

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное**  
**учреждение высшего образования**  
**«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»**

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

 П. Н. Нестеров

«18» мая 2022 г.

**Рабочая программа дисциплины**

«Теория представлений групп и ассоциативных алгебр»

программы подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

по научной специальности

1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Форма обучения очная

Программа одобрена  
на заседании кафедры алгебры и математической логики  
от «17» мая 2022 года, протокол № 9

Ярославль

### **1. Цели освоения дисциплины**

Целями освоения дисциплины «Теория представлений групп и ассоциативных алгебр» являются: обеспечение подготовки в одной из важных областей математики и ее приложений, знакомство с современными понятиями теории обыкновенных линейных представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Математический аппарат теории представлений широко используется во многих разделах математики и физики, причем сфера его приложений все время расширяется. Более того, будучи относительно законченной, данная теория служит образцом для теории представлений других алгебраических систем – компактных групп, групп Ли и теории сложности вычислений.

### **2. Место дисциплины в структуре программы аспирантуры**

Дисциплина «Теория представлений групп и ассоциативных алгебр» является дисциплиной по выбору. Данная дисциплина направлена на освоение алгоритмов, применяемых для анализа представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Для ее успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения предшествующих математических дисциплин: теории чисел, линейной алгебры, аналитической геометрии.

### **3. Планируемые результаты освоения дисциплины: -**

В результате освоения дисциплины аспирант должен:

Знать:

Основные концепции современной теории представлений групп над полем комплексных чисел. Основные теоремы, касающиеся теории характеров групп. Соотношения ортогональности. Строение полупростых алгебр и групповых колец. Возможные применения теории представлений в физике, теории сложности вычислений.

Уметь:

использовать положения теории представлений групп для решения задач построения таблиц характеров конечных групп, определения простейших свойств по таблице характеров, возможные приложения в математических науках.

Владеть:

навыками анализа ассоциативных колец и алгебр с помощью теории представлений характеров и основных теорем теории представлений. Применениями теории представлений для организации быстрых вычислений в алгебраических задачах, методами построения таблиц характеров

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц, 108 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий и их трудоемкость (в академических часах)					Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации
			лекции	практические	лабораторные	консультации	самостоятельная работа	
1	Представления над $S$ и характеры. Теорема Машке. Лемма Шура	2	5				13	Задания для самостоятельной работы. Контрольная работа
2	Строение колец, соотношения ортогональности. Таблицы характеров	2	5				13	Задания для самостоятельной работы
3	Применения теории представлений в физике и комбинаторике, быстрым вычисления	2	8			2	62	Задания для самостоятельно работы
		2						Зачет
	<b>Всего</b>		<b>18</b>			<b>2</b>	<b>88</b>	

#### Содержание разделов дисциплины:

##### *Тема № 1: Представления над $S$ и характеры. Теорема Машке. Лемма Шура.*

Приводимые и неприводимые представления. Характеры. Комплексные и целочисленные представления. Центр групповой алгебры. Теорема Машке и Лемма Шура. Свойства характеров конечных групп. Регулярное представление и групповая алгебра. Представления абелевых групп и дискретное преобразование Фурье.

*Тема № 2: Строение колец, соотношения ортогональности. Таблицы характеров.* Скалярное произведение и соотношения ортогональности для обыкновенных характеров. Таблица характеров конечной группы. Поле алгебраических чисел. Индуцированные характеры. Теорема взаимности Фробениуса. Лемма Бернсайда и ее следствия. Разрешимые группы. Теорема Казарина и модулярные представления.

*Тема № 3: Применения теории представлений в физике и комбинаторике, быстрым вычисления.* Перечислительная теорема Бернсайда. Действие группы на множестве и подсчет орбит. Свертка и ДПФ. Применение преобразования Фурье к быстрым вычислениям. Обработка сигналов и теория групп. Теорема Вигнера о просто разложимых группах и теоремы Казарина, Чанкова и Янишевского.

## **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой литературы.

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание аспирантов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы аспирантов. На консультациях по просьбе аспирантов рассматриваются наиболее сложные разделы дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы аспирантов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры, М: Физматлит, 2000
2. Белоногов В.А. Представления и характеры в теории конечных групп. , Екатеринбург: УрО РАН, 2009, 379 с.
3. Ноден П., Китте К. Алгебраическая алгоритмика (под ред. Л.С.Казарина), М.:Мир, 1999.
4. Белоногов В.А. Задачник по теории групп. М.Наука, 2000. – 239 с.

### **б) дополнительная литература**

1. Циммерман К.-Х., Методы теории модулярных представлений в алгебраической теории кодирования. М.:МЦНМО, 2011.
2. Струнков С.П. Введение в теорию представлений конечных групп. М: МИФИ, 1999
3. Глухов М.М., Круглов И.А. Элементы теории обыкновенных представлений и характеров с приложениями в криптографии. Лань: Сп-б, 2015
4. Хамермеш М. Теория групп и ее применения к физическим проблемам, Ленанд,2015
5. Казарин Л.С. О  $p^a$ -лемме Бернсайда Математические заметки. – 1990. – Т. 48, вып. 2. – С. 45-48.
6. Казарин Л.С., Чанков Е.И. Конечные просто приводимые группы разрешимы. Математический сборник. – 2010. – Т. 201, вып. 5. – С. 27-40.
7. Винберг Э.Б. М., Курс алгебры. М., "Факториал Пресс", 2001.
8. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М., Мир, 1964.
9. W.Feit, Characters of finite groups, Yale University. W.A.Benjamin, Inc., N,Y.- Amsterdam, 1967

**в) ресурсы сети «Интернет» (при необходимости)**

Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

**7. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав следующие помещения:

- учебные аудитории для проведения лекций;
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,
- учебные аудитории для проведения промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы.

Помещения для самостоятельной работы оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ЯрГУ.

Автор(ы) :

Заведующий кафедрой алгебры и математической логики  
доктор физико-математических наук



Л.С. Казарин

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины**  
**«Теория представлений групп и ассоциативных алгебр»**  
по научной специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и  
дискретная математика

**Оценочные материалы**  
**для проведения текущей и/или промежуточной аттестации**  
**аспирантов по дисциплине**

**1. Контрольные задания и (или) иные материалы,**  
**используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**Задания для самостоятельной работы**

**Задания для самостоятельно работы по теме 1**

По задачку Белоногов В.А. Задачник по теории групп. М.Наука, 2000, § 22, задачи из подпунктов 22.1 – 22.19.

По книге Кострикина А.И. «Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры», гл.3, §3 и, §4, гл.4, §4

1. Исследовать конечные подгруппы группы  $SO(3)$ . Найти неприводимые представления групп  $A_5$ ,  $S_4$  и  $A_4$ . Как выглядят группы автоморфизмов правильных выпуклых многогранников (тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра? Убедиться в существовании эпиморфизма  $SU(2)$  в  $SO(3)$ .

2. Доказать, что у эквивалентных представлений группы  $G$  ядра совпадают и эти представления имеют равные характеры. Что означает приводимость представления группы на языке матриц? Сколько неприводимых представлений имеет группа  $S_4$  и сколько группа  $A_5$ ?

**Задания для самостоятельно работы по теме 2**

По задачку Белоногов В.А. Задачник по теории групп. М.Наука, 2000, , § 22, задачи из подпунктов 22.21 – 22.42, 22.45 – 22.58.

По книге Кострикина А.И. «Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры», гл.3, §6 и, §7, гл

1. Найти таблицы характеров групп  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $A_5$ . Какова размерность групповых алгебр указанных групп и число линейных характеров для каждой из групп?

2. Доказать, что центр группы  $G$ , обладающей точным неприводимым представлением над полем комплексных чисел, будет тривиальным или циклической группой. Найти таблицу характеров группы  $S_3 \times S_3$  (прямого произведения групп  $S_3$  и  $S_3$ ). Будут ли группы  $S_3$  и  $A_5$  просто приводимыми?

**Задания для самостоятельно работы по теме 3**

По книге Ноден П., Китте К. «Алгебраическая алгоритмика», гл. V, упражнения 24 – 36

По книге Кострикина А.И. «Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры», гл.3, §5 и §7.

1. Преобразование Фурье на конечной абелевой группе. Циклическая свертка порядка 3.
3. Найти реализацию умножения двух многочленов, использующую 9 умножений, при которой все используемые коэффициенты равны плюс-минус единицам.
2. Инварианты линейных групп. Найти формулы для решения в радикалах алгебраического уравнения степени 3. Сначала привести уравнение к форме, где коэффициент при квадрате неизвестной равен нулю.

### **Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

Зачет по дисциплине проводится устно по экзаменационным билетам.  
Каждый экзаменационный билет содержит два вопроса.  
На подготовку к ответу дается 60 минут.

#### **Список вопросов к зачету:**

1. Представление группы. Приводимые и неприводимые представления.
2. Характер представления.
3. Комплексные и модулярные представления. Примеры.
4. Центр групповой алгебры.
5. Теорема Машке.
6. Лемма Шура.
7. Регулярное представление. Конечность числа попарно неэквивалентных неприводимых представлений конечной группы.
8. Представления конечных абелевых групп.
9. Циклическая свертка и ДПФ.
10. Полупростые конечномерные алгебры и идеалы.
11. Строение групповой алгебры конечной группы над полем комплексных чисел.
12. Скалярное произведение характеров и соотношения ортогональности.
13. Таблица характеров конечной группы.
14. Поле алгебраических чисел.
15. Индуцированные представления.
16. Теорема взаимности Фробениуса.
17. Лемма Бернсайда и разрешимые группы.
18. Теорема Казарина – Бернсайда (без доказательства).
19. Модулярные представления. Определение и примеры.
20. Применения теории представлений к физическим задачам.
21. Действие группы на множестве. Перечислительная теорема Бернсайда.
22. Применение ДПФ к быстрым вычислениям.
23. Обработка сигналов и теория групп.
24. Просто приводимые группы. Теорема Вигнера.
25. Теоремы Казарина-Чанкова-Янишевского.

### **2.1 Описание процедуры выставления оценки**

По итогам экзамена выставляется одна из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

**Оценка «Отлично»** выставляется аспиранту, который демонстрирует глубокое и полное владение содержанием материала и понятийным аппаратом дисциплины; осуществляет межпредметные связи; умеет связывать теорию с практикой. Аспирант дает развернутые, полные и четкие ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, соблюдает логическую последовательность при изложении материала. Грамотно использует научную терминологию.

**Оценка «Хорошо»** выставляется аспиранту, ответ которого на экзамене в целом соответствуют указанным выше критериям, но отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой. В ответе имеют место отдельные неточности (несущественные ошибки), которые исправляются аспирантом после дополнительных и (или) уточняющих вопросов экзаменатора.

**Оценка «Удовлетворительно»** выставляется аспиранту, который дает недостаточно полные и последовательные ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, но при этом демонстрирует умение выделить существенные и несущественные признаки и установить причинно-следственные связи. При ответах аспирант допускает ошибки в определении и раскрытии отдельных понятий, формулировке положений, которые аспирант затрудняется исправить самостоятельно. При аргументации ответа аспирант не обосновывает свои суждения. На часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

**Оценка «Неудовлетворительно»** выставляется аспиранту, который демонстрирует разрозненные, бессистемные знания; беспорядочно и неуверенно излагает материал; не умеет выделять главное и второстепенное, не умеет соединять теоретические положения с практикой, не устанавливает межпредметные связи; допускает грубые ошибки при определении сущности раскрываемых понятий, явлений, вследствие непонимания их существенных и несущественных признаков и связей; дает неполные ответы, логика и последовательность изложения которых имеют существенные и принципиальные нарушения, в ответах отсутствуют выводы. Дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора не приводят к коррекции ответов аспиранта.

**Оценка «Неудовлетворительно»** выставляется также аспиранту, который взял экзаменационный билет, но отвечать отказался.