

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра теоретической физики

УТВЕРЖДАЮ

Декан физического факультета

(подпись) И.С. Огнев

23 мая 2023 года

Рабочая программа дисциплины
«Дополнительные главы математической физики»

Направление подготовки
03.04.02 Физика

Направленность (профиль)
«Теоретическая физика»

Форма обучения
очная

Программа одобрена
на заседании кафедры
от «17» апреля 2023 года, протокол № 8

Программа одобрена НМК
физического факультета
протокол № 5 от « 25» апреля 2023 года

Ярославль

1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Дополнительные главы математической физики» является приобретение студентами дополнительных знаний и умений по отдельным вопросам высшей математики и математической физики, недостаточно освещенным или отсутствующим в базовых курсах.

2. Место дисциплины в структуре ОП магистратуры

Дисциплина «Дополнительные главы математической физики» является дисциплиной Блока 1, части, формируемой участниками образовательных отношений, блок Дисциплины по выбору Б1.В.ДВ.1.

Дисциплина «Дополнительные главы математической физики» расширяет математический фундамент студентов для успешного освоения дисциплин магистерской программы «Теоретическая и математическая физика», являясь логическим продолжением и углублением разделов дисциплин высшей математики и математической физики.

Для овладения данной дисциплиной студенты должны знать основы дисциплин «Линейная алгебра», «Математический анализ», «Теория функций комплексной переменной», «Методы математической физики».

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОП магистратуры

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Профессиональные компетенции		
ПК-1 Способен осуществлять научно-исследовательскую деятельность по решению комплексных фундаментальных задач физики	ИД-ПК-1_1 Знает теоретические методы проведения и анализа научных исследований	Знать <ul style="list-style-type: none">• алгебру матриц, применяемых в квантовой теории;• основные свойства полилогарифмов и функциональные соотношения для них. Уметь <ul style="list-style-type: none">• вычислять обобщенные интегралы гауссова типа в комплексной плоскости;• вычислять интегралы с помощью теории вычетов;• вычислять суммы рядов с помощью теории вычетов. Владеть навыками <ul style="list-style-type: none">• применения теории вычетов для решения разнообразных задач теоретической физики.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	С е м е с т р	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			ле кц ии	пр ак ти че ск ие	ла бо ра то рн ые	ко нс ул ьт ац ии	ат те ст ац ио нн ые ис п ыт ан ия	сам осто ятел ьная раб ота	
1	Алгебра матриц двумерной электродинамики	1	3	6		1		8	Задания для самостоятельной работы
2	Обобщённые гауссовы интегралы	1	2	4		1		8	Задания для самостоятельной работы
3	Применение теории вычетов для вычисления интегралов и суммирования рядов	1	9	18		1		22	Задания для самостоятельной работы
4	Полилогарифмы	1	3	6		1		8	Задания для самостоятельной работы
							0,3	6,7	Зачет
	Всего за 1 семестр		17	34		4	0,3	52,7	
	Всего		17	34		4	0,3	52,7	

Содержание разделов дисциплины:

1. Алгебра матриц двумерной электродинамики.

Модификация алгебры матриц Дирака в двумерной электродинамике.

Проекционные операторы, соответствующие состоянию электрона со спином против поля и вдоль поля. Соотношения коммутации проекционных операторов с матрицами Дирака. Основное коммутационное соотношение матриц Дирака.

Свёртки и следы произведений модифицированных матриц Дирака.

2. Обобщённые гауссовы интегралы.

Одномерный гауссов интеграл. Гауссов интеграл в трёхмерном евклидовом пространстве. Векторный и тензорный интегралы. Гауссов интеграл в псевдоевклидовом 4-пространстве.

3. Применение теории вычетов для вычисления интегралов и суммирования рядов.

Сведения из теории функций комплексной переменной. Сведение интеграла по полному углу от рациональной функции \cos и \sin к интегралу по замкнутому контуру от функции комплексной переменной. Вычисление несобственных интегралов, для которых один или оба предела являются бесконечными.

Вычисление интегралов, где в подынтегральных функциях отсутствуют особые

точки, выходом в комплексную плоскость со специальным выбором контура интегрирования. Вычисление мнимой части лагранжиана Гейзенберга—Эйлера. Применение методов теории вычетов для суммирования некоторых рядов. Формула Абеля—Плана. Оценка относительной доли квадрата энергии, приходящейся на электроны, заселяющие основной уровень Ландау, для равновесного релятивистского электронного газа во внешнем однородном магнитном поле.

4. Полилогарифмы.

Представление полилогарифма в виде ряда. Интегральное представление полилогарифма. Интегралы Ферми. Дилогарифм Эйлера, или функция Спенса. Рекуррентное соотношение для полилогарифмов. Функциональные соотношения для полилогарифмов. Вычисление концентрации и объёмной плотности энергии электрон-позитронного газа в ультрарелятивистском приближении, при произвольном соотношении между химическим потенциалом и температурой.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

1. Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»
http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php
2. Научная библиотека на сайте www.poiskknig.ru
3. Научная энциклопедия на сайте <http://elementy.ru/physics>
4. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU на сайте <http://elibrary.ru/>

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

1. Кузнецов А.В., Шитова А.М. Дополнительные главы математической физики. Ярославль: ЯрГУ, 2011.
<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20110730.pdf>
2. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Физматлит, 2010. 334 с. Читать онлайн:
https://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=75710&sr=1

б) дополнительная литература:

1. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Теоретическая физика: учебное пособие. В 10 т. Т. 4. Квантовая электродинамика. М.: Физматлит, 2006. 716 с.
http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_card.php?rec_id=914351&cat_cd=YARSU

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор:

Профессор кафедры
теоретической физики, д.ф.-м.н.

А.В. Кузнецов

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины
«Дополнительные главы математической физики»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

Задания для самостоятельной работы

*(данные задания выполняются студентом самостоятельно
и преподавателем в обязательном порядке не проверяются)*

Задания для самостоятельной работы № 1

- 1) Вычислить свёртку: $\tilde{\gamma}_\alpha \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\gamma}_\nu \tilde{\gamma}_\rho \tilde{\gamma}^\alpha$.
- 2) Доказать соотношение: $\tilde{\gamma}_\alpha \tilde{\gamma}_\beta \tilde{\gamma}_\mu = \tilde{\gamma}_\alpha \tilde{g}_{\beta\mu} - \tilde{\gamma}_\beta \tilde{g}_{\alpha\mu} + \tilde{\gamma}_\mu \tilde{g}_{\alpha\beta}$.
 $\tilde{\gamma}_\alpha \tilde{\gamma}_\beta \tilde{\gamma}_\mu = \tilde{\gamma}_\alpha \tilde{g}_{\beta\mu} - \tilde{\gamma}_\beta \tilde{g}_{\alpha\mu} + \tilde{\gamma}_\mu \tilde{g}_{\alpha\beta}$
- 3) Доказать соотношение: $\tilde{g}_{\alpha\beta} \tilde{\varphi}_{\mu\nu} - \tilde{g}_{\alpha\mu} \tilde{\varphi}_{\beta\nu} + \tilde{g}_{\alpha\nu} \tilde{\varphi}_{\beta\mu} = 0$
- 4) Доказать соотношение: $\tilde{\gamma}_\alpha \tilde{\gamma}_\beta \gamma_5 = (\tilde{g}_{\alpha\beta} \gamma_5 - \tilde{\varphi}_{\alpha\beta}) \Pi_-$
- 5) Вычислить след: $Tr(\tilde{\gamma}_\alpha \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\gamma}_\nu \tilde{\gamma}_\rho)$
- 6) Вычислить след: $Tr(\tilde{\gamma}_\alpha \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\gamma}_\nu \tilde{\gamma}_\rho \gamma_5)$

Задания для самостоятельной работы № 2

- 7) Вычислить векторный интеграл: $G_{3k} = \int d^3x x_k \exp(-x_i A_{ij} x_j + b_i x_i)$
- 8) Вычислить тензорный интеграл: $G_{3kl} = \int d^3x x_k x_l \exp(-x_i A_{ij} x_j + b_i x_i)$
- 9) Вычислить векторный интеграл: $\Phi_{4\rho} = \int d^4x x_\rho \exp(-ix_\mu A^{\mu\nu} x_\nu + ib_\mu x^\mu)$
- 10) Вычислить тензорный интеграл: $\Phi_{4\rho\sigma} = \int d^4x x_\rho x_\sigma \exp(-ix_\mu A^{\mu\nu} x_\nu + ib_\mu x^\mu)$

Задания для самостоятельной работы № 3

- 11) Вычислить интеграл: $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \sin \varphi)^2}, |\varepsilon| < 1$
- 12) Вычислить интеграл: $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{(1 + \varepsilon \sin \varphi)^2}, |\varepsilon| < 1$
- 12) Вычислить интеграл: $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{(1 + \varepsilon \sin \varphi)^2}, |\varepsilon| < 1$

- 13) Найти сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$
- 14) Найти сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$
- 14) Найти сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n^2 + \xi^2)^2}$

Задания для самостоятельной работы № 4

- 15) Выразить: $Li_n(-1)$ через $Li_n(1)$.
- 16) Вычислить: $Li_2(1/2)$.
- 17) Вычислить: $Li_2(\varphi)$, где $\varphi = (\sqrt{5} - 1)/2$ – «золотое сечение».

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

- 1) Для матриц Паули $\vec{\sigma}$ вычислить:
а) квадрат матрицы

$$S_a = \frac{1}{2} \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})}{|\vec{a}|}, S_a^2 = ?$$

- б) матрицу (здесь \vec{a} и \vec{b} - числовые векторы)

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = ?$$

- в) след матрицы (здесь \vec{a} и \vec{b} - числовые векторы)

$$Sp(e^{i(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})} e^{i(\vec{\sigma} \cdot \vec{b})}) = ?$$

- 2) Для матриц Дирака γ_μ, γ_5 вычислить:

$$Sp(\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\beta \gamma_5) = ?$$

- 3) Для матриц двумерной электродинамики $\tilde{\gamma}_\alpha = \Pi_- \gamma_\alpha \Pi_-$ и $\Pi_\mp = (1 \mp i\gamma_1 \gamma_2)/2$, вычислить:

- а) $Tr(\tilde{\gamma}_\alpha \tilde{\gamma}_\mu) = ?$
 б) $Tr(\tilde{\gamma}_\alpha \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\gamma}_\nu \tilde{\gamma}_\rho) = ?$
 в) $Tr(\tilde{\gamma}_\alpha \tilde{\gamma}_\mu \gamma_5) = ?$
 г) $Tr(\tilde{\gamma}_\alpha \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\gamma}_\nu \tilde{\gamma}_\rho \gamma_5) = ?$

- 4) Вычислить обобщенные гауссовы интегралы в псевдоевклидовом пространстве (здесь $A^{\mu\nu}$ - тензор, b_μ - вектор)

$$\begin{aligned} \text{a) } \Phi &= \int d^4x \exp(-ix_\mu A^{\mu\nu} x_\nu + ib_\mu x^\mu) \\ \text{б) } \Phi_{4\rho} &= \int d^4x x_\rho \exp(-ix_\mu A^{\mu\nu} x_\nu + ib_\mu x^\mu) \\ \text{в) } \Phi_{4\rho\sigma} &= \int d^4x x_\rho x_\sigma \exp(-ix_\mu A^{\mu\nu} x_\nu + ib_\mu x^\mu) \end{aligned}$$

5) Используя теорию вычетов, вычислить интегралы:

$$\begin{aligned} \text{a) } I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}; \\ \text{б) } I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx; \\ \text{в) } I_3 &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{(1+\varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi, |\varepsilon| < 1 \\ \text{г) } I_4 &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi}{(1+\varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi, |\varepsilon| < 1 \end{aligned}$$

6) Используя теорию вычетов, просуммировать ряды (использовать что функция $1/(z^k \sin \pi z)$ имеет полюсы на вещественной оси в точках $Z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$)

$$\begin{aligned} \text{a) } S_2^- &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}; & \text{б) } S_2^+ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \\ \text{в) } S_4^+ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}; & \text{г) } S_4^- &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}; \end{aligned}$$

7) В приближении ультрарелятивистского электрон - позитронного газа, $E \gg m$, вычислить его концентрацию $n = n_{e^-} + n_{e^+}$

- а) в пределе низких температур, $T \ll \mu$;
- б) в пределе высоких температур, $T \gg \mu$;
- в) в общем случае, при произвольном соотношении между T и μ .

8) В приближении ультрарелятивистского электрон - позитронного газа, $E \gg m$, вычислить его полную энергию $E = E_{e^-} + E_{e^+}$

- а) в пределе низких температур, $T \ll \mu$;
- б) в пределе высоких температур, $T \gg \mu$;
- в) в общем случае, при произвольном соотношении между T и μ .

Описание процедуры выставления оценки

Оценка «зачтено» выставляется студенту, проявившему на мероприятии промежуточной аттестации следующие умения и навыки:

- Студент правильно формулирует постановку задачи, определяет метод ее решения, проводит простейший анализ полученного результата, в том числе, определяет границы его применимости;
- Студент владеет навыками проведения сложных вычислений под руководством

преподавателя, может объяснить проведенные вычисления, может самостоятельно выполнить простейшие вычисления, используя аппарат математической и теоретической физики;

- Студент может делать ошибки, но должен их исправлять самостоятельно после дополнительных (наводящих) вопросов преподавателя.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, проявившему на мероприятии промежуточной аттестации умения и навыки следующего уровня:

- Студент не может выполнить постановку задачи, не может определить метод ее решения и провести даже простейший анализ полученного результата.
- Студент не может провести самостоятельно даже базовые вычисления с использованием аппарата математической и теоретической физики, не может пояснить вычисления, проведенные на практических занятиях под руководством преподавателя.

Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Дополнительные главы математической физики»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Базовой формой изложения учебного материала по дисциплине «Дополнительные главы математической физики» являются лекции. Это связано с тем, что в основе дисциплины лежит особый математический аппарат, с помощью которого решаются довольно сложные и громоздкие задачи. По всем темам предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам и отработка навыков работы с аппаратом математической физики.

Для успешного освоения дисциплины важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы математической физики. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков работы с аппаратом математической физики в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде самостоятельных работ.

В конце изучения дисциплины студенты сдают зачет. Зачет принимается по решению задач из каждой темы курса.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Дополнительные главы математической физики» самостоятельно студенту крайне сложно. Это связано со сложностью изучаемого материала и большим объемом курса. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать зачет по итогам изучения дисциплины студенту практически невозможно.