

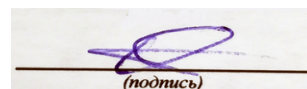
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра микроэлектроники и общей физики

УТВЕРЖДАЮ

Декан физического факультета



И.С.Огнев

« 13 » мая 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины  
«Вариационное исчисление»**

Направление подготовки

11.03.04 Электроника и нанoeлектроника

Профиль «Интегральная электроника и нанoeлектроника»

Форма обучения

Очная

Программа одобрена  
на заседании кафедры  
от «17» апреля 2023 года, протокол № 5

Программа одобрена НМК  
физического факультета  
протокол № 5 от «25» апреля 2023 года

Ярославль

## 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Вариационное исчисление» обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом, относится к фундаменту математического образования и содействует формированию мировоззрения математика.

Целью преподавания дисциплины является ознакомление студентов с основами теории функций комплексного переменного, её важнейшими понятиями, результатами и методами, а также подготовка студентов к изучению других дисциплин.

Содержание дисциплины составляют следующие разделы.

Предмет и исторические этапы Вариационного исчисления. Необходимые и достаточные условия экстремума функции. Функционалы. Определения и примеры. Простейшие задачи вариационного исчисления. Основная лемма вариационного исчисления. Необходимые условия условного экстремума. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Частные случаи. Функционалы, зависящие от высших производных. Принцип наименьшего действия в механике. Функционалы от функций многих переменных.

## 2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата

Данная дисциплина относится к вариативной части Блока 1.

Знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплины «Вариационное исчисление», используются студентами в процессе изучения специальных дисциплин, а также в ходе выполнения курсовых и выпускных квалификационных работ.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОП бакалавриата

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Универсальные компетенции</b>		
<b>УК-1</b> Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.	<b>ИД-УК-1.1</b> Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности	<b><u>Знать:</u></b> - основные понятия и результаты вариационного исчисления; - методы решения важнейших задач;  <b><u>Уметь:</u></b> - реализовывать основные способы и алгоритмы решения задач; - применять понятия, результаты и методы вариационного исчисления в других разделах математики ; <b><u>Владеть навыками:</u></b> - систематического и результативного применения аппарата разностных уравнений.
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		

<b>ОПК-1</b> Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности.	<b>ИД-ОПК-1.1</b> Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	<p><b><u>Знать:</u></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- основные понятия и результаты вариационного исчисления;</li> <li>- методы решения важнейших задач;</li> </ul> <p><b><u>Уметь:</u></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- реализовывать основные способы и алгоритмы решения задач;</li> <li>- применять понятия, результаты и методы вариационного исчисления в других разделах математики ;</li> <li>—</li> </ul>
	<b>ИД-ОПК-1.2</b> Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности	<p><b><u>Уметь:</u></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- реализовывать основные способы и алгоритмы решения задач;</li> <li>- применять понятия, результаты и методы вариационного исчисления в других разделах математики ;</li> </ul> <p><b><u>Владеть навыками:</u></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- систематического и результативного применения аппарата разностных уравнений.</li> </ul>

#### 4. Структура и содержание дисциплины (модуля).

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную ра- боту студентов, и их трудоемкость (в академических часах)	Формы текущего контроля успева- емости  Форма промежу- точной аттеста- ции (по семестрам)  Формы ЭО и ДОТ
			Контактная работа	

			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Необходимые и достаточные условия экстремума функции	4	2	4				4	Задания для домашней работы
2	Функционалы. Определения и примеры	4	2	2				4	Задания для домашней работы
3	Простейшие задачи вариационного исчисления. Основная лемма вариационного исчисления	4	2	4		1		4,5	Задания для домашней работы
	<i>в том числе с ЭО и ДОТ</i>							2	<i>Индивидуальные задания ЭУК в LMS Moodle</i>
4	Необходимые условия условного экстремума	4	2	2				4	Задания для домашней работы
5	Уравнение Эйлера-Лагранжа. Частные случаи	4	4	2		1		7,5	Контрольная работа
6	Функционалы, зависящие от высших производных	4	2	2		1		4,5	Задания для домашней работы
	<i>в том числе с ЭО и ДОТ</i>							2	<i>Индивидуальные задания ЭУК в LMS Moodle</i>
7	Принцип наименьшего действия в механике	4	2	4				3,2	Задания для домашней работы
8	Функционалы от функций многих переменных							3	Задания для домашней работы
							0,3		Зачет
	<b>Всего</b>		17	17		3	0,3	34,7	
	<i>в том числе с ЭО и ДОТ</i>							4	

*Примечание: объем (в часах) самостоятельной работы в рамках установленного данной РПД количества часов, выполняемой студентом с применением ЭО и ДОТ (в ЭУК «Вариационное исчисление» в LMS Moodle), определяется каждым студентом в зависимости от уровня его подготовки и способов выполнения данного вида работ.*

### Содержание разделов дисциплины:

#### Раздел 1.

Необходимые и достаточные условия экстремума функции

#### Раздел 2.

Функционалы. Определения и примеры

<u>Раздел 3.</u>	Простейшие задачи вариационного исчисления. Основная лемма вариационного исчисления
<u>Раздел 4.</u>	Необходимые условия условного экстремума
<u>Раздел 5.</u>	Уравнение Эйлера-Лагранжа. Частные случаи
<u>Раздел 6.</u>	Уравнение Эйлера-Лагранжа. Частные случаи
<u>Раздел 7.</u>	Принцип наименьшего действия в механике
<u>Раздел 8.</u>	Функционалы от функций многих переменных

## 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

В процессе обучения используются следующие технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии: **Электронный учебный курс «Вариационное исчисление» в LMS Электронный университет Moodle ЯрГУ**, в котором:

- представлены задания для самостоятельной работы обучающихся по темам дисциплины;
- осуществляется проведение отдельных мероприятий текущего контроля успеваемости студентов;
- представлены тексты лекций по отдельным темам дисциплины;
- представлены правила прохождения промежуточной аттестации по дисциплине;
- представлен список учебной литературы, рекомендуемой для освоения дисциплины;
- представлена информация о форме и времени проведения консультаций по дисциплине в режиме онлайн;
- посредством форума осуществляется синхронное и (или) асинхронное взаимодействие между обучающимся и преподавателем в рамках изучения дисциплины.

## 6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

#### **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

#### **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

а) основная литература:

1. М.В. Федорюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: «Наука», 1980.
2. Л.Э.Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: «Наука», 1969.
3. В.И. Арнольд. Математические методы классической механики. М.: «Наука», 1977.

б) дополнительная литература:

1. В.И. Смирнов. Курс высшей математики. М.: «Наука», 1974, Т. 4. Вып. 1.
2. Л.П. Карташов, Б.Л. Рождественский. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: «Наука», 1980.

#### **8. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Лекционная аудитория

Аудитория, предназначенная для проведения практических занятий

Доски обычные, меловые

Компьютерный проектор, экран

Компьютерный класс на 10-15 компьютеров

Автор:

Профессор кафедры микроэлектроники и общей физики, доктор физ.-мат. наук, доцент

Куликов А.Н.

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Вариационное исчисление»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, ха-  
рактеризующих этапы формирования компетенций**

**1.1 Контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

**Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной  
аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение са-  
мостоятельной работы студентов.**

*(проверка сформированности ОПК-1, индикатор ИД-ОПК-1\_1  
(в части умения нахождения экстремали, умения исследования функционала)*

*Контрольная работа № 1*

Примерные контрольные задания к дисциплине "Вариационное исчисление"

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функций

a)  $z = x - 2y - 3, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1;$

b)  $z = x^2 - xy + y^2, |x| + |y| \leq 1;$

c)  $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq \infty;$

2. Найти экстремаль для функционала

a)  $F(y) = \int_0^2 (\dot{y}^2 - y) dt, y(0) = 1, y(2) = 1;$

b)  $F(y) = \int_0^2 (\dot{y}^2 + 12xy) dt, y(0) = 0, y(1) = 0;$

c)  $F(y) = \int_0^1 (0.5\dot{y}^2 + y) dt, y(0) = 0.5, y(1) = 1;$

d)  $F(y) = \int_0^\pi (0.5\dot{y}^2 - y^2) dt, y(0) = 0, y(\pi) = 0.$

3. Найти экстремаль, если

$$F(y) = \int_0^2 (t + y) dt, y(1) = 0, y(2) = 1.$$

Показать, что данная задача не имеет решения.

4. Принцип наименьшего действия

$$\int_0^{t_0} \left( \frac{m\dot{y}^2}{2} - U(y) \right) dt.$$

Показать, что уравнение Лагранжа – Эйлера – это уравнение Ньютона

$$m\ddot{y} = -U'(y).$$

5. В условиях предыдущей задачи пусть  $U(y) = lmg(1 - \cos y)$ .  $l$  – длина нити,  $m$  – ее масса,  $g$  – ускорение свободного падения. Тогда уравнение Эйлера – Лагранжа – это уравнение математического маятника.

6. Показать, что для интеграла Дирихле

$$F(u) = \iint_D (u_x^2 + u_y^2) dx dy \quad (D \subset R^2)$$

уравнением Эйлера – Лагранжа будет уравнение  $\Delta u = 0$ , т.е. уравнение Лапласа.

7. Пусть

$$F(u) = \int_0^l \int_{t_1}^{t_2} (0.5\rho u_t^2 - 0.5Tu_x^2) dt dx.$$

$\rho$  – плотность материала,  $T$  – сила натяжения нити. Показать, что уравнение Эйлера – Лагранжа в данном случае будет известное уравнение колебаний струны.

8. Определить положение равновесия тяжелой однородной нити.

9. Среди всех кривых длины  $l$ , соединяющих две данные точки  $A$  и  $B$ , определить кривую, ограничивающую вместе с прямоугольным отрезком  $AB$  наибольшую площадь.

Правила выставления оценки по результатам самостоятельной работы:

Оценка по результатам самостоятельной работы считается в баллах по следующему принципу:

- за каждое полностью правильно выполненное задание – 3 балла;
- при решении допущены незначительные ошибки – 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены грубые ошибки – 1 балл.

**2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

**Вопросы к зачету**

1. Необходимые и достаточные условия экстремума функции. Функционалы.
2. Определения и примеры. Простейшие задачи вариационного исчисления.
3. Основная лемма вариационного исчисления. Необходимые условия условного



- экстремума.
4. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Частные случаи.
  5. Функционалы, зависящие от высших производных.
  6. Принцип наименьшего действия в механике.
  7. Функционалы от функций многих переменных.

### **Описание процедуры выставления оценки**

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

**Приложение №2 к рабочей программе дисциплины**  
**«Вариационное исчисление»**  
*(наименование дисциплины)*

**Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Автор считает целесообразным изложить некоторые свои соображения по вопросам, связанным с изучением данной дисциплины, других дисциплин и обучением на математическом факультете вообще.

Итак, вы выбрали для вашего образования математический факультет классического университета. Какие условия необходимы для овладения профессией математика? По мнению автора, таких условий пять:

- твёрдый характер;
- критическое отношение к себе;
- способность заниматься математикой и желание это делать;
- регулярные занятия математикой;
- хорошее здоровье.

Очень часто не все эти элементы имеются в наличии; в этом случае начинать нужно с работы по тем позициям, где вы сами видите свои недостатки. Однако даже в случае, когда эти условия соблюдены, в обучении студента могут присутствовать определённые трудности.

Одна из главных заключается в том, что студенты часто неправильно отвечают для себя на вопрос, в чём заключается понимание в математике, каков их уровень понимания, какова степень математизации их мышления. Дело в том, что даже регулярное посещение лекций и практических занятий не гарантирует хорошего понимания предмета. Для усвоения материала требуется большая самостоятельная работа по теоретическим вопросам и решению задач. Знать, помнить определения и формулировки теорем, конечно, необходимо, но это ещё не значит полностью понимать материал. Не следует заучивать математические факты так, как учат, например, стихи. Надо выработать в себе привычку осмысливать их, обдумывать, анализировать. Так, "чистое" знание определения без умения его применять в несложной ситуации должно быть оценено неудовлетворительно.

Особо следует сказать о необходимости и пользе изучения математических доказательств. Не секрет, что сейчас доказательство изживается из школьной математики. Однако именно доказательства, а не формулировки результатов, составляют суть математики. Именно доказательный стиль мышления выделяет математика из представителей многих других профессий и именно доказательства наиболее значительны для повышения степени математизации мышления. Не следует думать, что, прослушав доказательство на лекции, вы его полностью поняли и усвоили. Попробуйте воспроизвести его дома - как правило, вы встретитесь со значительными трудностями. В этом нет ничего необычного.

По нашему мнению, даже в каждом простом на вид доказательстве закодированы те откровения, находки и открытия, которые были сделаны его автором много лет назад. И хотя они сглажены при изложении на лекции или на страницах учебника, они существуют и требуют осмысления. Каждый скачок в познании, сделанный давным-давно учёным-математиком должен иметь своё отражение в голове изучающего этот предмет много лет спустя. Поэтому математика трудна не только для творчества, но и для изучения. В известном смысле изучение математики само является творчеством, только творчеством для себя. Трудность математического знания имеет и другую сторону: математические истины устойчивы, непеременимы и даже вечны. Это очень привлекательное качество нашей науки.

**Учебно-методическое обеспечение  
самостоятельной работы студентов по дисциплине**

**Монографии и учебные пособия**

1. М.В. Федорюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: «Наука», 1980.
2. Л.Э.Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: «Наука», 1969.
3. В.И. Смирнов. Курс высшей математики. М.: «Наука», 1974, Т. 4. Вып. 1.