая в замкнутой области $|z-1| \leq 1$, а точка $z_0 = 1$ лежит внутри неё. Поэтому можно применить формулу (6.8) с $n = 1$:

$$J = 2\pi i \left(\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2} \right)' \Big|_{z=1} = -\frac{\pi^2}{2} i.$$

У п р а ж н е н и я

1) Вычислить интеграл

$$\int_{\Gamma} f(z) dz,$$

Γ — отрезок с концами в точках z_1 и z_2 , проходимый от z_1 к z_2 .

$$6.1. \quad f(z) = 2\operatorname{Re} z^2 - \bar{z} + 1 - i, \quad z_1 = 0, z_2 = -3 + i.$$

$$6.2. \quad f(z) = (1+i)\operatorname{Im} z^2 + \bar{z}, \quad z_1 = i, z_2 = -3i.$$

$$6.3. \quad f(z) = 3z + (1+i)\bar{z}^2, \quad z_1 = 1, z_2 = 4i.$$

$$6.4. \quad f(z) = 2z^2 - 3\bar{z} + 2, \quad z_1 = 0, z_2 = -1 - i.$$

$$6.5. \quad f(z) = |z|^2 - 3i, \quad z_1 = -1, z_2 = i.$$

$$6.6. \quad f(z) = -\operatorname{Re} z^2 + 5\bar{z}, \quad z_1 = -1 + i, z_2 = 1 - 4i.$$

$$6.7. \quad f(z) = 3z\bar{z} + iz, \quad z_1 = 5i, z_2 = 0.$$

$$6.8. \quad f(z) = \operatorname{Im} z^2 + \bar{z}^2, \quad z_1 = 0, z_2 = 1 + i.$$

$$6.9. \quad f(z) = 2\operatorname{Im} \bar{z}^2 + i, \quad z_1 = -1, z_2 = -1 - 2i.$$

6.10. $f(z) = z\bar{z} + 4z + 1, \quad z_1 = -1 - i, z_2 = 1 + i.$

2) Вычислить интеграл

$$\int_{\Gamma} f(z) dz.$$

6.11. $f(z) = z \operatorname{Im} z, \quad \Gamma$ — дуга окружности $|z| = 1$, проходимая от точки $z_1 = -1$ до точки $z_2 = 1$ против часовой стрелки.

6.12. $f(z) = z \operatorname{Im} z^2, \quad \Gamma$ — дуга окружности $|z| = 1$, проходимая от точки $z_1 = -1$ до точки $z_2 = 1$ по часовой стрелке.

6.13. $f(z) = \bar{z} \operatorname{Re} z^2, \quad \Gamma$ — окружность $|z| = 1$.

6.14. $f(z) = z \operatorname{Re} z, \quad \Gamma$ — окружность $|z| = 2$.

6.15. $f(z) = z(\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z), \quad \Gamma$ — дуга окружности $|z| = 1$, проходимая от точки $z_1 = -1$ до точки $z_2 = 1$ по часовой стрелке.

3) Вычислить с помощью формулы Ньютона – Лейбница (6.5).

6.16. $\int_{1+i}^{1-i} e^z dz.$

6.17. $\int_i^1 \cos z dz.$

6.18. $\int_{2-i}^i (3z^2 + z) dz.$

6.19. $\int_{1-i}^{1+i} \sin z dz.$

6.20. $\int_0^i \operatorname{ch} z dz.$

4) Вычислить с помощью интегрирования по частям.

6.21. $\int_0^i z e^z dz.$

6.22. $\int_i^{1+i} z \cos z dz.$

6.23. $\int_i^1 z \operatorname{ch} z dz.$

6.24. $\int_0^{2+i} z \operatorname{sh} z dz.$

6.25. $\int_{1-i}^{1+i} z \sin z dz.$

5) Вычислить с помощью интегральной формулы Коши (6.7).

$$6.26. \quad \int_{\Gamma} \frac{e^z}{(z-1)(z+1)} dz,$$

a) Γ — окружность $|z-1+i|=10$; b) Γ — окружность $|z-1+i|=3/2$.

$$6.27. \quad \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{ch} z}{z(z-1)} dz,$$

a) Γ — окружность $|z-i|=8$; b) Γ — окружность $|z-1+i|=6/5$.

$$6.28. \quad \int_{\Gamma} \frac{\sin z}{(z-i)(z+i)} dz,$$

a) Γ — окружность $|z-2|=5$; b) Γ — окружность $|z-2|=1$.

$$6.29. \quad \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{sh} z}{(z-i)(z-2i)} dz,$$

a) Γ — окружность $|z-3i|=20$; b) Γ — окружность $|z-3i|=3/2$.

$$6.30. \quad \int_{\Gamma} \frac{\cos z}{(z+1)(z+i)} dz,$$

a) Γ — окружность $|z-1-i|=8$; b) Γ — окружность $|z-1-i|=4$.

6) Вычислить с помощью интегральной формулы Коши (6.7) и формулы (6.8).

$$6.31. \quad \int_{|z|=2} \frac{z^2}{(z-i)(z-1)^2} dz. \quad 6.32. \quad \int_{|z-2i|=10} \frac{e^z}{(z-1+i)^4} dz.$$

$$6.33. \quad \int_{|z+1|=4} \frac{\sin z}{(z-1)(z-i)^2} dz. \quad 6.34. \quad \int_{|z-2+i|=15} \frac{z \cos z}{(z+1-i)^3} dz.$$

$$6.35. \quad \int_{|z|=8} \frac{z \sin z}{(z-10)(z-2i)^3} dz.$$

7) Дополнительные задачи.

6.36. Вывести из определения интеграла равенство

$$\int_{z_1}^{z_2} z dz = z_2^2 - z_1^2.$$

6.37. Для $n \in \mathbb{Z}$, $R > 0$ и $z_0 \in \mathbb{C}$ найти значение интеграла

$$\int_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n dz.$$

7. Области сходимости рядов

Для любой последовательности $\{c_n\}$ положительных чисел имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n},$$

если оба этих предела существуют. Поэтому в случае существования пределов, о которых идёт речь ниже, для вычисления чисел R и r можно пользоваться любой из приведённых формул. В другой ситуации следует пользоваться формулой с корнем n -й степени и $\overline{\lim}$ вместо \lim . Ниже $a_n \in \mathbb{C}$.

Областью сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

является круг $|z - z_0| < R$, где R определяется формулами

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}. \quad (7.1)$$

Число R называется радиусом сходимости ряда.

На границе круга сходимости степенного ряда находится хотя бы одна особая точка функции, к которой сходится этот ряд. Поэтому радиус сходимости R ряда равен расстоянию от z_0 до ближайшей особой точки суммы ряда $f(z)$. По поводу особых точек см. пункт 9.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

сходится в области $|z - z_0| > r$, где r определяется формулами

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}, \quad r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{-n-1}|}{|a_{-n}|}. \quad (7.2)$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \Sigma_1 + \Sigma_2 \quad (7.3)$$

сходится в пересечении областей сходимости составляющих его рядов Σ_1 и Σ_2 . Точнее, пусть r и R — числа, подсчитанные для рядов Σ_1 и Σ_2 по формулам (7.1) – (7.2). Если $r > R$, то ряд (7.3) расходится всюду. Если $r < R$, то ряд (7.3) сходится в кольце $r < |z - z_0| < R$. Если же $r = R$, то не существует области, в которой сходится ряд (7.3), так как точки его сходимости, если они есть, принадлежат окружности $|z - z_0| = r = R$.

Пример 7.1. Найдём радиус и область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos in \cdot (z + 2 - i)^n.$$

Заметим, что $\cos in = \operatorname{ch} n = (e^n + e^{-n})/2$. Применим правую формулу из (7.1):

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\operatorname{ch} n|}{|\operatorname{ch}(n+1)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(n+1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n + e^{-n}}{e^{n+1} + e^{-n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-2n}}{e - e^{-2n-1}} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Поэтому область сходимости ряда есть круг $|z + 2 - i| < e^{-1}$.

Пример 7.2. Исследуем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1 + 2i)^n \cdot (z - i)^n.$$

Так как $|a_n| = |(-1 + 2i)^n| = 5^{n/2}$, то по левой формуле из (7.1)

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^{n/2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Тот же результат даёт и правая формула:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n/2}}{|5^{(n+1)/2}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Круг сходимости ряда есть $|z - i| < 1/\sqrt{5}$.

Пример 7.3. Найдём область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + 4i)^n}{(z + 1 + 2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 1 + 2i)^n}{8^n} = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Для ряда Σ_1 имеем: $a_{-n} = (3 + 4i)^n$, $a_{-n-1} = (3 + 4i)^{n+1}$, поэтому по правой формуле из (7.2)

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(3 + 4i)^{n+1}|}{|(3 + 4i)^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |3 + 4i| = 5.$$

Ряд Σ_1 сходится в области $|z + 1 + 2i| > 5$.

Для ряда Σ_2 имеем: $a_n = 8^{-n}$, $a_{n+1} = 8^{-n-1}$. Радиус сходимости оказывается равным

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|8^{-n}|}{|8^{-n-1}|} = 8,$$

ряд сходится в области $|z + 1 + 2i| < 8$.

Таким образом, $r = 5 < R = 8$. Значит, исходный ряд сходится в кольце $5 < |z + 1 + 2i| < 8$.

У п р а ж н е н и я

1) Определить радиус сходимости и область сходимости ряда.

$$7.1. \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{in}(z - 1 + i)^n.$$

$$7.2. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - 2}{2 + i} \right)^n.$$

$$7.3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\pi/n}(z - 3 + 2i)^n.$$

$$7.4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{in} \right)^n.$$

$$7.5. \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n + 5 - i)(z - 2i)^n.$$

2) Определить область сходимости ряда.

$$7.6. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - 2i)^n(z + 5i)^n}.$$

$$7.7. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + 3i)^n}{(z - 1 + i)^n}.$$

$$7.8. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(iz)^n}.$$

$$7.9. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n(z + i)^n}.$$

$$7.10. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5}{(z - 1 + i)^n}.$$

3) Определить область сходимости ряда.

$$7.11. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n(z - 3 + 2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (3 + in)(z - 3 + 2i)^n.$$

$$7.12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z-4i} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-4i}{5} \right)^n.$$

$$7.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-1-5i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1-5i)^n}{3^{n+1}}.$$

$$7.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{(z-2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n!}.$$

$$7.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+5i)^n}{(z-4)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-4)^n}{(3+4i)^n}.$$

4) Дополнительные задачи.

7.16. Пусть $c_n > 0$. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n},$$

если оба предела существуют.

7.17. Пусть $a_n \in \mathbb{C}$. Верно ли, что из сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$? Наоборот, верно ли, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? В случае отрицательного ответа на любой из вопросов привести контрпример.

8. Разложение функций в ряды Тейлора и Лорана

По теореме Тейлора аналитическая в области D функция f в окрестности каждой точки $z_0 \in D$ единственным образом разлагается в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (8.1)$$

радиус сходимости которого не меньше расстояния от z_0 до границы D . Коэффициенты ряда Тейлора (8.1) могут быть найдены по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (8.2)$$

Γ — произвольная окружность с центром в z_0 , принадлежащая D .

Теорема Лорана утверждает, что функция f , однозначная и аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$ (возможно, $r = 0$ или $R = \infty$), разлагается в этом кольце в ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (8.3)$$

коэффициенты которого удовлетворяют равенствам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.4)$$

Здесь Γ — произвольная окружность с центром в z_0 , лежащая внутри кольца. Представление f её рядом Лорана, то есть рядом вида (8.3), в данном кольце является единственным.

Практическое применение формул (8.2) и (8.4) обычно является затруднительным. Поэтому чаще с учётом свойства единственности ряда Тейлора или ряда Лорана нужное разложение получают каким-то иным способом. Например, во многих задачах можно использовать ряды Тейлора для e^z , $\sin z$, $\cos z$ (см. пункт 3), сходящиеся на всей комплексной плоскости, а также следующие ряды, радиус сходимости которых равен 1:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots,$$

$$(1+z)^b = 1 + bz + \frac{b(b-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{b(b-1)\dots(b-n+1)}{n!} z^n + \dots$$

Здесь $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0, 1, 2, 3, \dots$. В частности, полагая $b = -1$, имеем:

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots, \quad (8.5)$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \quad (8.6)$$

Отметим ещё раз, что эти разложения справедливы для $|z| < 1$.

Пример 8.1. Написать разложение функции

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$$

в ряд Лорана в следующих кольцах с центром в 0: 1) в круге $|z| < 1$; 2) в кольце $1 < |z| < 2$; 3) в кольце $2 < |z| < \infty$.

Прежде всего заметим, что f имеет две особые точки $z_1 = -2$ и $z_2 = 1$, которые не принадлежат ни одной из данных областей. Следовательно, в

каждой из областей функция f является аналитической и её разложение в ряд Лорана существует. Как оказывается, в различных кольцах для этой функции получаются различные разложения.

1) Для $|z| < 1$ запишем равенство

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+z/2} - \frac{1}{1-z}.$$

Первое слагаемое представим в виде следующего ряда, сходящегося даже при $|z| < 2$:

$$\frac{1}{1+z/2} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \dots \quad (8.7)$$

Мы использовали (8.5). Второе слагаемое представляется рядом (8.6) — этот ряд сходится при $|z| < 1$. Поэтому в круге $|z| < 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \dots \right) - (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) = \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{5}{4}z - \frac{7}{8}z^2 - \frac{17}{16}z^3 + \dots \end{aligned}$$

В этом случае ряд Лорана является рядом Тейлора.

2) В кольце $1 < |z| < 2$ ряд (8.7) сходится, мы его используем для представления дроби $1/(z+2)$. Однако ряд (8.6) теперь расходится; значит, для представления дроби $1/(z-1)$ требуется модификация. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+z/2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z}.$$

Теперь можно применить равенство, вытекающее из (8.6):

$$\frac{1}{1-1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \quad (8.8)$$

Этот ряд сходится для $|1/z| < 1$, то есть для $|z| > 1$. Собирая вместе нужные равенства, получим:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \dots \right) + \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^n}. \end{aligned}$$

3) Пусть теперь $|z| > 2$. Ряд (8.8) сходится, а для дроби $1/(z+2)$ требуется новое представление. Применим запись

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+2/z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z}.$$

Первое слагаемое разложим с помощью (8.5), так как при $|2/z| < 1$, то есть $|z| > 2$, справедливо

$$\frac{1}{1+2/z} = 1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \dots$$

Учитывая это равенство и (8.8), получим:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \dots + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right) = \\ &= \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} - \frac{7}{z^4} + \dots \end{aligned}$$

Пример 8.2. Представим рядом Лорана с центром в точке $z_0 = 0$ функцию $f(z) = z^2 \cos(1/z)$.

Функция является аналитической в кольце $0 < |z| < \infty$. Так как для любого $\xi \in \mathbb{C}$

$$\cos \xi = 1 - \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^4}{4!} - \frac{\xi^6}{6!} + \dots,$$

то, полагая $\xi = 1/z$, имеем:

$$f(z) = z^2 \left(1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} \right) = -\frac{1}{2} + z^2 + \frac{1}{4!z^2} - \frac{1}{6!z^4} + \dots$$

У п р а ж н е н и я

1) Разложить функцию f в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 . Найти радиус сходимости ряда.

$$8.1. \quad f(z) = \frac{4}{z+2}, \quad z_0 = -1. \quad 8.2. \quad f(z) = \frac{2}{z-6}, \quad z_0 = 2.$$

$$8.3. \quad f(z) = \frac{5}{z-i}, \quad z_0 = 1. \quad 8.4. \quad f(z) = \frac{2}{z+i}, \quad z_0 = 2+i.$$

$$8.5. \quad f(z) = \frac{3z+2}{z+5}, \quad z_0 = 1. \quad 8.6. \quad f(z) = \frac{2z+1}{z+3}, \quad z_0 = 2.$$

$$8.7. \quad f(z) = \frac{z-1}{z+3}, \quad z_0 = i. \quad 8.8. \quad f(z) = \frac{z-2}{z+5}, \quad z_0 = -1.$$

$$8.9. \quad f(z) = \frac{z^2+1}{z+1}, \quad z_0 = -i. \quad 8.10. \quad f(z) = \frac{3z}{z^2-1}, \quad z_0 = 0.$$

2) Разложить функцию f в ряд Лорана с центром в точке $z_0 = 0$.

$$8.11. \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^5}.$$

$$8.12. \quad f(z) = \frac{\cos^2 z}{z^2}.$$

$$8.13. \quad f(z) = \frac{e^z}{z^4}.$$

$$8.14. \quad f(z) = z^3 e^{1/z}.$$

$$8.15. \quad f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}.$$

$$8.16. \quad f(z) = \cos \frac{1}{z^2}.$$

$$8.17. \quad f(z) = z^4 \cos \frac{1}{z}.$$

$$8.18. \quad f(z) = \frac{1}{z} \sin^2 \frac{2}{z}.$$

$$8.19. \quad f(z) = \frac{1 + \cos z}{z^3}.$$

$$8.20. \quad f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z^6}.$$

3) Разложить функцию f в ряд Лорана в указанном кольце.

$$8.21. \quad f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 4}, \quad 1 < |z| < 4.$$

$$8.22. \quad f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 4}, \quad 4 < |z| < \infty.$$

$$8.23. \quad f(z) = \frac{1}{z^2 - 8z + 15}, \quad 3 < |z| < 5.$$

$$8.24. \quad f(z) = \frac{1}{z^2 - 8z + 15}, \quad 5 < |z| < \infty.$$

$$8.25. \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + z}, \quad 0 < |z| < 1.$$

$$8.26. \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + z}, \quad 1 < |z| < \infty.$$

$$8.27. \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z - 8}, \quad 1 < |z + 2| < 4.$$

$$8.28. \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}, \quad 0 < |z - i| < 2.$$

$$8.29. \quad f(z) = \frac{2z}{z^2 - 4z + 3}, \quad 1 < |z| < 3.$$

$$8.30. \quad f(z) = \frac{2z}{z^2 - 4z + 3}, \quad 3 < |z| < \infty.$$

4) Дополнительные задачи.

8.31. Найти радиус сходимости ряда Тейлора с центром в точке $z_0 = 0$ функции $f(z) = \operatorname{tg} z$, не выписывая явно этого ряда.

8.32. Доказать, что аналитическая в окрестности точки $z_0 = 0$ функция f , удовлетворяющая условию $f(2z) = f(z)$, есть константа.

8.33. Пусть f — аналитическая в кольце $r < |z| < R$ функция,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

— её разложение в ряд Лорана в этом кольце. Доказать, что если $f(-z) = f(z)$ при всех z , то $a_{2n+1} = 0$, а если $f(-z) = -f(z)$ при всех z , то $a_{2n} = 0$.

9. Изолированные особые точки.

Вычеты

Пусть функция f определена в области D . Точка $z_0 \in \overline{D}$ называется правильной точкой этой функции тогда и только тогда, когда существует степенной ряд с центром в z_0 и ненулевым радиусом сходимости, который в общей части своего круга сходимости и D сходится к f . Точка $z_0 \in \overline{D}$, не являющаяся правильной точкой функции f , называется её особой точкой. Если f — аналитическая в D , то все точки D являются правильными, а точки границы области — правильными или особыми. Особая точка функции называется изолированной тогда и только тогда, когда в некоторой её окрестности нет других изолированных точек этой функции.

Пусть $z_0 \neq \infty$ — изолированная особая точка аналитической функции f . Тогда существует $\delta > 0$ такое, что в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$ функция является аналитической, а значит, разлагается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (9.1)$$

Точка z_0 называется устранимой особой точкой тогда и только тогда, когда ряд (9.1) не содержит отрицательных степеней $z - z_0$.

Точка z_0 называется полюсом тогда и только тогда, когда ряд (9.1) содержит конечное число отрицательных степеней $z - z_0$. Более точно, z_0 называется полюсом порядка m в том и только том случае, когда минимальный имеющийся в (9.1) отрицательный показатель есть $-m$. Это эквивалентно тому, что в некоторой окрестности z_0 справедливо представление

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \quad g \text{ — аналитическая, } g(z_0) \neq 0.$$

Точка z_0 называется существенно особой точкой тогда и только тогда, когда ряд (9.1) содержит бесконечное число отрицательных степеней $z - z_0$.

Каждый вид изолированной особой точки z_0 характеризуется своим поведением $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$. Если z_0 является устранимой (и только в этом случае), то существует конечный предел $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$ (иначе: функция f ограничена по модулю в окрестности z_0). Если z_0 является полюсом (и только в этом случае), то существует бесконечный предел $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$ (иначе: функция f не ограничена по модулю в окрестности z_0). Наконец, когда z_0 является существенно особой точкой (и только тогда), не существует конечного или бесконечного предела $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$. В последнем случае для любого комплексного числа B , включая и $B = \infty$, найдётся такая последовательность $z_n \rightarrow z_0$, для которой $f(z_n) \rightarrow B$ (теорема Сохоцкого – Вейерштрасса).

Точка $z_0 = \infty$ называется изолированной особой точкой f , если в некоторой окрестности $|z| > R$ этой точки нет конечных изолированных особых точек. В этом случае в кольце $R < |z| < \infty$ функция является аналитической и представляется рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n. \quad (9.2)$$

Точка $z_0 = \infty$ называется устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой в ситуациях, когда ряд (9.2) соответственно не содержит, содержит конечное число или содержит бесконечное число положительных степеней z . Поведение $f(z)$ при $z \rightarrow \infty$ в зависимости от характера особой точки (устраиваемая, полюс, существенно особая) ровно такое же, как и в случае конечной z_0 .

Вычетом аналитической функции $f(z)$ в конечной изолированной особой точке z_0 называется величина коэффициента c_{-1} из разложения (9.1):

$$\operatorname{res}[f(z); z_0] := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz. \quad (9.3)$$

Здесь Γ — контур, содержащий z_0 внутри себя и лежащий в области аналитичности. Правое равенство следует из формулы для коэффициентов ряда Лорана, см. пункт 8.

Наряду с (9.3) справедливы и другие равенства для вычисления вычетов.

Если z_0 — устранимая особая точка, то $\operatorname{res}[f(z); z_0] = 0$.

Пусть z_0 — полюс первого порядка. Тогда

$$\operatorname{res}[f(z); z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (9.4)$$

Если $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, причём $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname{res}[f(z); z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (9.5)$$

Пусть z_0 — полюс порядка m . Тогда

$$\operatorname{res}[f(z); z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z - z_0)^m f(z) \right]^{(m-1)}. \quad (9.6)$$

При $m = 1$ (9.6) совпадает с (9.4).

Если z_0 — существенно особая точка, то для вычисления вычета в z_0 следует использовать ряд Лорана (взять его коэффициент c_{-1}) или использовать другие соображения. Например, если $z_0 = 0$ и $f(-z) = f(z)$, то все коэффициенты Лорана с нечётными номерами, а значит, и c_{-1} , равны нулю.

Вычет $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0 = \infty$ находится из разложения (9.2); на этот раз полагают

$$\operatorname{res}[f(z); \infty] := -c_{-1}.$$

Пример 9.1. Найдём конечные изолированные особые точки и вычеты в них следующих функций:

$$f_1(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad f_2(z) = \frac{1}{z^4 + 1}, \quad f_3(z) = \frac{\sin z}{(z+1)^2(z-1)},$$

$$f_4(z) = e^{1/z^2}, \quad f_5(z) = z^3 \sin \frac{1}{z^2}.$$

Особая точка функции $f_1(z) = (e^z - 1)/z$ есть $z_0 = 0$. Воспользуемся разложением в окрестности нуля функции e^z . Получим, что ряд Лорана с центром в 0 функции f_1 не содержит отрицательных степеней z . Это означает, что z — устранимая особая точка. Тот же результат следует из конечности предела $f_1(z)$ при $z \rightarrow 0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

Так как $z_0 = 0$ — устранимая, то $\operatorname{res}[f_1(z); 0] = 0$.

Изолированные особые точки функции $f_2(z) = 1/(z^4 + 1)$ есть корни знаменателя

$$z_1 = e^{i\pi/4}, \quad z_2 = e^{i3\pi/4}, \quad z_3 = e^{-i\pi/4}, \quad z_4 = e^{-i3\pi/4}.$$

В окрестности z_1

$$f_2(z) = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)} = \frac{h(z)}{z - z_1},$$

h — аналитическая, $h(z_1) \neq 0$. Поэтому z_1 — полюс первого порядка функции f_2 . То же следует и из представления $f_2(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, $\varphi(z_1) \neq 0$, $\psi(z_1) = 0$, $\psi'(z_1) \neq 0$: в нашей ситуации $\varphi(z) = 1$, $\psi(z) = z^4 + 1$. По формуле (9.5)

$$\operatorname{res}[f_2(z); z_1] = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{z_1}{4z_1^4} = \frac{z_1}{-4} = -\frac{1}{4}e^{i\pi/4}.$$

Аналогично рассматриваются точки z_2, z_3, z_4 .

Записав $f_3(z)$ в виде

$$f_3(z) = \frac{\sin z/(z+1)^2}{(z-1)} = \frac{\sin z/(z-1)}{(z+1)^2},$$

убеждаемся, что эта функция имеет две особые точки: $z_1 = 1$ — полюс первого порядка, $z_2 = -1$ — полюс второго порядка. Применим равенства (9.4) и (9.6) (в последнем возьмём $m = 2$) :

$$\begin{aligned}\operatorname{res}[f_3(z); 1] &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin z}{(z+1)^2} = \frac{\sin 1}{4}, \\ \operatorname{res}[f_3(z); -1] &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{\sin z}{z-1} \right)' = \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z \cos z - \cos z - \sin z}{(z-1)^2} = -\frac{\sin 1}{4}.\end{aligned}$$

Единственная конечная изолированная особая точка функции $f_4(z) = e^{1/z^2}$ есть $z_0 = 0$. Воспользуемся рядом Тейлора для e^ξ и положим $\xi = 1/z^2$:

$$e^\xi = 1 + \frac{\xi}{1!} + \frac{\xi^2}{2!} + \dots = 1 + \frac{1}{1!z^2} + \frac{1}{2!z^4} + \dots$$

Это означает, во-первых, что $z_0 = 0$ — существенно особая точка функции f_4 (в разложении присутствует бесконечное число отрицательных степеней z), а во-вторых, что $\operatorname{res}[f_4(z); 0] = c_{-1} = 0$. Другой способ установить характер особенности дают соотношения

$$\lim_{z=x \rightarrow 0} e^{1/z^2} = \infty \neq \lim_{z=iy \rightarrow 0} e^{1/z^2} = 0.$$

Они означают, что конечного или бесконечного предела $f_4(z)$ при $z \rightarrow 0$ не существует.

Наконец, единственной конечной изолированной особой точкой функции $f_5(z) = z^3 \sin(1/z^2)$ является $z_0 = 0$. Так как разложение Лорана в окрестности нуля имеет вид

$$f_5(z) = z^3 \left(\frac{1}{1!z^2} - \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{5!z^{10}} - \dots \right) = z - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^7} - \dots,$$

то $z_0 = 0$ — существенно особая точка функции и вычет в ней равен 0.

Пример 9.2. Определим характер изолированной особой точки $z_0 = \infty$ функций $2z^7 - z^5 + 1$, $\sin z$, e^z , e^{1/z^2} .

Разложения Лорана в окрестности $z_0 = \infty$ есть разложения по степеням z . Для всех функций они записываются очевидным образом. Получается, что ∞ есть полюс седьмого порядка функции $2z^7 - z^5 + 1$, существенно особая точка функций $\sin z$ и e^z , устранимая особая точка функции e^{1/z^2} .

У п р а ж н е н и я

1) Найти все конечные изолированные особые точки функции f и определить характер каждой из них.

$$9.1. \quad f(z) = \frac{\sin z}{(z-1)(z+1-i)^3}.$$

$$9.2. \quad f(z) = \frac{\cos z}{(z+2+2i)^2(z-i)}.$$

$$9.3. \quad f(z) = \frac{e^{1/z}}{(z+1)(z+2)(z-3)^3}.$$

$$9.4. \quad f(z) = \frac{\operatorname{ch} z - 1}{z(z-1+3i)^5}.$$

$$9.5. \quad f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{z(z-1+5i)^3}.$$

$$9.6. \quad f(z) = \frac{1 - \cos z}{z(z+3i)^2}.$$

$$9.7. \quad f(z) = z^2 e^{1/z}.$$

$$9.8. \quad f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z-1+3i)^4}.$$

$$9.9. \quad f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}.$$

$$9.10. \quad f(z) = z \cos \frac{1}{z^2}.$$

2) Указать характер изолированной особой точки $z_0 = \infty$ функции f .

$$9.11. \quad f(z) = \frac{e^z}{z^3 + 1}.$$

$$9.12. \quad f(z) = \frac{z^5}{3z^5 + 4}.$$

$$9.13. \quad f(z) = \frac{z^4 + 1}{e^z}.$$

$$9.14. \quad f(z) = ze^{-z}.$$

$$9.15. \quad f(z) = 2e^{-1/z^2}.$$

$$9.16. \quad f(z) = z^2 e^{1/z}.$$

$$9.17. \quad f(z) = (2z^2 + z)e^z.$$

$$9.18. \quad f(z) = e^{z/(1-z)}.$$

$$9.19. \quad f(z) = e^{z-1/z}.$$

$$9.20. \quad f(z) = z \cos \frac{1}{2z^3 + z}.$$

3) Найти вычеты функции f в конечных изолированных особых точках.

$$9.21. \quad f(z) = z^3 e^{1/z}.$$

$$9.22. \quad f(z) = \frac{\cos z - 1}{z(z-i)^2}.$$

$$9.23. \quad f(z) = \frac{\sin z}{(z+2i)^2(z+1)}.$$

$$9.24. \quad f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z+2)^2}.$$

$$9.25. \quad f(z) = \frac{e^{-1/z^2}}{z^2+1}.$$

$$9.26. \quad f(z) = \frac{1}{z^5-1}.$$

$$9.27. \quad f(z) = \sin \frac{1}{z^2} + z^4.$$

$$9.28. \quad f(z) = \cos \frac{1}{z} + 2z^5.$$

$$9.29. \quad f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z-i)^2}.$$

$$9.30. \quad f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{(z-i)(z-1)^2}.$$

4) Найти вычет функции f в точке $z_0 = \infty$.

$$9.31. \quad f(z) = \frac{z^2}{z+1}.$$

$$9.32. \quad f(z) = \frac{e^z}{z^3}.$$

$$9.33. \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^5}.$$

$$9.34. \quad f(z) = \frac{\cos z}{z^3}.$$

$$9.35. \quad f(z) = (2z^3 + z^2 + 1)e^z.$$

$$9.36. \quad f(z) = \frac{z}{3z+1}.$$

$$9.37. \quad f(z) = \frac{3}{z} + z^{10} + 5.$$

$$9.38. \quad f(z) = z \sin \frac{1}{z}.$$

$$9.39. \quad f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}.$$

$$9.40. \quad f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z}.$$

5) Дополнительные задачи.

9.41. Привести пример аналитической функции, у которой было бы ровно две конечных особых точки: а) устранимая особая точка и полюс второго порядка; б) простой полюс и существенно особая точка; в) устранимая особая точка и существенно особая точка.

9.42. Привести пример аналитической функции, для которой $z = 1 + i$ является особой точкой, но не изолированной.

9.43. Привести пример аналитической функции, для которой $z = \infty$ является предельной точкой простых полюсов.

10. Вычисление с помощью вычетов комплексных интегралов

Пусть функция f является аналитической в области D всюду за исключением конечного числа особых точек z_1, \dots, z_n ; Γ — контур, лежащий в D и содержащий точки z_1, \dots, z_n внутри себя. Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[f(z); z_k] \quad (10.1)$$

(теорема Коши о вычетах). Равенство (10.1) верно и в случае, когда Γ — граница D и f непрерывна в \bar{D} .

Пример 10.1. Вычислим интеграл

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz.$$

Подынтегральная функция f аналитична в области $|z| < 4$ всюду за исключением точек $z_1 = 0$, $z_2 = -1$. Изолированная особая точка $z_1 = 0$ является устранимой, так как

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z+1} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Поэтому $\operatorname{res}[f(z); 0] = 0$. Изолированная особая точка $z_2 = -1$ является полюсом первого порядка. Это следует из представления

$$f(z) = \frac{(e^z - 1)/z}{z + 1},$$

в котором числитель есть функция, аналитическая в окрестности точки -1 . Имеем:

$$\operatorname{res}[f(z); -1] = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^z - 1}{z} = 1 - \frac{1}{e}.$$

По теореме о вычетах

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i \left(\operatorname{res}[f(z); 0] + \operatorname{res}[f(z); -1] \right) = 2\pi i \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$

Пример 10.2. Вычислим интеграл

$$\int_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2 + 1} dz.$$

В круге $|z - i| < 3/2$ подынтегральная функция f является аналитической всюду за исключением изолированных особых точек $z_1 = 0$ и $z_2 = i$.

Интересно, что при рассмотрении z_1 вычисления можно заменить рассуждениями! Точка $z_1 = 0$ является существенно особой для функции $g(z) = e^{1/z^2}$, так как её разложение по степеням z содержит бесконечное число отрицательных степеней. Это означает, что не существует конечного или бесконечного предела $g(z)$ при $z \rightarrow 0$. Поэтому не существует конечного или бесконечного предела $f(z)$ при $z \rightarrow 0$. Отсюда следует, что z_1 — существенно особая точка f . В силу свойства $f(-z) = f(z)$ коэффициенты c_j с нечётными номерами лорановского разложения f в окрестности $z_1 = 0$ равны нулю. Значит, $\text{res}[f(z); 0] = c_{-1} = 0$.

Точка же $z_2 = i$ является полюсом первого порядка f , поэтому

$$\text{res}[f(z); i] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{1/z^2}}{z + i} = \frac{1}{2ie}.$$

По теореме о вычетах

$$\int_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i (\text{res}[f(z); 0] + \text{res}[f(z); i]) = \frac{\pi}{e}.$$

У п р а ж н е н и я

1) Вычислить интеграл с помощью теоремы о вычетах.

$$10.1. \int_{|z-i|=5} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)} dz. \quad 10.2. \int_{|z-1|=1} \frac{1}{z^4 + 1} dz.$$

$$10.3. \int_{|z|=\sqrt{2}} \frac{z+1}{(z-i)(z+1)^2} dz. \quad 10.4. \int_{|z-1|=3} \frac{z}{(z+2)(z+3)^2} dz.$$

$$10.5. \int_{|z+1|=1} \frac{1}{z^3 + 1} dz. \quad 10.6. \int_{|z+i|=2} \frac{(z+1)^2}{z-5} dz.$$

$$10.7. \int_{|z-i|=10} \frac{z}{(z-2)^2} dz. \quad 10.8. \int_{|z-4|=1} \frac{z^3}{z(z-5)} dz.$$

$$10.9. \int_{|z-1+i|=\sqrt{6}} \frac{z}{z^2 + 1} dz. \quad 10.10. \int_{|z-1+i|=2} \frac{1}{(z-1+i)(z-2+i)} dz.$$

2) Вычислить интеграл с помощью теоремы о вычетах.

$$10.11. \int_{|z-3i|=4} \frac{z}{e^z - 1} dz . \quad 10.12. \int_{|z|=1} z^2 \sin \frac{1}{z} dz .$$

$$10.13. \int_{|z|=1} z \operatorname{tg} \pi z dz . \quad 10.14. \int_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin \pi z}{z^2 - z} dz .$$

$$10.15. \int_{|z+1|=4} \frac{z}{e^z + 3} dz . \quad 10.16. \int_{|z|=5} \frac{\cos z}{z^2 - 4} dz .$$

$$10.17. \int_{|z-i|=1} \frac{e^z}{z^4 + 2z^2 + 1} dz . \quad 10.18. \int_{|z|=2} \left(\sin \frac{1}{z^2} + e^z \operatorname{ch} z \right) dz .$$

$$10.19. \int_{|z|=1} (z^2 + 3)e^{1/z^2} dz . \quad 10.20. \int_{|z-1-i|=10} \frac{e^z}{z^2(z+i)} dz .$$

3) Дополнительные задачи.

10.21. Вывести теорему о вычетах из теоремы Коши (см. пункт 6).

10.22. Какие из интегралов 10.1 – 10.20 могут быть вычислены с помощью интегральной формулы Коши (6.7) и её обобщения (6.8)? В двух-трёх случаях проведите необходимые вычисления.

11. Вычисление с помощью вычетов действительных интегралов

Приведём некоторые примеры применения комплексного анализа для вычисления интегралов в действительной ситуации.

Пусть функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$ и аналитична внутри неё всюду, кроме конечного числа особых точек z_1, \dots, z_n .

Сначала предположим дополнительно, что существуют такие константы $\varepsilon > 0$ и $M > 0$, что при достаточно больших $|z|$ имеет место оценка

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\varepsilon}} . \quad (11.1)$$

Неравенство (11.1) выполнено, например, в случае, когда $f(z) = p(z)/q(z)$, $p(z), q(z)$ — алгебраические многочлены, причём $\deg q(z) - \deg p(z) \geq 2$. В этом случае можно взять $\varepsilon = 1$. Если справедливо (11.1), то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [f(z); z_k]. \quad (11.2)$$

Теперь вместо (11.1) допустим, что $f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ равномерно относительно $\arg z$. Более точно, пусть $\gamma(r)$ есть полуокружность $|z| = r$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Сказанное означает, что при $r \rightarrow \infty$

$$L(r) := \max_{z \in \gamma(r)} |f(z)| \rightarrow 0. \quad (11.3)$$

В этой ситуации для $\lambda > 0$ выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [f(z) e^{i\lambda z}; z_k]. \quad (11.4)$$

При установлении (11.4) существенно используется тот факт, что если выполнено условие (11.3), то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma(r)} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0$$

(лемма Жордана). Так как $\cos \lambda x = \operatorname{Re} e^{i\lambda x}$, $\sin \lambda x = \operatorname{Im} e^{i\lambda x}$, то из равенства (11.4) следует, что при $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = \\ &= \operatorname{Re} \left(2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [f(z) e^{i\lambda z}; z_k] \right), \end{aligned} \quad (11.5)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx &= \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = \\ &= \operatorname{Im} \left(2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [f(z) e^{i\lambda z}; z_k] \right). \end{aligned} \quad (11.6)$$

Пример 11.1. Вычислим интеграл

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

В силу чётности подынтегральной функции интеграл I_1 составляет половину интеграла по всей действительной прямой $(-\infty, \infty)$. Функция

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$$

имеет в полуплоскости $\text{Im } z > 0$ единственную особую точку — полюс второго порядка $z_1 = i$. Так как $f(z) = p(z)/q(z)$ — отношение двух многочленов, причём $\deg q(z) - \deg p(z) \geq 2$, то имеет место (11.1) с $\varepsilon = 1$. Значит, верно (11.2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \text{res}[f(z); i].$$

Остаётся найти вычет $f(z)$ в полюсе второго порядка i :

$$\text{res}[f(z); i] = \lim_{z \rightarrow i} [f(z)(z - i)^2]' = \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{z^2}{(z + i)^2} \right]' = -\frac{i}{4}.$$

Поэтому

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{4} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 11.2. Вычислим интеграл

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx.$$

Подынтегральная функция является чётной. Кроме того, $\sin x = \text{Im } e^{ix}$. Поэтому

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \text{Im } I_3.$$

Пусть

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}, \quad F(z) = f(z) e^{iz}.$$

Обе эти функции в верхней полуплоскости имеют полюс первого порядка в точке i . Если $|z| = r$, то

$$|f(z)| = \left| \frac{z}{z^2 + 1} \right| = \frac{1}{|z + 1/z|} \leq \frac{1}{|z| - 1/|z|} = \frac{1}{r - 1/r}.$$

Мы использовали свойства модуля, в частности, неравенство $|z| - 1/|z| \leq |z + 1/z|$, которое следует из неравенства треугольника. Пусть $\gamma(r)$ — полуокружность $|z| = r$, $\text{Im } z \geq 0$. Тогда

$$L(r) = \max_{z \in \gamma(r)} |f(z)| \leq \frac{1}{r - 1/r} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Итак, сходимость (11.3) имеет место. Можно применить (11.4) с $\lambda = 1$:

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \operatorname{res} \left[\frac{z e^{iz}}{z^2 + 1}; i \right] = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{z e^{iz}}{z + i} = \frac{\pi i}{e}.$$

Поэтому

$$I_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Im} I_3 = \frac{\pi}{2e}.$$

У п р а ж н е н и я

1) Вычислить действительный интеграл, переходя к функции комплексного переменного. Почему применима формула (11.2)?

$$11.1. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 10} dx. \quad 11.2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 10x + 34} dx.$$

$$11.3. \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 2}{x^4 + 5x^2 + 4} dx. \quad 11.4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 8}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx.$$

$$11.5. \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx. \quad 11.6. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^4 + 1} dx.$$

$$11.7. \int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx. \quad 11.8. \int_0^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1} dx.$$

$$11.9. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx. \quad 11.10. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 8x + 25} dx.$$

2) Вычислить действительный интеграл, переходя к функции комплексного переменного и применяя формулы (11.4) – (11.6). Предварительно обосновать выполнение условия (11.3).

$$11.11. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4x + 20} dx . \quad 11.12. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx .$$

$$11.13. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 6x + 10} dx . \quad 11.14. \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx .$$

$$11.15. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 10x + 34} dx . \quad 11.16. \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 9)(x^2 + 16)} dx .$$

$$11.17. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 5} dx . \quad 11.18. \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx .$$

$$11.19. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 10x + 50} dx . \quad 11.20. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 4x + 8} dx .$$

3) Дополнительные задачи.

11.21. Пусть $f(z) = p(z)/q(z)$, p, q — многочлены и $\deg q - \deg p \geq 2$. Доказать, что тогда условие (11.1) выполняется с $\varepsilon = 1$.

11.22. Выделяя особенность $z_0 = 0$ функции $f(z) = e^{i\lambda z}/z$, принадлежащую действительной оси, применяя лемму Жордана и теорему о вычетах, получить равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda > 0.$$

Литература

1. Бицадзе, А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного: учеб. пособие / А. В. Бицадзе. – 2-е изд., доп. – М.: Наука, 1972. – 264 с.
2. Волковыский, Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: учеб. пособие / Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. – 4-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2002. – 312 с.
3. Зеель, Э. О. Задачник по теории функций комплексного переменного: учеб. пособие / Э. О. Зеель; Поморский гос. ун-т. – Архангельск, 2003. – 73 с.
4. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: учеб. пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселёв, Г. И. Макаренко. – М.: Наука, 1971. – 256 с.
5. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И. И. Привалов. – 12-е изд. – М.: Наука, 1977. – 444 с.

Приложения

О содержании дисциплины "Теория функций комплексного переменного"

Ниже приводятся требования по содержанию дисциплины "Теория функций комплексного переменного", предъявляемые Государственным образовательным стандартом по специальности "Компьютерная безопасность", а также выдержки из следующих программ:

- рабочей учебной программы по ТФКП;
- примерной программы зачёта по ТФКП;
- программы междисциплинарного государственного экзамена по специальности "Компьютерная безопасность" (часть, относящаяся к ТФКП).

Рабочая учебная программа и программа зачёта по ТФКП для данной специальности составлены автором настоящих методических указаний.

Приложение 1.

Выдержка из Государственного образовательного стандарта

В соответствии с разделом 4 Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по специальности 090102 "Компьютерная безопасность" обязательный минимум содержания дисциплины "Теория функций комплексного переменного" составляют следующие темы:

голоморфные функции; условия Коши – Римана; степенные ряды в комплексной области; экспонента и логарифмы в комплексной области; аналитические функции и их основные свойства; нули аналитической функции; полюсы; мероморфные функции; криволинейные интегралы; гладкие пути; дифференциальные формы; гомотопия; односвязные и звёздные области; гармонические функции и их связь с аналитическими функциями; целые функции; теорема Лиувилля; принцип максимума модуля; формула Грина; интеграл типа Коши; ряды Лорана; изолированные особые точки и их классификация; вычеты; принцип аргумента; вычисление интегралов с помощью вычетов.

Приложение 2.

Выдержка из рабочей учебной программы дисциплины "Теория функций комплексного переменного". Специальность "Компьютерная безопасность"

1. Введение. Предмет и исторические этапы теории функций комплексного переменного. Подходы Коши, Вейерштрасса и Римана к характеристике аналитической функции.

2. Комплексные числа и действия с ними. Алгебраическая и тригонометрическая формы. Модуль и аргумент. Алгебраические свойства поля \mathbb{C} . Интерпретация Римана комплексных чисел.

3. Множества на расширенной комплексной плоскости. Открытые и замкнутые множества. Граница. Связность. Односвязные и многосвязные множества. Гладкие и кусочно-гладкие кривые.

4. Последовательности и ряды комплексных чисел. Предел последовательности. Сумма ряда. Основные теоремы о пределах.

5. Однозначные и многозначные функции. Предел по Коши и по Гейне. Непрерывность и равномерная непрерывность.

6. Функциональные ряды. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда.

7. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Формула Коши – Адамара. Определение функций $f(z) = e^z$, $f(z) = \sin z$, $f(z) = \cos z$ с помощью степенных рядов, их свойства.

8. Дифференцируемость функций комплексного переменного. Производная. Условия Коши – Римана. Аналитические функции. Аналитичность суммы степенного ряда.

9. Понятие о конформном отображении. Свойства постоянства углов и постоянства растяжений для аналитической функции.

10. Некоторые важные функции комплексного переменного. Области однолиственности функций $f(z) = z^n$, $f(z) = e^z$. Понятие о римановой поверхности. Функции $f(z) = \sqrt[n]{z}$, $f(z) = \operatorname{Ln} z$, $f(z) = \ln z$. Дробно-линейная функция и её свойства.

11. Интегрирование функций комплексного переменного. Определение и свойства интеграла. Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей. Интегральная формула Коши. Формула среднего значения. Принцип максимума модуля. Гармонические функции.

12. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции. Теорема Лиувилля.

13. Ряды Тейлора. Теорема Тейлора. Неравенства Коши. Теорема о единственности аналитической функции. Нули аналитической функции. Правильные и особые точки. Понятие аналитического продолжения.

14. Ряды Лорана. Кольцо сходимости ряда Лорана. Теорема Лорана. Единственность ряда Лорана.

15. Изолированные особые точки аналитической функции. Определение и классификация изолированных особых точек. Поведение функции в окрестности изолированной особой точки. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса.

16. Вычеты. Теоремы о вычетах. Вычисление определённых интегралов с помощью вычетов. Логарифмический вычет. Число нулей аналитической функции. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры и её доказательство средствами ТФКП.

Приложение 3.

Примерная программа зачёта по дисциплине "Теория функций комплексного переменного". Специальность "Компьютерная безопасность" (3-й курс, 5-й семестр)

1. Комплексные числа и действия с ними.
2. Расширенная комплексная плоскость. Интерпретация Римана комплексных чисел.
3. Открытые и замкнутые множества на расширенной комплексной плоскости. Граница. Связность. Односвязные и многосвязные множества.
4. Последовательности и ряды комплексных чисел.
5. Однозначные функции. Предел по Коши и по Гейне. Непрерывность и равномерная непрерывность.
6. Функциональные ряды. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда.
7. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Формула Коши – Адамара.
8. Определение функций e^z , $\sin z$, $\cos z$ с помощью степенных рядов, их свойства.
9. Производная. Условия Коши – Римана и дифференцируемость функции комплексного переменного.
10. Аналитические функции. Аналитичность суммы степенного ряда.
11. Однолистные функции. Области однолистности функций z^n , e^z . Функции $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$, $\ln z$.
12. Дробно-линейная функция и её круговое свойство.
13. Определение и свойства интеграла от функции комплексного переменного.
14. Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей.
15. Интегральная формула Коши. Формула среднего значения.
16. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции.
17. Теорема Тейлора. Неравенства Коши.
18. Теорема о единственности аналитической функции. Нули, правильные и особые точки аналитической функции.
19. Ряд Лорана. Теорема Лорана.

20. Изолированные особые точки и их классификация. Поведение аналитической функции в окрестности изолированной особой точки. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса.

21. Вычеты. Теоремы о вычетах.

22. Вычисление определённых интегралов с помощью вычетов.

23. Логарифмический вычет. Число нулей аналитической функции.

24. Принцип аргумента. Теорема Руше. Доказательство основной теоремы алгебры средствами ТФКП.

Приложение 4.

Выдержка из программы междисциплинарного государственного экзамена по специальности "Компьютерная безопасность" (6-й курс, 11-й семестр)

10. Предел и непрерывность комплекснозначной функции комплексного переменного. Дифференцируемость функций комплексного переменного. Условия Коши – Римана.

11. Ряды комплекснозначных функций комплексного переменного. Равномерная сходимость ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Степенные ряды. Первая теорема Абеля. Радиус сходимости. Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы ряда. Ряд Лорана и его область сходимости.

12. Интеграл от функции комплексного переменного. Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Теорема о существовании производных любого порядка. Интеграл типа Коши.

13. Разложение функции комплексного переменного в ряды Лорана и Тейлора. Теорема единственности. Классификация изолированных особых точек. Поведение функции в окрестностях особых точек.

14. Вычеты. Основная теорема о вычетах.

Учебное издание

Михаил Викторович Невский

**Упражнения по дисциплине
"Теория функций
комплексного переменного"**

Методические указания

Компьютерный набор и вёрстка М. В. Невского
Редактор, корректор А. А. Аладьева

Подписано в печать 21.01.2008. Формат 60 × 84¹/₈. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,97. Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 130 экз. Заказ 075/01

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета

Отпечатано на ризографе

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
150000 Ярославль, ул. Советская, 14