

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра нелинейной динамики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

21 мая 2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Предельные теоремы теории вероятностей**

Направление подготовки (специальности)  
01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Математическое моделирование и численные методы»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 26.04.2024, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 03.05.2024

## 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина „Предельные теоремы теории вероятностей" обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом. Целью спецкурса «Предельные теоремы теории вероятностей» является ознакомление студентов с методами теории вероятностей, используемыми при изучении предельных теорем.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной. Дисциплина "Предельные теоремы теории вероятностей" входит в цикл дисциплин, которые обеспечивают овладение аналитическими и численными методами, необходимыми для подготовки специалиста-математика. Она основывается на знаниях, полученных слушателями при изучении дисциплин "Математический анализ", „Комплексный анализ", „Теория вероятностей". Знания и навыки, полученные при изучении дисциплины "Предельные теоремы теории вероятностей", используются при изучении общепрофессиональных дисциплин, а также ряда специальных дисциплин. Данная дисциплина является дисциплиной по выбору.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

| Формируемая компетенция<br>(код и формулировка)  | Индикатор достижения компетенции<br>(код и формулировка)  | Перечень планируемых результатов обучения   |
|--|---|---|
| <b>Профессиональные компетенции</b>  |   |   |
| <b>ПК-1</b><br>Способен проводить научные исследования и получать новые научные и прикладные результаты самостоятельно и в составе научного коллектива | <b>И-ПК-1.2</b><br>Имеет опыт самостоятельного получения новых научных и (или) прикладных результатов | <b>Знать:</b><br>- основные предельные теоремы,<br>- методы изучения последовательностей случайных величин<br><b>Уметь:</b><br>- анализировать задачу с точки зрения вероятностного аппарата.<br><b>Владеть навыками:</b><br>- использования вероятностных методов для решения прикладных и теоретических задач |

## 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **2** зачетных единиц, **72** акад. часов.

| №<br>п/п | Темы (разделы)<br>дисциплины,<br>их содержание  | Семестр | Виды учебных занятий,<br>включая самостоятельную<br>работу студентов,<br>и их трудоемкость<br>(в академических часах) |              |              |              |                             |   | Формы текущего<br>контроля<br>успеваемости<br><br>Форма<br>промежуточной<br>аттестации<br>(по семестрам) |
|----------|---|---------|---|--------------|--------------|--------------|-----------------------------|---|--|
|          |   |         | Контактная работа   |              |              |              |                             |   |  |
|          |   |         | лекции  | практические | лабораторные | консультации | аттестационные<br>испытания |   |  |
| 1        | Вводная лекция. Обзор литературы. Структура курса. Напоминание основных терминов теории вероятностей.   | 2       | 1   | 1            |              |              |                             |   |  |
| 2        | Последовательность независимых случайных величин. Виды сходимости. Неравенства Маркова и Чебышёва. Закон больших чисел: доказательство в предположении второго момента. | 2       | 2   | 2            |              |              |                             | 4 |  |
| 3        | Метод характеристических функций: основные определения и свойства. Доказательства центральной предельной теоремы и закона больших чисел Колмогорова.                    | 2       | 2   | 2            |              |              |                             | 4 | Контрольная работа   |
| 4        | Бесконечно делимые и устойчивые распределения. Описание класса предельных распределений. Примеры распределений каждого класса.  | 2       | 2   | 2            |              |              |                             | 4 |  |

|   |   |   |    |    |  |   |     |      |                    |
|---|---|---|----|----|--|---|-----|------|--------------------|
| 5 | Подбор нормирующих констант для последовательности случайных величин. Обобщения центральной предельной теоремы: ЦПТ Линдеберга и ЦПТ Ляпунова.  | 2 | 2  | 2  |  |   |     | 4    |                    |
| 6 | Вероятности больших отклонений. Закон повторного логарифма.   | 2 | 2  | 2  |  | 1 |     | 4    | Контрольная работа |
| 7 | Сигма алгебры и условные математические ожидания. Понятие мартингала и суб/супермартингала с дискретным временем.   | 2 | 2  | 2  |  | 1 |     | 4    |                    |
| 8 | Основные примеры мартингалов. Неравенство Дуба. Предельная теорема для мартингалов.   | 2 | 2  | 2  |  | 1 |     | 4    |                    |
| 9 | Применения предельной теоремы: закон нуля и единицы Колмогорова, усиленный закон больших чисел, эргодическая теорема Бирхгофа-Хинчина. Сходимость разложения функции по своему базису Хаара в $L^2$ . | 2 | 1  | 1  |  | 1 |     | 4    |                    |
|   |   |   |    |    |  |   | 0,3 | 3,7  | зачет              |
|   | Итого   |   | 16 | 16 |  | 4 | 0,3 | 35,7 |                    |

## 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»  
<https://www.studentlibrary.ru>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Крамер Г. Случайные величины и распределения вероятностей. / Г. Крамер; пер. с англ. А. М. Яглома; под ред. А. Н. Колмогорова - М.: Изд-во иностр. лит., 1947. - 144 с.
2. Боровков А. А. Теория вероятностей – М.: Наука, 1976.
3. Липцер Р. Ш. Ширяев А.Н. Теория мартингалов – М.: Наука, 1986.

4. Ширяев А. Н. Вероятность - Кн.2, Суммы и последовательности случайных величин-стационарные,мартингалы,марковские цепи – МЦНМО, 2004

**б) дополнительная литература**

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. – М: Наука, 1977.
2. Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. – М.: Наука, 1972.
3. Гнеденко Б.В. Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. – М.: Гостехиздат, 1949.
4. Рамачандран Б. Теория характеристических функция. – М.: Наука, 1975.

**9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

**Автор(ы):**

Ассистент

Токмачев А. С.

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Предельные теоремы теории вероятностей»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

**2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

1. Виды сходимости случайных величин.
2. Неравенства Маркова и Чебышёва.
3. Закон больших чисел Чебышёва.
4. Характеристические функции: определение и основные свойства.
5. Центральная предельная теорема.
6. Доказательство закона больших чисел без предположения существования второго момента.
7. Бесконечно делимые и устойчивые распределения. Примеры.
8. Класс предельных распределений.
9. Подбор нормирующих констант.
10. Вероятности больших отклонений: постановка задачи, основные результаты.
11. Закон повторного логарифма.
12. Условное матожидание: определение, свойства.
13. Определение мартингала, субмартингала, супермартингала. Примеры.
14. Неравенство Дуба.
15. Виды сходимости мартингалов.
16. Предельная теорема для мартингалов.
17. ЦПТ для мартингалов. ЦПТ Линдеберга, ЦПТ Ляпунова.
18. Закон нуля и единицы Колмогорова.
19. Усиленный закон больших чисел Колмогорова.
20. Отображения, сохраняющие меру. Эргодическая теорема Бирхгофа-Хинчина.
21. Сходимость в  $L^2$  разложения функции по базису Хара.

**3. Методические рекомендации преподавателю  
по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

**Пороговый уровень (общие характеристики):**

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;

- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

**Продвинутый уровень** (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объёме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

**Высокий уровень** (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

### **Описание процедуры выставления оценки**

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно»,



«неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Предельные теоремы теории вероятностей»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Предельные теоремы теории вероятностей» являются лекции. Это связано с тем, что в основе курса лежит серьезный математический аппарат, требующий детального разбора. По большинству тем предусмотрены практические занятия.

В конце семестра студенты сдают экзамен. Экзамен принимается по экзаменационным билетам, каждый из которых включает в себя два теоретических вопроса. На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется 3 дня, во время подготовки к экзамену предусмотрена групповая консультация.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Предельные теоремы теории вероятностей» самостоятельно студенту затруднительно. Это связано со сложностью изучаемого материала и большим объемом курса. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать экзамен по итогам изучения дисциплины студенту практически невозможно.