

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра общей математики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

21 мая 2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Фрактальная теория массового обслуживания**

Направление подготовки (специальности)  
02.04.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Компьютерная математика»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 25.04.2024, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 03.05.2024

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями курса «Фрактальная теория массового обслуживания» являются:

- знакомство с современными методами моделирования работы систем массового обслуживания, к которым прежде всего относятся компьютерные сети;
- знакомство с проблемами, которые при этом возникают и методами их решения.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к обязательной части образовательной программы и является элективной дисциплиной. Данная дисциплина входит в раздел «Дополнительные главы фундаментальных дисциплин направления».

Для изучения и освоения дисциплины необходимы знания, полученные при изучении следующих математических дисциплин: «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Теория вероятностей», «Теория массового обслуживания». Знания и умения, приобретенные студентами в результате изучения дисциплины, могут использоваться при выполнении курсовых и дипломных работ, в дальнейшей профессиональной деятельности.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
<b>ОПК-1</b> Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики.	<b>И-ОПК-1.1</b> Обладает фундаментальными знаниями и практическим опытом в формулировке и решении актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики.	<b>Знать:</b> - основные понятия, факты, модели, области применения фрактальной теории массового обслуживания. <b>Владеть:</b> - аналитическими приёмами решения проблем ФТМО и приемами построения имитационных моделей фрактальных систем массового обслуживания на компьютере с использованием современных объектно-ориентированных языков, навыками тестирования программ, навыками анализа работы СМО при разных входных условиях.
	<b>И-ОПК-1.2</b> Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	<b>Уметь:</b> - использовать приёмы аналитического и имитационного моделирования, описывая работу основных типов фрактальных систем массового обслуживания; использовать приёмы анализа работы систем аналитическими и статистическими средствами.

	<b>И-ОПК-1.3</b> Имеет навыки решения актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики.	<b>Владет навыками:</b> - решения актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики, используя приёмы аналитического и имитационного моделирования

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **2** зачетные единицы, **72** акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1.	Обзор основных понятий, фактов, теорем классической системы массового обслуживания. Имитационное моделирование системы М/М/1.	2	2	2		1		10	Задания для самостоятельной работы
2.	Многофазные системы массового обслуживания.	2	1	1				10	Задания для самостоятельной работы
3.	Фрактальные системы массового обслуживания. Аналитический подход.	2	2	2				10	Задания для самостоятельной работы
4.	Имитационное моделирование. Система М/Рa/1.	2	1	1		1		10	Задания для самостоятельной работы
5.	Имитационное моделирование. Система Рa/М/1.	2	2	2				10	Задания для самостоятельной работы
							0,3	3,7	Зачёт
	Итого		8	8		2	0,3	53,7	

#### Содержание разделов дисциплины:

**Тема 1. Обзор основных понятий, фактов, теорем классической системы массового обслуживания. Имитационное моделирование системы М/М/1.**

Характеристики СМО, процесс гибели и размножения, стационарный режим работы, не стационарный режим работы, пуассоновский входной поток, формула Литтла, система М/М/п. Моделирование случайных величин. Имитационное моделирование системы М/М/1.

**Тема 2. Многофазные системы массового обслуживания.**

Основные понятия, факты, типы.

**Тема 3. Фрактальные системы массового обслуживания. Аналитический подход.**

Определение фрактальной СМО. Распределения с тяжёлыми хвостами. Распределения Парето и Вейбулла.

**Тема 4. Имитационное моделирование. Система М/Ра/1.**

Моделирование случайных величин. Основные формулы. Вычисление стационарных характеристик СМО М/Ра/1 при конкретных входных данных. Постановка задачи.

**Тема 5. Имитационное моделирование. Система Ра/М/1.**

Вычисление стационарных характеристик СМО Ра/М/1 при конкретных входных данных. Постановка задачи.

**5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

**6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:  
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»

[http://www.lib.uniyl.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyl.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>

- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>

- Электронная библиотечная система «Консультант студента»

<https://www.studentlibrary.ru>

- eLibrary.Ru — российская научная электронная библиотека: <http://elibrary.ru/>.

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Кузнецова В. А., Никулина Е. В. Введение в теорию массового обслуживания: текст лекций – Ярославль: ЯрГУ, 2005.

<http://www.lib.uniyl.ac.ru/edocs/iuni/20050290.pdf>

2. Никулина Е. В. Теория массового обслуживания: практикум - Ярославль: ЯрГУ, 2017.

### **б) дополнительная литература**

1. Задорожный, В. Н. Методы планирования имитационных экспериментов при моделировании фрактальных очередей / В. Н. Задорожный, Т. Р. Захаренкова // Омский научный вестник. – 2016. – № 3(147). – С. 87-92. –

<https://www.elibrary.ru/download/elibrary2599804440540292.pdf>

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

### **Автор(ы) :**

К. п. н., доцент кафедры общей математики

Никулина Е.В.

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Фрактальная теория массового обслуживания»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

***Практические задания для СРС***

**Задания по теме № 1: Обзор основных понятий, фактов, теорем классической системы массового обслуживания. Имитационное моделирование системы М/М/1.**

1. Описать с помощью системы дифференциальных уравнений работу системы с потерями, удовлетворяющей условиям:

$$\text{СМО 1: } n=2, \lambda=2, \mu=1;$$

Найти вероятности всех состояний СМО, решив полученные системы. Используя найденные вероятности состояний системы, построить их графики, определить приблизительно моменты времени, в которые устанавливается практически стационарный режим работы системы. Найти стационарные значения вероятностей СМО, коэффициент использования, среднее число занятых приборов, среднее число свободных приборов, вероятность потери заявки.

2. Написать программу, имитирующую работу СМО М/М/1. Входные параметры:  $\lambda=1/22$ ,  $\rho=0,5$ ; выходные – время прихода заявки в СМО, время поступления на прибор, время выхода из СМО, время ожидания, средняя длина очереди и среднее время ожидания.

**Задания по теме № 2: Многофазные системы массового обслуживания.**

1. Записать бесконечную алгебраическую систему уравнений, моделирующую стационарный режим работы двухфазной системы с бесконечной очередью перед первой фазой через производящие функции. Решить. Найти основные характеристики.

**Задания по теме № 3: Фрактальные системы массового обслуживания. Аналитический подход.**

1. Построить графики функций распределения и плотности для распределений Парето и Вейбулла при различных параметрах. Сделать выводы.

2. Найти промежутки значений для параметра  $\alpha$  распределения Парето, при которых СМО становится фрактальной.

**Задания по теме № 4: Имитационное моделирование. Система М/Рa/1.**

1. Написать программу, имитирующую работу СМО М/Рa/1. Входные параметры:

1)  $K=1, \alpha=1,1, \lambda=1/22$ ; выходные – средняя длина очереди, среднее время ожидания.

2)  $K=1, \alpha=3, \lambda=1/3$ ; выходные – средняя длина очереди, среднее время ожидания.

2. Сравнить полученные данные со стационарными значениями в каждом случае, и с данными для СМО М/М/1, сделать выводы.

**Задания по теме 5: Имитационное моделирование. Система Рa/М/1.**

1. Провести аналитические расчёты: найти стационарные значения средней длины очереди и времени ожидания при различных входных параметрах.

1)  $K=1, \alpha=1,1, \rho=0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$ .

2)  $K=1, \alpha=2,1, \rho=0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$ .

2. Получить имитационные значения выходных параметров при указанных входных. Сравнить результаты, провести анализ, сделать вывод.

Правила выставления оценки по результатам самостоятельных работ:

1. Отметка «отлично» выставляется если все задания выполнены верно, с подробными пояснениями.
2. Отметка «хорошо» ставится, если все задачи решены верно, но есть погрешности в пояснении или присутствует одна вычислительная ошибка.
3. Отметка «удовлетворительно» - если выполнено более 50% поставленных задач.
4. Отметка «неудовлетворительно» - если выполнено менее 50% поставленных задач.

**Таблица соответствия контрольных мероприятий, компетенций и индикаторов их достижения**

<i>Контрольное мероприятие</i>	<i>Индикатор освоения компетенции</i>
<i>Работа на практических занятиях</i>	И-ОПК-1.1, И-ОПК-1.2, И-ОПК-1.3
<i>Задания для СРС-1,2</i>	И-ОПК-1.1
<i>Задания для СРС-3</i>	И-ОПК-1.1, И-ОПК-1.2
<i>Задания для СРС-4,5</i>	И-ОПК-1.1, И-ОПК-1.2, И-ОПК-1.3

**2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

**Список теоретических вопросов к зачёту:**

1. Основные понятия, факты, теоремы классической системы массового обслуживания. Имитационное моделирование системы М/М/1. (Характеристики СМО, процесс гибели и размножения, стационарный режим работы, не стационарный режим работы, пуассоновский входной поток, формула Литтла, система М/М/п. Моделирование случайных величин. Имитационное моделирование системы М/М/1.)
2. Многофазные системы массового обслуживания. (Основные понятия, факты, типы систем.)
3. Фрактальные системы массового обслуживания. Аналитический подход. (Определение фрактальной СМО. Распределения с тяжёлыми хвостами. Распределения Парето и Вейбулла.)
4. Имитационное моделирование. Система М/Рa/1. (Моделирование случайных величин. Основные формулы. Вычисление стационарных характеристик СМО М/Рa/1. Поведение системы при различных входных параметрах.)
5. Имитационное моделирование. Система Рa/М/1. (Вычисление стационарных характеристик СМО Рa/М/1. Поведение системы при различных входных параметрах.)
6. Основная задача фрактальной теории массового обслуживания.
7. Основные проблемы моделирования фрактальных СМО.

**3. Правила выставления оценки на зачёте**

В конце семестра проводится зачётное мероприятия в виде беседы по одному теоретическому вопросу. Студент может получить одну из отметок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

**Оценка «Отлично»** выставляется студенту, который демонстрирует глубокое и полное владение содержанием материала и понятийным аппаратом дисциплины; осуществляет межпредметные связи; умеет связывать теорию с практикой. Студент дает развернутый, полный и четкий ответ на вопрос зачёта и дополнительные вопросы, соблюдает логическую последовательность при изложении материала. Грамотно использует терминологию.

**Оценка «Хорошо»** выставляется студенту, ответ которого в целом соответствуют указанным выше критериям, но отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой. В ответе имеют место отдельные неточности (несущественные ошибки), которые исправляются самим студентом после дополнительных и (или) уточняющих вопросов преподавателя или одна ошибка.

**Оценка «Удовлетворительно»** выставляется студенту, который дает недостаточно полный и последовательный ответ на вопрос зачёта и дополнительные вопросы, но при этом демонстрирует умение выделить существенные и несущественные признаки и установить причинно-следственные связи. Ответы излагаются с использованием необходимой терминологии, но при этом допускаются ошибки в определении и раскрытии некоторых основных понятий, формулировке положений, которые студент затрудняется исправить самостоятельно. При аргументации ответа студент не обосновывает свои суждения. На часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

**Оценка «Неудовлетворительно»** выставляется студенту, который демонстрирует разрозненные, бессистемные знания; беспорядочно и неуверенно излагает материал; не умеет выделять главное и второстепенное, не умеет соединять теоретические положения с практикой, не устанавливает межпредметные связи; допускает грубые ошибки при определении сущности раскрываемых понятий, явлений, вследствие непонимания их существенных и несущественных признаков и связей; дает неполные ответы, логика и последовательность изложения которых имеют существенные и принципиальные нарушения, в ответах отсутствуют выводы. Дополнительные и уточняющие вопросы преподавателя не приводят к коррекции ответов студента. На основную часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется также студенту, который взял билет, но отвечать отказался.

Отметка за семестр выставляется с учётом выполнения всех самостоятельных работ в течение семестра и с учётом отметки, полученной на зачёте. Если не выполнена хотя бы одна самостоятельная работа, или выполнена на отметку «неудовлетворительно», или на зачёте получена отметка «неудовлетворительно», студент получает общую отметку «незачёт».

### **Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций**

#### **Пороговый уровень:**

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии изученных разделов математики, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении практических задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- самостоятельная работа на практических занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

#### **Продвинутый уровень:**

- достаточно полные и систематизированные знания в объёме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;



- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать практические задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

#### **Высокий уровень:**

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

#### **Описание процедуры выставления оценки**

Оценка «незачёт» выставляется студенту, у которого формируемые дисциплиной элементы компетенций ОПК-1 сформированы ниже, чем на пороговом уровне. В противном случае студент получает «зачёт».

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Фрактальная теория массового обслуживания»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Курс «Фрактальная теория массового обслуживания» относится к интеграционным курсам, именно поэтому он читается в магистратуре. Для успешного освоения дисциплины необходимо решать как можно больше задач, выполняя домашние самостоятельные работы. Все самостоятельные работы достаточно трудоемки и могут вызвать особые трудности у студентов, пропускавших лекции или практические занятия, так как именно на них объясняются все нюансы выполнения работ. Каждая самостоятельная работа оценивается преподавателем, и полученная отметка учитывается при выставлении зачёта.

В результате изучения курса каждым студентом должна быть написана программа на произвольном языке программирования, моделирующая работу трёх систем массового обслуживания – одной классической и двух фрактальных.

Курс заканчивается зачётным мероприятием в форме устной беседы по одному объёмному теоретическому вопросу.

Итоговая отметка за семестр выставляется с учётом отметки, полученной на зачёте, и с учётом отметок за все самостоятельные работы.