

13336 973  
Т41  
Министерство образования Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

В. А. Тимофеев

# Физика волновых процессов

Учебное пособие

ЧИТ. ЗАЛ

Ярославль 2003

255467 2/3

УДК 537.86(075.8)

ББК 251.16я73

Т41

Тимофеев В.А.

**Физика волновых процессов:** Учебное пособие / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2003. 112 с.

ISBN 5-8397-0307-9

Содержание настоящего пособия соответствует программе дисциплины "Физика волновых процессов", читаемой для студентов специальности "Радиофизика и электроника".

В учебном пособии излагаются основные физические закономерности, которые имеют место для волновых процессов. Рассмотрены особенности распространения линейных волн в однородных и неоднородных, изотропных и анизотропных средах. Большое внимание уделено анализу волновых процессов в диспергирующих средах, а также дифракции. Основной акцент сделан на изучение физических закономерностей, возникающих применительно к электромагнитным волнам.

Пособие предназначено для студентов радиофизических специальностей, а также может быть использовано при изучении электромагнитных полей и волн студентами других специальностей.

Ил.36. Библиогр.: 9 назв.

Печатается по решению научно-методического совета Ярославского государственного университета

**Рецензенты** – кафедра радиолокации и радиотехнических систем Ярославского зенитного ракетного института ПВО; ведущий научный сотрудник института микроэлектроники и информатики РАН, д-р физ.-мат. наук А.В. Проказников.

ISBN 5-8397-0307-9

© Ярославский государственный университет, 2003

© В.А. Тимофеев, 2003



## ВВЕДЕНИЕ

В окружающем нас мире происходит множество явлений, проявляющих черты колебательных и волновых процессов. Изучение общих закономерностей в протекании таких процессов, несмотря на различие в их физической природе, и составляет предмет курсов теории колебаний и волн.

Колебаниями называются ограниченные (и чаще всего повторяющиеся) движения в окрестности некоторого среднего положения (например, положения равновесия). О колебательном процессе можно говорить в случаях, когда состояние системы допустимо описывать конечным набором параметров, изменяющихся во времени (угол у математического маятника, напряжение (или ток) в контуре и т.п.). Колебательные процессы описываются одним или несколькими обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Волна — это процесс распространения колебаний (т.е. периодически изменяющихся во времени параметров какой-либо физической природы (температуры, напряженности электрического и магнитного поля, плотности вещества и т.д.)) в пространстве. Поэтому волновое движение — это более сложная модель поведения реальных систем, состояние которых уже зависит не только от времени, но и от пространственных переменных. Поэтому такие процессы описываются уравнениями в частных производных.

Критерий перехода от колебательного движения к волновому — "условие квазистационарности":  $L < vT$ , где  $L$  — характерный размер системы,  $v$  — скорость распространения возмущения,  $T$  — время его заметного изменения. Если оно выполняется, то о процессе можно говорить, как о колебательном в системе с сосредоточенными параметрами. В противном случае его нужно рассматривать как волновой.

Волновые процессы в настоящее время интенсивно изучаются в различных областях физики: электродинамике, физике плазмы, оптике, радиофизике, акустике и т.д. Механизмы распространения возмущений, естественно, сильно отличаются друг от друга. Однако, несмотря на разнообразие природы волн, картина их поведения является универсальной в том плане, что все они подчиняются практически одним и тем же законам и могут быть описаны на основе однотипных математических моделей. Изучение этих общих закономерностей волн различной природы и составляет предмет курса "Физика волновых процессов". Основное внимание в пособии уделено анализу особенностей волн применительно к электромагнитным волнам.

Пособие включает в себя 7 разделов:

- 1 - "Общие сведения о волновых процессах";
- 2 - "Электромагнитные волны в однородных изотропных линейных средах";
- 3 - "Отражение и преломление волн на границе раздела сред";
- 4 - "Распространение волн в диспергирующих средах";
- 5 - "Волны в анизотропных средах";
- 6 - "Дифракция волн";
- 7 - "Распространение волн в неоднородных средах".

В конце каждого раздела приведены вопросы для самоконтроля.

# 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССАХ

## 1.1. Волновое уравнение

В теории волн фундаментальное значение имеет линейное уравнение в частных производных второго порядка гиперболического типа:

$$\Delta S - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

где  $S$  - какой-либо исследуемый параметр процесса, зависящий от пространственных координат, определяемых вектором  $\vec{r}$ , и времени  $t$ ,  $\Delta$  - оператор Лапласа,  $v$  - константа, характеризующая свойства среды.

Уравнение (1.1) называется *волновым уравнением* и является одним из основных при изучении волновых процессов. Оно может быть записано не только для скалярной величины (например, приращение плотности или давления в звуковой волне), но также и для векторной переменной (например, напряженность электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  поля электромагнитной волны).

Роль уравнения (1.1) аналогична роли уравнения гармонического осциллятора в теории колебаний:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (1.2)$$

где  $x$  - какой-либо параметр процесса, зависящий от времени,  $\omega$  - частота (циклическая) осциллятора. Подобно тому, как уравнение (1.2) можно усложнять введением дополнительных членов, ответственных за какие-либо особенности анализируемого процесса (затухание, нелинейность, наличие внешних сил и т.д.), соответствующие обобщения для волн можно сделать на основе уравнения (1.1).

Так, в присутствии источников или внешних сил, процесс возбуждения и распространения волн будет описываться *неоднородным волновым уравнением*:

$$\Delta S - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = f(\vec{r}, t), \quad (1.3)$$

где функция  $f(\vec{r}, t)$  описывает распределение внешнего воздействия.

Введение дополнительного линейного члена в (1.1) позволяет учесть такие явления, как передача энергии среде (*диссипация*) и зависимость скорости распространения волны от частоты (*дисперсия*). В этом случае волновое уравнение приобретает вид:

$$\Delta S - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + L(S) = 0, \quad (1.4)$$

где вид линейного оператора  $L(S)$  определяется конкретными условиями задачи. Введение дополнительных нелинейных (относительно  $S$ ) членов в волновое уравнение позволяет описать различные нелинейные эффекты при распространении волн в среде. В нелинейных задачах нарушается принцип суперпозиции: возникает взаимодействие волн различных частот. Нелинейные эффекты наблюдаются при возбуждении в среде сильных полей. Задачи такого типа возникают в нелинейной акустике и оптике.

Для решения уравнения (1.1) и его обобщений (1.3) и (1.4) необходимо наличие начальных и граничных условий, отвечающих физической постановке задачи.

Вышеприведенные уравнения описывают волновые процессы в однородных и изотропных средах. Однако в природе встречаются среды, у которых свойства зависят от направления распространения волны (например, световые волны в кристаллах, упругие волны в анизотропных твердых телах, электромагнитные волны в плазме и феррите, находящиеся во внешнем магнитном поле, и т.д.). В этом случае процесс может быть описан на основе гиперболических уравнений более высокого (например, четвертого) порядка, которые приводятся к уравнениям второго порядка только при специальном предположении о характере волны.

Если среда неоднородна, т.е. ее свойства зависят от координат, то уравнение, описывающее волновой процесс, будет иметь похожий с (1.1) или (1.3) вид, однако параметр  $v$  будет при этом уже не постоянным, а являться функцией координат. Если вдобавок параметры среды могут изменяться во времени, то волновой процесс будет описываться уравнением следующего вида:

$$\Delta S - \frac{1}{v^2(\vec{r}, t)} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0. \quad (1.5)$$

Большое значение в теории волн имеют гармонические процессы. В этом случае функция, описывающая такую волну, может быть представлена в виде:

$$S(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} [\dot{U}(\vec{r}) e^{-i\omega t} + \dot{U}^*(\vec{r}) e^{i\omega t}], \quad (1.6)$$

где  $\dot{U}(\vec{r})$  - комплексная величина (комплексная амплитуда), \* - означает знак комплексного сопряжения. В этом случае подстановка (1.6) в уравнение (1.1) позволяет получить следующее уравнение:

$$\Delta \dot{U} + k^2 \dot{U} = 0, \quad (1.7)$$

где  $k^2 = \omega^2/v^2$ . Уравнение (1.7) называется уравнением Гельмгольца или приведенным волновым уравнением, которое описывает распространение гармонической волны. Если (1.6) подставить в (1.4), то опять получим уравнение для комплексной амплитуды, аналогичное (1.7), но в этом случае вели-

чина  $k^2$  будет более сложным образом зависеть от частоты и, в общем случае, будет являться комплексной величиной.

В целом любая задача в теории волновых процессов, как правило, решается в два этапа. Сначала на основе исходных уравнений, описывающих процесс в среде (например, уравнения Максвелла для электромагнитных волн), путем ряда упрощений, определяемых конкретными условиями, получается волновое уравнение одного из вышеприведенных типов и формулируются начальные и граничные условия. Затем решается полученное уравнение с заданными условиями и проводится анализ полученных результатов.

## 1.2. Звуковые волны в газах и жидкостях

Для решения основных типов задач, сводящихся к нахождению и определению параметров акустических волн в жидкостях и газах, используется полная система уравнений гидродинамики, связывающая такие характеристики среды, как распределение скорости частиц  $\vec{V}(\vec{r}, t)$ , давления  $p(\vec{r}, t)$  и плотности  $\rho(\vec{r}, t)$ .

В общем случае она записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} = -\vec{\nabla} p, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{V}) = 0, \\ F(p, \rho, T) = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

где  $\vec{\nabla}$  - символическая запись дифференциального оператора набла (оператор Гамильтона),  $F$  - функция, описывающая состояние среды,  $T$  - термодинамическая температура.

Первое уравнение из этой системы - уравнение движения (Эйлера). По сути, оно выражает второй закон Ньютона для элемента сплошной среды. Т.к. координаты частиц зависят от времени  $t$ , то

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = (\vec{V} \vec{\nabla}) \vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

и уравнение преобразуется к следующему виду:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \vec{\nabla}) \vec{V} \right) + \vec{\nabla} p = 0. \quad (1.9)$$

Второе уравнение системы есть уравнение непрерывности среды. Уравнение связывает скорость частиц, плотность и давление. В акусти-

ке плотность однозначно связана с давлением, поэтому третье уравнение может быть представлено в виде:

$$p = p(\rho). \quad (1.10)$$

Полная система уравнений гидродинамики описывает любые движения жидкости или газа. Поэтому они справедливы и для звуковых волн, распространяющихся в них. Однако акустика изучает только малые колебания среды, вследствие чего исходная система может быть упрощена. Так, при очень мощном звуке, восприятие которого сопровождается болевыми ощущениями, смещение частиц среды достигает величины  $\sim 0,1$  мм, что существенно меньше длины свободного пробега молекулы в воздухе. Пусть начальное состояние описывается в виде:  $\rho(\vec{r}, t) = \rho_0$ ,  $p(\vec{r}, t) = p_0$ ,  $\vec{V}(\vec{r}, t) = 0$ . Полагая, что смещения малы, можно считать, что и вносимые волной возмущения давления, плотности и скорости малы. Тогда состояние системы можно представить в виде:

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t), \rho = \rho_0 + \rho'(\vec{r}, t), p = p_0 + p'(\vec{r}, t), \quad (1.11)$$

Здесь

$$p'/p \sim \rho'/\rho = \alpha \ll 1, \quad (1.12)$$

где  $\alpha$  - малый параметр (акустическое сжатие).

Линеаризуем исходную систему (1.8), подставив в нее (1.11) и оставляя члены первого порядка по  $\alpha$ . В результате для среды с постоянным начальным давлением получим для двух первых уравнений:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} p' = 0, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 (\vec{\nabla} \vec{V}) = 0. \quad (1.14)$$

Рассмотрим третье уравнение. Распространение звуковой волны вызывает в среде сжатия и разрежения, сопровождаемые изменениями (локальными) температуры. Однако этот процесс совершается настолько быстро, что выравнивание температуры не успевает произойти, поэтому процессы сжатия и растяжения можно считать обратимыми и описывать уравнением адиабаты. Поэтому уравнение состояния (1.10) можно записать в следующем виде:

$$p/\rho^\gamma = \text{const}, \quad (1.15)$$

$\gamma$  - для газа это отношение теплоемкостей среды при постоянном давлении и объеме. Уравнение (1.15) для жидкостей можно рассматривать, как некоторое эмпирическое уравнение. С учетом начальных условий (1.15) можно представить как:

$$p_0 + p' = p_0 \left( 1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right)^\gamma \approx p_0 (1 + \gamma \rho' / \rho_0).$$

В результате уравнение состояния принимает вид:

$$p' = \frac{p_0}{\rho_0} \rho' \gamma. \quad (1.16)$$

Полученные уравнения (1.13, 1.14, 1.16) можно свести к одному, которое описывает процесс распространения акустической волны. Продифференцируем (1.14) уравнение по  $t$ , тогда

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \vec{\nabla} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0. \quad (1.17)$$

Подстановка (1.16) в (1.13) даст

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \vec{\nabla} \rho' = 0. \quad (1.18)$$

Тогда совместное использование последних двух выражений позволяет получить уравнение для плотности (давления) следующего вида:

$$\Delta \rho' - \frac{\rho_0}{p_0} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0. \quad (1.19)$$

Сравнение его с уравнением (1.1) показывает, что изменение плотности (давления) при распространении звука в газе и жидкости носит волновой характер, а константа определяется параметрами с помощью следующей зависимости:

$$v^2 = \frac{p_0 \gamma}{\rho_0}. \quad (1.20)$$

Если векторно умножить уравнение (1.18) на  $\vec{\nabla}$  и выполнить преобразования, то можно получить следующее:

$$[\vec{\nabla} \times \vec{V}] = 0. \quad (1.21)$$

Из данного равенства следует, что звуковое поле в жидкостях и газах потенциально. Причина этого — продольный характер волн, т.е. звуковая волна в этих средах представляет локальные сжатия и разрежения вдоль направления распространения.

До сих пор рассматривалась задача акустических волн в идеальных средах. Для реальных ситуаций необходимо учитывать потери энергии, связанные с вязкостью и теплопроводностью. Более детальный учет специфики задачи важен для жидкостей, когда трение отдельных слоев среды друг о друга наиболее существенно.

### 1.3. Звуковые волны в твердых телах

Единственной величиной, характеризующей напряженное состояние среды в жидкости, является давление. У твердых тел, вследствие их особенности структуры, возникают сдвиговые упругие напряжения, в результате чего могут образовываться не только продольные, но и поперечные волны, в которых частицы колеблются перпендикулярно направлению распространения волны. Картина напряженного состояния среды в твердом теле сложнее, поэтому вместо скаляров давления  $p$  и сжатия  $\rho$  надо вводить тензоры деформаций и напряжений.

Напряжение в твердом теле возникает в том случае, если с течением времени меняется расстояние между точками тела. Пусть за время  $t$  произошло смещение частицы тела из точки  $M_0(\vec{r}_0)$  в точку  $M(\vec{r})$ . Оно определяется вектором смещения  $\vec{u}$  (см. рис.1.1). Такое изменение расстояния можно характеризовать производной  $du_j/dx_j$  по координатам прямоугольной системы координат  $(x_1, x_2, x_3)$ . Однако подобные производные не характеризуют деформацию, т.к. в них входят смещения тела как целого.

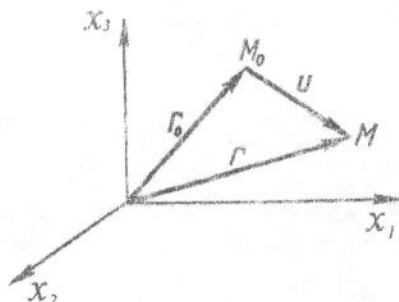


Рис. 1.1. Геометрия задачи при возбуждении звуковой волны в твердом теле

Поэтому в теории упругости, при изучении механики твердых тел, используют лагранжевы координаты, в которых все величины являются функциями не времени  $t$  и координат  $x_j$  (эйлеровы координаты), а времени  $t$  и положения частицы  $\vec{r}_0$  в начальный момент времени. Очевидно, что в этой системе полная и частная производные по  $t$  не различаются и уравнение движения твердого тела запишется в виде:

$$\rho \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = \vec{F} \quad (1.22)$$

или в тензорных обозначениях:

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k}, \quad (1.22a)$$

где сила  $\vec{F}$  представлена как градиент тензора напряжений. В отличие от предыдущего раздела, где тензор напряжений связан только с давлением  $\sigma_{jk} = -p\delta_{jk}$ , в упругом теле, реагирующем на деформацию сдвига, выражение для тензора напряжений будет более сложным. Для его определения рассмотрим две точки, координаты которых различаются на  $dx_j$ .

Пусть в начальном состоянии положение точек определялось радиус-векторами  $\vec{r}_0$  и  $\vec{r}_0 + d\vec{r}_0$ , где  $dr_0^2 = \sum_j dx_j^2$  - квадрат расстояния между ними.

В деформированном состоянии они примут положение  $\vec{r}_0 + \vec{u}$  и  $\vec{r}_0 + \vec{u} + d\vec{r}_0 + d\vec{u}$ , поэтому расстояние между этими точками будет  $dr^2 = (d\vec{r}_0 + d\vec{u})^2$ . Для малых значений  $dx_j$ , т.е. близких точек, можно положить

$$du_j = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_l} dx_l. \quad (1.23)$$

Тогда

$$dr^2 = \sum_{j=1}^3 dx_j^2 + 2 \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_l} dx_l dx_j + \sum_{j=1}^3 \left( \sum_{l=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_l} dx_l \right)^2. \quad (1.24)$$

Разбив второй член на два и пересобозначив индексы, получим выражение, которое описывает изменение расстояния между точками после деформации:

$$dr^2 - dr_0^2 = 2 \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 \tilde{u}_{lk} dx_k dx_l, \quad (1.25)$$

где  $\tilde{u}_{lk}$  - тензор второго ранга, который называется *тензором деформации*.

$$\tilde{u}_{lk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right). \quad (1.26)$$

Он действительно характеризует деформацию, т.к. при равенстве нулю всех его компонент расстояние между частицами тела не меняется и оно движется как единое целое. В случае малых деформаций выражение (1.26) можно линеаризовать, отбросив третье слагаемое.

Связь между напряжением и деформацией может быть различна. Рассмотрим тело с линейной упругостью, для которого эта связь описывается законом Гука:

$$\sigma_{jk} = \lambda \sum_{l=1}^3 \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{jk} + 2\mu \tilde{u}_{jk}, \quad (1.27)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  - коэффициенты Ламе (модули упругости).

В этом случае уравнение движения твердого тела можно представить как:

$$\rho \frac{d^2 u_j}{dt^2} = \mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \quad (1.28)$$

Пусть смещение зависит только от одной координаты  $\vec{u} = \vec{u}(x_1, t)$ , тогда уравнения движения для компонент будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \\ \rho \frac{d^2 u_2}{dt^2} &= \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}, \\ \rho \frac{d^2 u_3}{dt^2} &= \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Если ввести обозначения

$$v_{\parallel} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad (1.30)$$

$$v_{\perp} = \sqrt{\mu/\rho}, \quad (1.31)$$

то получим волновые уравнения для компонент смещения:

$$\frac{d^2 u_1}{dx_1^2} - \frac{1}{v_{\parallel}^2} \frac{d^2 u_1}{dt^2} = 0, \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_2}{dx_1^2} - \frac{1}{v_{\perp}^2} \frac{d^2 u_2}{dt^2} &= 0, \\ \frac{d^2 u_3}{dx_1^2} - \frac{1}{v_{\perp}^2} \frac{d^2 u_3}{dt^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Полученные решения свидетельствуют о наличии в твердом теле как *продольных*, так и *поперечных волн*, которые имеют разные скорости.

#### 1.4. Плоские волны

В общем случае волны могут иметь различные виды и зависимость от временной и пространственных переменных (координат). Рассмотрим сначала частный случай одномерной волны, т.е. волны, у которой все характеристики зависят от времени и одной координаты.

Пусть некоторая скалярная физическая величина  $S$ , характеризующая волну, зависит от времени  $t$  и одной координаты  $z$  (декартова система координат):

$$S = S(z, t) \quad (1.34)$$

Эта форма записи свидетельствует о том, что величина  $S$  в любой момент времени  $t$  принимает одинаковые значения на системе параллельных плоскостей ( $z = \text{const}$ ), причем значения  $S$  на разных плоскостях будут, вообще говоря, различны и с течением времени они изменяются. Если зависимость  $S$  от  $z$  представляет собой функцию с периодически изменяющимися максимумами и минимумами, расположение которых различно в различные моменты времени, то процесс (1.34) является волновым, а функция  $S$  называется *плоской волной*.

Рассмотрим частный случай плоской волны, когда переменные входят через линейную комбинацию

$$S = S(kz - \omega t), \quad (1.35)$$

где  $k, \omega$  - некоторые произвольные константы.

Рассмотрим пространственный профиль волны. Пусть  $t = t_0$ , тогда

$$S = S(kz - \omega t_0) = S(k(z - vt_0)), \quad (1.36)$$

где  $v = \omega/k$ . Если же  $t = t_0 + \Delta t$ , то

$$S = S(k(z - vt_0 - v\Delta t)). \quad (1.37)$$

На рис. 1.2 представлены зависимости (1.35) и (1.36). Они отличаются друг от друга лишь смещением вправо на  $\Delta z = v\Delta t$ . Очевидно, что параметр  $v$  характеризует скорость волны. Таким образом, формула (1.35) соответствует волне, распространяющейся вдоль оси  $z$  в сторону положительных значений со скоростью  $v$ .

Рассмотрим временной профиль. Пусть  $z = z_0$ , тогда

$$S = S(kz_0 - \omega t) = S(-\omega(t - z_0/v)). \quad (1.38)$$

Если же  $z = z_0 + \Delta z$ , то

$$S = S(-\omega(t - z_0/v - \Delta z/v)). \quad (1.39)$$

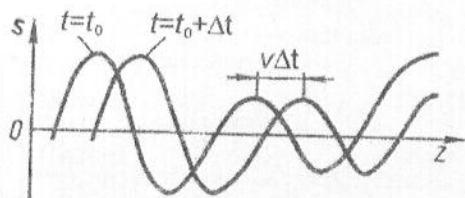


Рис. 1.2. Пространственный профиль волны

Полученные две зависимости приведены на рис. 1.3. График (1.38) точно воспроизводит (1.39) с опозданием на время  $\Delta t = \Delta z/v$ .

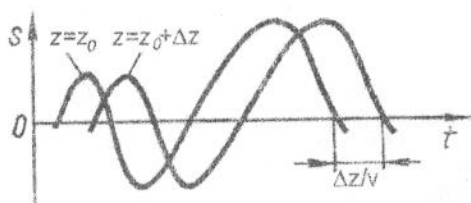


Рис. 1.3. Временной профиль волны

Аналогичным образом можно убедиться, что выражение

$$S = S(-kz - \omega t) \quad (1.40)$$

описывает плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси  $z$  в отрицательном направлении со скоростью  $v$ . Волны (1.35) и (1.40) называются *бегущими плоскими волнами*.

В теории волн особую роль играют *гармонические волны*, т.е. периодическим видом зависимости типа:

$$S = A \cos(kz - \omega t). \quad (1.41)$$

Рассмотрим основные параметры гармонических волн. Величина  $A$ , которая соответствует максимальному значению  $S$ , называется *амплитудой волны*. Расстояние между двумя соседними максимумами или минимумами  $S$  (пространственный профиль) называется *длиной волны*  $\lambda$ . Расстояние между двумя соседними максимумами или минимумами  $S$  (временной профиль) называется *периодом волны*  $T$ . Очевидно, что

$$T = \lambda/v. \quad (1.42)$$

Часто вместо периода волну характеризуют *частотой*  $f$ , которая однозначно связана с другими параметрами:

$$f = 1/T = \omega/2\pi. \quad (1.43)$$

Постоянная  $k$  в (1.41) называется *волновым числом*. Она может быть определена исходя из периодичности волны. Рассмотрим пространственный профиль при  $t = 0$ . Тогда

$$S(z) = S(z + \lambda) = A \cos(kz) = A \cos(k(z + \lambda)).$$

Откуда следует, что

$$k = 2\pi/\lambda. \quad (1.44)$$

Аргумент косинуса в (1.41) называется *фазой волны*. Она зависит от начала отсчета и определена с точностью до  $2\pi$ .

Если зафиксировать фазу в момент времени  $t$  на расстоянии  $z$  от начала координат, то за время  $\Delta t$  точка с этой фазой переместится на расстояние  $\Delta z$ . Тогда из равенства фаз

$$kz - \omega t = k(z + \Delta z) - \omega(t + \Delta t)$$

следует, что

$$v = \Delta z / \Delta t = \omega / k. \quad (1.45)$$

Таким образом, скорость волны  $v$ , которая входит в волновое уравнение, характеризует скорость распространения поверхности равных фаз и поэтому называется *фазовой скоростью*.

Рассмотрим трехмерный случай. Пусть волна распространяется в направлении, которое характеризуется единичным вектором  $\hat{m}$  (см. рис. 1.4). Тогда по аналогии с формулой (1.34) плоская волна может быть представлена следующим выражением:

$$S = S(\xi, t), \quad (1.46)$$

где  $\xi = (\vec{r} \hat{m}) = m_x x + m_y y + m_z z$ .

В случае линейной, изотропной, однородной, не поглощающей среды без дисперсии волновое уравнение (1.1) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0. \quad (1.47)$$

Выражение (1.47) является одной из двух канонических форм волнового уравнения для плоской волны. Если от переменных  $\xi$  и  $t$  перейти к новым переменным

$$\zeta = \xi - vt, \quad \varsigma = \xi + vt, \quad (1.48)$$

то вторая каноническая форма волнового уравнения принимает вид:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \zeta \partial \varsigma} = 0. \quad (1.49)$$

Решение последнего уравнения (и соответственно (1.47)) можно записать как:

$$S(\xi, t) = S_1(\zeta) + S_2(\varsigma) = S_1(t - \xi/v) + S_2(t + \xi/v). \quad (1.50)$$

Здесь  $S_1$  и  $S_2$  произвольные функции.

Рассмотрим первое решение, т.е. функцию  $S_1$ . В любой фиксированный момент времени  $S_1$  принимает постоянные значения в плоскости, которая определяется соотношением:

$$(\vec{r} \hat{m}) = \xi = \text{const}. \quad (1.51)$$

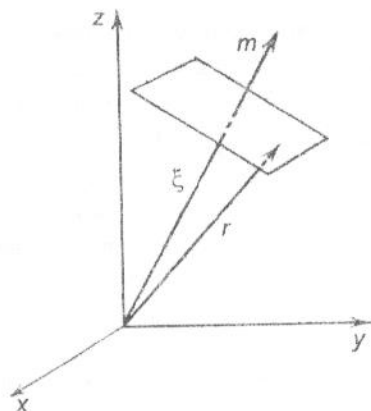


Рис. 1.4. Однородная плоская волна

Эта поверхность (равных фаз) перемещается в направлении, определяемом единичным вектором  $\hat{m}$ , со скоростью  $v$ . Второе решение в выражении (1.50) – функция  $S_2$ , описывает распространение плоской волны со скоростью  $v$ , но в противоположном направлении, т.е. вдоль вектора  $-\hat{m}$ .

Плоские волны, описываемые произвольными функциями  $S_1$  и  $S_2$ , часто удобно рассматривать как суперпозицию гармонических волн. Для этого необходимо, чтобы их можно было представить в виде интегралов Фурье:

$$S_{1,2}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{1,2}(\xi, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1.52)$$

$$\text{где } \dot{S}_{1,2}(\xi, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{1,2}(\xi, t) e^{i\omega t} dt.$$

Подстановка (1.52) позволяет от волнового уравнения (1.47) перейти к уравнению Гельмгольца

$$\frac{d^2 \dot{S}_{1,2}(\xi, \omega)}{d\xi^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \dot{S}_{1,2}(\xi, \omega) = 0. \quad (1.53)$$

Решение последнего уравнения можно представить в виде:  $\dot{S}_{1,2}(\xi, \omega) = A_{1,2}(\omega) e^{\pm i k \xi}$ , где  $k = \omega/v$ . Таким образом, функции  $A_{1,2}(\omega) e^{\pm i k \xi - i \omega t}$  под интегралом в (1.52) описывают гармонические плоские волны.

В декартовой системе координат фаза гармонической плоской волны может быть представлена в виде:

$$k(\hat{r}\hat{m}) - \omega t = \vec{k}\vec{r} - \omega t, \quad (1.54)$$

где  $\vec{k} = k\hat{m}$ . Для действительного волнового вектора  $\vec{k}$  уравнение поверхности равных фаз  $\vec{k}\vec{r} = \text{const}$ , совпадает с поверхностью равных амплитуд. Такая волна называется *плоской однородной волной*. Однако можно показать, что при определенных условиях поверхности равных фаз могут не совпадать с поверхностями равных амплитуд. Такие волны называют *плоскими неоднородными волнами*. Они возникают в ряде задач оптики и радиофизики.

Покажем принципиальную возможность существования плоских неоднородных волн. Пусть среда не обладает поглощением, а функции  $\hat{S}_{1,2}$  удовлетворяют уравнению (1.53), в том числе и в случае, когда волновой вектор комплексен, т.е.

$$\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}'', \quad (1.55)$$

но по-прежнему его квадрат определяется соотношением между частотой и фазовой скоростью.

$$\vec{k}^2 = \vec{k}'^2 - \vec{k}''^2 + 2i\vec{k}'\vec{k}'' = \omega^2/v^2.$$

Тогда

$$\vec{k}'^2 - \vec{k}''^2 = \omega^2/v^2 \text{ и } (\vec{k}'\vec{k}'') = 0. \quad (1.56)$$

Решение волнового уравнения имеет вид:

$$S_{1,2} = A_{1,2} e^{i(\pm \vec{k}\vec{r} - \omega t)} e^{-\vec{k}''\vec{r}}. \quad (1.57)$$

Уравнение поверхности равных фаз имеет вид:

$$\vec{k}'\vec{r} = \text{const},$$

а поверхности равных амплитуд:

$$\vec{k}''\vec{r} = \text{const}.$$

Т.е. поверхность равных амплитуд не совпадает с поверхностью равных фаз. С учетом соотношений (1.56) — они перпендикулярны друг другу. Волна, определяемая выражением (1.57), описывает плоскую неоднородную волну.

### 1.5. Сферические волны

Волновому уравнению могут удовлетворять волны различных типов. Разнообразные режимы возбуждения, влияние на процессы распространения всевозможных препятствий — все эти явления приводят к тому, что фронт волны может существенно отличаться от плоского.

Для целого ряда задач целесообразно использовать так называемые *сферические волны* (классическая задача — точечный источник). При их описании удобно использовать сферическую систему координат. В этом случае выражение для оператора Лапласа имеет вид:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Рассмотрим частный случай, когда исследуемый параметр не зависит от угловых координат (сферическая симметрия). Сделаем замену переменных

$$S(\vec{r}, t) = \frac{U(\vec{r}, t)}{r}. \quad (1.58)$$

Тогда получим уравнение для  $U$ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (1.59)$$

Сравнение его с выражением (1.47) позволяет представить частное решение в виде:

$$U = U(t - r/v).$$

Поэтому решение для  $S$  в соответствии с (1.58) запишется как:

$$S = \frac{U(t - r/v)}{r}. \quad (1.60)$$

Уравнение поверхности равных фаз

$$t - r/v = \text{const} \Rightarrow r = v(t - t_0), \quad (1.61)$$

что соответствует сфере, которая расширяется с течением времени со скоростью  $v$ . Амплитуда волны убывает, как  $1/r$ . Поэтому поверхность равных амплитуд совпадает с поверхностью равных фаз.

Простейшая гармоническая сферическая волна по аналогии с плоской волной может быть представлена выражением:

$$S = \frac{Ae^{i(kr - \omega t)}}{r}. \quad (1.62)$$

Общее выражение для гармонической сферической волны можно получить из волнового уравнения методом разделяющихся переменных. Представим его решение в виде:

$$S = S(r, \theta, \varphi, t) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)e^{-i\omega t}. \quad (1.63)$$

Тогда из волнового уравнения можно получить уравнение Гельмгольца вида:

$$\frac{1}{Rr^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + k^2 = 0 \quad (1.64)$$

Оно должно выполняться при всех значениях переменных. Поэтому его можно разделить на два уравнения, предварительно умножив на  $r^2$ :

$$\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = n(n+1), \quad (1.65)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + k^2 r^2 = -n(n+1), \quad (1.66)$$

где  $n$  - некоторая произвольная (целая, как оказывается в дальнейшем) константа.

Рассмотрим первое из них. Поскольку, как и в выражении (1.64), переменные и функции, зависящие от них, разделяются, (1.65) можно представить двумя уравнениями:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m^2, \quad (1.67)$$

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - n(n+1) \sin^2 \theta = m^2, \quad (1.68)$$

где  $m$  - произвольная константа.

Частное решение уравнения (1.67) есть

$$\Phi_m = a_m \cos(m\varphi) + b_m \sin(m\varphi). \quad (1.69)$$

Так как  $\Phi_m(\varphi) = \Phi_m(\varphi + 2\pi)$ , то  $m$  - целое число.

Частное решение уравнения (1.68) можно представить через присоединенные функции Лежандра:

$$\Theta_{mn}(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{dP_n(\mu)}{d\mu^m}, \quad (1.70)$$

где  $\mu = \cos \theta$ , а  $P_n(\mu)$  - многочлен Лежандра целой степени  $n$ .

Решение уравнения (1.66) можно выразить через функции Бесселя:

$$R_n = c_n j_n(kr) + d_n h_n(kr), \quad (1.71)$$

где  $j_n(x)$  и  $h_n(x)$  - сферические функции Бесселя и Ганкеля.

Общее решение тогда имеет вид:

$$S = \sum_n \sum_m C_{nm} R_n(kr) \Theta_{mn}(\theta) \Phi_m(\varphi) e^{-i\alpha x}. \quad (1.72)$$

Входящие в него константы  $C_{nm}$  определяются из соответствующих граничных условий.

## 1.6. Цилиндрические волны

Для ряда задач полезно использовать *цилиндрические волны* (например, линейный источник). При их описании целесообразно перейти к цилиндрической системе координат. В этом случае оператор Лапласа принимает вид:

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Тогда решение волнового уравнения в случае гармонической волны можно найти также методом разделяющихся переменных. Представим его в виде:

$$S = R(\rho)\Phi(\varphi)e^{-i\alpha z}. \quad (1.73)$$

Уравнение Гельмгольца в этом случае можно записать как:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial(R\Phi)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2(R\Phi)}{\partial \varphi^2} + k^2 R\Phi = 0. \quad (1.74)$$

Как и при рассмотрении сферических волн, выражение (1.74) допускает разделение его на два уравнения:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m^2, \quad (1.75)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + (k^2 \rho^2 - m^2) R = 0, \quad (1.76)$$

где  $m$  - произвольная константа.

Частные решения (1.75) и (1.76) имеют вид:

$$\Phi_m = a_m \cos(m\varphi) + b_m \sin(m\varphi), \quad (1.77)$$

$$R_m = c_m H_m^{(1)}(k\rho) + d_m H_m^{(2)}(k\rho), \quad (1.78)$$

где  $H_m^{(1)}(x)$  и  $H_m^{(2)}(x)$  - функции Ганкеля первого и второго рода.

Асимптотическое поведение функций Ганкеля таково, что при больших значениях аргумента фазовый множитель имеет вид  $e^{\pm ik\rho}$ , а амплитуда пропорциональна  $\sqrt{2/\pi k\rho}$ . Общее решение, как и для случая сферической волны, представляет собой сумму частных.

Очень часто простейшую цилиндрическую волну представляют в виде:

$$S(\rho, t) = \frac{A e^{i(k\rho - \omega t)}}{\sqrt{\rho}}. \quad (1.79)$$

Она удовлетворяет волновому уравнению при  $\rho \gg 1$ . Поверхности равных фаз и равных амплитуд совпадают и имеют вид концентрических цилиндров с осью  $Oz$ , причем величина амплитуды убывает с расстоянием как  $1/\sqrt{\rho}$ .

### Вопросы для самоконтроля

1. Напишите неоднородное уравнение Гельмгольца. Поясните его физический смысл.
2. Получите из волнового уравнения уравнение Гельмгольца для неоднородной среды.
3. Какой смысл имеет отношение пространственного  $\lambda$  и временного  $T$  периодов гармонической волны.
4. Напишите волновое уравнение для цилиндрической волны, описываемой соотношением (1.79).
5. Определите, как соотносятся поверхности равных амплитуд и поверхности равных фаз для плоской неоднородной волны в поглощающей среде. Сравните со случаем среды без поглощения.

## 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

### 2.1. Уравнения Максвелла

Любые электромагнитные явления описываются системой уравнений Максвелла. Согласно основным положениям макроскопической электродинамики электромагнитное поле в любой среде в каждой точке пространства в каждый момент времени определяется следующими четырьмя величинами:  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  - напряженности электрического и магнитного полей;  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  - векторы электрической и магнитной индукции. Кроме того, надо ввести плотности токов  $\vec{j}$  и электрических зарядов  $\rho$  в среде.

Исходной системой являются уравнения Максвелла. В системе единиц СИ они имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, \\ \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{div} \vec{D} = \rho, \\ \text{div} \vec{B} = 0. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

В этой системе отражены основные законы электромагнетизма. Первое из них есть дифференциальная формулировка закона о полном токе, второе — закон электромагнитной индукции Фарадея, третье — математическое выражение закона Кулона, четвертое — констатация отсутствия свободных маг-

нитных зарядов. Система должна быть дополнена уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (2.2)$$

Формула (2.2) выражает тот факт, что ток проводимости обусловлен движением свободных зарядов.

Система (2.1) неполна, т.к. содержит два векторных и 2 скалярных уравнения, причем третье уравнение есть следствие первого и уравнения (2.2), четвертое – следствие второго. Поэтому ее нужно дополнить системой материальных уравнений, в которых учитывается влияние среды на протекающие явления:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \vec{D}(\vec{E}), \\ \vec{B} &= \vec{B}(\vec{H}), \\ \vec{j} &= \vec{j}(\vec{E}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

В вакууме материальные уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H}, \\ \vec{j} &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$  – электрическая постоянная;  
 $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$  – магнитная постоянная;  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  – скорость света в вакууме.

В общем случае связь в (2.3) зависит от характера взаимодействия электромагнитного поля с веществом и может иметь весьма сложный характер. Она может быть нелинейной, учитывать анизотропию, неоднородность, не-локальность и наследственные свойства (память) среды. Далее рассмотрим случай, когда связь локальна и линейна, т.е.

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_a \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu_a \vec{H}, \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $\epsilon_a, \mu_a$  называются абсолютными электрической и магнитной проницаемостью, а  $\sigma$  – проводимостью среды. Для изотропной и однородной среды они постоянны. Часто для характеристики среды вводят относительные диэлектрические и магнитные проницаемости

$$\epsilon = \epsilon_a / \epsilon_0, \quad \mu = \mu_a / \mu_0. \quad (2.6)$$

Отметим, что для среды обладающей проводимостью ( $\sigma \neq 0$ ) из третьего уравнения из системы Максвелла с учетом материальных уравнений (2.5) имеем:

$$(\vec{\nabla} \epsilon_a \vec{E}) = \epsilon_a (\vec{\nabla} \vec{E}) = \rho.$$

Уравнение непрерывности при этом приобретает вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{\nabla} \sigma \vec{E}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sigma (\vec{\nabla} \vec{E}) = 0.$$

Сравнивая эти два последних уравнения, получим:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma \rho}{\epsilon_a} = 0.$$

Решение его имеет вид:

$$\rho = \rho_0 \exp(-(\sigma/\epsilon_a)t). \quad (2.7)$$

Из полученного решения видно, что в среде, обладающей проводимостью, плотность свободных зарядов уменьшается со временем. Поэтому далее рассмотрим область, в которой отсутствуют свободные заряды, т.е.  $\rho = 0$ , а также будем интересоваться установившимися процессами. В этом случае система уравнений Максвелла с учетом (2.5) принимает вид:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H} = \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E}, \\ \text{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \text{div} \vec{E} = 0, \\ \text{div} \vec{H} = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Исключим из (2.8), например, вектор  $\vec{H}$ , для чего второе уравнение векторно умножим на оператор  $\vec{\nabla}$ . В результате после векторных преобразований получим следующее уравнение для вектора  $\vec{E}$ :

$$\Delta \vec{E} - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_a \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0. \quad (2.9)$$

Пусть  $\sigma = 0$  (среда чистый диэлектрик), тогда получим волновое уравнение:

$$\Delta \vec{E} - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.10)$$

где  $v = 1/\sqrt{\mu_a \epsilon_a} = c/\sqrt{\epsilon \mu}$  - фазовая скорость волны.

Такому же волновому уравнению удовлетворяет и вектор  $\vec{H}$ . Отметим, что решения этих уравнений для  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  не являются независимыми.

## 2.2. Плоские электромагнитные волны в однородной изотропной среде

Рассмотрим случай распространения плоской электромагнитной волны, т.е. волны, зависящей от  $\xi$  и  $t$ .

$$\xi = (\hat{m} \vec{r}),$$

где  $\hat{m}$  - нормаль к фазовому фронту.

В этом случае уравнение (2.10) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \xi^2} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.11)$$

Решение его - две бегущие плоские электромагнитные волны, распространяющиеся в направлении  $\pm \hat{m}$  со скоростью  $v = c/\sqrt{\epsilon \mu}$ :

$$\vec{E} = \vec{E} \left( t \pm \frac{\xi}{v} \right). \quad (2.12)$$

Аналогично может быть представлено выражение для магнитной составляющей поля.

Определим структуру этих волн. Рассмотрим волну, бегущую в положительном направлении. В этом случае

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= (\vec{\nabla} \vec{E}) = \frac{\partial (\hat{m} \vec{E})}{\partial \xi}, \\ \text{rot} \vec{E} &= [\vec{\nabla} \times \vec{E}] = \frac{\partial [\hat{m} \times \vec{E}]}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Тогда система уравнений Максвелла в новых обозначениях принимает вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{m} \times \vec{H}] &= \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{m} \times \vec{E}] &= -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{m} \vec{E}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{m} \vec{H}) &= 0. \end{aligned} \right. \quad (2.14)$$

Из двух последних следует, что для проекций векторов

$$\frac{\partial E_{\xi}}{\partial \xi} = \frac{\partial H_{\xi}}{\partial \xi} = 0.$$

Это означает, что проекции если и не равны нулю, то могут лишь зависеть от времени. Но если умножить два первых уравнения (2.14) скалярно на  $\hat{m}$ , то получим:

$$\frac{\partial E_{\xi}}{\partial t} = \frac{\partial H_{\xi}}{\partial t} = 0.$$

Последнее означает, что для волнового процесса  $\vec{H} \perp \hat{m}$  и  $\vec{E} \perp \hat{m}$ , т.е. волна носит *поперечный характер*. Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  лежат в плоскости фронта волны.

Найдем связь между векторами электрического и магнитного полей. Введем координату  $\tau = t - \xi/v$ , связанную с волной. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Поэтому первое уравнение в (2.14) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{v} [\hat{m} \times \vec{H}] + \epsilon_a \vec{E} \right\} = 0.$$

Для волнового процесса из последнего уравнения следует, что

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_a v} [\vec{H} \times \hat{m}] = Z_B [\vec{H} \times \hat{m}], \\ \vec{H} &= \epsilon_a v [\hat{m} \times \vec{E}] = \frac{1}{Z_B} [\hat{m} \times \vec{E}], \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $Z_B = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}$  - импеданс или волновое сопротивление среды. Она определяет количественную связь между напряженностями полей в электромагнитной волне.

Для вакуума

$$Z_B = Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 120\pi \text{ Ом}. \quad (2.16)$$

Рассмотрим теперь распространение плоской волны в среде с проводимостью ( $\sigma \neq 0$ ). В этом случае система уравнений Максвелла имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{m} \times \vec{H}] = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E}, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{m} \times \vec{E}] = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{m} \vec{E}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{m} \vec{H}) = 0. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Умножим 1-е уравнение скалярно на  $\hat{m}$ .

$$\varepsilon_a \frac{\partial (\vec{E} \hat{m})}{\partial t} + \sigma (\hat{m} \vec{E}) = 0.$$

Решение последнего уравнения имеет вид:

$$E_{\xi} = E_{\xi}(0) \exp(-(\sigma/\varepsilon_a)t),$$

т.е. с течением времени значения проекции электрического поля на направление распространения волны уменьшаются. Для среды с проводимостью составляющие  $E_{\xi}$  и  $H_{\xi}$  со временем становятся равны нулю, поэтому, как и для случая  $\sigma = 0$ , волна носит поперечный характер.

При распространении электромагнитных волн в проводящих средах без изменения формы могут распространяться только гармонические волны. Рассмотрим плоскую гармоническую волну:

$$\vec{E} = \vec{E}(\xi) \exp(-i\omega t).$$

Из уравнения (2.9) получим уравнение Гельмгольца для комплексной амплитуды:

$$\Delta \vec{E} + (\varepsilon_a \mu_a \omega^2 + i\omega \mu_a \sigma) \vec{E} = 0. \quad (2.18)$$

Если бы среда была непроводящей, то уравнение Гельмгольца имело вид:

$$\Delta \vec{E} + \varepsilon_a \mu_a \omega^2 \vec{E} = 0,$$

решение которого

$$\vec{E} = A_{1,2} e^{\pm i k \xi}, \quad (2.19)$$

где  $k = \sqrt{\varepsilon_a \mu_a \omega^2} = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}$ .

Поэтому для случая  $\sigma \neq 0$  по аналогии решение (2.18) имеет вид (2.19), но при этом волновое число комплексно

$$k = \sqrt{\epsilon_a \mu_a \omega^2 + i \omega \mu_a \sigma} = \sqrt{\epsilon_{ka} \mu_a \omega^2}, \quad (2.20)$$

и введена  $\epsilon_{ka}$  - комплексная диэлектрическая проницаемость

$$\epsilon_{ka} = \epsilon_a + i \frac{\sigma}{\omega} = \epsilon'_a + i \cdot \epsilon''_a = \epsilon_a (1 + i \cdot \operatorname{tg} \delta), \quad (2.21)$$

где  $\operatorname{tg} \delta = \epsilon''_a / \epsilon'_a = \sigma / \omega \epsilon_a$  - тангенс угла потерь.

Можно ввести относительную комплексную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_k$ .

Если волновое число (2.20) определить как

$$k = \frac{\omega}{c} (n + iK), \quad (2.22)$$

где  $n$  и  $K$  - некоторые положительные величины, тогда решение волнового уравнения в виде двух бегущих плоских гармонических волн в поглощающей среде можно записать

$$\begin{aligned} \bar{E}(\xi, t) = & A_1 \exp\left(-\frac{\omega}{c} K \xi\right) \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{n}{c} \xi\right)\right) + \\ & + A_2 \exp\left(\frac{\omega}{c} K \xi\right) \exp\left(-i\omega\left(t + \frac{n}{c} \xi\right)\right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Т.е. в виде двух волн, у которых амплитуды убывают по мере распространения. Величина  $K$  называется *показателем поглощения* и характеризует скорость убывания амплитуды. Величина  $n$  называется *показателем преломления* и определяет фазовую скорость волны в среде.

Из выражений (2.20) и (2.22) нетрудно определить, что показатели преломления и поглощения связаны с параметрами среды следующими зависимостями:

$$n = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1 \right)}, \quad (2.24)$$

$$K = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1 \right)}. \quad (2.25)$$

Аналогично, как для среды без проводимости, можно определить характеристики волны в проводящей среде. Фазовая скорость:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1 \right)}}, \quad (2.26)$$

длина волны:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1)}}, \quad (2.27)$$

волновое сопротивление:

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_{ka}}} = |Z_B| e^{-i\varphi_B} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}} e^{-i\frac{\delta}{2}}. \quad (2.28)$$

Отметим, что волновое сопротивление в случае среды с проводимостью комплексно. Это означает, что между векторами электрического и магнитного полей существует фазовый сдвиг. На рис. 2.1. представлен вид пространственного расположения векторов для плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ .

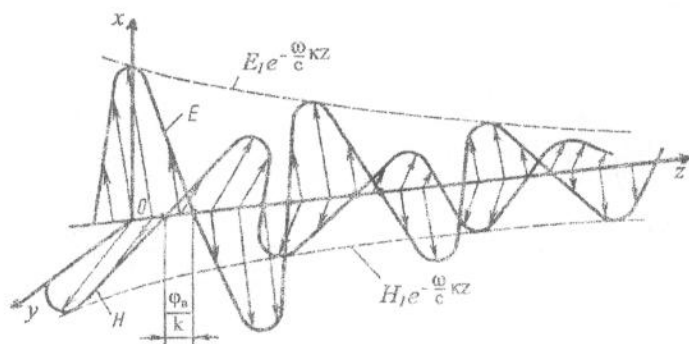


Рис. 2.1. Пространственный профиль векторов электромагнитного поля в среде с проводимостью

Рассмотрим частные случаи:

1. Диэлектрик:  $\operatorname{tg} \delta \ll 1$ .

В этом случае

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} \approx 1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{2}$$

и поэтому

$$n \approx \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left( 1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{2} + 1 \right)} \approx \sqrt{\mu\epsilon}, \quad (2.29)$$

$$\kappa \approx \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left( 1 + \frac{tg^2\delta}{2} - 1 \right)} = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{tg\delta}{2} = \sqrt{\mu\epsilon} \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon_a} \right). \quad (2.30)$$

Т.е. показатель преломления не зависит от частоты, а показатель поглощения является явной функцией частоты.

Фазовая скорость, длина волны и волновое сопротивление имеют вид:

$$v \approx \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad \lambda \approx \frac{c}{f\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad |Z_B| \approx Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left( 1 - \frac{tg^2\delta}{2} \right) \approx 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad \varphi_B \approx 0. \quad (2.31)$$

2. Проводник:  $tg\delta \gg 1$ .

Для проводника, поскольку

$$\sqrt{1 + tg^2\delta} = tg\delta \left( \sqrt{1 + \frac{1}{tg^2\delta}} \right) \approx tg\delta \left( 1 + \frac{1}{2tg^2\delta} \right),$$

получим

$$n \approx \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left( tg\delta + \frac{1}{2tg\delta} + 1 \right)} \approx \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} (tg\delta + 1)} \approx \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} tg\delta}, \quad (2.32)$$

$$\kappa \approx \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left( tg\delta + \frac{1}{2tg\delta} - 1 \right)} \approx \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} (tg\delta - 1)} \approx \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} tg\delta}, \quad (2.33)$$

т.е. показатели преломления и поглощения зависят явно от частоты.

$$n \approx \kappa = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \frac{\sigma}{\omega\epsilon_a}}.$$

Фазовая скорость и длина волны:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} tg\delta}}, \quad \lambda = \frac{c}{f \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} tg\delta}}. \quad (2.34)$$

Если значение  $tg\delta$  очень большое, то волна быстро затухает, т.е. электромагнитное поле проникает только в тонкий слой проводника. Поскольку затухание пропорционально  $\exp(-(\omega/c)\kappa z)$ , то определив глубину проникновения, например, по спаду в  $e$  раз, можно оценить ее численно. Так, для меди на частоте  $f = 100 \text{ кГц}$  она составляет 0,2 мм, а для  $f = 10 \text{ ГГц}$  - 0,66 мкм.

Волновое сопротивление для случая проводника можно представить как:

$$|Z_B| \approx 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon \operatorname{tg} \delta}}, \quad \varphi_B \approx \frac{\pi}{4}. \quad (2.35)$$

### 2.3. Поток энергии электромагнитного поля

Рассмотрим случай распространения электромагнитной волны в среде, не обладающей проводимостью. Очевидно, что энергия поля в этом случае должна сохраняться. Закон сохранения в интегральной форме имеет вид:

$$\oint w(\vec{r}, t) d\vec{r} = \text{const} \quad (2.36)$$

или в эквивалентной дифференциальной форме

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi} = 0, \quad (2.37)$$

где  $w$  - объемная плотность энергии;  $\vec{\Pi}$  - поток энергии. Найдем явный вид этих величин. Из системы (2.14), умножая первое на  $\vec{E}$ , а второе - на  $\vec{H}$  и вычитая их друг из друга, получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_a \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_a E^2 + \mu_a H^2) = \\ &= \vec{E} [\vec{\nabla} \times \vec{H}] - \vec{H} [\vec{\nabla} \times \vec{E}] = -\operatorname{div} [\vec{E} \times \vec{H}], \end{aligned}$$

что позволяет переписать его в виде:

$$= \vec{E} [\vec{\nabla} \times \vec{H}] - \vec{H} [\vec{\nabla} \times \vec{E}] = -\operatorname{div} [\vec{E} \times \vec{H}].$$

Сравнив полученное с (2.37), находим выражения для  $w$  и  $\vec{\Pi}$ :

$$w = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_a E^2 + \mu_a H^2), \quad (2.38)$$

$$\vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (2.39)$$

Выражение (2.39) называется *вектором Умова-Пойтинга*. Его модуль и направление характеризуют величину и направление потока излучения. Сохранение полной энергии имеет место в достаточно большой области, на границах которой поток энергии равен нулю. Внутри же этого объема происходит перенос энергии из одной ее части в другую, обусловленную распространением электромагнитных волн.

Пусть  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются по гармоническому закону. Очевидно, что физический смысл имеют средние значения  $\vec{\Pi}$ . Представим напряженности полей в виде:

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} \dot{\vec{E}} \\ \dot{\vec{H}} \end{pmatrix} e^{-i\alpha x} + \begin{pmatrix} \dot{\vec{E}} \\ \dot{\vec{H}} \end{pmatrix}^* e^{i\alpha x} \right\}.$$

Тогда среднее за период значение вектора  $\vec{\Pi}$  можно представить в виде:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2} \text{Re} [\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}]. \quad (2.40)$$

Для плоской волны

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2} \frac{1}{|Z_B|} |\dot{\vec{E}}|^2 \text{Cos}(\varphi_B) \hat{m} = \frac{1}{2} |Z_B| |\dot{\vec{H}}|^2 \text{Cos}(\varphi_B) \hat{m}. \quad (2.41)$$

Если среда обладает проводимостью, то можно получить следующее выражение для закона сохранения:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div} \vec{\Pi} + Q = 0, \quad (2.42)$$

где  $Q = \vec{j} \vec{E} = \sigma E^2$  - Джоулево тепло (потери энергии на нагревание среды).

## 2.4. Векторные волны. Поляризация

Электромагнитные волны имеют векторный характер. Кроме амплитуды, частоты и фазы надо знать направление векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . В общем случае, если предположить, что некоторая векторная величина  $\vec{S}$  изменяется в пространстве и времени по закону

$$\vec{S} = \vec{S}(k\xi - \omega t), \quad (2.43)$$

то очевидно, что она описывает плоскую векторную волну, распространяющуюся в направлении определяемым единичным вектором  $\hat{m}$ . Рассмотрим вопрос об ориентации вектора  $\vec{S}$ . Ясно, что имеет смысл говорить о поляризации лишь для поперечных волн.

Для того, чтобы охарактеризовать поляризацию волны, вводят понятие *плоскости поляризации*, т.е. плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{S}$  и  $\hat{m}$ . Очевидно, что для продольных волн ее ввести невозможно, т.к. она вырождается в прямую. Выберем ось  $z$  в направлении вектора  $\hat{m}$ . Тогда разложив плоскую гармоническую (поперечную) волну на две ортогональные составляющие, получим:

$$\begin{aligned} S_x &= a_x \text{Cos}(\omega t - kz - \varphi_x) = \text{Re}(a_x \exp(-i(\omega t + \varphi_x))) \\ S_y &= a_y \text{Cos}(\omega t - kz - \varphi_y) = \text{Re}(a_y \exp(-i(\omega t + \varphi_y))) \end{aligned} \quad (2.44)$$

где  $\tau = t - (k/\omega)z = t - z/v$ , а  $a_x, a_y, \varphi_x, \varphi_y$  - постоянные действительные амплитуды и фазы ортогональных составляющих вектора  $\vec{S}$ . Исключив из (2.44) временной множитель, получим уравнение, которое описывает состояние поляризации волны:

$$\left(\frac{S_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{S_y}{a_y}\right)^2 - 2\left(\frac{S_x S_y}{a_x a_y}\right) \cos \Delta = \sin^2 \Delta, \quad (2.45)$$

где  $\Delta = \varphi_y - \varphi_x$ .

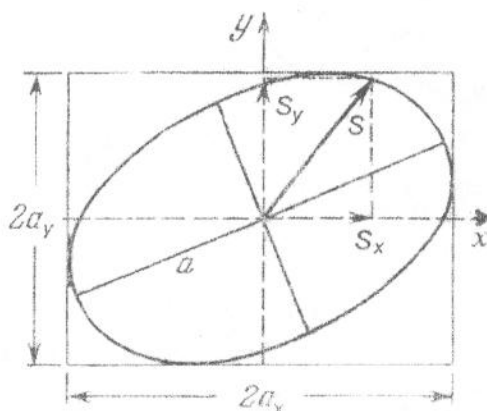


Рис. 2.2. Эллипс поляризации векторной волны

Уравнение (2.45) – уравнение эллипса. Т.е. в общем случае при распространении волны конец вектора  $\vec{S}$  движется по эллиптической траектории (см. рис. 2.2.)

При  $\Delta = \pi/2 \pm \pi n$  оси эллипса совпадают с осями координат, а при  $a_x = a_y$  эллипс вырождается в окружность. В этих случаях говорят об эллиптической и круговой поляризации. В случае правой поляризации вектор вращается по часовой стрелке, если смотреть в направлении распространения волны, а в случае левой – против часовой стрелки. На рис. 2.3 представлено пространственное изменение вектора  $\vec{S}$  при распространении волны с круговой поляризацией.

При  $\Delta = \pm \pi n$  - из (2.45) следует, что вектор  $\vec{S}$  колеблется в плоскости, имеющий угол наклона  $\vartheta_{1,2}$  относительно оси  $x$

$$\operatorname{tg} \vartheta_{1,2} = \pm a_y / a_x.$$

В этом случае поляризация называется линейной. Плоскость поляризации сохраняет свое положение в пространстве при распространении волны.

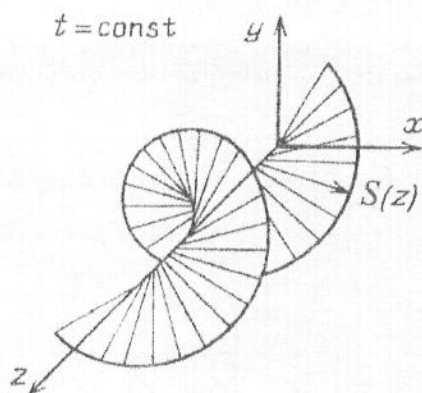


Рис.2.3. Положение вектора при круговой поляризации

На рис. 2.4 представлено временное поведение вектора  $\vec{S}$  при различных соотношениях разности фаз  $\Delta$  в плоскости фазового фронта волны.

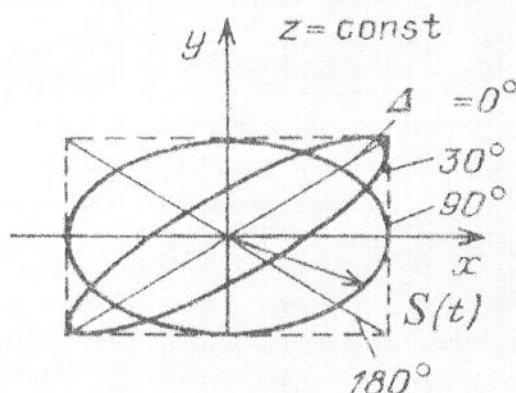


Рис. 2.4. Временные траектории вектора  $\vec{S}$

Состояние поляризации можно характеризовать с помощью множителя поляризации (фазора):

$$P = \frac{S_x}{S_y} = \frac{a_x}{a_y} e^{i\Delta}. \quad (2.46)$$

При комплексном  $P$  поляризация эллиптическая; если  $P$  - чисто мнимое, то оси эллипса совпадают с осями координат. Круговой поляризации соответствует  $P = \pm i$  (положительный знак для правой, а отрицательный - для

левой поляризации). Линейной поляризации соответствуют действительные значения  $P$ .

Приведенное в (2.44) разложение представляет собой разложение в линейном поляризационном базисе  $(\hat{e}_{\parallel}, \hat{e}_{\perp})$ . Можно взять в качестве базиса круговой  $(\hat{e}_R, \hat{e}_L)$ , который связан с линейным соотношением:

$$\begin{cases} \hat{e}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_{\parallel} + i\hat{e}_{\perp}) \\ \hat{e}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_{\parallel} - i\hat{e}_{\perp}) \end{cases}, \quad (2.47)$$

где индекс  $R$  соответствует правой поляризации, а  $L$  - левой поляризации. Тогда любая поляризованная волна может быть представлена в виде суперпозиции 2-х волн с круговой или линейной поляризацией:

$$\vec{S} = S_{\parallel}\hat{e}_{\parallel} + S_{\perp}\hat{e}_{\perp} = S_R\hat{e}_R + S_L\hat{e}_L. \quad (2.48)$$

Рассмотрим негармонические волны. В этом случае параметры  $a_x, a_y, \varphi_x, \varphi_y$  в выражении (2.44) не будут постоянными во времени и поведение вектора  $\vec{S}$  в поперечной направлению распространения волны плоскости будет иметь сложный характер. Состояние поляризации для немонохроматической волны (так же как и гармонической) можно характеризовать различным образом. Например, с помощью матрицы когерентности:

$$J = \begin{pmatrix} \overline{S_x S_x^*} & \overline{S_x S_y^*} \\ \overline{S_y S_x^*} & \overline{S_y S_y^*} \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

где черта сверху означает усреднение по времени.

Очевидно, что след матрицы равен интенсивности волны  $I$ :

$$SpJ = \overline{S_x S_x^*} + \overline{S_y S_y^*} = I.$$

Для полностью поляризованной (гармонической) волны

$$\overline{S_{\alpha} S_{\beta}^*} = S_{\alpha} S_{\beta}^*$$

и поэтому

$$\det J = 0.$$

Для полностью неполяризованной волны

$$\overline{S_x S_y^*} = 0, \quad \overline{|S_x|^2} = \overline{|S_y|^2} = I/2.$$

Поэтому в этом случае

$$\det J = I^2/4.$$

Для частично поляризованной волны:

$$0 \leq \det J \leq I^2/4. \quad (2.50)$$

Очевидно, что в рамках принятых обозначений

$$J = \begin{pmatrix} \overline{a_x^2} & \overline{a_x a_y \exp(i\Delta)} \\ \overline{a_x a_y \exp(-i\Delta)} & \overline{a_y^2} \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Очень часто вместо матрицы когерентности используют параметры Стокса, которые определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= \overline{a_x^2 + a_y^2}, \\ Q &= \overline{a_x^2 - a_y^2}, \\ U &= \overline{2a_x a_y \cos \Delta}, \\ V &= \overline{2a_x a_y \sin \Delta}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Физический смысл компонент:  $I$  - полная интенсивность волны,  $Q$  - разность между интенсивностями волн с двумя линейными ортогональными поляризациями,  $U$  - разность между интенсивностями при повороте системы координат на  $45^\circ$  и  $135^\circ$ ,  $V$  - разность между интенсивностями составляющих с правой и левой поляризацией.

Очевидно, что

$$J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I+Q & U+iV \\ U-iV & I-Q \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Для полностью неполяризованной волны

$$Q^2 = U^2 = V^2 = 0,$$

а для полностью поляризованной

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2.$$

Степень поляризации волны можно характеризовать как:

$$p_w = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I}; \quad (2.54)$$

степень линейной поляризации:

$$p_l = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2}}{I}; \quad (2.55)$$

степень круговой поляризации:

$$p_c = V/I. \quad (2.56)$$

Тогда интенсивность поляризованной части волны можно представить как:

$$I_n = p_w I,$$

а неполяризованной

$$I_{np} = (1 - p_w)I.$$

С помощью параметров Стокса или матрицы когерентности можно определить поляризацию любой волны, в том числе и при суперпозиции нескольких волн. Параметры Стокса результирующей волны будут определяться как сумма параметров Стокса отдельных волн. Аналогичное имеет место и для матрицы когерентности.

#### Вопросы для самоконтроля

1. Записать комплексные амплитуды векторов поля плоской однородной волны, распространяющейся а) по оси  $x$ , б) по оси  $y$ .
2. Напишите уравнения для среднего значения плотности потока мощности гармонической волны в среде без проводимости и с проводимостью.
3. Определите предельный сдвиг фаз между векторами электрического и магнитного полей плоской волны для линейной однородной изотропной среды.
4. Поясните физический смысл вектора Умова – Пойтинга. Какова его размерность?
5. Какой поляризации соответствует волна, приведенная на рис. 2.1.
6. Изобразите временное распределение напряженности электрического и магнитного полей плоской волны, распространяющейся в поглощающей среде для круговой. Сравните со случаем идеального диэлектрика.
7. Получите соотношения между единичными векторами в линейном и круговом поляризационном базисе.
8. Напишите, как связаны параметры Стокса для двух плоских волн единичной интенсивности, одна из которых является полностью поляризованной, а вторая – полностью неполяризованной.

### 3. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

Рассмотренные в предыдущих разделах волновые процессы относятся к случаю сред с постоянными параметрами. Однако на практике приходится иметь дело с неоднородными средами. Простейшая задача – взаимодействие излучения с границей раздела двух сред. Такая ситуация на практике встречается достаточно часто, вследствие чего изучение закономерностей, которые имеют место в подобных случаях, представляет большой интерес. Наиболее сложная задача взаимодействия волны с границей раздела сред возникает для векторных волн, поэтому в данном разделе пособия рассмотрен случай электромагнитной волны.

#### 3.1. Общие закономерности взаимодействия плоской электромагнитной волны с плоской границей раздела

Рассмотрим простую задачу падения плоской монохроматической волны на плоскую границу раздела двух сред. Как известно, при этом возникают преломленная (прошедшая) и отраженная волны.

Пусть граница раздела двух сред с постоянными параметрами совпадает с плоскостью  $z = 0$ . Обозначим направление падающей плоской гармонической электромагнитной волны единичным вектором  $\hat{m}_0$ , а отраженной и преломленной –  $\hat{m}_1$  и  $\hat{m}_2$  соответственно. Плоскость падения, содержащую  $\hat{m}_0$  и ось  $z$ , совместим с плоскостью  $xz$ . Геометрия задачи представлена ниже на рис. 3.1.

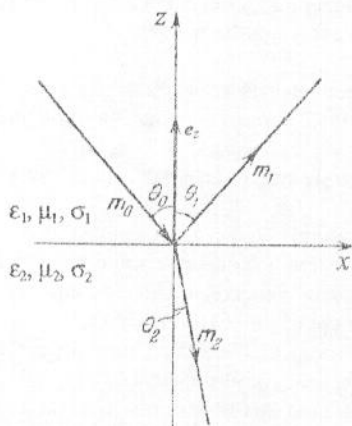


Рис. 3.1. Геометрия задачи взаимодействия излучения с плоской границей раздела двух сред

Задача будет решаться в линейном приближении, т.е. частоты падающей, отраженной и прошедшей волны – одинаковы. Такое предположение справедливо для линейных сред. Тогда соотношения для волновых векторов можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\vec{k}_0 &= k_1 \hat{m}_0 = \sqrt{\varepsilon_{ka1} \mu_{a1}} \omega \cdot \hat{m}_0, \\ \vec{k}_1 &= k_1 \hat{m}_1 = \sqrt{\varepsilon_{ka1} \mu_{a1}} \omega \cdot \hat{m}_1, \\ \vec{k}_2 &= k_2 \hat{m}_2 = \sqrt{\varepsilon_{ka2} \mu_{a2}} \omega \cdot \hat{m}_2,\end{aligned}\quad (3.1)$$

где  $\varepsilon_{ka1} = \varepsilon_{a1} + i\sigma_1/\omega$ ,  $\mu_{a1}$ ,  $\varepsilon_{ka2} = \varepsilon_{a2} + i\sigma_2/\omega$ ,  $\mu_{a2}$  - параметры сред.

Запишем выражения для напряженности полей в виде: для падающей волны

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_0 \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{H}_i = \frac{[\hat{m}_0 \times \vec{E}_0]}{Z_{B1}} e^{i(\vec{k}_0 \vec{r} - \omega t)}, \quad (3.2)$$

для отраженной волны

$$\vec{E}_s = \vec{E}_1 e^{i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{H}_s = \frac{[\hat{m}_1 \times \vec{E}_1]}{Z_{B1}} e^{i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega t)}, \quad (3.3)$$

для преломленной волны

$$\vec{E}_t = \vec{E}_2 e^{i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{H}_t = \frac{[\hat{m}_2 \times \vec{E}_2]}{Z_{B2}} e^{i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega t)}, \quad (3.4)$$

где  $Z_{B1} = \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\varepsilon_{ka1}}}$ ,  $Z_{B2} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\varepsilon_{ka2}}}$  - волновые сопротивления сред.

На границе раздела должны выполняться граничные условия - непрерывность тангенциальных составляющих суммарного волнового поля. Для электрической и магнитной компонент:

$$\begin{aligned}[\hat{e}_z \times \vec{E}_i] + [\hat{e}_z \times \vec{E}_s] &= [\hat{e}_z \times \vec{E}_t] \quad |_{z=0}, \\ [\hat{e}_z \times \vec{H}_i] + [\hat{e}_z \times \vec{H}_s] &= [\hat{e}_z \times \vec{H}_t] \quad |_{z=0}.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Поскольку равенства (3.5) должны выполняться для любых точек в плоскости  $z=0$ , то из этого следует условие равенства фаз на границе раздела:

$$(\vec{k}_0 \vec{r})|_{z=0} = (\vec{k}_1 \vec{r})|_{z=0} = (\vec{k}_2 \vec{r})|_{z=0}. \quad (3.6)$$

В силу очевидного равенства

$$\left[ \hat{e}_z \times \left[ \hat{e}_z \times \vec{r} \right] \right] \Big|_{z=0} = \hat{e}_z \left( \hat{e}_z \vec{r} \right) \Big|_{z=0} - \vec{r} \left( \hat{e}_z \hat{e}_z \right) \Big|_{z=0} = -\vec{r}$$

из (3.6) следует, что

$$k_1 \left[ \hat{m}_0 \times \hat{e}_z \right] \Big|_{z=0} = k_1 \left[ \hat{m}_1 \times \hat{e}_z \right] \Big|_{z=0} = k_2 \left[ \hat{m}_2 \times \hat{e}_z \right] \Big|_{z=0}. \quad (3.7)$$

Из полученного видно, что падающий, отраженный и преломленный лучи лежат в одной плоскости. Из первого равенства следует, что

$$\sin \theta_0 = \sin \theta_1, \quad (3.8)$$

а из второго - закон Снеллиуса:

$$k_1 \sin \theta_0 = k_2 \sin \theta_2. \quad (3.9)$$

Отметим, что формулы (3.8) и (3.9) справедливы для любых сред, в том числе и для случая, когда диэлектрическая и (в общем случае) магнитная проницаемости комплексны.

Поскольку любая поляризация может быть представлена в виде разложения по ортогональным составляющим, далее рассмотрим случаи перпендикулярной и параллельной относительно плоскости падения ориентации поляризации падающей волны.

#### **Перпендикулярная поляризация.**

Для рассматриваемого случая вектор напряженности поля перпендикулярен плоскости падения и имеет только одну составляющую

$$\vec{E}_i = E_0 \hat{e}_y, \quad E_{ix} = E_{iz} = 0.$$

Это позволяет записать граничные условия (3.5) с учетом (3.6) в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_0 + E_1 &= E_2, \\ Z_{B2}(E_0 \cos \theta_0 - E_1 \cos \theta_1) &= Z_{B1} E_2 \cos \theta_2. \end{aligned}$$

Решая их совместно, найдем так называемые коэффициенты Френеля, связывающие амплитуды отраженной и преломленной волн с амплитудой падающей волны:

$$R_{\perp} = \frac{E_1}{E_0} = \frac{Z_{B2} \cos \theta_0 - Z_{B1} \cos \theta_2}{Z_{B2} \cos \theta_0 + Z_{B1} \cos \theta_2} = |R_{\perp}| e^{i\varphi_{R_{\perp}}}, \quad (3.10)$$

$$T_{\perp} = \frac{E_2}{E_0} = \frac{2Z_{B2} \cos \theta_0}{Z_{B2} \cos \theta_1 + Z_{B1} \cos \theta_2} = |T_{\perp}| e^{i\varphi_{T_{\perp}}}. \quad (3.11)$$

#### **Параллельная поляризация.**

В этом случае удобнее проводить анализ для магнитной составляющей поля, т.к. она перпендикулярна плоскости падения и имеет одну не равную нулю компоненту

$$\vec{H}_i = H_0 \hat{e}_y.$$

Граничные условия (3.5) тогда приобретают вид:

$$\begin{aligned} Z_{B1}(H_0 \cos \theta_0 - H_1 \cos \theta_1) &= Z_{B2} H_2 \cos \theta_2, \\ H_0 + H_1 &= H_2. \end{aligned}$$

Коэффициенты отражения и преломления Френеля могут быть определены как:

$$R_{\parallel} = \frac{H_1}{H_0} = \frac{Z_{B1} \cos \theta_0 - Z_{B2} \cos \theta_2}{Z_{B1} \cos \theta_0 + Z_{B2} \cos \theta_2} = |R_{\parallel}| e^{i\varphi_{R_{\parallel}}}, \quad (3.12)$$

$$T_{\parallel} = \frac{H_2}{H_0} = \frac{2Z_{B1} \cos \theta_0}{Z_{B1} \cos \theta_0 + Z_{B2} \cos \theta_2} = |T_{\parallel}| e^{i\varphi_{T_{\parallel}}}. \quad (3.13)$$

Отметим, что коэффициенты Френеля (3.10 – 3.13) получены при произвольных значениях параметров сред. При нормальном падении ( $\theta_0 = 0$ ) имеет место равенство:

$$R_{\perp} = -R_{\parallel}.$$

Отметим, что при этом

$$T_{\perp} \neq T_{\parallel}.$$

### 3.2. Особенности взаимодействия волны с границей "диэлектрик - диэлектрик"

Рассмотрим случай, когда обе среды являются диэлектриками, т.е.  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ . Пусть для простоты  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ , тогда электродинамические характеристики сред будут иметь вид:

$$\varepsilon_{ka1} = \varepsilon_{a1}, \quad \varepsilon_{ka2} = \varepsilon_{a2},$$

$$Z_{B1} = Z_0 \sqrt{\mu/\varepsilon_1}, \quad Z_{B2} = Z_0 \sqrt{\mu/\varepsilon_2}.$$

В этом случае для коэффициентов отражения Френеля имеем:

$$R_{\perp} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_0 - \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_2}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_0 + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_2} = -\frac{\sin(\theta_0 - \theta_2)}{\sin(\theta_0 + \theta_2)}, \quad (3.14)$$

$$R_{\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_0 - \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_2}{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_0 + \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_2} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)}. \quad (3.15)$$

Т.е. коэффициенты отражения действительны и поэтому сдвиг фаз между падающей и отраженной волнами либо 0, либо  $\pi$ .

Рассмотрим частные случаи. Пусть вторая среда будет "оптически" более плотной, т.е.  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ . В этом случае из закона Снеллиуса следует, что  $\theta_2 < \theta_0$  и  $\theta_0 - \theta_2 \leq \pi/2$ ,  $\theta_0 + \theta_2 \leq \pi$ . Тогда из (3.14) следует, что для пер-

перпендикулярной поляризации  $\varphi_{R_{\perp}} = \pi$  и поведение модуля носит монотонно возрастающий характер.

Для вертикальной поляризации поведение коэффициента отражения более сложное. При  $\theta_0 + \theta_2 = \pi/2$  он обращается в ноль. Угол, при котором наблюдается этот эффект, называется углом Брюстера  $\theta_B$  или углом полной поляризации. Последнее связано с тем, что при падении волны с эллиптической поляризацией под углом  $\theta_0 = \theta_B$  в отраженной волне не будет вертикальной составляющей. Из закона Снеллиуса (3.9) следует, что

$$\sin \theta_B = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \sin \theta_2 = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \cos \theta_B$$

и поэтому получаем:

$$\theta_B = \arctg \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}. \quad (3.16)$$

Т.е. угол Брюстера определяется только параметрами сред. В случае  $0 \leq \theta_0 \leq \theta_B$  модуль коэффициента отражения  $|R_{\parallel}|$  убывает до 0, при этом  $\varphi_{R_{\parallel}} = 0$ . При  $\theta_0 > \theta_B$  модуль монотонно возрастает до 1, а фаза скачком при  $\theta_0 = \theta_B$  изменяется до  $\pi$ . Соответствующие кривые для модуля и фазы коэффициентов отражения приведены на рис. 3.2 и рис. 3.3.

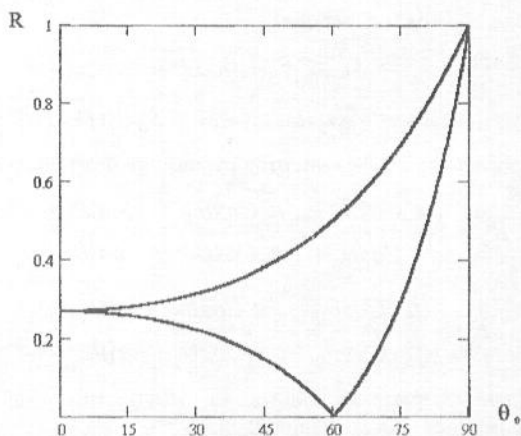


Рис. 3.2. Модуль коэффициента отражения для параллельной и перпендикулярной поляризации

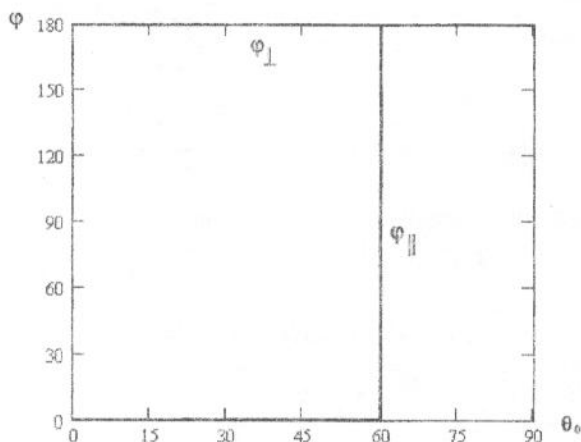


Рис. 3.3. Фаза коэффициента отражения для параллельной и перпендикулярной поляризации

Рассмотрим случай  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ . Тогда из закона Снеллиуса следует, что  $\theta_2 > \theta_0$  и возможна ситуация, когда преломленная волна будет распространяться параллельно границе раздела. Явление получило название *полного внутреннего отражения*, а соответствующий угол падения – *угол полного внутреннего отражения*  $\theta_B$ . Отметим, что оно не зависит от поляризации излучения. Выясним структуру поля при углах падения  $\theta \geq \theta_B$ .

Из закона Снеллиуса (3.9) следует, что

$$\sin \theta_B = \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}}. \quad (3.17)$$

Коэффициенты отражения из выражений (3.14) и (3.15) можно представить как:

$$R_{\perp} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 - \sqrt{\epsilon_2} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_2} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 - i \sqrt{\epsilon_1 \sin^2 \theta_0 - \epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 + i \sqrt{\epsilon_1 \sin^2 \theta_0 - \epsilon_2}}, \quad (3.18)$$

$$R_{\parallel} = \frac{\sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_0 - \sqrt{\epsilon_1} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}}{\sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_1} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}} = \frac{\epsilon_2 \cos \theta_0 - i \sqrt{\epsilon_1} \sqrt{\epsilon_1 \sin^2 \theta_0 - \epsilon_2}}{\epsilon_2 \cos \theta_0 + i \sqrt{\epsilon_1} \sqrt{\epsilon_1 \sin^2 \theta_0 - \epsilon_2}}. \quad (3.19)$$

Поэтому модуль и фаза коэффициентов отражения при  $\theta \geq \theta_B$  имеет вид:

$$|R_{\perp}| = 1, \quad \varphi_{R_{\perp}} = -2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \sin^2 \theta_0 - \varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1 \cos \theta_0}}, \quad (3.20)$$

$$|R_{\parallel}| = 1, \quad \varphi_{R_{\parallel}} = -2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \sqrt{\varepsilon_1 \sin^2 \theta_0 - \varepsilon_2}}{\varepsilon_2 \cos \theta_0}. \quad (3.21)$$

Рассмотрим преломленную волну. Поскольку

$$\vec{k}_2 \vec{r} = k_2 \sin \theta_2 x + k_2 \cos \theta_2 |z| = k_1 x \sin \theta_0 + i k_2 |z| \sqrt{(\varepsilon_1 / \varepsilon_2) \sin^2 \theta_0 - 1},$$

то получаем:

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= \vec{E}_2 \exp(i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega t)) = \\ &= \vec{E}_2 \exp\left(-k_2 |z| \sqrt{(\varepsilon_1 / \varepsilon_2) \sin^2 \theta_0 - 1} + i(k_1 x \sin \theta_0 - \omega t)\right). \end{aligned}$$

Видно, что поверхности равных амплитуд и равных фаз не совпадают. Это означает, что волна является неоднородной.

### 3.3. Особенности взаимодействия волны с границей "диэлектрик - проводник"

Рассмотрим падение волны из диэлектрика на проводник. Будем считать для простоты, что  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\sigma_1 = 0$  и  $\varepsilon_{ka2} = \varepsilon_{a2} + i\sigma_2/\omega$ . В этом случае, используя закон Снеллиуса, имеем

$$\begin{aligned} \vec{k}_2 \vec{r} &= k_{2x} x + k_{2z} z = k_1 x \sin \theta_0 + k_2 z \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = \\ &= k_1 x \sin \theta_0 + k_1 z \sqrt{\varepsilon_{k2} - \sin^2 \theta_0}. \end{aligned}$$

Тогда, если ввести обозначения

$$\alpha = 4 \sqrt{(\varepsilon_2 - \sin^2 \theta_0)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0 \omega}\right)^2} \cos \frac{\phi}{2}, \quad (3.22)$$

$$\beta = 4 \sqrt{(\varepsilon_2 - \sin^2 \theta_0)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0 \omega}\right)^2} \sin \frac{\phi}{2}, \quad (3.23)$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0 \omega (\varepsilon_2 - \sin^2 \theta_0)}, \quad (3.24)$$

получим для преломленной волны

$$\vec{E}_t = \vec{E}_2 \exp(i\vec{k}_2 \vec{r} - \omega t) = \vec{E}_2 \exp(-k_1 |z| \beta) \exp(i(k_1 x \sin \theta_0 + k_1 z \alpha)). \quad (3.25)$$

Из полученного выражения следует, что волна – неоднородная. Поверхность равных фаз описывается уравнением  $\sin \theta_0 \cdot x + \alpha z = \text{const}$ , а поверхность равных амплитуд –  $\beta z = \text{const}$ . Если ввести нормаль к поверхности равных фаз, то угол  $\psi$  между нею и осью  $z$  определяется как:

$$\sin \psi = \sin \theta_0 / \sqrt{\sin^2 \theta_0 + \alpha^2}, \quad \cos \psi = \alpha / \sqrt{\sin^2 \theta_0 + \alpha^2}. \quad (3.26)$$

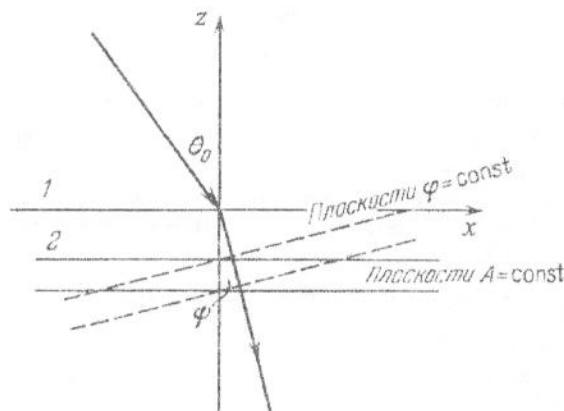


Рис. 3.4. Взаимодействие электромагнитного излучения с границей раздела "диэлектрик – проводник"

Отметим, что для металла  $|\epsilon_{ka}| \gg 1$  и  $\text{tg} \delta \gg 1$ . Поэтому независимо от угла падения волна в металле распространяется нормально к его поверхности, а амплитуда ее убывает очень быстро по мере проникновения в слой.

### Вопросы для самоконтроля

1. Нарисуйте взаимное расположение векторов электрических и магнитных полей падающей, отраженной и преломленной волны для случая взаимодействия с границей раздела типа "диэлектрик – диэлектрик".
2. Объясните, почему в случае нормального падения коэффициенты отражения для волн с параллельной и перпендикулярной плоскости падения поляризации отличаются знаком, а коэффициенты преломления (пропускания) – не равны друг другу.
3. Получите выражения для коэффициентов отражения для границы раздела типа "диэлектрик – металл".
4. Напишите выражение для угла Брюстера для двух сред, отличающихся магнитными свойствами, если их проводимости равны нулю.
5. Определите, как связаны векторы Умова – Пойтинга волн при нормальном падении на плоскую границу раздела. Рассмотрите различные ситуации электродинамических параметров сред.

#### 4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

Рассматриваемый ранее случай для среды, обладающей проводимостью, показал, что связь между волновым числом и частотой может отличаться от линейной зависимости. Эта связь имеет вид:

$$k^2 = \left( \omega^2 / c^2 \right) \mu (\varepsilon + i \sigma / (\omega \varepsilon_0)). \quad (4.1)$$

В более общем случае ее можно представить в виде:

$$k(\omega) = k'(\omega) + i k''(\omega). \quad (4.2)$$

При этом действительная часть  $k'(\omega)$  характеризует зависимость фазовой скорости от частоты ( $v = \omega / k'(\omega)$ ), а мнимая  $k''(\omega)$  - зависимость от частоты затухания волны.

Появление дисперсии приводит к изменению закономерностей распространения монохроматических волн. В этом случае разные спектральные компоненты распространяются по-разному:

$$\dot{S}(\omega, \xi) = A \exp(i(k\xi - \omega t)) = A \exp[-k''(\omega)\xi + i(k'(\omega)\xi - \omega t)]. \quad (4.3)$$

В силу дисперсии фазовой скорости в процессе распространения изменяются фазовые соотношения между спектральными составляющими, поэтому искажается форма импульса. Дисперсия  $k''(\omega)$  приводит к трансформации частотного спектра волны  $|\dot{S}(\omega, \xi)|^2$  и дополнительно искажает сигнал.

Из оптики известно, что зависимость показателя преломления (или диэлектрической проницаемости) от частоты наиболее существенно сказывается вблизи резонансных частот  $\omega_{рез}$ , соответствующих переходам между квантовыми уровнями. Вблизи  $\omega_{рез}$  возрастает и затухание (темные полосы в спектре поглощения атомов). Таким образом, частотная дисперсия  $\varepsilon(\omega)$  наиболее существенна при  $\omega \approx \omega_{рез}$ . В области этих частот отклик среды на изменение внешнего поля запаздывает, т.е. в среде имеются характерные внутренние процессы, время протекания которых (время релаксации) сравнимо с периодом изменения внешнего поля. В таких ситуациях среда обладает памятью и имеет место *частотная дисперсия*.

Сказанное выше в равной мере относится к распространению волн в средах, имеющих характерный пространственный параметр. Например, для плазмы - это дебаевский радиус, для неоднородных сред - размер неоднородностей, для звуковых волн в твердых телах - период решетки. В этом случае поле в какой-либо точке среды зависит от значения поля в соседних точках, т.е. связь внутреннего и приложенного внешнего поля является нелокальной. Такая дисперсия называется *пространственной дисперсией*.

Эти две причины обусловлены физической природой среды распространения. Вообще говоря, дисперсия может быть связана не только с парамет-

рами размерности времени и длины, отражающими внутренние свойства среды. Существуют ситуации, когда дисперсия определяется искусственными параметрами. Например, дисперсия в волноводе определяется поперечным размером волновода. Распространение волнового пучка – тоже своего рода дисперсия.

Далее будет рассматриваться дисперсия, обусловленная только физическими свойствами материальной среды.

#### 4.1. Уравнение Максвелла в среде с дисперсией и анизотропией

Уравнения Максвелла в линейной среде с дисперсией и анизотропией остаются те же, меняются лишь материальные уравнения. С учетом памяти среды и нелокальности материальные уравнения можно представить в виде:

$$\begin{aligned} D_i(t, \vec{r}) &= \int_{-\infty}^t dt' \int d\vec{r}' \sum_j \varepsilon_{aij}(t, t', \vec{r}, \vec{r}') E_j(t', \vec{r}'), \\ B_i(t, \vec{r}) &= \int_{-\infty}^t dt' \int d\vec{r}' \sum_j \mu_{aij}(t, t', \vec{r}, \vec{r}') H_j(t', \vec{r}'), \\ j_i(t, \vec{r}) &= \int_{-\infty}^t dt' \int d\vec{r}' \sum_j \sigma_{ij}(t, t', \vec{r}, \vec{r}') E_j(t', \vec{r}'), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $i, j = 1 \div 3$ .

Приведенная система – наиболее общая форма для линейной среды с дисперсией и анизотропией.

Для однородной среды, не изменяющей свои свойства во времени, материальные характеристики среды  $\varepsilon, \mu, \sigma$  зависят лишь от  $\tau = t - t'$  и  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ . Введя обозначения

$$\vec{Q} = \begin{Bmatrix} \vec{D} \\ \vec{B} \\ \vec{j} \end{Bmatrix}, \quad \eta = \begin{Bmatrix} \varepsilon_a \\ \mu_a \\ \sigma \end{Bmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix},$$

три уравнения (4.4) запишутся в одном как:

$$Q_i(t, \vec{r}) = \int_0^{\infty} d\tau \int d\vec{R} \sum_j \eta_{ij}(\tau, \vec{R}) G_j(t - \tau, \vec{r} - \vec{R}). \quad (4.5)$$

Разложим по  $\vec{G}$  и  $\vec{Q}$  плоским гармоническим волнам:

$$\vec{G}(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{G}(\omega, \vec{k}) e^{i(\vec{k}(\vec{r} - \vec{R}) - \omega(t - \tau))} d\omega d\vec{k}, \quad (4.6)$$

$$\vec{Q}(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{Q}(\omega, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \vec{r} - \omega \tau)} d\omega d\vec{k}. \quad (4.7)$$

Тогда после подстановки их в (4.5) получим в спектральном представлении:

$$Q_i(\omega, \vec{k}) = \sum_j \eta_{ij}(\omega, \vec{k}) G_j(\omega, \vec{k}), \quad (4.8)$$

где

$$\eta_{ij}(\omega, \vec{k}) = \int_0^\infty d\tau \int \eta_{ij}(\tau, \vec{R}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega \tau)} d\vec{R}, \quad (4.9)$$

Из последнего следует, что тензор  $\eta_{ij}$  зависит от частоты электромагнитной волны (частотная дисперсия) и волнового вектора (пространственная дисперсия).

#### 4.2. Дисперсионное уравнение

Рассмотрим распространение плоской гармонической волны.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(k\xi - \omega t)}, \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 e^{i(k\xi - \omega t)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Будем считать для простоты, что среда не магнитная ( $\mu = 1$ ). Тогда два первых уравнения Максвелла приобретают вид:

$$\begin{aligned} [\vec{k} \times \vec{H}] &= -\omega \vec{D}, \\ [\vec{k} \times \vec{E}] &= \omega \mu_0 \vec{H}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Умножая векторно второе из них на  $\vec{k}$ , получим:

$$\vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} + \omega^2 \mu_0 \vec{D} = 0, \quad (4.12)$$

которое в тензорных обозначениях имеет вид:

$$k^2 \sum_j \delta_{ij} E_j - \sum_j k_i k_j E_j - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_j \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) E_j = 0. \quad (4.13)$$

Последнее равенство может быть представлено покомпонентно

$$\sum_{j=1}^3 \left[ k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) \right] E_j = 0, \quad i = 1 \div 3. \quad (4.14)$$

Условие совместности полученной системы (4.14) - определитель должен быть равен 0.

$$\det \left[ k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) \right] = 0. \quad (4.15)$$

Полученное уравнение называется *дисперсионным*. Оно устанавливает связь  $\omega$  и  $\vec{k}$  для собственных электромагнитных колебаний среды. Например, для вакуума  $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}$ , тогда  $k^2 = \omega^2 / c^2$ .

### 4.3. Частотная дисперсия диэлектрической проницаемости

Явление электрической поляризации, связанное с тем, что под действием внешнего электрического поля молекулы в диэлектрике обладают некоторым электрическим моментом  $\vec{P}_i$ , количественно характеризуется *вектором электрической поляризации*  $\vec{P} = \sum \vec{P}_i$ . Физически вектор электрической поляризации показывает, насколько электрическая индукция среды отличается от индукции вакуума:

$$\vec{P} = \vec{D} - \vec{D}_0 = \epsilon_a \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} (\epsilon - 1) = \epsilon_0 \chi \vec{E}, \quad (4.16)$$

где  $\chi = \epsilon - 1$  - *диэлектрическая восприимчивость*. Она является всегда величиной положительной. Таким образом, электрическая индукция может быть записана как:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E}. \quad (4.17)$$

Это позволяет представить первое материальное уравнение из (4.4) в виде:

$$P_i(t, \vec{r}) = \int_0^\infty d\tau \int d\vec{R} \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij}(\tau, \vec{R}) E_j(t - \tau, \vec{r} - \vec{R}). \quad (4.18)$$

Тогда для тензора диэлектрической проницаемости получим:

$$\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \epsilon_0 \left( \delta_{ij} + \int_0^\infty d\tau \int d\vec{R} \chi_{ij}(\tau, \vec{R}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega \tau)} d\vec{R} \right). \quad (4.19)$$

Очень часто пространственной дисперсией можно пренебречь. Рассмотрим только частотную дисперсию. Кроме того, будем считать, что среда изотропна. В этом случае из (4.8) следует

$$D(\omega, \vec{r}) = \epsilon_a(\omega) E(\omega, \vec{r}), \quad (4.20)$$

где в соответствии с (4.19)

$$\epsilon_a(\omega) = \epsilon_0 \left( 1 + \int_0^\infty \chi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right). \quad (4.21)$$

Поскольку

$$\epsilon_a(\omega) = \text{Re } \epsilon_a(\omega) + i \text{Im } \epsilon_a(\omega), \quad (4.22)$$

то сопоставляя с выражением (4.21), получим

$$\begin{aligned} \text{Re } \epsilon_a(\omega) &= \epsilon_0 \left( 1 + \int_0^\infty \chi(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \right), \\ \text{Im } \epsilon_a(\omega) &= \epsilon_0 \left( \int_0^\infty \chi(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Все сказанное справедливо и для спектральных компонент проводимости среды, т.е.:

$$\sigma(\omega) = \operatorname{Re} \sigma(\omega) + i \operatorname{Im} \sigma(\omega). \quad (4.23)$$

Если в недиспергирующей среде диэлектрическая проницаемость — чисто реактивный параметр, а проводимость — чисто активный, то в среде с дисперсией это отличие утрачивается. При приближении частоты к собственной частоте среды различие между проводником и диэлектриком пропадает. Электрические свойства в этом случае можно характеризовать одной величиной — комплексной диэлектрической проницаемостью:

$$\varepsilon_{ka}(\omega) = \varepsilon_a(\omega) + i \sigma(\omega) / \omega, \quad (4.24)$$

где

$$\varepsilon_a(\omega) = \operatorname{Re} \varepsilon_a(\omega) - \frac{\operatorname{Im} \sigma(\omega)}{\omega}, \quad (4.25a)$$

$$\sigma(\omega) = \operatorname{Im} \varepsilon_a(\omega) \omega + \operatorname{Re} \sigma(\omega). \quad (4.25b)$$

Очевидно, что

$$\varepsilon_{ka}(\omega) = \varepsilon_0 \left( 1 + \int_0^{\infty} \chi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right) + \frac{i}{\omega} \int_0^{\infty} \sigma(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (4.26)$$

причем  $\chi(\tau)$  и  $\sigma(\tau)$  — действительные функции от  $\tau$ . Они конечны и при любом  $\tau \rightarrow \infty$  стремятся к 0. Детальный вид их зависит от конкретных физических механизмов, ответственных за процессы установления поляризации в среде. Интервал  $\tau$ , при котором  $\chi(\tau)$  и  $\sigma(\tau)$  отличны от 0, есть время порядка величины релаксации, характеризующего скорость протекания этих процессов.

Интегрирование в (4.26) от 0 до  $+\infty$  — есть следствие *принципа причинности*. В соответствии с ним, интегрирование в материальных уравнениях (4.4) производится по времени, предшествующему данному  $t$ . Оказывается, что следствием этого является наличие связи между действительной и мнимой частями комплексной диэлектрической проницаемости.

Если ввести функцию Хевисайда

$$\theta(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0 \\ 1, & \tau \geq 0 \end{cases},$$

для частотных спектров функций имеем:

$$\chi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau) \chi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\omega - \omega') \chi(\omega') d\omega', \quad (4.27a)$$

$$\sigma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau) \sigma(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\omega - \omega') \sigma(\omega') d\omega', \quad (4.27b)$$

где

$$\begin{aligned}\theta(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{i\omega\tau} d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{\frac{\tau}{T} + i\omega\tau}}{-\frac{1}{T} + i\omega} \right|_0^{\infty} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{T} - i\omega} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{T} + i\omega}{\frac{1}{T^2} + \omega^2} = \pi\delta(\omega) + \frac{i}{\omega},\end{aligned}$$

а  $\delta(\omega)$  - дельта функция Дирака. Тогда

$$\chi(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega') \chi(\omega') d\omega' + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'. \quad (4.28a)$$

Здесь и далее интеграл берется в смысле главного значения.

Аналогично для проводимости:

$$\sigma(\omega) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'. \quad (4.28b)$$

Поскольку из (4.26) следует, что

$$\varepsilon_{ka}(\omega) = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \chi(\omega) + i \frac{\sigma(\omega)}{\omega},$$

то

$$\varepsilon_0 \chi(\omega) = \varepsilon_{ka}(\omega) - \varepsilon_0 - i \frac{\sigma(\omega)}{\omega},$$

$$\varepsilon_{ka}(\omega) - \varepsilon_0 - i \frac{\sigma(\omega)}{\omega} = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_{ka}(\omega') - \varepsilon_0}{\omega - \omega'} d\omega' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\omega')}{\omega'(\omega - \omega')} d\omega'.$$

Преобразуем в подынтегральном выражении второго слагаемого правой части дробь, как:

$$\frac{1}{\omega'(\omega - \omega')} = \frac{\omega + \omega' - \omega'}{\omega\omega'(\omega - \omega')} = \frac{1}{\omega\omega'} + \frac{1}{\omega(\omega - \omega')}.$$

Тогда

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\omega')}{\omega'(\omega - \omega')} d\omega' = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\omega')}{\omega(\omega - \omega')} d\omega' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\omega')}{\omega'\omega} d\omega' = \frac{1}{i} \left( \frac{\sigma(\omega)}{\omega} - \frac{\sigma(0)}{\omega} \right)$$

и получаем:

$$\varepsilon_{ka}(\omega) - \varepsilon_0 - i \frac{\sigma(\omega)}{\omega} = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_{ka}(\omega') - \varepsilon_0}{\omega - \omega'} d\omega' - i \frac{\sigma(0)}{\omega} + i \frac{\sigma(\omega)}{\omega}$$

или

$$\varepsilon'_a(\omega) - \varepsilon_0 + i \varepsilon''_a(\omega) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'_a(\omega') - \varepsilon_0}{\omega - \omega'} d\omega' - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''_a(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' + i \frac{\sigma(0)}{\omega}.$$

В итоге имеем

$$\begin{cases} \varepsilon'_a(\omega) - \varepsilon_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''_a(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \\ \varepsilon''_a = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'_a(\omega') - \varepsilon_0}{\omega - \omega'} d\omega' + \frac{\sigma(0)}{\omega} \end{cases} \quad (4.29)$$

Полученное выражение есть *формула Крамерса-Кронига*. Она устанавливает связь между действительной и мнимой частями диэлектрической проницаемости. Диспергирующая среда является принципиально поглощающей.

#### 4.5. Дисперсия электромагнитных волн в диэлектриках.

##### Вид показателей преломления и поглощения

Для нахождения закона дисперсии, т.е. зависимости  $\varepsilon(\omega)$ , необходимо решить задачу о взаимодействии электромагнитной волны с имеющимися зарядами. Все современные теории дисперсии учитывают молекулярное строение вещества и рассматривают молекулы как динамические системы, обладающие собственными резонансными частотами. Естественно, что молекулы, как элементы микромира, необходимо рассматривать в соответствии с законами квантовой механики. Однако результаты классической теории дисперсии во многих случаях приводят к качественно правильному выражению для функциональной зависимости показателей преломления и поглощения от частоты.

В однородных диэлектриках поле волны вызывает поляризацию молекул среды. Простая модель диэлектрика — это совокупность нейтральных молекул. Под действием поля происходит смещение электронов и каждая молекула поляризуется, т.е. приобретает дипольный момент  $\vec{p} = e\vec{r}$ . Поэтому для однородного диэлектрика вектор поляризации единицы объема можно представить как:

$$\vec{P} = e\vec{r}N, \quad (4.30)$$

где  $N$  — концентрация частиц.

Для определения  $\vec{P}$  надо решить уравнение движения электрона под действием внешнего поля. В классической теории используется *модель Друде - Лоренца*, согласно которой отдельная молекула представляется в виде одно-

го (или нескольких) гармонического осциллятора. Уравнение для осциллятора во внешнем поле можно записать в виде:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m\nu \frac{d\vec{r}}{dt} + m\omega_0^2 \vec{r} = e\vec{E}_g, \quad (4.31)$$

где  $m$  - масса электрона,  $\nu$  - частота столкновения,  $\omega_0$  - собственная частота осциллятора,  $\vec{E}_g$  - действующее поле.

Напряженность поля в диэлектрике обусловлена полем волны, а также ею же вызванной поляризацией среды. В однородном диэлектрике оно определяется как:

$$\vec{E}_g = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}, \quad (4.32)$$

где  $\vec{E}$  - внешнее электрическое поле волны,  $\vec{P}$  - поляризация. Тогда после умножения на  $eN$  уравнение (4.31) принимает вид:

$$\frac{d^2 \vec{P}}{dt^2} + \nu \frac{d\vec{P}}{dt} + \omega_0^2 \vec{P} = \frac{Ne^2}{m} \left( \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \right). \quad (4.33)$$

Обозначим

$$\omega_N^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}, \quad (4.34)$$

Пусть поле волны носит гармонический характер. Тогда из (4.33) имеем:

$$\vec{P} = \frac{\epsilon_0 \omega_N^2 \vec{E}}{-\omega^2 - i\omega\nu + (\omega_0^2 - \omega_N^2/3)}$$

Поскольку в диспергирующей среде

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_{ka} \vec{E},$$

то с учетом выражения для поляризации получим

$$\epsilon_k = 1 + \frac{\omega_N^2}{-\omega^2 - i\omega\nu + \tilde{\omega}_0^2}, \quad (4.35)$$

где  $\tilde{\omega}_0^2 = \omega_0^2 - \omega_N^2/3$ .

Для низких частот ( $\omega \ll \tilde{\omega}_0^2$ ) имеем выражение для статической диэлектрической проницаемости

$$\epsilon(0) = 1 + \omega_N^2 / \tilde{\omega}_0^2.$$

Для газов обычно плотность молекул невелика ( $\omega_N^2 \ll \omega_0^2$ ,  $\tilde{\omega}_0 \approx \omega_0$ ) и можно считать, что диэлектрическая проницаемость мало отличается от 1.

Поэтому ее можно представить в виде:

$$\sqrt{\varepsilon} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_N^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2} + i \frac{1}{2} \frac{\omega_N^2 \omega \nu}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2}.$$

Поскольку при  $\mu = 1$

$$\sqrt{\varepsilon} = n + i\kappa,$$

то

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_N^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2}, \quad (4.36)$$

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{\omega_N^2 \omega \nu}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2}. \quad (4.37)$$

Определим, как зависят показатели преломления и поглощения от частоты. При  $\omega$ , расположенной достаточно далеко от  $\omega_0$ , т.е. когда  $|\omega_0^2 - \omega^2| \gg \nu\omega$ ,  $n \approx 1$ ,  $\kappa \approx 0$ . При  $\omega^2 < \omega_0^2$  показатель преломления больше 1 и растет с увеличением частоты, а при  $\omega^2 > \omega_0^2$  -  $n < 1$  и с увеличением частоты он стремится к 1. Вблизи резонанса  $|\omega_0^2 - \omega^2| \approx \nu\omega$  показатель преломления уменьшается с ростом частоты. При  $\omega^2 = \omega_0^2$   $n = 1$ ,  $\kappa = \kappa_{\max}$ . На рис. 4.1. представлена качественная картина поведения показателей преломления и поглощения в окрестности резонансной частоты.

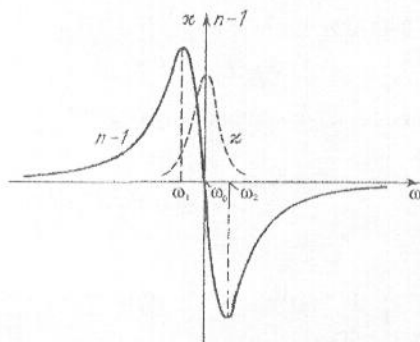


Рис. 4.1. Зависимость показателей поглощения и преломления от частоты

Диапазон, где показатель преломления убывает с ростом частоты, называется областью аномальной дисперсии (на рис. 4.1. это область от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ ). В этом диапазоне поглощение максимально.

#### 4.5. Распространение волнового пакета в диспергирующей среде.

##### Линейное и квадратичное приближение дисперсии

Реально строго монохроматических сигналов (волн) в природе не существует. Для того чтобы передать информацию посредством волн, надо каким-либо образом промодулировать волну. В линейном приближении такая волна может быть представлена в виде суперпозиции гармонических плоских волн. В среде без дисперсии (а следовательно, и без диссипации) скорости различных составляющих такого сигнала будут одинаковы и поэтому он не изменит своей формы.

В диспергирующей среде скорости различных составляющих различны, и поэтому будет наблюдаться искажение сигнала. Понятие скорости сигнала в этом случае должно быть уточнено, т.к. оно отличается от фазовой скорости различных компонент.

Рассмотрим граничную задачу. Пусть в среде распространяется вдоль оси  $z$  плоская немонахроматическая волна. Для простоты будем анализировать скалярную задачу.

$$S(t, z=0) = S_0(t). \quad (4.38)$$

Диспергирующая среда занимает полупространство  $z \geq 0$ . Поскольку в выражении (4.38) функция конечная, то имеет место разложение по гармоническим составляющим

$$S_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (4.39)$$

где

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(t) e^{i\omega t} dt. \quad (4.40)$$

Каждая частотная составляющая в среде распространяется как плоская волна, поэтому для линейной среды справедлива суперпозиция:

$$S(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{-i\omega t} e^{ik(\omega)z} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(t') e^{-i\omega(t-t') + ik(\omega)z} d\omega dt', \quad (4.41)$$

где  $k(\omega)$ , т.к. каждая составляющая имеет свое волновое число.

Наибольший практический интерес представляют *волновые пакеты*, т.е. квазимонохроматические сигналы с узким частотным спектром, т.е.

$$S_0(t) = A_0(t) e^{-i\omega_0 t},$$

где  $\omega_0$  - несущая частота, а  $A_0(t)$  - огибающая, которая характеризует модуляцию.  $A_0(t)$  медленно меняющаяся (по сравнению с экспонентой) функция. Тогда

$$S(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(t') e^{-i(\omega - \omega_0)(t-t')} e^{ik(\omega)z} e^{-i\omega_0 t} d\omega dt'. \quad (4.42)$$

Т. к. сигнал узкополосный, разложим  $k(\omega)$  в ряд около несущей  $\omega_0$ :

$$k(\omega) = k(\omega_0) + k'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \frac{k''(\omega_0)}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (4.43)$$

Тогда (4.42) можно представить в виде:

$$S(z, t) = A(z, t) e^{i(k(\omega_0)z - \omega_0 t)}, \quad (4.44)$$

где

$$A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(t') e^{-i(\omega - \omega_0)(t-t')} e^{iz \left[ k'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} k''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2 + \dots \right]} d\omega dt'. \quad (4.45)$$

Точность полученного решения определяется количеством членов в разложении  $k(\omega)$ . Рассмотрим *линейное приближение*. В этом случае решение имеет вид:

$$\begin{aligned} A(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(t') e^{-i[(t-t') + zk'(\omega_0)(\omega - \omega_0)]} d\omega dt' = \\ &= A_0(t - zk'(\omega_0)) = A_0(t - z/v_{gr}), \end{aligned} \quad (4.46)$$

т.к.  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega = \delta(x).$

Подстановка (4.46) в (4.44) показывает, что в этом случае волновой пакет распространяется без искажений формы, причем его огибающая распространяется со скоростью

$$v_{gr} = (dk/d\omega)_{\omega=\omega_0}^{-1}, \quad (4.47)$$

которая называется *групповой скоростью*. Она имеет смысл только для действительных величин, т.е. там, где можно пренебречь поглощением.

Очевидно, что в рассматриваемом приближении комплексная амплитуда удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{v_{gr}} \frac{\partial A}{\partial t} = 0. \quad (4.48)$$

Если умножить его на  $A^*$  и сложить с комплексно сопряженным уравнением, получим

$$\frac{\partial |A|^2}{\partial z} + \frac{1}{v_{гp}} \frac{\partial |A|^2}{\partial t} = 0.$$

Поскольку  $|A|^2$  характеризует энергию, то  $v_{гp}$  характеризует скорость переноса энергии волны.

Рассмотрим для примера случай, когда спектр огибающей волнового пакета  $A_0(t)$  представляет собой постоянную величину в пределах узкой полосы  $2\Delta\omega \ll \omega_0$  (см. рис. 4.2), т.е.

$$\dot{S}(\omega) = \begin{cases} S_0, & \omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega \\ 0, & \omega < \omega_0 - \Delta\omega, \omega > \omega_0 + \Delta\omega \end{cases}$$

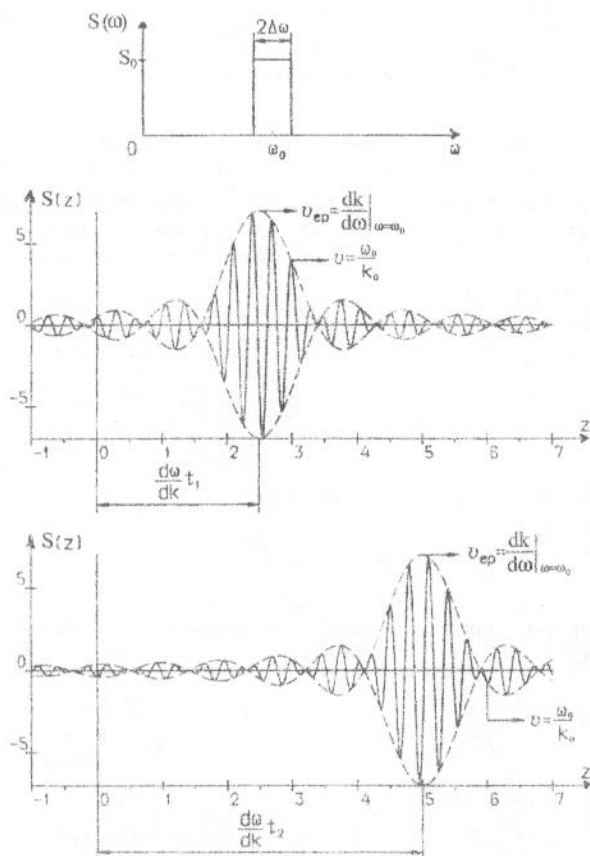


Рис. 4.2. Пространственный профиль волнового пакета

Тогда из (4.46) нетрудно получить, что в линейном приближении дисперсии

$$S(z, t) = 2S_0 \Delta \omega e^{i(k(\omega_0)z - \omega_0 t)} \frac{\sin((k'(\omega_0)z - t)\Delta\omega)}{(k'(\omega_0)z - t)\Delta\omega}.$$

Чтобы понять характер распространения волнового пакета, обратимся к пространственному профилю (см. рис. 4.2.). Находящаяся внутри огибающей модулированная волна перемещается вдоль оси  $z$  с обычной фазовой скоростью  $v = \omega_0 / k(\omega_0)$ . Что касается огибающей, то условием локализации ее максимума является равенство нулю аргумента у синуса. Очевидно, что для разных моментов времени условие выполняется для различных  $z$ , т.е. огибающая смещается со скоростью  $v_{гп} = (dk/d\omega)_{\omega=\omega_0}^{-1}$ .

Нетрудно получить связь между групповой и фазовой скоростями.

$$v_{гп} = \frac{d(kv)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = c \left[ n(\omega_0) + \omega \left( \frac{dn}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} \right]^{-1}. \quad (4.49)$$

В области аномальной дисперсии, где  $dn/d\omega < 0$ , получается, что  $k$  - комплексно и групповая скорость формально может быть больше скорости света. Но при разложении мы принимали, что  $k$  - вещественно и поглощением пренебрегали. Понятие введенной групповой скорости справедливо лишь для среды, где диссипацию можно не учитывать. В этом случае производная  $dn/d\omega > 0$  и поэтому  $v_{гп} < c$ .

Рассмотрим *квадратичное приближение дисперсии*, т.е. учтем второй член в разложении (4.43). В этом случае выражение (4.45) имеет вид:

$$A(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(t') e^{-i(\omega - \omega_0)(t-t')} e^{iz \left[ k'(\omega)(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} k''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2 \right]} d\omega dt'.$$

Его решение можно получить на основе интеграла Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.$$

Выделив полный квадрат в показателе экспоненты и сделав преобразования, получим:

$$A(t, z) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi i z k''}} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(t') \exp \left[ -\frac{i(\tau - t')^2}{2z k''} \right] dt', \quad (4.50)$$

где  $\tau = t - zk' = t - z/v_{гп}$ .

Можно показать подстановкой, что в этом случае амплитуда удовлетворяет следующему уравнению параболического типа:

$$\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{D}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \quad (4.51)$$

где  $D = -ik'' = -i \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{v_{гp}} \right)$  - коэффициент диффузии. Вследствие мнимости  $D$  кроме изменения  $|A(z, t)|$  имеет место появление паразитной фазовой модуляции.

Рассмотрим теперь распространение начального возмущения в диспергирующей среде. Пусть среда занимает большое пространство и где-то внутри его в момент времени  $t = 0$  создается начальное возмущение

$$S(t = 0, z) = A_0(z) e^{ik_0 z}. \quad (4.52)$$

Если ввести спектр в пространстве волновых чисел

$$\dot{S}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t = 0, z) e^{-ikz} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(z) e^{-i(k-k_0)z} dz, \quad (4.53)$$

тогда по аналогии с описанием распространения волнового пакета решение можно представить, как (4.44) и (4.45), в виде:

$$S(z, t) = A(z, t) e^{i(k_0 z - \omega(k_0)t)}, \quad (4.54)$$

$$A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(z') e^{i(k-k_0)(z-z')} e^{-i \left[ \omega'(k_0)(k-k_0) + \frac{1}{2} \omega''(k_0)(k-k_0)^2 + \dots \right]} dk dz'. \quad (4.55)$$

Рассматривая в линейном приближении, получим распространение без искажений при скорости распространения амплитуды, равной групповой (4.47). Для квадратичного приближения:

$$A(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i t \omega''}} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(z') \exp \left[ \frac{i(z' - \xi)^2}{2t \omega''} \right] dz', \quad (4.56)$$

где  $\xi = z - v_{гp} t$ ,  $\omega'' = \left. \frac{d^2 \omega}{dk^2} \right|_{k=k_0}$ .

#### 4.6. Энергия электромагнитной волны в диспергирующей среде

Плотность потока электромагнитной энергии определяет вектор Умова - Пойтинга (2.39). Поэтому изменение энергии в единице объема в единицу времени можно характеризовать как:

$$-div\vec{I} = \vec{E} \cdot rot\vec{H} - \vec{H} \cdot rot\vec{E} = \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4.57)$$

Если среда не обладает дисперсией, то  $\varepsilon$  и  $\mu$  действительны и не зависят от частоты. В этом случае

$$-div\vec{I} = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_a \frac{\partial E^2}{\partial t} + \mu_a \frac{\partial H^2}{\partial t} \right] = \frac{\partial w}{\partial t}$$

и поэтому закон сохранения энергии имеет вид:

$$\partial w / \partial t + div\vec{I} = 0. \quad (4.58)$$

Диспергирующая среда всегда обладает поглощением, поэтому закон сохранения имеет вид:

$$\partial w / \partial t + div\vec{I} + Q = 0, \quad (4.59)$$

где  $Q$  - энергетические потери в единице объема. Задача заключается в определении  $w$  и  $Q$ .

Рассмотрим распространение узкополосного сигнала. Представим компоненты электромагнитного поля в виде:

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(t) \\ \vec{H}(t) \\ \vec{D}(t) \\ \vec{B}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\vec{E}}(t) \\ \dot{\vec{H}}(t) \\ \dot{\vec{D}}(t) \\ \dot{\vec{B}}(t) \end{pmatrix} \cdot e^{-i\omega_0 t} + \text{компл. сопряж.}, \quad (4.60)$$

где  $\dot{\vec{E}}(t)$ ,  $\dot{\vec{H}}(t)$ ,  $\dot{\vec{D}}(t)$ ,  $\dot{\vec{B}}(t)$  - медленно меняющиеся функции. Тогда для первого слагаемого в (4.57) после усреднения по времени, получим

$$\overline{\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} = \frac{1}{4} \left[ \dot{\vec{E}} \frac{\partial \dot{\vec{D}}^*}{\partial t} + i\omega_0 \dot{\vec{E}} \dot{\vec{D}}^* + \dot{\vec{E}}^* \frac{\partial \dot{\vec{D}}}{\partial t} - i\omega_0 \dot{\vec{E}}^* \dot{\vec{D}} \right]. \quad (4.61)$$

Для второго слагаемого имеет место подобное выражение только с  $\dot{\vec{H}}$  и  $\dot{\vec{B}}$ .

В случае дисперсии согласно (4.11) имеем:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \int_0^\infty \chi(\tau) \vec{E}(t-\tau) d\tau.$$

Тогда

$$\dot{\vec{D}} = \varepsilon_0 \dot{\vec{E}} + \varepsilon_0 \int_0^\infty \chi(\tau) \dot{\vec{E}}(t-\tau) e^{i\omega_0 \tau} d\tau. \quad (4.62)$$

Поскольку  $\dot{\vec{E}}(t)$  - медленно меняющаяся функция времени, то

$$\dot{\vec{E}}(t-\tau) = \dot{\vec{E}}(t) - \frac{\partial \dot{\vec{E}}(t)}{\partial t} \tau + \dots$$

Оставляя лишь два первых слагаемых, имеем

$$\dot{\vec{D}} = \varepsilon_0 \dot{\vec{E}} + \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}(t) \int_0^\infty \chi(\tau) e^{i\omega_0 \tau} d\tau - \varepsilon_0 \frac{\partial \dot{\vec{E}}(t)}{\partial t} \int_0^\infty \chi(\tau) \tau e^{i\omega_0 \tau} d\tau.$$

Т.к.  $\varepsilon_a(\omega) = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \int_0^\infty \chi(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau$ , тогда

$$\dot{\vec{D}} = \varepsilon_a(\omega_0) \dot{\vec{E}}(t) + i \left. \frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0}. \quad (4.63)$$

Вследствие узкополосности сигнала

$$\frac{\partial \dot{\vec{D}}}{\partial t} = \varepsilon_a \frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial t}. \quad (4.64)$$

В результате подстановки (4.63) и (4.64) в (4.61) можно получить выражение для компоненты дивергенции вектора Умова - Пойтинга, связанной с электрическим полем:

$$\overline{\dot{\vec{E}}} \frac{\partial \dot{\vec{D}}}{\partial t} = \frac{1}{4} \frac{\partial |\dot{\vec{E}}|^2}{\partial t} \frac{\partial (\omega \varepsilon'_a)}{\partial \omega} + \frac{1}{2} |\dot{\vec{E}}|^2 \omega_0 \varepsilon''_a - \frac{i}{4} \left[ \frac{\partial (\omega \varepsilon''_a)}{\partial \omega} \left( \dot{\vec{E}} \frac{\partial \dot{\vec{E}}^*}{\partial t} - \dot{\vec{E}}^* \frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial t} \right) \right], \quad (4.65)$$

где дифференцирование производится при  $\omega = \omega_0$ .

Подобное выражение может быть записано и для магнитной компоненты. Отметим, что в данном случае нельзя разделить в явном виде изменение электромагнитной энергии и тепловые потери единицы объема. Это возможно сделать только в некоторых частных случаях.

### Вопросы для самоконтроля

1. Приведите примеры сред с дисперсией.
2. В чем заключается физический смысл дисперсионного уравнения?
3. Дайте физическое объяснение соотношений Крамерса - Кронига.
4. Качественно объясните, как деформируется спектр волнового пакета, имеющий первоначально равномерный спектр в пределах узкого диапазона частот, если он распространяется в среде, вид показателей преломления и поглощения которых приведен на рис. 4.1, в зависимости от расположения несущей относительно резонансной частоты.
5. Как связаны групповая и фазовая скорости в диспергирующей среде, в вакууме?
6. Может ли фазовая скорость быть больше скорости света?

## 5. ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

*Анизотропные среды* – это среды, физические свойства которых в каждой точке зависят от направления. Это означает, что направление приложенного поля не совпадает с направлением отклика среды. Если зависимость свойств от направления в различных точках среды одинакова, то такая анизотропия называется однородной. При распространении в такой среде, например, изначально сферической волны, форма фазового фронта искажается. Анизотропия может быть связана со структурой среды (так называемые *естественно-активные среды*) или может создаваться наложением внешних полей – электрического, магнитного, поля упругих деформаций и т.п. (так называемые *естественно-неактивные среды*).

### 5.1. Общие закономерности волновых процессов в анизотропных средах

Особенности распространения электромагнитных волн в таких средах определяются специфической формой материальных уравнений. Рассмотрим среду без потерь. Материальные уравнения в общем случае имеют вид:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \vec{\epsilon}_a \vec{E}, \\ \vec{B} &= \vec{\mu}_a \vec{H}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Здесь  $\vec{\epsilon}_a$  и  $\vec{\mu}_a$  – тензоры.

Обычно либо  $\vec{\epsilon}_a$ , либо  $\vec{\mu}_a$  являются скалярными величинами, т.е. анизотропия имеет место только по электрическим или магнитным свойствам, но не одновременно.

1. Среда анизотропна по электрическим свойствам, т.е.  $\vec{\mu}_a$  – скаляр.

Уравнения Максвелла для плоской гармонической волны:

$$\begin{aligned}\left[ \vec{k} \times \vec{H} \right] &= -\omega \vec{D}, \\ \left[ \vec{k} \times \vec{E} \right] &= \omega \mu_a \vec{H}, \\ \left( \vec{k} \cdot \vec{D} \right) &= 0, \\ \left( \vec{k} \cdot \vec{H} \right) &= 0.\end{aligned}\tag{5.2}$$

Материальные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \vec{\epsilon}_a \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu_a \vec{H}.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Из системы (5.2) следует, что векторы  $\vec{k}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны. Кроме того,  $\vec{H} \perp \vec{E}$ . Поэтому векторы  $\vec{k}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  лежат в одной плоскости, но  $\vec{D}$  не коллинеарен  $\vec{E}$  вследствие материального уравнения (5.3). В

плоскости волнового фронта  $(\vec{k} \cdot \vec{r}) = \text{const}$  лежат векторы  $\vec{D}, \vec{H}$ , но не  $\vec{E}$ . Поскольку вектор Умова - Пойтинга

$$\vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}],$$

то направление переноса энергии не совпадает с направлением перемещения волнового фронта. Векторы  $\vec{k}, \vec{D}, \vec{E}, \vec{\Pi}$  - компланарны. Фазовая и групповая скорости не совпадают по направлению.

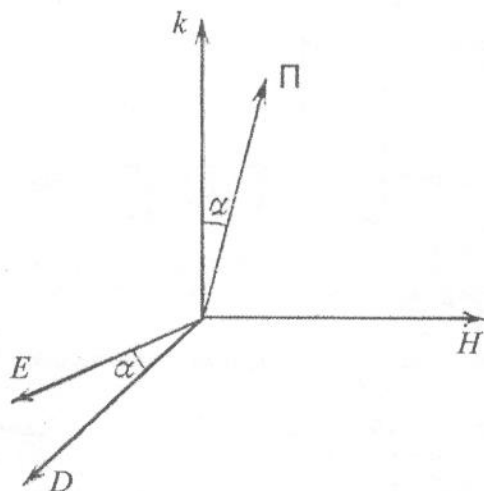


Рис. 5.1. Взаимное расположение векторов электромагнитной волны в анизотропной по диэлектрическим свойствам среде

## 2. Среда анизотропна по магнитным свойствам.

Уравнения Максвелла в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} [\vec{k} \times \vec{H}] &= -\omega \epsilon_a \vec{E}, \\ [\vec{k} \times \vec{E}] &= \omega \vec{B}, \\ (\vec{k} \cdot \vec{E}) &= 0, \\ (\vec{k} \cdot \vec{B}) &= 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

а материальные уравнения записываются как:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_a \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_a \vec{H} \end{aligned} \quad (5.5)$$

В этом случае векторы  $\vec{k}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{\Pi}$  компланарны, а вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен им. Как и для предыдущего случая групповая и фазовая скорости не сов-

падают по направлению. Это одна из основных особенностей распространения волн в анизотропной среде.

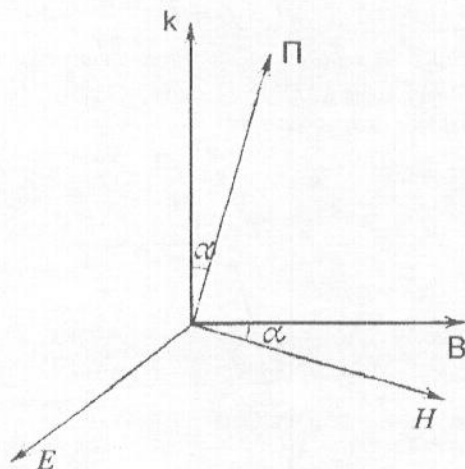


Рис. 5.2. Взаимное расположение векторов электромагнитной волны в анизотропной по магнитным свойствам среде

Другая особенность волн в анизотропных средах – зависимость скорости распространения от направления и поляризации. В анизотропной среде нет смысла разделять волны на продольные и поперечные, т.к. показатель преломления зависит от выбранного направления, т.е. его можно описать вектором  $\vec{n}$ , и групповая скорость не совпадает с направлением распространения волны. Если рассматривать среду без проводимости, то волновой вектор можно представить в виде:

$$\vec{k} = k\vec{n} = \frac{\omega}{c}\vec{n}. \quad (5.6)$$

Тогда дисперсионное уравнение (4.15)

$$\det \left( k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\omega) \right) = 0$$

можно представить как:

$$\det (n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \epsilon_{ij}(\omega)) = 0. \quad (5.7)$$

Из полученного уравнения следует, что относительно показателя преломления это уравнение четвертого порядка, т.е. каждому направлению соответствует две волны. Эти две волны имеют ортогональную поляризацию.

## 5.2. Волны в кристаллах. Уравнение Френеля. Обыкновенные и необыкновенные волны

В кристаллах имеет место анизотропия по электрическим свойствам, причем тензор  $\vec{\epsilon}_a$  - симметричен, т.е.

$$\epsilon_{ij}(\omega) = \epsilon_{ji}(\omega). \quad (5.8)$$

Если можно пренебречь поглощением (среда прозрачна), то все компоненты  $\epsilon_{ij}(\omega)$  - вещественны. Как известно, симметричный вещественный тензор поворотом осей можно свести к диагональному виду, т.е.:

$$\vec{\epsilon}_a = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Рассмотрим распространение в кристалле плоской гармонической волны. Пусть  $\hat{m} = \vec{k}/k$  - единичный вектор нормали к фазовому фронту волны. Тогда первые два уравнения Максвелла принимают вид:

$$[\hat{m} \times \vec{H}] = -v \vec{D}, \quad (5.10)$$

$$[\hat{m} \times \vec{E}] = v \mu_a \vec{H}. \quad (5.11)$$

Очевидно, что

$$\hat{m}(\hat{m} \cdot \vec{E}) - \vec{E} = v \mu_a [\hat{m} \times \vec{H}] = -\mu_a v^2 \vec{D}. \quad (5.12)$$

Поскольку  $\vec{D} = \vec{\epsilon}_a \vec{E}$ , то в декартовой системе координат, оси которой совпадают с главными осями тензора  $\vec{\epsilon}_a$ , уравнение (5.12) можно представить как:

$$m_i (\hat{m} \cdot \vec{E}) - (1 - v^2 \mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon_{ii}) E_i = 0, \dots i = 1 \div 3. \quad (5.13)$$

Пусть вектор  $\vec{E}$  направлен по оси  $x$ , т.е.  $\vec{E} = E_x \hat{e}_x$ . Тогда (5.13) принимает вид:

$$(1 - v^2 \mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon_{xx}) E_x = 0. \quad (5.14)$$

Поэтому

$$v^2 = \frac{1}{\mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon_{xx}} = \frac{c^2}{\mu \epsilon_{xx}} = v_x^2, \quad (5.15)$$

т.е. равна фазовой скорости волны в изотропной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{xx}$ . Аналогичные результаты получаются, если вектор  $\vec{E}$  направлен вдоль других осей. Таким образом, получаемые фазовые скорости есть скорости распространения при ориентации вектора  $\vec{E}$  вдоль главных осей тензора. Они называются *главными скоростями*.

$$\begin{aligned} v_x &= c/\sqrt{\mu\epsilon_{xx}}, \\ v_y &= c/\sqrt{\mu\epsilon_{yy}}, \\ v_z &= c/\sqrt{\mu\epsilon_{zz}}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Рассмотрим распространение волны в произвольном направлении. Очевидно, что уравнения (5.13) можно записать как:

$$m_i \left( \hat{m} \cdot \vec{E} \right) - \left( 1 - \frac{v^2}{v_i^2} \right) E_i = 0. \quad (5.17)$$

После умножения на  $m_i/(1 - v^2/v_i^2)$  и сложения всех трех равенств, получим:

$$\frac{m_x^2 (\hat{m} \cdot \vec{E}) v_x^2}{v_x^2 - v^2} + \frac{m_y^2 (\hat{m} \cdot \vec{E}) v_y^2}{v_y^2 - v^2} + \frac{m_z^2 (\hat{m} \cdot \vec{E}) v_z^2}{v_z^2 - v^2} - (\hat{m} \cdot \vec{E}) = 0.$$

Последнее соотношение очевидным образом сводится к уравнению Френеля:

$$\frac{m_x^2}{v_x^2 - v^2} + \frac{m_y^2}{v_y^2 - v^2} + \frac{m_z^2}{v_z^2 - v^2} = 0. \quad (5.18)$$

Оно позволяет определить фазовую скорость  $v$  в произвольном направлении, задаваемом вектором  $\hat{m}$ . Очевидно, что оно квадратично относительно  $v^2$ . Это значит, что каждому направлению  $\hat{m}$  соответствует две фазовые скорости, т.е. две волны. Можно показать, что они линейно поляризованы в двух перпендикулярных плоскостях. В отличие от изотропных сред, в которых могут распространяться волны произвольной поляризации, в кристаллах волн с круговой и эллиптической поляризацией не существует. Любая волна расщепляется на две волны с линейными поляризациями, распространяющимися с разными фазовыми скоростями.

В зависимости от структуры кристаллических сред и симметрии тензора диэлектрической проницаемости их можно разделить на три группы:

1. *Кубические кристаллы*:  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz}$ . Направление главных осей произвольно и кристаллы оптически изотропны;

2. *Одноосные кристаллы*:  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} \neq \epsilon_{zz}$ . Одна из главных осей совпадает с осью симметрии кристалла — оптической осью, две другие компоненты равны между собой;

3. Двуосные кристаллы:  $\epsilon_{xx} \neq \epsilon_{yy} \neq \epsilon_{zz}$ . Все три компоненты различны.

Рассмотрим распространение в одноосном кристалле. Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \epsilon_{yy} = \epsilon_{\perp}, \\ \epsilon_{zz} &= \epsilon_{\parallel},\end{aligned}\quad (5.19)$$

$$\begin{aligned}v_x &= v_y = c/\sqrt{\mu\epsilon_{\perp}} = v_{\perp}, \\ v_z &= c/\sqrt{\mu\epsilon_{\parallel}} = v_{\parallel}.\end{aligned}\quad (5.20)$$

Тогда уравнение Френеля (5.18) приобретает вид:

$$(v^2 - v_{\perp}^2) \left[ m_x^2 (v^2 - v_{\parallel}^2) + m_y^2 (v^2 - v_{\parallel}^2) + m_z^2 (v^2 - v_{\perp}^2) \right] = 0.$$

Пусть вектор  $\hat{m}$  составляет с осью  $z$  угол  $\theta$ . Тогда

$$\begin{aligned}m_z^2 &= \cos^2 \theta, \quad m_x^2 + m_y^2 = \sin^2 \theta, \\ (v^2 - v_{\perp}^2) \left[ (v^2 - v_{\parallel}^2) \sin^2 \theta + (v^2 - v_{\perp}^2) \cos^2 \theta \right] &= 0.\end{aligned}\quad (5.21)$$

Корни последнего уравнения:

$$v_1^2 = v_{\perp}^2, \quad v_2^2 = v_{\parallel}^2 \sin^2 \theta + v_{\perp}^2 \cos^2 \theta. \quad (5.22)$$

Таким образом, фазовая поверхность распадается на две: сферу с радиусом  $v_{\perp}$  и эллипсоид вращения. Следовательно, в любом направлении распространяются две волны: обыкновенная с постоянной фазовой скоростью  $v_1$ , не зависящей от направления, и необыкновенная с фазовой скоростью  $v_2$ , которая зависит от направления распространения. Из (5.22) видно, что скорости этих волн одинаковы, если волна распространяется вдоль оптической оси.

При  $v_{\perp} > v_{\parallel}$  эллипсоид лежит внутри сферы. В этом случае обыкновенная волна распространяется быстрее необыкновенной (см. рис. 5.3). Кристаллы с такими свойствами называются *положительными одноосными кристаллами*. Пример такой среды – кварц. При  $v_{\perp} < v_{\parallel}$ , наоборот, необыкновенная волна распространяется быстрее обыкновенной (см. рис. 5.4). Кристаллы называются *отрицательными одноосными кристаллами*. Пример такой среды – исландский шпат.

Аналогично фазовой скорости в кристаллах каждому направлению соответствуют две групповые скорости, причем для обыкновенной волны направления фазовой и групповой скоростей совпадают, а для необыкновенной – не совпадают. Рассмотрим это подробнее. Положим для простоты, что вектор  $\hat{m}$  лежит в плоскости  $zOy$ , т.е.  $m_x = 0$ . Тогда выражение для фазовой скорости необыкновенной волны преобразуется к виду:

$$v_2^2 = \omega^2/k^2 = v_{\parallel}^2 \sin^2 \theta + v_{\perp}^2 \cos^2 \theta.$$

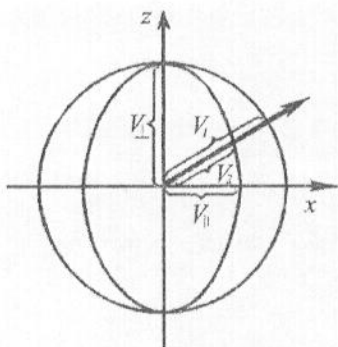


Рис. 5.3. Вид фазовой поверхности для положительного одноосного кристалла

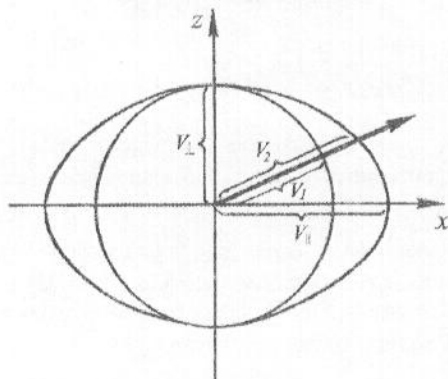


Рис. 5.4. Вид фазовой поверхности для отрицательного одноосного кристалла

Поэтому

$$\omega^2 = c^2 k_y^2 / \mu \epsilon_{\parallel} + c^2 k_z^2 / \mu \epsilon_{\perp}. \quad (5.23)$$

Угол  $\theta'$  между направлением групповой скорости (вектором  $\vec{P}$ ) и осью кристалла (осью  $z$ ) можно определить как:

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{v_{\text{ГР}2y}}{v_{\text{ГР}2z}} = \frac{\partial \omega / \partial k_y}{\partial \omega / \partial k_z}. \quad (5.24)$$

Из (5.23) следует, что

$$v_{ГР2y} = \frac{c^2 k_y}{\omega \epsilon_{\parallel} \mu} = \frac{c^2 k \sin \theta}{\omega \epsilon_{\parallel} \mu},$$

$$v_{ГР2z} = \frac{c^2 k_z}{\omega \epsilon_{\perp} \mu} = \frac{c^2 k \cos \theta}{\omega \epsilon_{\perp} \mu}.$$

С учетом последних выражений (5.24) принимает вид:

$$\operatorname{tg} \theta' = \operatorname{tg} \theta \cdot \frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{\parallel}}. \quad (5.25)$$

Последнее выражение показывает, что отличие направлений групповой и фазовой скорости волны определяется отношением диэлектрических проницаемостей среды.

При падении волны на границу раздела "вакуум – одноосный кристалл" образуются две преломленные волны, т.к. показатель преломления для обыкновенной и необыкновенной волн, как следует из (5.22), различен. Явление называется *двойным лучепреломлением*.

Рассмотрим двуосные кристаллы. Пусть  $\epsilon_{xx} < \epsilon_{yy} < \epsilon_{zz}$ , поэтому  $v_x > v_y > v_z$ . Уравнение Френеля (5.18) можно записать в следующем виде:

$$m_x^2(v^2 - v_y^2)(v^2 - v_z^2) + m_y^2(v^2 - v_x^2)(v^2 - v_z^2) + m_z^2(v^2 - v_x^2)(v^2 - v_y^2) = 0. \quad (5.26)$$

Чтобы получить вид фазовой поверхности, целесообразно рассмотреть ее сечения тремя плоскостями  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ , т.е.  $m_x=0$ ,  $m_y=0$ ,  $m_z=0$ . В этом случае получаются соответствующие кривые, которые приведены на рис.5.5.

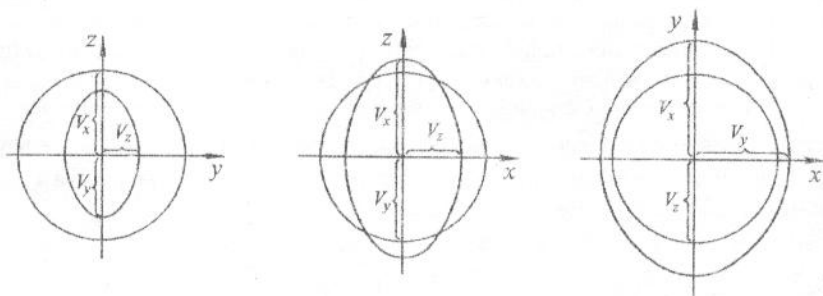


Рис. 5.5. Вид фазовых поверхностей для двуосного кристалла в различных плоскостях

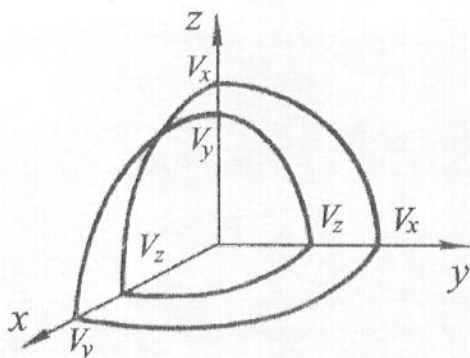


Рис. 5.6. Объемный вид фазовых поверхностей в двуосном кристалле

Объемный вид фазовой поверхности для  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  представлен на рис. 5.6. Кривые пересечения имеют четыре общие точки. Две линии, соединяющие противоположные общие точки и начало координат, называются оптическими осями или бинормальями кристалла.

### 5.3. Электромагнитные волны в магнитоактивных средах. Тензор диэлектрической проницаемости плазмы

*Плазма* — система электронов, ионов и нейтральных молекул, находящихся во внешнем магнитном поле (например, ионосфера Земли, солнечная корона). Она относится к естественно неактивным средам, т.к. свою анизотропию относительно диэлектрической проницаемости проявляет только при наличии магнитного поля. Среда, которые принимают анизотропные свойства под действием внешнего магнитного поля, называются *магнитоактивными*. Если анизотропия проявляется по электрическим свойствам, то такие среды называются *гирослектрическими*.

Рассмотрим приближенный метод решения, т.к. общее решение достаточно сложное. Наличие постоянного магнитного поля  $\vec{H}_0$  приводит к вращательному движению заряженных частиц. Это можно характеризовать так называемыми гироскопическими частотами:

$$\begin{aligned}\omega_H &= (\mu_0 e / m) H_0, \\ \Omega_H &= (\mu_0 e / m_H) H_0,\end{aligned}\tag{5.27}$$

где  $e$  — заряд электрона,  $m$  — его масса,  $m_H$  — масса иона.

Рассмотрим практически важный случай, когда частота внешнего электромагнитного поля  $\omega \gg \Omega_H$ . В этом случае можно считать, что ионы неподвижны и плазма – это электронный газ с концентрацией  $N$  электронов в единице объема. Кроме того, будем полагать, что поле волны достаточно слабое по сравнению с постоянным магнитным полем, т.е.  $H_0 \gg H$ . В этом случае уравнение движения свободного электрона можно представить в виде:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m\nu \frac{d\vec{r}}{dt} = e\vec{E} + \mu_0 e \left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{H}_0 \right], \quad (5.28)$$

где  $\nu$  – эффективная частота соударений электронов, а последнее слагаемое в правой части – сила Лоренца.

Выберем систему координат так, что  $\vec{H}_0 = H_0 \hat{e}_z$ . Тогда после умножения (5.28) на  $eN$  и учета, что  $\vec{P} = e\vec{r}N$ , получим:

$$\frac{d^2 \vec{P}}{dt^2} + \nu \frac{d\vec{P}}{dt} + \omega_H \left[ \hat{e}_z \times \frac{d\vec{P}}{dt} \right] = \omega_N^2 \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (5.29)$$

где  $\omega_N^2 = \frac{e^2 N}{m \varepsilon_0}$ .

Предполагая гармонический характер волны, после дифференцирования имеем:

$$-\omega^2 \vec{P} - i\omega\nu \vec{P} - i\omega\omega_H \left[ \hat{e}_z \times \vec{P} \right] = \omega_N^2 \varepsilon_0 \vec{E} \quad (5.30)$$

или в декартовой системе координат

$$\begin{cases} -\omega^2 P_x - i\omega\nu P_x + i\omega\omega_H P_y = \omega_N^2 \varepsilon_0 E_x \\ -\omega^2 P_y - i\omega\nu P_y - i\omega\omega_H P_x = \omega_N^2 \varepsilon_0 E_y \\ -\omega^2 P_z - i\omega\nu P_z = \omega_N^2 \varepsilon_0 E_z \end{cases} \quad (5.31)$$

Решение системы (5.31) позволяет получить в явном виде связь компонент вектора поляризации с полем волны. Поскольку

$$\vec{D} = \vec{\varepsilon}_a \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

то выражение для тензора диэлектрической проницаемости плазмы во внешнем магнитном поле имеет вид:

$$\vec{\varepsilon}_a = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} &= 1 - \frac{(\omega + i\nu)\omega_N^2}{\omega((\omega + i\nu)^2 - \omega_H^2)}, \quad \varepsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_N^2}{\omega^2 + i\omega\nu}, \\ \varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} &= -i \frac{\omega_H \omega_N^2}{\omega((\omega + i\nu)^2 - \omega_H^2)}.\end{aligned}\quad (5.33)$$

Среды с таким кососимметричным тензором (5.32) называются *гиротропными*. Они обладают рядом специфических свойств. Если пренебречь соударениями (диссипацией энергии), то из (5.33) следует, что в этом случае все равно тензор  $\vec{\varepsilon}$  комплексен, т.е. поглощение энергии все равно существует. Кроме того, при  $\omega \rightarrow \omega_H$  имеет место явление *гиромагнитного резонанса*, когда поглощение становится очень большим.

Необходимо отметить еще одну особенность магнитоактивной среды. В направлении оси  $z$  векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  параллельны. В плоскости  $xOy$   $D_x \pm iD_y = (\varepsilon_{xx} \mp i\varepsilon_{xy})(E_x \pm iE_y)$ . Так как выражение  $\varepsilon_{xx} \mp i\varepsilon_{xy}$ , как следует из (5.33), вещественно, то векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  параллельны только для волн, имеющих круговую поляризацию. Поэтому в плазме любая волна распадается на две волны с круговой поляризацией, которые распространяются с разной фазовой скоростью.

#### 5.4 Электромагнитные волны в гиромагнитных средах

*Ферриты* — это электромагнитные полупроводники и диэлектрики, образованные спеканием окисей железа и соединений двухвалентного металла. Обычная химическая формула  $MeOFe_2O_3$ , где  $Me$  — двухвалентный металл (марганец, цинк, барий и т.д.). Анизотропия создается, как и в плазме, постоянным или медленно меняющимся магнитным полем  $\vec{H}_0$ . При отсутствии магнитного поля феррит не обладает анизотропией (за исключением незначительной кристаллической анизотропии). Среды, которые обладают анизотропией по магнитным свойствам, называются *гиромагнитными*.

Квантовая теория ферромагнетизма основана на том факте, что последний электрон в оболочке иона двухвалентного металла обладает собственным магнитным и механическим моментом. Совокупность этих двух свойств находит выражение в квантово-механическом понятии спина электрона. Спин — такое же неотъемлемое свойство электрона, как заряд, масса. Однако спин — это не вращающийся электрон, как предполагали в начале. И все же, чисто качественно рассматривая движение электрона в атоме и его спин как круговой ток, который проявляется как магнитный диполь, можно в общих чертах правильно описать экспериментальные данные.

Поскольку элементарному замкнутому току соответствует магнитный момент  $\vec{p}_m$ , то при воздействии внешнего магнитного поля  $\vec{H}_0$  этот виток

стремится повернуться так, чтобы векторы поля и момента были параллельны и энергия была минимальной. Можно показать, что момент силы, действующий на систему с магнитным моментом  $\vec{p}_m$ , равен:

$$\vec{K} = \mu_0 [\vec{p}_m \times \vec{H}_0]. \quad (5.34)$$

С другой стороны, момент силы для движущейся частицы связан с изменением момента количества движения  $\vec{L}_e = [\vec{r} \times m \vec{v}]$  зависимостью:

$$\vec{K} = \frac{d\vec{L}_e}{dt}. \quad (5.35)$$

Если рассматривать движение электрона по орбите с позиций классической механики, то

$$\frac{p_m}{L_e} = -\frac{e}{2m}.$$

В квантовой механике это отношение равно:

$$\frac{p_m}{L_e} = -\frac{e}{m} = \gamma,$$

где  $\gamma = 1,76 \cdot 10^{10}$  Кл/кг - гиромагнитное отношение.

С учетом последнего уравнение движения магнитного момента электрона в магнитном поле имеет вид:

$$\frac{d\vec{p}_m}{dt} = -\mu_0 \gamma [\vec{p}_m \times \vec{H}_0]. \quad (5.36)$$

Выберем систему координат так, что  $\vec{H}_0 = H_0 \hat{e}_z$ . Тогда (5.36) можно представить покомпонентно как:

$$\begin{cases} \frac{dp_{mx}}{dt} + \mu_0 \gamma H_0 p_{my} = 0, \\ \frac{dp_{my}}{dt} - \mu_0 \gamma H_0 p_{mx} = 0, \\ \frac{dp_{mz}}{dt} = 0. \end{cases} \quad (5.37)$$

Из системы (5.37) несложно получить, что

$$\frac{d^2 p_{mx}}{dt^2} + (\mu_0 \gamma H_0)^2 p_{mx} = 0,$$

решение которого имеет вид:

$$p_{mx} = A \cos(\Omega t + \varphi),$$

где  $\Omega = \mu_0 \mathcal{H}_0$  - частота ферромагнитного резонанса.

Аналогично можно получить решение для второй компоненты

$$p_{my} = A \sin(\Omega t + \varphi).$$

Приведенные решения показывают, что вектор  $\vec{p}_m$  прецессирует вокруг  $\vec{H}_0$  с частотой  $\Omega$ .

Структура феррита такова, что отдельные магнитные моменты молекул остаются не скомпенсированы и единица объема обладает некоторым не равным нулю магнитным моментом  $\vec{M}_e \sim \vec{p}_m N$ . Если умножить (5.36) на концентрацию частиц, то получим уравнение Ландау - Лифшица:

$$\frac{d\vec{M}_e}{dt} + \gamma \mu_0 [\vec{M}_e \times \vec{H}_0] = 0. \quad (5.38)$$

Рассмотрим распространение электромагнитной волны в такой среде. Пусть вектор напряженности падающей волны  $\vec{H}$  совпадает с осью  $z$ . Геометрия задачи приведена на рис. 5.7. Представим векторы в уравнении Ландау - Лифшица в виде:

$$\vec{H}_e = \vec{H}_0 + \vec{H},$$

$$\vec{M}_e = \vec{M}_0 + \vec{M},$$

где  $\vec{M}_0$  - постоянная намагниченность, которая совпадает с  $\vec{H}_0$ . В этом случае (5.38) принимает вид:

$$\frac{d[\vec{M}_0 + \vec{M}]}{dt} + \gamma \mu_0 [(\vec{M}_0 + \vec{M}) \times (\vec{H}_0 + \vec{H})] = 0.$$

Будем считать, что  $H \ll H_0$ ,  $M \ll M_0$ . Тогда

$$\frac{d\vec{M}}{dt} + \gamma \mu_0 \{ \vec{M}_0 \times \vec{H} \} + [ \vec{M} \times \vec{H}_0 ] = 0.$$

Пусть волна гармоническая, в этом случае из последнего равенства имеем:

$$\begin{aligned} -i\omega \dot{M}_x + \gamma \mu_0 (-\dot{M}_0 \dot{H}_y + \dot{M}_y \dot{H}_0) &= 0, \\ -i\omega \dot{M}_y + \gamma \mu_0 (\dot{M}_0 \dot{H}_x - \dot{M}_x \dot{H}_0) &= 0, \\ -i\omega \dot{M}_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Решение последней системы позволяет получить явный вид вектора  $\vec{M}$ . Поскольку из материальных уравнений

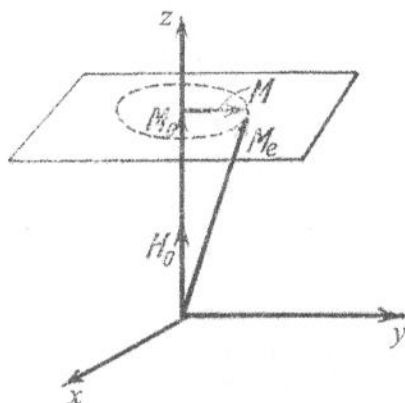


Рис. 5.7. Расположение векторов в задаче распространения волны в феррите

$$\vec{B} = \vec{\mu}_a \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}),$$

то тензор магнитной проницаемости феррита имеет вид:

$$\vec{\mu}_a = \mu_0 \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & 0 \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix}, \quad (5.40)$$

где

$$\mu_{xx} = \mu_{yy} = 1 + \frac{\Omega \gamma \mu_0 M_0}{\Omega^2 - \omega^2} = \mu_{\perp}, \mu_{xy} = -\frac{i \omega M_0 \gamma \mu_0}{\Omega^2 - \omega^2} = -\mu_{yx}, \mu_{zz} = 1. \quad (5.41)$$

Т.е. тензор магнитной проницаемости имеет такой же вид, как и тензор диэлектрической проницаемости плазмы. Поэтому при распространении в феррите электромагнитных волн имеют место аналогичные эффекты, что и для плазмы.

### 5.5. Распространение волн в волноводе с ферритом. Эффект Фарадея

Большинство ферритовых устройств, применяемых в технике СВЧ, представляют собой волноводы или резонаторы, содержащие намагниченные ферритовые образцы. При распространении излучения в волноводах волны уже нельзя считать плоскими. Поэтому рассмотрим гармоническую волну, но не плоскую волну.

Уравнения Максвелла для гармонической волны имеют вид:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} &= -i\omega \varepsilon_a \dot{\vec{E}}, \\
\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} &= i\omega \dot{\vec{B}}, \\
\operatorname{div} \dot{\vec{E}} &= 0, \\
\operatorname{div} \dot{\vec{B}} &= 0.
\end{aligned}
\tag{5.42}$$

Материальные уравнения

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{D}} &= \varepsilon_a \dot{\vec{E}}, \\
\dot{\vec{B}} &= \tilde{\mu}_a \dot{\vec{H}}.
\end{aligned}
\tag{5.43}$$

Исключим из (5.42) переменную  $\dot{\vec{H}}$ . Из материальных уравнений с учетом вида тензора  $\tilde{\mu}_a$  из (5.40) получим:

$$\dot{\vec{H}} = \tilde{\eta} \dot{\vec{B}}, \tag{5.44}$$

где

$$\tilde{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_{xx} & \eta_{xy} & 0 \\ \eta_{yx} & \eta_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{zz} \end{pmatrix}, \tag{5.45}$$

$$\eta_{xx} = \eta_{yy} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_{\perp}}{(\mu_{\perp}^2 + \mu_{xy}^2)}, \quad \eta_{xy} = -\eta_{yx} = -\frac{\mu_{xy}}{\mu_0(\mu_{\perp}^2 + \mu_{xy}^2)}, \quad \eta_{zz} = \frac{1}{\mu_0 \mu_{zz}}.$$

Тогда из первого и второго уравнений (5.42) следует:

$$\omega^2 \varepsilon_a \dot{\vec{E}} = \operatorname{rot}(\tilde{\eta} \cdot \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}). \tag{5.46}$$

Рассмотрим распространение в волноводе с осью симметрии направленной вдоль оси  $z$  так называемой *магнитной волны*, т.е. волны, у которой поперечная компонента электрического поля и  $\dot{\vec{E}}_z = 0$ . Отметим, что при этом магнитное поле не является поперечным, т.к. оно имеет продольную составляющую. Решение будем искать в виде:

$$\dot{\vec{E}}(x, y, z) = \dot{\vec{E}}(x, y) e^{ihz} = (\dot{E}_x \hat{e}_x + \dot{E}_y \hat{e}_y) e^{ihz}, \tag{5.47}$$

где  $h$  выполняет роль волнового числа.

В этом случае

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = \left( -ih \dot{E}_y \hat{e}_x + ih \dot{E}_x \hat{e}_y + \left( \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} \right) \hat{e}_z \right) e^{ihz}.$$

Поэтому

$$\vec{\eta} \cdot \text{rot} \vec{E} = \left[ (-i\dot{E}_y \eta_{xx} + i\dot{E}_x \eta_{xy}) \hat{e}_x + (-i\dot{E}_y \eta_{yx} + i\dot{E}_x \eta_{yy}) \hat{e}_y + \left( \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} \right) \eta_{zz} \hat{e}_z \right] e^{ihz}.$$

Тогда уравнение (5.46) можно для каждой проекции представить в виде:

$$\begin{aligned} \omega^2 \varepsilon_a \dot{E}_x e^{ihz} &= \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} \right) \eta_{zz} - ih(-i\dot{E}_y \eta_{yx} + i\dot{E}_x \eta_{yy}) \right] e^{ihz}, \\ \omega^2 \varepsilon_a \dot{E}_y e^{ihz} &= \left[ ih(-i\dot{E}_y \eta_{xx} + i\dot{E}_x \eta_{xy}) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} \right) \eta_{zz} \right] e^{ihz}, \\ 0 &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} (-i\dot{E}_y \eta_{yx} + i\dot{E}_x \eta_{yy}) - \frac{\partial}{\partial y} (-i\dot{E}_y \eta_{xx} + i\dot{E}_x \eta_{xy}) \right] e^{ihz}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Согласно третьему уравнению Максвелла (5.42) для рассматриваемой задачи

$$\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial y} = 0,$$

поэтому из последнего уравнения системы (5.48) с учетом свойств тензора  $\vec{\eta}$  следует:

$$\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = 0.$$

Это позволяет оставшиеся два равенства в (5.48) представить в виде:

$$\begin{cases} (\omega^2 \varepsilon_a - h^2 \eta_{yy}) \dot{E}_x + h^2 \dot{E}_y \eta_{yx} = 0 \\ h^2 \dot{E}_x \eta_{xy} + (\omega^2 \varepsilon_a - h^2 \eta_{xx}) \dot{E}_y = 0 \end{cases} \quad (5.49)$$

Для совместности системы необходимо, чтобы ее определитель был равен нулю. Поэтому

$$h^4 (\eta_{yx} \eta_{xy} - \eta_{xx} \eta_{yy}) + h^2 \omega^2 \varepsilon_a (\eta_{yy} + \eta_{xx}) - \omega^4 \varepsilon_a^2 = 0,$$

или с учетом свойств тензора  $\vec{\eta}$  из выражения (5.45)

$$h^4 (\eta_{xx}^2 + \eta_{xy}^2) - 2h^2 \omega^2 \varepsilon_a \eta_{xx} + \omega^4 \varepsilon_a^2 = 0.$$

Решение последнего уравнения относительно постоянной распространения  $h$  имеет вид:

$$h_{1,2}^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_a \eta_{xx} \pm \sqrt{\omega^4 \varepsilon_a^2 \eta_{xx}^2 - \omega^4 \varepsilon_a^2 (\eta_{xx}^2 + \eta_{xy}^2)}}{\eta_{xx}^2 + \eta_{xy}^2} = \frac{\omega^2 \varepsilon_a (\eta_{xx} \pm i \eta_{xy})}{\eta_{xx}^2 + \eta_{xy}^2} =$$

$$= \frac{\omega^2 \varepsilon_a}{\eta_{xx} \mp i \eta_{xy}} = \frac{\omega^2 \varepsilon_a \mu_0}{\frac{\mu_{\perp}}{\mu_{\perp}^2 + \mu_{xy}^2} \pm i \frac{\mu_{xy}}{\mu_{\perp}^2 + \mu_{xy}^2}} = k_0^2 \varepsilon (\mu_{\perp} \mp i \mu_{xy}),$$

или

$$h_{1,2} = \pm k_0 \sqrt{\varepsilon (\mu_{\perp} \mp i \mu_{xy})}, \quad (5.50)$$

где знак + соответствует волне, бегущей в положительном направлении оси  $z$ , а отрицательный знак - в противоположном направлении.

Рассмотрим волну, бегущую в положительном направлении. В соответствии с формулой (5.50) имеем две поперечные электрические волны с разными фазовыми скоростями

$$v_{1,2} = \frac{\omega}{k_0 \sqrt{\varepsilon (\mu_{\perp} \mp i \mu_{xy})}} = \frac{c}{n_{1,2}}, \quad (5.51)$$

где показатели преломления определяются как:

$$n_{1,2} = \sqrt{\varepsilon (\mu_{\perp} \mp i \mu_{xy})}. \quad (5.52)$$

Определим поляризацию этих волн. Так множитель поляризации  $P = E_x/E_y$ , то из системы (5.49) получим:

$$\begin{cases} (h^2 \eta_{xx} - \omega^2 \varepsilon_a) P = h^2 \eta_{yx}, \\ (h^2 \eta_{xx} - \omega^2 \varepsilon_a) \frac{1}{P} = h^2 \eta_{xy}. \end{cases}$$

Откуда следует, что  $P^2 = -1$ , т.е.  $P = \pm i$ , что соответствует круговой поляризации волн.

Поэтому линейно поляризованная волна в продольно намагниченном феррите расщепляется на две поляризованные по кругу волны, скорости распространения которых по причине разных показателей преломления отличаются. Вследствие этого, при прохождении некоторого расстояния плоскость поляризации исходной волны поворачивается на угол, который пропорционален этому расстоянию. Это явление называется *эффектом Фарадея*. Поворот плоскости поляризации имеет место также и при распространении волн в плазме. Отметим, что угол поворота не зависит от направления распространения, поскольку в решении (5.50) есть две бегущие в противоположных направлениях волны. Данная особенность используется для построения различных невзаимных СВЧ устройств.

Пусть поляризатор  $I$  пропускает линейно-поляризованную волну, вектор напряженности которой  $\vec{E}_1$  направлен по оси  $y$  (см. рис. 5.8). Пройдя ферритовый образец, волна изменяет положение плоскости поляризации на угол  $\pi/4$  (вектор  $\vec{E}_2$  на рисунке). Поляризатор  $II$  свободно пропускает излучение этой поляризации. Если же волна идет со стороны поляризатора  $II$ , то на образец падает волна, у которой направление вектора электрического поля совпадает с направлением вектора  $\vec{E}_2$  на рисунке. В ферритовом образце происходит поворот ее плоскости поляризации на  $\pi/4$  и вектор  $\vec{E}_3$  на выходе из него становится направленным вдоль оси  $x$ . Поэтому поляризатор  $I$  такую волну не пропустит и поле на выходе устройства будет равняться нулю. По подобному принципу устроены такие невзаимные СВЧ устройства, как вентили и циркуляторы.

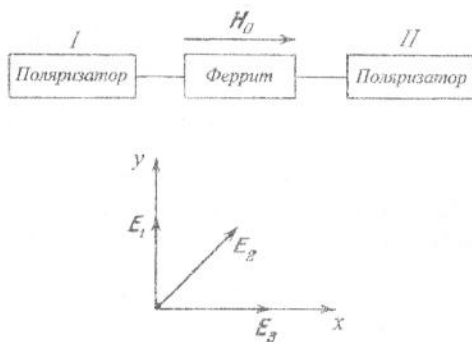


Рис. 5.8. К построению невзаимных устройств на эффекте Фарадея

### Вопросы для самоконтроля

1. Приведите основные особенности распространения волн в анизотропных средах.
2. Дайте физическую интерпретацию формулы Френеля для волн в кристаллах.
3. Напишите закон Снеллиуса для обыкновенной и необыкновенной волн при падении волны из вакуума на анизотропный кристалл.
4. Определите затухание волн при гиromагнитном резонансе. Объясните это явление с физической точки зрения.
5. Получите выражение, связывающее угол поворота плоскости поляризации волны и пройденное расстояние, если известны фазовые скорости для волн с круговой поляризацией  $v_R$  и  $v_L$ .
6. Нарисуйте картину прецессии вектора магнитного момента при наличии поглощения в феррите. Как при этом изменится вид тензора магнитной проницаемости?

## 6. ДИФРАКЦИЯ ВОЛН

Плоская волна — это абстракция, поскольку она существует в бесконечном пространстве и имеет неограниченный плоский фронт. В реальных задачах радиофизики, оптики, акустики волновой процесс всегда ограничен в пространстве размерами приборов и апертур излучающих систем. Взаимодействие с реальными объектами приводит к тому, что волновой фронт может существенно отличаться от плоского. При прохождении волн через различные отверстия также происходит пространственное ограничение волнового процесса. Такой процесс называется *волновым пучком*. Иногда такой пучок можно приближенно рассматривать как совокупность лучей, поведение которых описывается законами геометрической оптики. Однако часто распространение реальных пучков отличается от поведения лучей. Причина такого поведения связана с явлением, которое получило название *дифракция*.

В широком смысле дифракцией называется поведение волн в некоторой области, имеющей границу с теми или иными свойствами. Когда на пути распространения волны возникает какое-то препятствие, образуется рассеянное поле. Задача теории дифракции состоит в определении поля вокруг препятствия, образованного в результате взаимодействия падающей и рассеянной волны.

С математической точки зрения теория дифракции, состоящая в решении линейных дифференциальных уравнений в частных производных с линейными краевыми условиями настолько сложна, что до настоящего времени имеется строгое решение лишь для небольшого числа задач. Поэтому первостепенное значение приобретают приближенные методы расчета.

### 6.1. Метод Кирхгофа

При решении прикладных задач оптики, акустики, электродинамики очень часто используют так называемый *метод Кирхгофа*. Его еще называют методом физической оптики. Метод Кирхгофа состоит в использовании интегральной теоремы, согласно которой значение функции, являющейся решением приведенного волнового уравнения (Гельмгольца), в произвольной точке, находящейся внутри замкнутого объема, выражается через ее значения и значения первой производной на поверхности, ограничивающей данный объем.

Метод Кирхгофа является математическим обобщением принципа Гюйгенса-Френеля, согласно которому поле от источника в некоторой точке наблюдения есть результат интерференции волн, испускаемых вторичными источниками, расположенными на некоторой волновой поверхности между источником и точкой наблюдения.

Рассмотрим метод Кирхгофа для скалярной задачи. Обобщение его для случая векторных волн называют *методом Кирхгофа - Котлера*. Для простоты будем считать, что среда распространения — вакуум. Рассмотрим гармо-

ническую волну  $U(\vec{r})\exp(-i\omega t)$ . Очевидно, что ее комплексная амплитуда удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta U + k^2 U = 0. \quad (6.1)$$

Согласно теореме Грина для комплексных функций  $U$  и  $G$ , имеющих непрерывные первые и вторые частные производные как внутри некоторой области  $V$ , так и на поверхности  $S$ , ограничивающей этот объем, имеет место равенство:

$$\int_V (G\Delta U - U\Delta G) dV = \oint_S \left( G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS, \quad (6.2)$$

где  $\vec{n}$  - внешняя нормаль к поверхности.

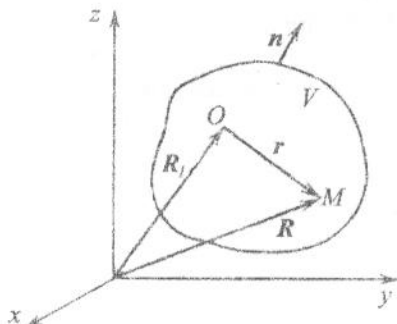


Рис. 6.1. Геометрия задачи для вывода формулы Кирхгофа - Гельмгольца

Выберем в качестве функции  $G$  функцию, которая удовлетворяет уравнению следующего вида:

$$\Delta G + k^2 G = -4\pi\delta(\vec{R} - \vec{R}_1), \quad (6.3)$$

где  $\vec{R}$  - радиус-вектор точки наблюдения, а  $\vec{R}_1$  - радиус-вектор текущей точки объема  $V$  (см. рис. 6.1). Важным решением (6.3) является функция

$$G = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (6.4)$$

где  $r = |\vec{R} - \vec{R}_1|$ . Уравнение (6.4) описывает сферическую волну единичной амплитуды. Она называется функцией точечного источника или функцией Грина свободного пространства.

Используя выражения (6.1) и (6.3), для левой части (6.2) получим

$$\int_V \left( G(-k^2 U) - U(-4\pi\delta(\vec{R} - \vec{R}_1) - k^2 G) \right) dV = 4\pi U(\vec{R}).$$

Поэтому из выражения (6.2) следует

$$U(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left( G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS. \quad (6.5)$$

Формула (6.5) называется *интегральной теоремой Кирхгофа – Гельмгольца*. Пользуясь ею, можно найти функции  $U$  в любой точке объема по заданному распределению функции  $U$  и ее производной по поверхности, ограничивающей этот объем. Она является строгим математическим обобщением принципа Гюйгенса – Френеля.

Рассмотрим в качестве примера использования формулы (6.5) определение поля волны, когда препятствием является непрозрачный экран с отверстием. Геометрия задачи приведена на рис. 6.2. Волна падает на препятствие слева. Требуется определить поле в произвольной точке за экраном. Необходимо выбрать поверхность интегрирования в (6.5). Представим ее в виде плоской поверхности  $S_1$ , совпадающей с плоскостью экрана, и сферической поверхности  $S_2$  с центром в точке наблюдения, опирающейся на плоскость  $S_1$ .

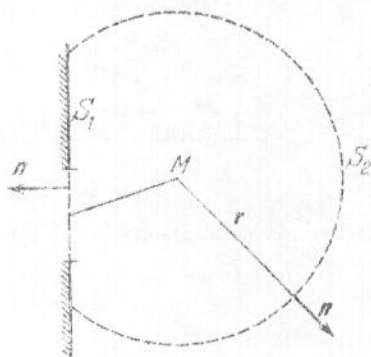


Рис. 6.2. Выбор поверхностей интегрирования при дифракции на отверстии в экране

Рассмотрим интеграл для поверхности  $S_2$ . Поскольку в этом случае направление нормали  $\vec{n}$  совпадает с направлением  $\vec{r}$ , то

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$$

и поэтому с учетом (6.4) получаем

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r}.$$

При  $kr \gg 1$  в полученном выражении второе слагаемое будет мало. Поэтому

$$\int_{S_2} \left( G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = \int_{S_2} \frac{e^{ikr}}{r} \left( \frac{\partial U}{\partial r} - ikU \right) dS = \int_{S_2} \frac{e^{ikr}}{r} \left( \frac{\partial U}{\partial r} - ikU \right) r^2 d\Omega,$$

где  $\Omega$  - телесный угол с центром в точке наблюдения. Из физических соображений следует, что если радиус сферы  $S_2$  взять достаточно большим, то интеграл для этой поверхности будет давать малый вклад в поле в точке наблюдения. Однако для гармонических полей обращение интеграла по  $S_2$  в нуль будет выполняться лишь в случае, если на функцию  $U$  наложить определенные условия, определяющие ее поведение при  $r \rightarrow \infty$ . Это выполняется, если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial U}{\partial r} - ikU \right) = 0. \quad (6.6)$$

Полученное условие называется *условием излучения Зоммерфельда*. Ему удовлетворяет функция  $U = \exp(ikr)/r$ , которая определяет расходящуюся сферическую волну. Обычно условие (6.6) выполняется, т.к. возмущение, идущее от отверстия в экране, представляет собой комбинацию сферических волн, поэтому в выражении (6.5) остается лишь интеграл по поверхности  $S_1$ . Однако для нахождения поля в точке наблюдения необходимо знать поведение функции  $U$  и ее производной на внутренней стороне экрана, включая и поведение в пределах отверстия. Поэтому без дополнительной информации задача может быть решена лишь приближенно при определенных предположениях о значениях  $U$  и производной. Кирхгоф принял следующие предположения, называемые *граничными условиями Кирхгофа*:

1) в отверстии распределение поля и его производной имеют точно такие же значения, какие они имели бы в отсутствии экрана;

2) на внутренней стороне поверхности экрана распределение поля и его производной тождественно равны нулю.

В математическом виде граничные условия Кирхгофа можно записать как

$$\begin{aligned} U(x, y, z) \Big|_{z=0} &= \begin{cases} U_i(x, y, z) \Big|_{z=0}, & (x, y) \in \Sigma \\ 0, & (x, y) \notin \Sigma \end{cases} \\ \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial n} \Big|_{z=0} &= \begin{cases} \frac{\partial U_i(x, y, z)}{\partial n} \Big|_{z=0} & (x, y) \in \Sigma \\ 0, & (x, y) \notin \Sigma \end{cases} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Здесь  $U_i(x, y, z)$  - поле падающей волны, а  $\Sigma$  - символическая запись плоскости отверстия в экране.

Математическая нестрогость приближенных граничных условий Кирхгофа связана с одновременным обращением в нуль как самой функции  $U$ ,

так и ее производной по нормали к поверхности на теневой стороне экрана. При таких граничных условиях  $U$ , удовлетворяющая уравнению Гельмгольца, должна обращаться всюду в нуль за экраном. Поэтому функция  $U$ , вычисленная по формуле (6.5) с граничными условиями (6.7), строго говоря, не описывает поле вблизи экрана и в плоскости отверстия. Однако поскольку значения функции  $U$  и ее производной на теневой стороне экрана очень малы и могут быть измерены только в непосредственной близости от отверстия, то расчеты по формуле (6.5) с условиями (6.7) дают хорошую точность, причем, чем больше размер отверстия по сравнению с длиной волны, тем эти условия выполняются более строго.

Рассмотрим падение квазиплоской волны на экран. Геометрия задачи представлена на рис. 6.3. Представим поле падающей волны в виде:

$$U_i = U_0(x, y, z)e^{ikr} = U_0(x, y, z)e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = U_0(x, y, z)e^{i(\sin\beta \cdot kx + \cos\beta \cdot kz)},$$

где  $\beta$  - угол между направлением распространения падающей на экран волны и осью  $z$ . Из геометрии задачи следует:

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z}, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{z}{r} = -\cos\alpha,$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\partial G}{\partial z} = -\left(ik - \frac{1}{r}\right)\frac{e^{ikr}}{r}z,$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -U_0(x, y, 0)ike^{ikr}\cos\beta = -U_i(x, y, 0)ik\cos\beta,$$

где  $\xi, \eta$  - текущие координаты в плоскости отверстия.

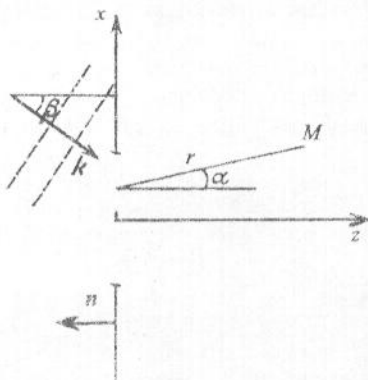


Рис. 6.3. Дифракция плоской волны на непрозрачном плоском экране с отверстием

В волновой зоне ( $kr \gg 1$ )

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -ik \frac{e^{ikr}}{r} \cos \alpha$$

и поэтому выражение (6.5) с учетом граничных условий (6.7) принимает вид:

$$U = \frac{ik}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{e^{ikr}}{r} U_i(\xi, \eta, 0) (\cos \alpha - \cos \beta) d\xi d\eta. \quad (6.8)$$

Полученная формула позволяет определить поле за экраном, исходя из информации о падающей плоской волне в области отверстия.

Математическую нестрогость метода Кирхгофа можно устранить, иначе определив функцию Грина. Этот метод предложил Зоммерфельд. Идея заключается в выборе вспомогательной функции  $G$ . Выберем функцию Грина следующим образом, чтобы она по-прежнему являлась решением уравнения (6.3), удовлетворяла условию излучения, а на границе

$$G_1|_{S_1} = 0. \quad (6.9)$$

В этом случае в интеграле (6.5) остается одно слагаемое и для его решения из (6.7) необходимо задавать лишь граничное условие для распределения поля по плоскости  $S_1$ . В этом случае функция  $G_1$  называется *функцией Грина*.

Так, в случае плоского экрана в качестве функции Грина можно взять разность полей двух точечных источников: реального источника и источника, являющегося зеркальным отображением реального источника в плоскости экрана.

$$G_1 = \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr_1}}{r_1},$$

где  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ ,  $r_1 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2}$ ,  $\zeta$  - характеризует смещение относительно экрана. Расположение точки наблюдения и ее зеркального отображения приведено на рис. 6.4.

Очевидно, что для заданной геометрии задачи при  $\zeta = 0$  имеем

$$G_1 = 0, \quad \frac{\partial G_1}{\partial n} = -2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{e^{ikr}}{r} = 2 \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \frac{z}{r}.$$

Тогда в волновой зоне из уравнения (6.5) следует:

$$U = \frac{k}{2\pi i} \int_{\Sigma} U_i(\xi, \eta, 0) \frac{z}{r} \frac{e^{ikr}}{r} d\xi d\eta. \quad (6.10)$$

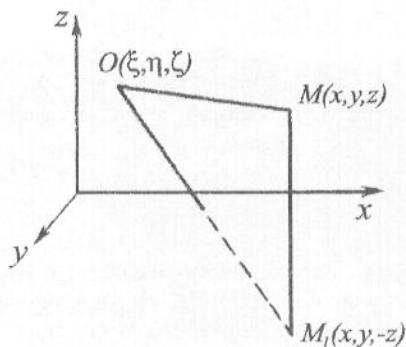


Рис. 6.4. К определению функции Грина для полупространства  $z > 0$

Можно предложить другое граничное условие для вспомогательной функции  $G$ . А именно:

$$\left. \frac{\partial G_2}{\partial n} \right|_{S_1} = 0. \quad (6.11)$$

В этом случае, для нахождения поля как следует из (6.5), необходима информация только о распределении производной по нормали  $\partial U / \partial n$  в плоскости экрана. Функция  $G_2$ , определенная таким образом, называется *характеристической функцией Неймана*. Для случая плоского экрана ее выражение имеет следующий вид:

$$G_2 = \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{ikr_1}}{r_1}.$$

При  $\zeta = 0$

$$\frac{\partial G_2}{\partial n} = 0, \quad G_2 = 2 \frac{e^{ikr}}{r}$$

и поле в точке наблюдения волны определяется как

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial U_i(\xi, \eta, 0)}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} d\xi d\eta. \quad (6.12)$$

Отметим основное отличие формул (6.10) и (6.12) от выражения (6.8). Первые два получены при произвольных характеристиках волнового фронта падающей волны, а (6.8) - для частного случая, падения плоской волны.

Построение функций Грина, удовлетворяющих граничным условиям (6.9) и (6.11), известно лишь для задач с достаточно простой геометрией (полупространство, сфера и т.п.). Вид функции определяется видом поверхности

и свойствами среды и не зависит от положения источника излучения и от поля, создаваемого им на экране.

## 6.2. Угловой спектр плоских волн.

### Разложение сферической волны по плоским волнам

При решении задач дифракции часто используется метод разложения поля по плоским волнам.

Пусть, как и ранее, на отверстие в непрозрачном экране, расположенном в плоскости  $z = 0$ , падает в направлении оси  $z$  гармоническая волна. Требуется определить поле в произвольной точке за экраном. Поскольку в плоскости экрана комплексная функция  $U(x, y, 0)$  является ограниченной, то представим ее через (двумерное) преобразование Фурье:

$$U(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} A_0(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y, \quad (6.13)$$

где

$$A_0(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (6.14)$$

Функция  $A_0(k_x, k_y)$  называется *угловым (пространственным) спектром* функции  $U(x, y, 0)$  в плоскости  $z = 0$ . Подынтегральное выражение в преобразовании (6.13) представляет собой комплексную амплитуду плоской гармонической волны с компонентами волнового вектора  $k_x, k_y$  и  $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$  и амплитудой  $A_0(k_x, k_y)$ , зависящей от направления распространения, направляющие косинусы которого определяются как

$$\cos \alpha = k/k_x, \cos \beta = k/k_y, \cos \gamma = k/k_z.$$

Если ввести новые переменные

$$f_x = k_x/2\pi, f_y = k_y/2\pi,$$

которые называются *пространственными частотами*, то в этих выражениях (6.13) и (6.14) принимают вид:

$$U(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} A_0(f_x, f_y) e^{i2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y, \quad (6.15)$$

$$A_0(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy. \quad (6.16)$$

Если бы угловой спектр был известен в произвольной плоскости  $z = \text{const}$ , выражение для поля определялось преобразованием типа (6.14), т.е.

$$U(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y, z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (6.17)$$

Поскольку функция  $U$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца, то подставляя это выражение в (6.1), получим дифференциальное уравнение для  $A(k_x, k_y, z)$ :

$$\Delta A(k_x, k_y, z) + (k^2 - k_x^2 - k_y^2) A(k_x, k_y, z) = 0.$$

Частное решение полученного уравнения с начальными условиями  $A(k_x, k_y, 0) = A_0(k_x, k_y)$  для волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $z$ , имеет вид:

$$A(k_x, k_y, z) = A_0(k_x, k_y) e^{\pm i z \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}. \quad (6.18)$$

Полученное уравнение описывает изменение углового спектра по мере распространения волны. Из (6.18) следует, что при  $k_x^2 + k_y^2 < k^2$  происходит лишь изменение сдвига фаз между различными спектральными компонентами (плоскими волнами, распространяющимися под разными углами к оси  $z$ ). Если  $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ , квадратный корень в уравнении будет мнимым. Тогда очевидно, что (6.18) описывает неоднородные плоские волны, амплитуда которых убывает по мере удаления от плоскости  $z = 0$ . Предельный случай  $k_x^2 + k_y^2 = k^2$  соответствует волнам, распространяющимся перпендикулярно оси  $z$ , которые не переносят энергии.

Выражение (6.18) позволяет представить в общем виде поле в произвольной точке при  $z > 0$

$$U(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_0(k_x, k_y) e^{i z \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (6.19)$$

#### *Разложение сферической волны по плоским волнам.*

Рассмотрим для примера разложение сферической волны по плоским волнам. Поскольку простейшее выражение для комплексной амплитуды поля имеет вид:

$$U(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{r},$$

то угловой спектр в плоскости  $z = 0$  можно представить как

$$A_0(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy.$$

Перейдем к полярным координатам, как в плоскости  $xу$ , так и в  $k_x k_y$ .

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}, \begin{cases} k_x = q \cos \phi \\ k_y = q \sin \phi \end{cases}, \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctg(y/x) \end{cases}, \begin{cases} q = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \\ \phi = \arctg(k_y/k_x) \end{cases}.$$

Поэтому

$$A_0(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{ik\rho} e^{-i\rho q \cos(\varphi - \phi)} d\rho d\varphi.$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos(\alpha + \beta)} d\alpha = J_0(x),$$

где  $J_0(x)$  - цилиндрическая функция Бесселя нулевого порядка, то выражения для углового спектра принимают следующий вид:

$$A_0(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{ik\rho} J_0(\rho q) d\rho = \frac{i}{2\pi \sqrt{k^2 - q^2}} = \frac{i}{2\pi \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}},$$

$$A(k_x, k_y, z) = \frac{i}{2\pi \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} e^{\pm iz \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}.$$

В результате разложение сферической волны по плоским волнам можно представить как:

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2\pi k_z} e^{i(k_x x + k_y y + \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z)} dk_x dk_y, & z > 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2\pi k_z} e^{i(k_x x + k_y y - \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z)} dk_x dk_y, & z < 0 \end{cases}.$$

Наличие в разложении неоднородных плоских волн (при  $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ ) обеспечивает появление особенности (бесконечного значения) у поля при  $r = 0$ .

Представление комплексной амплитуды поля в виде разложения по плоским волнам (6.19) позволяет лучше понять физику процессов дифракции волн на препятствиях. Рассмотрим, каким образом отверстие в экране влияет

на угловой спектр. Для этого будем характеризовать экран функцией пропускания  $g(x, y)$ . Для непрозрачного экрана

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Sigma \\ 0, & (x, y) \notin \Sigma \end{cases}.$$

В этом случае поле непосредственно за экраном определяется как:

$$U_0(x, y, 0) = U_i(x, y)g(x, y). \quad (6.20)$$

Поэтому угловой спектр, согласно теореме о свертке, можно представить выражением:

$$A_0(k_x, k_y) = A_i(k_x, k_y) * \Phi(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} A_i(k'_x, k'_y) \Phi(k_x - k'_x, k_y - k'_y) dk'_x dk'_y \quad (6.21)$$

где  $A_i(k_x, k_y)$  - угловой спектр падающей волны, а  $\Phi(k_x, k_y)$  - спектр функции пропускания экрана. Для частного случая плоской волны единичной амплитуды, нормально падающей на отверстие, спектр имеет вид:

$$\Lambda_i(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y = \delta(k_x) \cdot \delta(k_y),$$

что после подстановки в (6.21) дает

$$A_0(k_x, k_y) = \Phi(k_x, k_y).$$

Таким образом, спектр за счет прохождения через отверстие уширяется.

Рассмотрим расширение спектра на примере длинной узкой щели шириной  $a$ , прорезанной в непрозрачном экране параллельно оси  $y$ . В этом случае

$$\Phi(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ik_x x} dx = \frac{\text{Sin}(k_x a/2)}{\pi k_x}.$$

Оценим ширину спектра по величине  $k_x$ , при которой функция  $\Phi(k_x)$  обращается в нуль. Из условия

$$\frac{\text{Sin}(x)}{x} = 0$$

следует, что

$$k_x = 2\pi/a \text{ или } \text{Sin} \theta = \lambda/a,$$

где  $\theta$  - угол наклона волнового вектора  $\vec{k}$  относительно оси  $z$ . Таким образом, ширина углового спектра определяется отношением длины волны к ширине щели. Чем это отношение меньше, тем уже угловой спектр. В предельном случае, когда  $a \rightarrow \infty$  (или  $\lambda \rightarrow 0$ ), отверстие не оказывает влияния на падающую волну.

Если плоская волна падает на щель под углом  $\theta_0$  к оси  $z$ , то

$$\Phi(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i(k_x - k_{x0})x} dx = \frac{\text{Sin}((k_x - k_{x0})a/2)}{\pi(k_x - k_{x0})}$$

и поэтому ширина углового спектра пучка при  $z = 0$  может быть оценена из условия

$$\frac{ka}{2}(\text{Sin} \theta - \text{Sin} \theta_0) = ka \text{Cos}((\theta + \theta_0)/2) \text{Sin}((\theta - \theta_0)/2) = \pi.$$

Учитывая, что в случае достаточно широкой щели разность углов  $\theta - \theta_0$  достаточно мала, получим

$$\theta - \theta_0 = \lambda / (a \text{Cos} \theta_0).$$

Т.е. угловая ширина спектра излучения из отверстия экрана зависит не только от отношения  $\lambda/a$ , но и от направления распространения падающей волны. В точной теории дифракции вводится ограничение на угол падения волны  $\theta_0$  на щель. Приближенными граничными условиями Кирхгофа можно пользоваться только для не слишком больших  $\theta_0$ . Поскольку в противном случае поле и его производная не будут равны нулю на внутренней стороне экрана, особенно вблизи края отверстия.

### 6.3. Метод стационарной фазы. Дифракция Френеля и Фраунгофера

Рассмотрим приближенные методы расчета дифрагированного поля с помощью метода Кирхгофа. Пусть плоскость экрана совпадает с плоскостью  $z = 0$ . Геометрия задачи приведена на рис. 6.5. Воспользуемся интегралом (6.10) для определения поля волны, прошедший непрозрачный экран с отверстием произвольной формы.

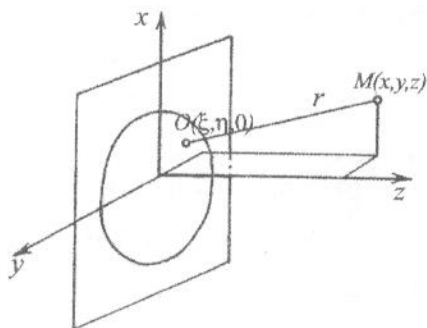


Рис. 6.5. Геометрия задачи для расчета дифрагированного поля с помощью метода Кирхгофа

$$U(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{z}{r} \frac{e^{ikr}}{r} d\xi d\eta,$$

где  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$  и точка наблюдения расположена в волновой зоне, т.е.  $kr \gg 1$ .

Пусть в пределах отверстия поле меняется достаточно мало, тогда в подынтегральном уравнении можно выделить сомножители, которые изменяются медленно при небольшом перемещении точки в плоскости экрана и которые испытывают быстрые осцилляции. Поэтому для оценки интеграла может быть использован *метод стационарной фазы*.

Идея метода стационарной фазы заключается в следующем: быстрые осцилляции приводят к тому, что основной вклад в интеграл вносит область, где показатель экспоненты имеет стационарное значение, т.е. не изменяется в первом порядке изменения своего аргумента. Медленно меняющаяся функция выносится за интеграл при значении аргумента, которое соответствует этой точке стационарности. Оставшийся интеграл сводится к интегралам Френеля.

Найдем точку, где фаза  $\phi = kr$  стационарна. Очевидно, что в точке стационарности

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0;$$

Для рассматриваемой геометрии задачи

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = -k \frac{(x - \xi)}{r} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = -k \frac{(y - \eta)}{r} = 0$$

и координаты точки стационарности определяются как:  $x = \xi$ ;  $y = \eta$ . Разложим в ряд фазу в окрестности этой точки:

$$\phi \approx k \left( z + \frac{(x - \xi)^2}{2z} + \frac{(y - \eta)^2}{2z} \right). \quad (6.22)$$

Подставим это выражение в исходный интеграл и вынесем из-под интеграла медленно меняющуюся функцию. В результате получим

$$U(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i} \frac{U(x, y, 0)}{z} e^{ikz} \int_{\Sigma} e^{ik \left( \frac{(x - \xi)^2}{2z} + \frac{(y - \eta)^2}{2z} \right)} d\xi d\eta. \quad (6.23)$$

Найдем в плоскости  $z = 0$  границы областей, где фаза в показателе экспоненты подынтегрального выражения (6.23) изменяется на  $\pi$ . Очевидно, что их можно представить как:

$$\frac{\pi(x-\xi)^2}{\lambda z} + \frac{\pi(y-\eta)^2}{\lambda z} = m\pi,$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Последнее равенство определяет семейство концентрических окружностей с центром в точке  $\xi = x, \eta = y$  и радиусами  $R_m = \sqrt{m\lambda z}$ . Таким образом, плоскость отверстия разбивается окружностями на концентрические кольца, которые называются *зонами Френеля*. При переходе от одной зоны к другой фаза меняется на противоположную, поэтому интеграл можно представить в виде знакопеременного ряда,  $m$ -ый член которого определяет вклад  $m$ -ой зоны Френеля. Ряд быстро сходится. Физически это означает, что можно выделить область на поверхности экрана, которая вносит наиболее существенный вклад в формирование поля в точке приема. Эта область примерно совпадает с первой зоной Френеля.

Действие экрана можно характеризовать так называемым *волновым параметром*  $W$ . Максимальное значение переменных интегрирования  $\xi_{\max}, \eta_{\max}$ , которые определяются размерами отверстия, есть величина порядка  $a$ . Под волновым параметром понимают безразмерную величину, которая характеризуется отношением площади первой зоны Френеля к величине апертуры отверстия

$$W = \frac{\lambda z}{\pi a^2}. \quad (6.24)$$

Если точка стационарности лежит в области отверстия (точка наблюдения находит вблизи оси  $z$ ) и несколько первых зон Френеля также находятся в пределах отверстия, то

$$\xi_{\max} \sim a \gg \sqrt{\lambda z}, \eta_{\max} \sim a \gg \sqrt{\lambda z}$$

и поэтому  $W \ll 1$ . В этом случае интеграл (6.23) с конечными пределами можно заменить интегралом с бесконечными пределами

$$U(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i} \frac{U(x, y, 0)}{z} e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik \left( \frac{(x-\xi)^2}{2z} + \frac{(y-\eta)^2}{2z} \right)} d\xi d\eta.$$

Последний интеграл можно свести к одному из интегралов Френеля с бесконечными пределами интегрирования

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i \frac{\pi}{2} x^2} dx = (1 \pm i).$$

Сделаем замену переменных

$$(x - \xi) = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} u, (y - \eta) = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} v,$$

получим

$$U(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda z} U(x, y, 0) e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\pi}{2}(u^2+v^2)} \frac{\lambda z}{2} dudv = U(x, y, 0) e^{ikz}. \quad (6.25)$$

Таким образом, если проекция точки наблюдения на плоскость экрана лежит внутри отверстия и существенная область формирования дифракционного поля, совпадающая с первой зоной Френеля, не пересекает края отверстия, то поле в точке наблюдения оказывается невозмущенным. Таким образом, при  $W \ll 1$  экран не влияет на величину поля. Однако при увеличении  $x$  или  $y$  точка стационарности начинает перемещаться к краю отверстия и существенная область будет пересекать его край. В этом случае замена пределов интегрирования на бесконечные становится неправомерной и необходимо использовать интегралы Френеля с конечными пределами.

Понятие области, играющей существенную роль в формировании волнового процесса, имеет большое значение не только в задачах дифракции, но и в вопросах распространения волн, излучаемых источниками конечной апертуры. Пусть, например, источником электромагнитных волн является элементарный диполь, излучающий сферическую волну  $\exp(ikr)/r$ , и расстояние до точки приема  $d$  (см. рис. 6.6).

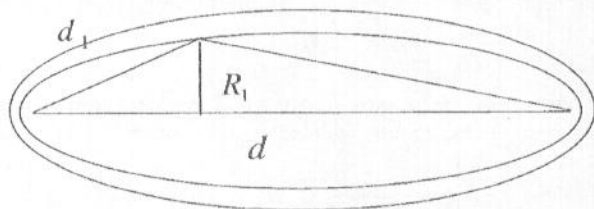


Рис. 6.6. К определению зон Френеля при распространении в свободном пространстве

Тогда, в произвольной плоскости, расположенной перпендикулярно линии, соединяющей точки приема и передачи, можно построить зоны Френеля, радиусы которых определяются как

$$R_m = \sqrt{\frac{m\lambda d_1(d-d_1)}{d}}.$$

Перемещение плоскости позволяет построить в пространстве для каждой из зон огибающую, которая будет иметь вид эллипсоида вращения с фокусами в точках приема и передачи. Эллипсоиды, соответствующие наименьшим номерам зон Френеля, определяют область пространства, играющую наиболее существенную роль в формировании поля в точке приема. Поэтому, если препятствие, которое может находиться недалеко от этой области, не пересекает эту существенную область, то его влиянием можно пренебречь и считать, что распространение происходит в свободном пространстве.

Рассмотрим процесс формирования поля отверстием при удалении точки наблюдения от плоскости экрана. В этом случае размер первой зоны Френеля становится соизмерим с размером отверстия. В этом случае метод стационарной фазы становится неприменим, т.к.  $W \sim 1$  предположение о медленности изменения функции  $U(\xi, \eta)$  не выполняется. На краю отверстия, согласно граничным условиям Кирхгофа, она резко падает от конечного значения до нуля. Рассмотрим поведение поля в случае, если точка наблюдения находится вблизи оси  $z$ , т.е.

$$\frac{|x - \xi|}{z} \ll 1, \quad \frac{|y - \eta|}{z} \ll 1.$$

Разложим модуль радиуса-вектора в ряд

$$r = z \sqrt{1 + \frac{(x - \xi)^2}{z^2} + \frac{(y - \eta)^2}{z^2}} \approx z + \frac{1}{2} \frac{(x - \xi)^2}{z} + \frac{1}{2} \frac{(y - \eta)^2}{z}$$

Тогда выражение для поля в точке приема принимает вид:

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int_{\Sigma} U(\xi, \eta) e^{ik \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z}} d\xi d\eta.$$

Если вынести из полученного равенства члены, не зависящие от переменных интегрирования, то

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{ik \frac{(x^2 + y^2)}{2z}} \int_{\Sigma} U(\xi, \eta) e^{ik \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{2z}} e^{-ik \left( \frac{\xi x + \eta y}{z} \right)} d\xi d\eta. \quad (6.26)$$

На расстояниях, для которых значения волнового параметра  $W \sim 1$ , поле определяется интегралом (6.26). Эта область называется *областью дифракции Френеля*. Если ввести обозначения

$$f_x = x/\lambda z, \quad f_y = y/\lambda z,$$

то из (6.26) получим выражение

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{ik \frac{(x^2 + y^2)}{2z}} \int_{\Sigma} U(\xi, \eta) e^{ik \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{2z}} e^{-i2\pi(f_x \xi + f_y \eta)} d\xi d\eta,$$

которое совпадает с представлением углового спектра функции  $U(\xi, \eta) \exp(ik(\xi^2 + \eta^2)/2z)$  для пространственных частот  $f_x, f_y$ .

Если дальше отодвигать точку наблюдения, то при  $W \gg 1$  показатель первого экспоненциального множителя в (6.26) будет принимать малые значения

$$\frac{k\xi^2}{2z} \sim \frac{1}{W}, \quad \frac{k\eta^2}{2z} \sim \frac{1}{W}$$

и поэтому

$$\exp\{ik(x^2 + y^2)/2z\} \approx 1.$$

В этом случае выражение (6.26) принимает вид:

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{ik \frac{(x^2 + y^2)}{2z}} \int_{\Sigma} U(\xi, \eta) e^{-ik \left( \frac{\xi x + \eta y}{z} \right)} d\xi d\eta$$

или

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{ik \frac{(x^2 + y^2)}{2z}} (2\pi)^2 A_0(2\pi f_x, 2\pi f_y), \quad (6.27)$$

где  $A_0(2\pi f_x, 2\pi f_y)$  - угловой спектр функции  $U(\xi, \eta)$ .

Область значений  $W \gg 1$  называется *областью дифракции Фраунгофера*. Распределение интенсивности поля волны в этой зоне определяется квадратом модуля углового спектра излучения в плоскости экрана

$$I = |U|^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda z} \right)^2 \left| A_0 \left( \frac{2\pi x}{\lambda z}, \frac{2\pi y}{\lambda z} \right) \right|^2. \quad (6.28)$$

Для некоторых простейших видов отверстий угловой спектр может быть найден аналитически. Например, для отверстия прямоугольной формы с размерами  $a$  и  $b$ :

$$\begin{aligned} A_0 \left( \frac{2\pi x}{\lambda z}, \frac{2\pi y}{\lambda z} \right) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \exp \left( -ik \frac{x\xi}{z} \right) \exp \left( -ik \frac{y\eta}{z} \right) d\xi d\eta = \\ &= \frac{ab}{(2\pi)^2} \frac{\text{Sin}(\pi x a / \lambda z)}{\pi x a / \lambda z} \frac{\text{Sin}(\pi y b / \lambda z)}{\pi y b / \lambda z}. \end{aligned}$$

Интенсивность поля при этом

$$I = \left( \frac{ab}{\lambda z} \right)^2 \left( \frac{\text{Sin}(\pi x a / \lambda z)}{\pi x a / \lambda z} \right)^2 \left( \frac{\text{Sin}(\pi y b / \lambda z)}{\pi y b / \lambda z} \right)^2.$$

Для круглого отверстия радиуса  $a$  выражение для углового спектра можно получить, перейдя, как и при разложении сферической волны по плоским волнам в предыдущем разделе, к полярным координатам

$$\begin{cases} \xi = \rho \cos \varphi \\ \eta = \rho \sin \varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} k_x = q \cos \phi \\ k_y = q \sin \phi \end{cases}, \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \\ \varphi = \arctg(\eta/\xi) \end{cases}, \quad \begin{cases} q = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \\ \phi = \arctg(k_y/k_x) \end{cases}.$$

Поэтому

$$A_0(q, \phi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho e^{-i\rho q \cos(\phi - \phi)} d\rho d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \rho J_0(\rho q) d\rho.$$

и выражение для углового спектра можно записать как:

$$A_0(q) = \frac{a}{2\pi q} J_1(aq),$$

где  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  - цилиндрические функции Бесселя нулевого и первого порядка.

Тогда выражения для углового спектра и распределения интенсивности поля при дифракции на круглом отверстии принимают вид:

$$A_0 = \frac{a^2}{2\pi} \frac{J_1(2\pi a/\lambda z)}{2\pi a/\lambda z}, \quad I = \left( \frac{2\pi a^2}{\lambda z} \right)^2 \left( \frac{J_1(2\pi a/\lambda z)}{2\pi a/\lambda z} \right)^2.$$

Ранее мы определяли дифракционное поле, которое возникает в результате взаимодействия волны с отверстием в непрозрачном экране. В теории дифракции большое значение имеет *принцип Бабине*, который устанавливает связь между амплитудами и фазами волн, дифрагировавшими на дополнительных экранах. Дополнительными называются экраны, у которых отверстия одного точно совпадают с непрозрачными частями другого. Если  $U_1$  и  $U_2$  - комплексные функции, характеризующие поле волны при прохождении через один из экранов, то для дополнительных экранов

$$U_1(\vec{r}) + U_2(\vec{r}) = U(\vec{r}), \quad (6.29)$$

где  $U$  - невозмущенное поле. Из (6.29) можно найти дифракционное поле при взаимодействии на непрозрачном экране конечных размеров через дифракционное поле для непрозрачного экрана с отверстием, размеры которого точно совпадают с размерами первого экрана.

#### 6.4. Параболическое уравнение в теории дифракции

Рассмотрим распространение волнового пучка с узким угловым спектром, т.е. пучка, направляющие косинусы у которого малы. Т.к. в общем случае его можно описать с помощью разложения по плоским волнам, то для случая распространения вдоль оси  $z$  имеем:

$$U(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_0(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{iz\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y, \quad (6.30)$$

где

$$A_0(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (6.31)$$

Предположим, что угловой спектр заметно отличается от нуля лишь при

$$\frac{k_x}{k} \ll 1, \frac{k_y}{k} \ll 1,$$

поэтому справедливо разложение в ряд

$$\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{k_x}{k}\right)^2 - \left(\frac{k_y}{k}\right)^2} \approx k \left(1 - \frac{k_x^2}{2k^2} - \frac{k_y^2}{2k^2}\right).$$

Это позволяет представить (6.30) в виде:

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} U(x', y', 0) e^{i(k_x(x-x') + k_y(y-y'))} e^{-iz \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}} dk_x dk_y dx' dy' = A e^{ikz} \quad (6.32)$$

Поскольку в последнем выражении переменные разделяются, рассмотрим интеграл по переменной  $k_x$ . Он может быть вычислен аналитически через интеграл Френеля, выделив в показателе экспоненты полный квадрат. Т.к.

$$k_x(x-x') - k_x^2 \frac{z}{2k} = -(\alpha k_x + \beta)^2 + \beta^2, \quad \alpha = \sqrt{\frac{z}{2k}}, \quad \beta = \frac{x-x'}{2\alpha} = \frac{x-x'}{\sqrt{2z/k}},$$

то

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(k_x(x-x') - k_x^2 \frac{z}{2k}\right)} dk_x &= e^{i\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\alpha k_x + \beta)^2} dk_x = \\ &= e^{i\beta^2} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{2}\gamma^2} d\gamma = e^{i\beta^2} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha^2}} (1-i). \end{aligned}$$

Поэтому полное выражение для комплексной амплитуды принимает вид:

$$A = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} U(x', y', 0) \exp\left[i \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z/k}\right] (-2i) \frac{\pi k}{z} dx' dy'. \quad (6.33)$$

Если ввести переменные

$$D = \frac{i}{2k}, \quad G(x, y) = \frac{e^{\frac{i x^2 + y^2}{2z/k}}}{2\pi i z/k} = \frac{e^{\frac{x^2 + y^2}{4Dz}}}{4\pi Dz},$$

тогда выражение (6.33) можно представить как:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} A(x', y', 0) G(x-x', y-y') dx' dy'. \quad (6.34)$$

Анализ полученного уравнения показывает, что это выражение совпадает с решением параболического уравнения с мнимым коэффициентом диффузии  $D$ :

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} + \Delta_{\perp} A = 0, \quad (6.35)$$

где  $\Delta_{\perp}$  - оператор Лапласа по поперечным координатам  $x$  и  $y$ , а  $G$  - функция Грина. Как следует из (6.35), по мере распространения пучка он вследствие дифракции расширяется (его амплитуда из-за диффузии в поперечном направлении уменьшается). Данный процесс аналогичен дисперсионному уширению во времени волнового пакета.

Рассмотрим физический смысл полученного решения. Пусть при  $z = 0$  имеется точечный источник. Поэтому

$$A(x', y', 0) = U(x', y', 0) = C \delta(x') \delta(y')$$

и из (6.34) следует

$$A = \frac{C e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dz}}}{4\pi Dz} = \frac{C e^{ik \frac{x^2+y^2}{2z}}}{2\pi i z / k} \quad \text{и} \quad U(x, y, z) = \frac{C}{2\pi i / k} \frac{e^{ik \left( z + \frac{x^2+y^2}{2z} \right)}}{z},$$

где  $C$  - некоторая константа.

Точное решение, соответствующее сферической волне, имеет вид:

$$U = C' e^{ikr} / r.$$

Очевидно, что решения будут совпадать, если точки наблюдения будут располагаться вблизи оси, где

$$x/z \ll 1, \quad y/z \ll 1, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx z + (x^2 + y^2) / 2z.$$

Таким образом, в приближении квазиоптики сферический волновой фронт приближенно заменяется параболическим.

Рассмотрим в качестве примера использования параболического уравнения распространение гауссовского волнового пучка. Пусть в плоскости  $z = 0$  он имеет плоский фазовый фронт и гауссово распределение амплитуды в плоскости поперечного сечения

$$A(z = 0) = A(0) \exp\left(-(x^2 + y^2)/a^2\right) = A(0) \exp\left(-\rho^2/a^2\right), \quad (6.36)$$

где  $a$  - характерная начальная ширина пучка, определяемая по спаданию амплитуды в  $e$  раз.

Из (6.34) следует, что

$$A(\rho, z) = \frac{kA(0)}{2\pi iz} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x'^2 + y'^2}{a^2}\right) \exp\left(ik \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z}\right) dx' dy'.$$

Рассмотрим интеграл по  $x'$ . Для его вычисления воспользуемся интегралом Пуассона (см. раздел 4.5). Выделим в показателе экспоненты полный квадрат, т.е.

$$-\frac{x'^2}{a^2} + \frac{ik}{2z}(x-x')^2 = -(\alpha x' + \beta)^2 + \beta^2 + \frac{ik}{2z}x^2,$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{ik}{2z}}, \quad \beta = \frac{ikx}{2z\sqrt{(1/a^2) - (ik/2z)}}.$$

Тогда интеграл по  $x'$  определяется аналитически как:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x'^2}{a^2} + \frac{ik}{2z}(x-x')^2\right) dx' = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left(\beta^2 + \frac{ikx^2}{2z}\right)$$

и выражение для амплитуды может быть представлено в виде:

$$A(\rho, z) = \frac{kA(0)}{2\pi iz} \frac{\pi}{\alpha^2} \exp\left(-\frac{k\rho^2}{2z} \left(\frac{k}{2z(1/a^2 - ik/2z)} - i\right)\right) =$$

$$= \frac{A(0)}{1+iW} \exp\left(-\frac{\rho^2}{a^2(1+iW)}\right),$$

где  $W = 2z/ka^2 = \lambda z/\pi a^2$  - волновой параметр.

В последнем выражении можно выделить действительную амплитуду и фазу, т.е. представить как:

$$A(\rho, z) = A_0 e^{ik\varphi},$$

где

$$A_0 = \frac{A(0)}{\sqrt{1+W^2}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{a^2(1+W^2)}\right), \quad k\varphi = \frac{\rho^2 W}{a^2(1+W^2)} - \arctg W.$$

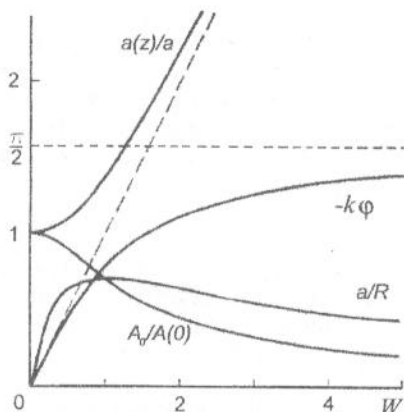
Из полученных выражений следует, что зависимость амплитуды волны от радиуса по мере распространения пучка по-прежнему имеет вид гауссоиды, но ширина пучка растет с увеличением пройденного расстояния  $z$ :

$$a^2(z) = a^2(1+W^2).$$

Амплитуда волны уменьшается пропорционально  $1/\sqrt{1+W^2}$ . При распространении первоначально плоский фазовый фронт искривляется. Кривизна фазового фронта  $R^{-1}$  изменяется с расстоянием как

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} \frac{\sqrt{W}}{\sqrt{1+W^2}}.$$

На расстояниях  $W \gg 1$  первоначально плоская волна превращается в сферически расходящуюся; ее амплитуда убывает как  $A_0 \approx ka^2 A(0)/2z$ , а ширина пучка растет по линейному закону  $a(z) \approx 2z/ka$ . На рис 6.7 представлены зависимости от расстояния амплитуды волны на оси пучка ( $A_0/A(0)$ ),



характерной ширины пучка ( $a(z)/a$ ), фазового сдвига ( $-k\phi$ ) и кривизны фронта ( $a/R$ ).

Рис. 6.7. Изменение параметров гауссового пучка с расстоянием

### Вопросы для самоконтроля

1. Объясните, почему необходимо вводить ограничения на угол падения плоской волны на экран, чтобы воспользоваться при анализе дифракции методом Кирхгофа?
2. Проведите аналогию между угловым спектром пространственно-ограниченного волнового возмущения и частотным спектром временного импульса конечной длительности.
3. Определите интенсивность в зоне дифракции Фраунгофера для случая непрозрачного кольца при нормальном падении волны.
4. Определите угловое положение, соответствующее первым нулям интенсивности волны в зоне дифракции Фраунгофера для прямоугольного и круглого отверстий.
5. Графически изобразите в поперечной плоскости распределение интенсивности (нормированной) волны, дифрагировавшей на отверстии в непрозрачном экране, при значениях волнового параметра  $W \ll 1$ ,  $W \approx 1$ ,  $W \gg 1$

## 7. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Однородные среды являются частным случаем, поскольку их свойства должны оставаться неизменными в пространстве и времени. При решении многих практически важных проблем приходится иметь дело с ситуациями, когда свойства среды распространения изменяются от точки к точке и во времени. К таким задачам относятся, например, распространение электромагнитных волн через тропосферу и ионосферу Земли, солнечную корону и атмосферы планет, распространение акустических волн в океане и земной коре и т.д. Неоднородные среды могут быть регулярными и случайными. В случае отсутствия зависимости свойств среды от временной переменной, задача о нахождении поля в неоднородной среде сводится, как правило, к решению уравнения Гельмгольца вида:

$$\Delta U + k^2(x, y, z)U = 0, \quad (7.1)$$

где  $U$  - скалярная волновая функции. Такая задача достаточно сложна и не имеет общего решения. Однако для некоторых частных случаев разработан простой математический аппарат, позволяющий получить приближенное, а иногда и точное решение.

### 7.1. Приближение геометрической оптики

Полную информацию о волне можно получить, зная ее волновую поверхность. Метод геометрической оптики предусматривает возможность вместо построения волновых поверхностей определять семейство линий, называемых *лучами*, вдоль которых направлен средний по времени поток энергии. Это возможно в том случае, когда заметные изменения амплитуды волны происходят на расстояниях  $L$  много больших длины волны  $\lambda$ . В таких ситуациях волну можно разделить на участки  $l < L$ , в пределах которых ее можно считать плоской, а направление распространения определить нормалью к волновому фронту.

Рассмотрим скалярную задачу. Будем искать решение уравнения Гельмгольца (7.1) в виде:

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r}) \exp(ik_0 \varphi(\vec{r})), \quad (7.2)$$

где  $A(\vec{r})$  и  $\varphi(\vec{r})$  - действительные функции текущей точки  $\vec{r}$ ,  $k_0$  - волновое число в свободном пространстве. Будем предполагать, что свойства среды мало меняются на расстояниях порядка длины волны, поэтому величины  $A(\vec{r})$  и  $\varphi(\vec{r})$  существенно меняются на расстояниях  $L \gg \lambda$ , т.е.

$$\begin{aligned} |\vec{\nabla} A| &= |\text{grad} A| \ll k_0 A \\ |\vec{\nabla} \varphi| &= |\text{grad} \varphi| \ll k_0 \varphi \end{aligned} \quad (7.3)$$

Подставим (7.2) в (7.1), тогда получим

$$\Delta A + 2ik_0 \vec{\nabla} \varphi \vec{\nabla} A + ik_0 A \Delta \varphi + k_0^2 A (k^2(\vec{r})/k_0^2 - (\vec{\nabla} \varphi)^2) = 0.$$

Для оценки этого уравнения представим его в следующем виде:

$$\frac{\Delta A}{k_0^2 A} + 2i \frac{\vec{\nabla} \varphi \vec{\nabla} A}{k_0 A} + i \frac{\Delta \varphi}{k_0} - \left( (\vec{\nabla} \varphi)^2 - \frac{k^2(\vec{r})}{k_0^2} \right) = 0. \quad (7.4)$$

Из (7.3) следует, что

$$\frac{|\vec{\nabla} A|}{A} \sim \frac{1}{L}, \quad |\vec{\nabla} A| \sim \frac{A}{L}, \quad |\vec{\nabla}^2 A| = |\Delta A| \sim \frac{1}{L} \vec{\nabla} A \sim \frac{A}{L^2}.$$

Поэтому первый член уравнения (7.4) имеет порядок  $\lambda^2/L^2$ , второй и третий -  $\lambda/L$ , последний член от  $\lambda/L$  не зависит. Следовательно, первым слагаемым можно пренебречь. Тогда, приравняв к нулю отдельно действительную и мнимую части (7.4), получим

$$(\vec{\nabla} \varphi)^2 = k^2(\vec{r})/k_0^2 = n^2(x, y, z), \quad (7.5)$$

$$A \Delta \varphi + 2 \vec{\nabla} \varphi \vec{\nabla} A = 0, \quad (7.6)$$

где  $n(x, y, z)$  - показатель преломления неоднородной среды.

Уравнение (7.5), определяющее фазу (эйконал), называется *уравнением эйконала*, а уравнение (7.6), определяющее амплитуду, - *уравнением переноса*. Очевидно, что полученные уравнения справедливы при выполнении следующих неравенств:

$$|\Delta A| \ll 2 |\vec{\nabla} \varphi \vec{\nabla} A|, \quad |\Delta A| \ll k_0 |A \Delta \varphi|. \quad (7.7)$$

Уравнения переноса и эйконала можно получить более корректно. Будем искать решение уравнения Гельмгольца в виде разложения по степеням  $1/k_0$ :

$$U(\vec{r}) = \left( A_0(\vec{r}) + \frac{1}{k_0} A_1(\vec{r}) + \frac{1}{k_0^2} A_2(\vec{r}) + \dots \right) \exp(ik_0 \varphi(\vec{r})). \quad (7.8)$$

Тогда, подставляя (7.8) в (7.1) и приравнявая к нулю коэффициенты при различных степенях  $1/k_0$ , получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} A_0 \left( (\vec{\nabla} \varphi)^2 - \frac{k^2(\vec{r})}{k_0^2} \right) &= 0, \\ A_0 \Delta \varphi + 2 \vec{\nabla} A_0 \vec{\nabla} \varphi &= 0, \\ A_1 \Delta \varphi + 2 \vec{\nabla} A_1 \vec{\nabla} \varphi &= i \Delta A_0. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Первое и второе уравнения системы (7.9) совпадают с уравнениями эйконала и переноса. Решая их, можно найти  $\varphi$  и  $A_0$ , а затем определить  $A_1$  и т.д. Заметим, что если  $\varphi$  и  $A_0$  - действительные величины, то  $A_1$  - мнимая величина. Отметим, что  $A$  в уравнении переноса является амплитудой волны с точностью до членов порядка  $1/k_0$ . Аналогично,  $k_0\varphi$  является фазой волны (7.5) с точностью до членов порядка  $1/k_0$ .

Построим вместо волновых поверхностей  $\varphi(x, y, z) = \text{const}$  семейство линий, нормальных к ним, так называемых лучей, вдоль которых происходит распространение волны. Умножив уравнение эйконала на единичный вектор  $\vec{l}_0$  (по возрастанию  $\varphi$ , см. рис. 7.1), получим

$$\vec{l}_0 n = \vec{l}_0 |\text{grad} \varphi| = \text{grad} \varphi. \quad (7.10)$$

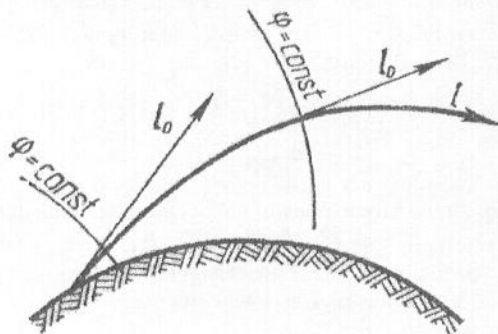


Рис. 7.1. Геометрия луча в неоднородной среде

Возьмем производную по  $l$  от обеих частей выражения (7.10). Тогда, используя известное равенство

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial l} = (\vec{l}_0 \vec{\nabla}) \vec{a},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial l} (\text{grad} \varphi) &= (\vec{l}_0 \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \varphi = \frac{1}{n} ((\vec{\nabla} \varphi) \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \varphi = \frac{1}{n} \vec{\nabla} \frac{(\vec{\nabla} \varphi)^2}{2} - [\vec{\nabla} \varphi \times [\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi]] = \\ &= \frac{1}{n} \vec{\nabla} \frac{n^2}{2} = \vec{\nabla} n = \text{grad}(n). \end{aligned}$$

Откуда следует уравнение луча:

$$\frac{\partial}{\partial l} (\vec{l}_0 n) = \text{grad}(n). \quad (7.11)$$

При известной зависимости  $n(\vec{r})$  можно получить решение (7.11), т.е. найти траекторию луча в неоднородной среде.

Рассмотрим, как преобразуется амплитуда поля при распространении вдоль луча из точки  $P_1$  в точку  $P_2$ . Для этого преобразуем уравнение переноса (7.6), умножив его на  $A$ . В результате получим

$$A^2 \Delta \varphi + 2A \vec{\nabla} \varphi \vec{\nabla} A = \vec{\nabla} (A^2 \vec{\nabla} \varphi) = 0.$$

Тогда, используя (7.10), имеем

$$\vec{\nabla} (A^2 \vec{l}_0 n) = 0 \text{ или } \operatorname{div} (A^2 \vec{l}_0 n) = 0. \quad (7.12)$$

Рассмотрим поверхность  $\varphi_1 = \text{const}$  и выделим на ней малую площадь  $d\sigma_1$ , ограниченную пучком лучей, в пределах которой  $A = A_1$ . Проведем лучи до другой поверхности  $\varphi_2 = \text{const}$ , на которой пучок ограничит другую площадь  $d\sigma_2$ . Геометрия задачи приведена на рис 7.2.

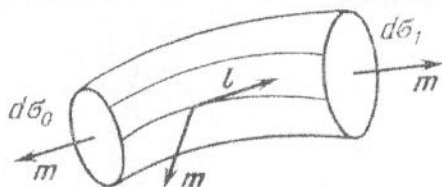


Рис. 7.2. К определению потока энергии в лучевой трубке

Согласно теореме Остроградского – Гаусса, поток вектора через замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции этого вектора по объему, ограниченному этой поверхностью. Поэтому

$$\oint_V \operatorname{div} (A^2 \vec{l}_0 n) dV = \oint_S n A^2 \vec{l}_0 \hat{m} dS = 0,$$

где  $\hat{m}$  - единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S$ . Т.к. на боковой поверхности  $\vec{l}_0 \perp \hat{m}$ , то

$$n_1 A_1^2 d\sigma_1 = n_2 A_2^2 d\sigma_2 = n A^2 d\sigma = \text{const}.$$

Т.к. величина  $n A^2$  пропорциональна плотности потока энергии, то  $n A^2 d\sigma$  соответствует энергии, переносимой вдоль лучевой трубки. Изменение  $d\sigma$  вдоль луча определяется уравнением луча. Интенсивность определяется из уравнения

$$A^2 = A_1^2 \frac{n_1 d\sigma_1}{n d\sigma} \quad (7.13)$$

Полученное выражение позволяет определить амплитуду (интенсивность) в произвольной точке луча, если известно значение в точке  $P_1$ . Решение его при произвольной зависимости  $n(\vec{r})$  возможно лишь численными методами.

Для однородной среды амплитуда поля в точке  $P_2$  определяется соотношением

$$A_2 = A_1 \sqrt{d\sigma_1/d\sigma_2}.$$

Выразим  $d\sigma_1/d\sigma_2$  через радиусы кривизны  $\rho_1$  и  $\rho_2$  фронта волны в точке  $P_1$ . Как следует из рис. 7.3,

$$d\sigma_1 = \rho_1 d\alpha \rho_2 d\beta, d\sigma_2 = (\rho_1 + s) d\alpha (\rho_2 + s) d\beta,$$

где  $s$  - расстояние между точками  $P_1$  и  $P_2$ ,  $d\alpha$  и  $d\beta$  - углы в ортогональных плоскостях. Тогда амплитуду поля в точке  $P_2$  однородной среды можно представить как:

$$A_2 = A_1 \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}}.$$

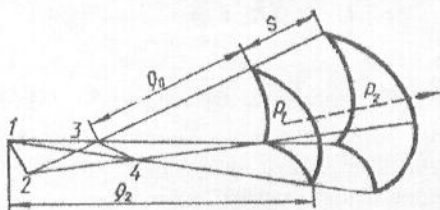


Рис. 7.3. Элементы волновой поверхности

Из полученного равенства следует, что при увеличении  $s$  и конечных  $\rho_1$  и  $\rho_2$  поле уменьшается пропорционально  $s^{-1}$ , как у сферической волны. Если один из радиусов бесконечен, поле уменьшается пропорционально  $s^{-1/2}$ , как у цилиндрической волны. При  $\rho_1 \rightarrow \infty$  и  $\rho_2 \rightarrow \infty$  амплитуда поля остается постоянной, что свидетельствует о наличии плоской волны. В случае, когда  $\rho_1 = \rho_2 = 0$ , т. е. в центрах кривизны волновых поверхностей, амплитуда обращается в бесконечность. Такие поверхности называются *каустиками*. Из рис. 7.3. видно, что центры кривизны волновой поверхности расположены на линиях 1 - 2 и 3 - 4. Обращение амплитуды в бесконечность свидетельствует о том, что метод геометрической оптики не дает возможности определить

поле на каустике, а также вблизи ее и поэтому в этом случае необходимо пользоваться точным решением волнового уравнения для неоднородной среды.

## 7.2. Уравнение эйконала для электромагнитного поля

Для электромагнитных волн уравнение эйконала может быть получено непосредственно из уравнений Максвелла. При гармонической зависимости поля первые два уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= -i\omega \varepsilon_a \vec{E}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= i\omega \mu_a \vec{H}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Решение будем искать в виде ряда по степени  $1/k_0$ :

$$\vec{E} = \left( \vec{E}_0 + \frac{1}{k_0} \vec{E}_1 + \dots \right) e^{ik_0 \varphi(\vec{r})}, \quad \vec{H} = \left( \vec{H}_0 + \frac{1}{k_0} \vec{H}_1 + \dots \right) e^{ik_0 \varphi(\vec{r})}. \quad (7.15)$$

Подставляя эти выражения в (7.14) и приравнявая к нулю члены с соответствующими степенями  $1/k_0$ , получим систему уравнений. Так, для нулевого приближения имеем:

$$[\vec{\nabla} \varphi \times \vec{E}_0] = \frac{\mu_a \omega}{k_0} \vec{H}_0, \quad [\vec{\nabla} \varphi \times \vec{H}_0] = -\frac{\varepsilon_a \omega}{k_0} \vec{E}_0. \quad (7.16)$$

Из последних равенств следует, что векторы  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{H}_0$  и  $\vec{\nabla} \varphi$  взаимно перпендикулярны, т.е.

$$(\vec{\nabla} \varphi \vec{E}_0) = 0, \quad (\vec{\nabla} \varphi \vec{H}_0) = 0.$$

Исключим из полученных равенств  $\vec{H}_0$ . Очевидно, что

$$[\vec{\nabla} \varphi \times [\vec{\nabla} \varphi \times \vec{E}_0]] = \frac{\mu_a \omega}{k_0} [\vec{\nabla} \varphi \times \vec{H}_0] = -\frac{\varepsilon_a \mu_a \omega^2}{k_0^2} \vec{E}_0.$$

Из последнего равенства нетрудно получить

$$(\vec{\nabla} \varphi)^2 \vec{E}_0 = \varepsilon \mu \vec{E}_0$$

и поэтому

$$(\vec{\nabla} \varphi)^2 = \varepsilon \mu = k^2 / k_0^2 = n^2.$$

Последнее равенство точно соответствует уравнению эйконала (7.5). Если ввести единичный вектор нормали  $\vec{l}_0$

то из уравнений (7.16) получим

$$\begin{aligned} [\vec{l}_0 \times \vec{E}_0] &= \frac{\mu_a \omega}{k_0 n} \vec{H}_0 = \frac{\mu_a c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \vec{H}_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \vec{H}_0, \\ [\vec{l}_0 \times \vec{H}_0] &= -\sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} \vec{E}_0. \end{aligned}$$

Из последних двух равенств следует, что

$$\vec{H}_0 = \frac{1}{Z_B} [\vec{l}_0 \times \vec{E}_0], \quad \vec{E}_0 = -Z_B [\vec{l}_0 \times \vec{H}_0].$$

Полученные равенства аналогичны уравнениям (2.15) для плоских волн, где вместо единичного вектора  $\hat{m} = \vec{k}_0/k_0$  используется вектор  $\vec{l}_0$ . Таким образом, в приближении геометрической оптики получается решение в виде локально плоских однородных волн. Векторы  $\vec{E}_0$  и  $\vec{H}_0$  лежат в плоскости, касательной к поверхности фронта волны.

### 7.3. Приближение геометрической оптики для плоскостойких сред

Решение уравнений эйконала и переноса может быть получено только при известной зависимости показателя преломления от координат. Рассмотрим применение метода геометрической оптики на примере плоскостойкой среды.

Пусть оси системы координат направлены так, что показатель преломления изменяется вдоль одной из них, например, вдоль оси  $z$ , т.е.  $n = n(z)$ . Геометрия задачи приведена на рис. 7.4. Среда занимает полупространство  $z > 0$ .

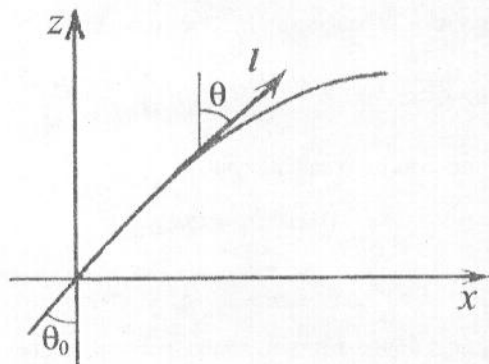


Рис. 7.4. К определению траектории луча в плоскостойкой среде

Рассмотрим уравнение луча (7.11). Из трех скалярных уравнений траектории достаточно рассмотреть одно

$$\frac{\partial l_x n}{\partial l} = \frac{\partial n}{\partial x} = 0$$

и поэтому

$$nl_x = n(z) \sin \theta(z) = n_0 \sin \theta_0 = \text{const}. \quad (7.17)$$

Полученное соотношение отражает закон Снеллиуса для плоскослоистой среды.

Очевидно, что траектория луча определяется из уравнения

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dl \sin \theta}{dl \cos \theta} = \operatorname{tg} \theta = \frac{n_0 \sin \theta_0}{\sqrt{n^2(z) - n_0^2 \sin^2 \theta_0}}. \quad (7.18)$$

Часто удобнее описывать траекторию луча другим уравнением. Поскольку

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{n^2(z) - n_0^2 \sin^2 \theta_0}}{n_0 \sin \theta_0},$$

то, дифференцируя по  $x$ , получим:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{n_0 \sin \theta_0} \frac{\frac{dn^2}{dz} \frac{dz}{dx}}{2\sqrt{n^2(z) - n_0^2 \sin^2 \theta_0}} = \frac{n}{n_0^2 \sin^2 \theta_0} \frac{dn}{dz}. \quad (7.19)$$

Из полученного равенства следует, что угол наклона луча к вертикали (оси  $z$ ) по мере распространения волны изменяется, т.е. лучи искривляются. Это явление называется *рефракцией*.

Рассмотрим поведение луча при некоторых частных случаях изменения показателя преломления.

1. Пусть показатель преломления монотонно растет с высотой  $z$ , т.е.  $\operatorname{grad}(n) > 0$ . Рассмотрим распространение луча из точки  $M$ , расположенной на высоте  $z_M$  над поверхностью (см. рис. 7.5.).

Поскольку показатель преломления увеличивается с высотой, то при начальном угле  $\theta_0 < \pi/2$  тангенс текущего угла, как следует из формулы (7.18), уменьшается и луч приближается к вертикали (кривая 1 на рис. 7.5). При  $\theta_0 > \pi/2$  луч будет направлен к границе раздела и может достичь точки поворота  $\theta = \pi/2$  при  $n(z) = |\sin \theta_0| n_0$  (кривые 3 и 4) или отразится от поверхности (кривая 2). Тангенс текущего угла при этом сначала увеличивается, а затем начинает уменьшаться, и луч снова стремится к вертикали. Очевидно, что в область, расположенную правее кривой 4, луч попасть не может.

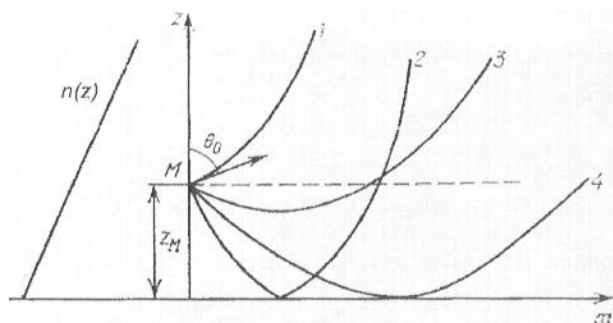


Рис. 7.5. Траектории лучей в плоскостой среде при положительном градиенте показателя преломления

2. Рассмотрим ситуацию, когда показатель преломления уменьшается с высотой, т.е.  $\text{grad}(n) < 0$ . В этом случае тангенс текущего угла будет увеличиваться с высотой, и поэтому луч будет отклоняться к горизонтали и  $\theta > \theta_0$ . На некоторой высоте  $z_0$  текущий угол станет равным  $\pi/2$  и луч начнет изгибаться в направлении к поверхности. Траектория его приведена на рис. 7.6. Поворот луча происходит при условии, когда  $n(z) = \sin \theta_0 n_0$ .

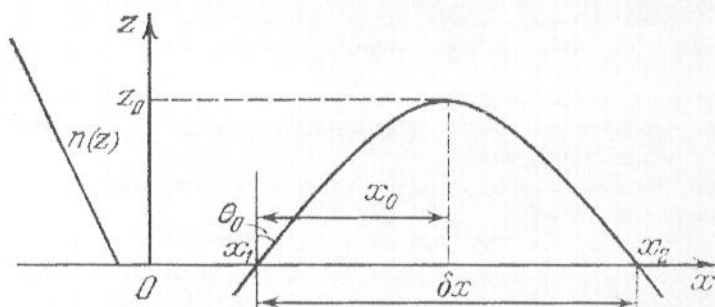


Рис. 7.6. Траектории лучей в плоскостой среде при отрицательном градиенте показателя преломления

Рассмотрим, как изменяется амплитуда и фаза лучей при распространении в плоскостой среде. Будем считать, что первоначальная волна распространяется под углом  $\theta_0 = 0$  к слою. Тогда уравнения эйконала и переноса принимают вид:

$$\frac{d\varphi}{dz} = n(z), \quad A \frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2 \frac{d\varphi}{dz} \frac{dA}{dz} = 0.$$

Поэтому

$$A \frac{dn(z)}{dz} + 2n(z) \frac{dA}{dz} = 0$$

и решение для амплитуды можно записать как:

$$A = A_0 \exp \left( -\frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} dz \right) = \frac{A_0}{\sqrt{n}}.$$

Эйконал в этом случае определяется выражением

$$\varphi = \pm \int_{z_0}^z n(z) dz.$$

Тогда решение для поля волны, распространяющейся в плоскослоистой среде при  $\theta_0 = 0$ , в приближении геометрической оптики имеет вид:

$$U = \frac{A_0}{\sqrt{n}} \exp \left[ \pm ik_0 \int_{z_0}^z n(z) dz \right]. \quad (7.20)$$

Данное решение одномерного волнового уравнения называется *ВКБ - приближением*, по начальным буквам фамилий авторов, получивших его (Вентцель, Крамерс, Бриллюен). Отметим, что знаки в показателе экспоненты соответствуют двум волнам, бегущим в сторону возрастания (вверх) и убывания (вниз) координаты  $z$ .

В случае наклонного падения формула ВКБ приближения (7.20) получается просто заменой  $n$  на  $\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0}$  и имеет следующий вид:

$$U = \frac{A_0}{\sqrt{4n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0}} \exp \left[ ik_0 x \sin \theta_0 \pm ik_0 \int_{z_0}^z \sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0} dz \right]. \quad (7.21)$$

### Вопросы для самоконтроля

1. Поясните физический смысл эйконала. Приведите его размерность.
2. Волновой вектор плоской однородной волны составляет одинаковые углы со всеми осями декартовой системы координат. Запишите выражение для эйконала.
3. Напишите волновое уравнение для неоднородной среды.
4. Объясните физический смысл условий применения метода геометрической оптики.
5. Определите расстояние по оси  $x$ , с которого начинается область тени, при линейном возрастании показателя преломления с высотой, как приведено на рис. 7.5.
6. Проведите качественное исследование поведения луча в плоскослоистой среде в случае, когда показатель преломления сначала уменьшается с высотой, а затем с некоторой высоты начинает расти.

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1990.
2. Кравченко И.Т. Теория волновых процессов. Мн.: Вып. шк., 1985.
3. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
4. Татур Т.А. Основы теории электромагнитного поля. М.: Высш. шк., 1989.
5. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989.
6. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. М.: Сов. Радио, 1971.
7. Пименов Ю.М., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. М.: Радио и связь, 2000.
8. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Радио и связь, 2000.
9. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1992.

# СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
Введение.....	3
1. Общие сведения о волновых процессах.....	4
1.1. Волновое уравнение.....	4
1.2. Звуковые волны в газах и жидкостях.....	6
1.3. Звуковые волны в твердых телах.....	9
1.4. Плоские волны.....	11
1.5. Сферические волны.....	16
1.6. Цилиндрические волны.....	19
Вопросы для самоконтроля.....	20
2. Электромагнитные волны в однородных изотропных линейных средах.....	20
2.1. Уравнения Максвелла.....	20
2.2. Плоские электромагнитные волны в однородной изотропной среде.....	23
2.3. Поток энергии электромагнитного поля.....	29
2.4. Векторные волны. Поляризация.....	30
Вопросы для самоконтроля.....	35
3. Отражение и преломление волн на границе раздела сред.....	36
3.1. Общие закономерности взаимодействия плоской электромагнитной волны с плоской границей раздела.....	36
3.2. Особенности взаимодействия волны с границей "диэлектрик - диэлектрик".....	39
3.3. Особенности взаимодействия волны с границей "диэлектрик - проводник".....	42
Вопросы для самоконтроля.....	43
4. Распространение волн в диспергирующих средах.....	44
4.1. Уравнения Максвелла в среде с дисперсией и анизотропией.....	45
4.2. Дисперсионное уравнение.....	46
4.3. Частотная дисперсия диэлектрической проницаемости.....	47
4.4. Дисперсия электромагнитных волн в диэлектриках. Вид показателей преломления и поглощения.....	50
4.5. Распространение волнового пакета в диспергирующей среде. Линейное и квадратичное приближения дисперсии.....	53
4.6. Энергия электромагнитной волны в диспергирующей среде.....	57
Вопросы для самоконтроля.....	59
5. Волны в анизотропных средах.....	60
5.1. Общие закономерности волновых процессов в анизотропных средах.....	60
5.2. Волны в кристаллах. Уравнение Френеля. Обыкновенные и необыкновенные волны.....	63
5.3. Электромагнитные волны в магнитоактивных средах. Тензор диэлектрической проницаемости плазмы.....	68
5.4. Электромагнитные волны в гиромагнитных средах.....	70
5.5. Распространение волн в волноводе с ферритом. Эффект Фарадея.....	73
Вопросы для самоконтроля.....	77

6. Дифракция волн.....	78
6.1. Метод Кирхгофа.....	78
6.2. Угловой спектр плоских волн. Разложение сферической волны по плоским волнам.....	85
6.3. Метод стационарной фазы. Дифракция Френеля и Фраунгофера.....	89
6.4. Параболическое уравнение в теории дифракции.....	95
Вопросы для самоконтроля.....	99
7. Распространение волн в неоднородных средах.....	100
7.1. Приближение геометрической оптики.....	100
7.2. Уравнение эйконала для электромагнитного поля.....	105
7.3. Приближение геометрической оптики для плоскостойких сред.....	106
Вопросы для самоконтроля.....	109
Рекомендуемая литература.....	110

---

Учебное издание

**Тимофеев Владимир Авенирович**

**Физика волновых процессов**

Компьютерный набор, верстка В.А. Тимофеев

Редактор, корректор А.А. Аладьева

Подписано в печать 13.11.2003 г. Формат 60×84/16. Бумага тип.

Усл. печ. л. 6,51. Уч.-изд. л. 6,77. Тираж 100 экз. Заказ 378.

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет.

150000 Ярославль, ул. Советская, 14.

Отпечатано

ООО «Ремдер» ЛР ИД № 06151 от 26.10.2001.

г. Ярославль, пр. Октября, 94, оф. 37. тел. (0852) 73-35-03.