

Министерство образования Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

**В.А. Краснов**

**Современная  
дифференциальная геометрия**

*Учебное пособие*

Ярославль 2000

**В 151.6я73**

**К78**

**Краснов В.А.**

**Современная дифференциальная геометрия: Учеб. пособие**  
**/ Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2000. 88 с.**  
**ISBN 5-8397-0062-2**

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов 3-го курса, обучающихся по направлению и по специальности "Математика". Оно может служить введением в современную геометрию и может быть использовано при чтении спецкурсов. В нем подробно обсуждаются такие важные геометрические объекты, как многообразия и расслоения, дифференциальные формы и связности. Центральной является глава, посвященная римановой геометрии. Предварительно излагаются элементы полилинейной алгебры.

**Рецензенты:** проф. А.С. Тихомиров, кафедра геометрии Ярославского государственного педагогического университета.

**ISBN 5-8397-0062-2**

© Ярославский  
государственный  
университет, 2000  
© Краснов В.А., 2000

---

**Краснов Вячеслав Алексеевич**  
**Современная дифференциальная геометрия**

**Редактор, корректор А.А. Аладьева**

**Лицензия ЛР № 020319 от 30.12.96.**

**Подписано в печать 09.03.2000. Формат 60х84/16. Бумага тип.**

**Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,11. Уч.-изд. л. 4,5.**

**Тираж 75 экз. Заказ № 95**

**Оригинал-макет подготовлен**  
**в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.**

**Отпечатано на ризографе.**  
**150000 Ярославль, ул. Советская, 14.**

## Содержание

Введение	4
Глава I. Элементы полилинейной алгебры.	5
1. Полилинейные отображения.	5
2. Тензорное произведение.	8
3. Тензорная алгебра векторного пространства.	10
Глава II. Локальная риманова геометрия.	14
1. Векторные поля в области $R^n$ .	14
2. Риманова метрика в области $R^n$ .	19
3. Ковариантное дифференцирование.	22
4. Аффинная связность.	23
5. Риманова связность.	26
6. Изометрии римановой области.	29
7. Вариационное определение геодезических.	31
8. Плоскость Лобачевского.	34
9. Тензор кривизны римановой связности.	36
10. Внешние дифференциальные формы.	41
Глава III. Геометрия многообразий.	46
1. Криволинейные координаты в $R^n$ .	46
2. Группы преобразований как многообразия в $N$ -мерном пространстве.	48
2.1. Задание многообразия системой уравнений.	48
2.2. Экспонента от матрицы.	49
2.3. Группы $GL(n, R)$ , $SL(n, R)$ , $O(n, R)$ , $SO(n, R)$ .	50
3. Топологические многообразия.	52
4. Карты и атласы.	55
5. Проективное пространство.	56
6. Абстрактные дифференцируемые многообразия.	58
7. Обобщенная формула Стокса.	60
7.1. Формула Стокса для $n$ -мерного куба.	60
7.2. Дифференцируемые многообразия с краем.	63
7.3. Когомологии де Рама.	66
Глава IV. Комплексный язык в геометрии.	68
1. Комплексные векторы и ковекторы.	68
2. Многообразия, заданные комплексными уравнениями.	70
3. Плоские комплексные кривые.	72
4. Кватернионы.	74
5. Вещественные и комплексные коники.	77
6. Зачем нужен комплексный язык в геометрии?	79

Глава V. Векторные расслоения и связности.	80
1. Определение и примеры векторных расслоений.	80
2. Касательное расслоение.	82
3. Сечения векторного расслоения.	83
4. Ковариантная производная и связность.	84
Заключение.	87
Литература.	88

## Введение

В современных рабочих учебных планах для специальности "Математика" на изучение дифференциальной геометрии отводится 36 часов. За это время можно только познакомиться с классической дифференциальной геометрией кривых и поверхностей в  $\mathbb{R}^3$ . Таким образом, возникает необходимость в дополнительном изучении дифференциальной геометрии. Данное пособие должно помочь в решении этой задачи. Например, оно будет полезным при изучении курса по выбору "Современная геометрия". Заметим, что в этом пособии мы излагаем в основном темы, связанные с римановой геометрией. Задачи, которые приводятся в тексте пособия, можно решать на практических занятиях, а также предлагать их для самостоятельного решения при прохождении соответствующей темы. Некоторые задачи можно предложить в качестве тем курсовых работ.

Скажем несколько слов о содержании пособия и особенностях изложения рассматриваемых тем. Первая глава является вспомогательной, она посвящена полилинейной алгебре. При изложении этой темы была использована книга [3]. Центральной является вторая глава, посвященная римановой геометрии. Здесь мы излагаем только локальную риманову геометрию, но стиль изложения такой, что основные определения и теоремы без труда переносятся для геометрии многообразий. При написании этой главы использовались книги [1], [4]. Для дальнейшего изучения римановой геометрии очень полезна книга Э.Картана [2], впрочем, ее трудно достать. Третья глава посвящена многообразиям. Здесь отводится много материала для знакомства с этим понятием, в частности, рассмотрены классические группы как подмногообразия арифметического пространства. Наконец, даются указания, как переписать главу II для многообразий. Кроме этого, мы излагаем теорию интегрирования дифференциальных форм на многообразии, в частности,

доказывается обобщенная формула Стокса. Четвертая глава является специфической. Она посвящена комплексному языку в геометрии. При написании этой главы использовалась книга [1]. Эта глава, в частности, может служить введением в комплексную дифференциальную геометрию. Последняя глава знакомит с дифференциальной геометрией векторных расслоений. В ней обобщаются некоторые предыдущие понятия, и она подготавливает читателя к изучению более фундаментальных трудов по современной геометрии.

## Глава I. ЭЛЕМЕНТЫ ПОЛИЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

### 1. Полилинейные отображения.

Далее  $V, W, V_1, V_2, \dots, W_1, W_2, \dots$  — векторные пространства над полем  $K$ , причем  $K$  равно  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ .

**Определение 1.1.** Отображение  $f: V \rightarrow W$  линейное, если для всех  $v, v_1, v_2 \in V$ ,  $a \in K$  выполняются равенства

$$f(av) = af(v), \quad f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2).$$

**Задача 1.2.** Показать, что для линейного отображения  $f: V \rightarrow W$  выполняется равенство

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(v_i),$$

где  $a_i \in K$ ,  $v_i \in V$ .

**Задача 1.3.** Пусть  $v_1, \dots, v_n$  — базис  $V$ ,  $w_1, \dots, w_m$  — базис  $W$ . Показать, что существует и единственное линейное отображение  $f_k^l: V \rightarrow W$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $1 \leq l \leq m$ , такое, что

$$f_k^l(v_i) = \begin{cases} w_l, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Написать матрицу отображения  $f_k^l$ .

**Задача 1.4.** Обозначим через  $L(V, W)$  множество линейных отображений из  $V$  в  $W$ . Ввести на этом множестве операцию сложения и операцию умножения на скаляры из  $K$ ; показать, что получается векторное пространство; показать, что отображения  $f_k^l$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $1 \leq l \leq m$ , из задачи 1.3 образуют базис векторного пространства  $L(V, W)$ ; доказать равенство

$$\dim L(V, W) = \dim V \cdot \dim W$$

Векторное пространство  $L(V, K)$  обозначается через  $V^*$  и называется двойственным к  $V$  пространством. Его элементы называются линейными функциями или линейными формами. Как правило, линейные формы будут обозначаться греческими буквами:  $\alpha : V \rightarrow K, \alpha(v)$ .

Задача 1.5. Пусть  $v_1, \dots, v_n$  — базис  $V$ . Показать, что существует и единственная линейная форма  $v_i^*, 1 \leq i \leq n$ , такая, что

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Задача 1.6. Показать, что формы  $v_1^*, \dots, v_n^*$  образуют базис пространства  $V^*$ .

Задача 1.7. Показать, что если вектор  $v \in V$  имеет в базисе  $v_1, \dots, v_n$  координаты  $a_1, \dots, a_n$ , то  $v_i^*(v) = a_i$ .

Заметим, что базис  $v_1^*, \dots, v_n^*$  пространства  $V^*$  называют двойственным базисом к базису  $v_1, \dots, v_n$  пространства  $V$ . Линейная форма

$$\alpha = a_1 v_1^* + \dots + a_n v_n^*$$

обычно записывается следующим образом (почему?)

$$\alpha = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n,$$

где  $x_1, \dots, x_n$  — переменные координаты вектора  $v \in V$ . В частности,  $v_i^* = x_i$ .

Задача 1.8. Рассмотрим "дважды двойственное к  $V$  пространство"  $V^{**} = (V^*)^*$ . Показать, что отображение  $\varepsilon : V \rightarrow V^{**}$ , определенное равенством  $\varepsilon(v)(\alpha) = \alpha(v)$ , является линейным отображением. Показать, что для конечномерного пространства  $V$  отображение  $\varepsilon : V \rightarrow V^{**}$  является изоморфизмом.

Определение 1.9. Отображение  $f : V_1 \times V_2 \rightarrow W$  билинейное, если для всех  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, a \in K, v'_1, v''_1 \in V_1, v'_2, v''_2 \in V_2$  выполняются равенства

$$f(av_1, v_2) = af(v_1, v_2),$$

$$f(v_1, av_2) = af(v_1, v_2),$$

$$f(v'_1 + v''_1, v_2) = f(v'_1, v_2) + f(v''_1, v_2),$$

$$f(v_1, v'_2 + v''_2) = f(v_1, v'_2) + f(v_1, v''_2).$$

Другими словами, функция  $f(v_1, v_2)$  от двух векторных переменных  $v_1, v_2$  линейна по  $v_1$  и  $v_2$ .

Задача 1.10. Показать, что следующие отображения билинейны:

$$K \times V \rightarrow V, (a, v) \mapsto av,$$

$$V^* \times V \rightarrow K, (\alpha, v) \mapsto \alpha(v).$$

Задача 1.11. Пусть  $v_1^1, \dots, v_n^1$  — базис  $V_1$ ,  $v_1^2, \dots, v_m^2$  — базис  $V_2$ ,  $w_1, \dots, w_l$  — базис  $W$ . Показать, что существует и единственное билинейное отображение

$$f_{pq}^r : V_1 \times V_2 \rightarrow W, \quad 1 \leq p \leq n, \quad 1 \leq q \leq m, \quad 1 \leq r \leq l$$

такое, что

$$f_{pq}^r(v_i^1, v_j^2) = \begin{cases} w_r, & \text{если } i = p, j = q; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Задача 1.12. Обозначим через  $L(V_1, V_2; W)$  множество билинейных отображений  $V_1 \times V_2$  в  $W$ . Ввести на этом множестве операцию сложения и операцию умножения на скаляры из  $K$ ; показать, что получается векторное пространство; показать, что отображения  $f_{pq}^r$ ,  $1 \leq p \leq n$ ,  $1 \leq q \leq m$ ,  $1 \leq r \leq l$ , из задачи 1.11 образуют базис пространства  $L(V_1, V_2; W)$ ; доказать равенство

$$\dim L(V_1, V_2; W) = \dim V_1 \cdot \dim V_2 \cdot \dim W.$$

Элементы пространства  $L(V, V; K)$  называются билинейными формами на  $V$ . Как правило, билинейные формы будут обозначаться греческими буквами:

$$\beta : V \times V \rightarrow K, \quad \beta(v, v').$$

Задача 1.13. Пусть  $v_1, \dots, v_n$  — базис  $V$ . Показать, что существует и единственная билинейная форма  $\beta_{pq}$  на  $V$ ,  $1 \leq p \leq n$ ,  $1 \leq q \leq n$ , такая, что

$$\beta_{pq}(v_i, v_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = p, j = q; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Задача 1.14. Показать, что билинейные формы  $\beta_{pq}$ ,  $1 \leq p \leq n$ ,  $1 \leq q \leq n$ , из задачи 1.13 образуют базис пространства билинейных форм на  $V$ .

Билинейная форма

$$\beta = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \beta_{ij}$$

обычно записывается следующим образом

$$\beta = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x'_j,$$

где  $x_1, \dots, x_n$  — переменные координаты вектора  $v \in V$ , а  $x'_1, \dots, x'_n$  — координаты вектора  $v' \in V$ .

Задача 1.15. Доказать равенство

$$\beta_{ij}(v, v') = v_i^*(v) \cdot v_j^*(v'),$$

где  $v_1^*, \dots, v_n^*$  — двойственный базис.

Задача 1.16. Сформулировать определение полилинейного отображения

$$f: V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W.$$

Найти базис пространства полилинейных отображений  $L(V_1, \dots, V_k; W)$ .

Задача 1.17. Рассмотрим отображение

$$\det: \underbrace{K^n \times \dots \times K^n}_{n \text{ раз}} \rightarrow K,$$

где  $\det(v_1, \dots, v_n)$  — определитель матрицы, которая получается из векторов  $(v_1, \dots, v_n)$ , если их записать в столбцы. Показать, что отображение  $\det$  полилинейно.

## 2. Тензорное произведение.

Здесь мы будем рассматривать только конечномерные векторные пространства над  $K$ . Сначала определим тензорное произведение линейных форм.

**Определение 2.1.** Пусть  $\alpha_1 \in V_1^*$ ,  $\alpha_2 \in V_2^*$ , тогда тензорное произведение этих форм  $\alpha_1 \otimes \alpha_2$  принадлежит пространству  $L(V_1, V_2; K)$  и по определению равно

$$(\alpha_1 \otimes \alpha_2)(v_1, v_2) = \alpha_1(v_1) \cdot \alpha_2(v_2). \quad (2.1)$$

Задача 2.2. Показать, что  $\alpha_1 \otimes \alpha_2$  действительно принадлежит пространству  $L(V_1, V_2; K)$ .

Задача 2.3. Показать, что отображение

$$\otimes: V_1^* \times V_2^* \rightarrow L(V_1, V_2; K),$$



заданное равенством (2.1), билинейно.

**Задача 2.4.** Показать, что если  $\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1$  – базис  $V_1^*$ ,  $\alpha_1^2, \dots, \alpha_m^2$  – базис  $V_2^*$ , то  $\alpha_i^1 \otimes \alpha_j^2$ ,  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ , – базис пространства  $L(V_1, V_2; K)$ .

**Определение 2.5.** Тензорное произведение векторов из  $V_1$  на векторы из  $V_2$  – это билинейное отображение

$$\otimes : V_1 \times V_2 \rightarrow W,$$

где  $W$  – некоторое векторное пространство, причем это отображение должно удовлетворять требованию: если  $v_1^1, \dots, v_n^1$  – базис пространства  $V_1$ ,  $v_1^2, \dots, v_m^2$  – базис  $V_2$ , то произведения  $v_i^1 \otimes v_j^2$ ,  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ , образуют базис пространства  $W$ .

**Теорема 2.6.** Тензорное произведение существует и оно единственное (с точностью до изоморфизма).

**Доказательство.** Так как канонические отображения

$$\varepsilon : V_1 \rightarrow V_1^{**}, \quad \varepsilon : V_2 \rightarrow V_2^{**}$$

являются изоморфизмами, то достаточно построить тензорное произведение для пространств  $V_1^{**} = (V_1^*)^*$ ,  $V_2^{**} = (V_2^*)^*$ . Но для них годится конструкция из определения 2.1, а задача 2.4 показывает, что это произведение удовлетворяет требованию в определении 2.5. Существование доказано, перейдем к доказательству единственности (с точностью до изоморфизма). Пусть имеется два таких произведения, то есть два билинейных отображения

$$\otimes : V_1 \times V_2 \rightarrow W, \quad \otimes' : V_1 \times V_2 \rightarrow W'.$$

Если  $v_1^1, \dots, v_n^1$  – базис  $V_1$ ,  $v_1^2, \dots, v_m^2$  – базис  $V_2$ , то произведения  $v_i^1 \otimes v_j^2$  образуют базис  $W$ , а произведения  $v_i^1 \otimes' v_j^2$  – базис  $W'$ . Существует и единственный изоморфизм  $f : W \rightarrow W'$  такой, что  $f(v_i^1 \otimes v_j^2) = v_i^1 \otimes' v_j^2$ ,  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ . Осталось заметить, что  $f \circ \otimes = \otimes'$ , так как это равенство означает, что произведения  $\otimes, \otimes'$  совпадают с точностью до изоморфизма. Теорема доказана.

Заметим, что векторное пространство  $W$  в определении 2.5 называется тензорным произведением пространств  $V_1, V_2$  и обозначается через  $V_1 \otimes V_2$ . Итак, тензорное произведение векторов задает отображение

$$\otimes : V_1 \times V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2.$$

**Задача 2.7.** Определить тензорное произведение векторов  $v_1 \otimes \dots \otimes v_k$  из пространств  $V_1, \dots, V_k$ . Построить канонические изоморфизмы

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 = V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3.$$

**Пример 2.8.** Комплексификация вещественного векторного пространства.

Рассмотрим  $C$  как векторное пространство над  $R$ . Пусть  $V$  — векторное пространство над  $R$ , тогда тензорное произведение  $C \otimes V$  является векторным пространством над  $R$ , но его можно рассматривать как векторное пространство над  $C$ , если положить  $a \cdot (b \otimes v) = (ab) \otimes v$ , где  $a, b \in C$ ,  $v \in V$ . Тензорное произведение  $C \otimes V$ , рассматриваемое как векторное пространство над  $C$ , называется комплексификацией  $V$  и обозначается через  $V_C$ . Если элемент  $1 \otimes v + i \otimes w$ ,  $v, w \in V$ , обозначить через  $v + iw$ , то получим, что комплексификация  $V_C$  состоит из выражений  $v + iw$ . Операции над этими выражениями производятся естественным образом, в частности,

$$(a + ib) \cdot (v + iw) = (av - bw) + i(bv + aw),$$

где  $a + ib \in C$ .

**Задача 2.9.** Пусть  $f : V_1 \times V_2 \rightarrow W$  — билинейное отображение. Показать, что существует и единственное линейное отображение  $g : V_1 \otimes V_2 \rightarrow W$  такое, что выполняется равенство  $g \circ \otimes = f$ .

**Задача 2.10.** Показать, что существует канонический изоморфизм

$$(V_1 \otimes V_2)^* = V_1^* \otimes V_2^*.$$

### 3. Тензорная алгебра векторного пространства.

Далее  $V$  — конечномерное векторное пространство над полем  $K$ . Через  $T^q(V)$  обозначим тензорное произведение

$$\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{q \text{ раз}},$$

а его элементы будем называть тензорами ранга  $q$ . Если  $v_1, \dots, v_n$  — базис  $V$ , то тензоры  $v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_q}$ ,  $1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_q \leq n$ , образуют базис пространства  $T^q(V)$ . Таким образом, для  $t \in T^q(V)$  имеем разложение

$$t = \sum t^{i_1 \dots i_q} v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_q}.$$

Тензор  $t \in T^q(V)$  называется разложимым, если существуют векторы  $v_1, \dots, v_q \in V$  такие, что  $t = v_1 \otimes \dots \otimes v_q$ .

Задача 3.1. Пусть  $\sigma$  – перестановка чисел  $\{1, \dots, q\}$ . Показать, что существует и единственное линейное отображение

$$f_\sigma : T^q(V) \rightarrow T^q(V),$$

которое действует на разложимых тензорах по правилу

$$f_\sigma(v_1 \otimes \dots \otimes v_q) = v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(q)}.$$

**Определение 3.2.** Тензор  $t \in T^q(V)$  называется симметрическим (кососимметрическим), если  $f_\sigma(t) = t$  ( $f_\sigma(t) = \varepsilon(\sigma)t$ ) для каждой перестановки  $\sigma$ , где  $\varepsilon(\sigma)$  – знак перестановки  $\sigma$ .

Множество симметрических тензоров в  $T^q(V)$  обозначается через  $S^q(V)$ , а множество кососимметрических — через  $\Lambda^q(V)$ .

Задача 3.3. Показать, что множества  $S^q(V)$ ,  $\Lambda^q(V)$  являются векторными подпространствами  $T^q(V)$ .

Далее предполагается, что поле  $K$  имеет нулевую характеристику. Рассмотрим линейное отображение

$$S : T^q(V) \rightarrow T^q(V),$$

которое определяется равенством

$$S(t) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} f_\sigma(t).$$

Это отображение называется симметризацией.

Задача 3.4. Показать, что  $S^2 = S$ ,  $\text{Im } S = S^q(V)$ .

Рассмотрим линейное отображение

$$A : T^q(V) \rightarrow T^q(V),$$

которое определяется равенством

$$A(t) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) f_\sigma(t).$$

Оно называется антисимметризацией или альтернированием.

Задача 3.5. Показать, что  $A^2 = A$ ,  $\text{Im } A = \Lambda^q(V)$ .

Введем следующее обозначение: если  $v_1, \dots, v_n$  — базис  $V$ , то  $S(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_q})$  обозначим через  $v_{i_1} \dots v_{i_q}$ . Формальное произведение  $v_{i_1} \dots v_{i_q}$  не меняется при перестановке индексов, поэтому можно условиться выбирать в качестве канонической записи таких симметрических тензоров следующую запись:

$$v_1^{a_1} \dots v_n^{a_n}, \quad \text{где } a_i \geq 0, \quad a_1 + \dots + a_n = q,$$

где число  $a_i$  показывает, сколько раз вектор  $v_i$  фигурирует в  $v_{i_1} \dots v_{i_q}$ .

Задача 3.6. Доказать, что тензоры  $v_1^{a_1} \dots v_n^{a_n} \in S^q(V)$ ,  $a_i \geq 0$ ,  $a_1 + \dots + a_n = q$ , образуют базис пространства  $S^q(V)$ . Показать, что

$$\dim S^q(V) = \binom{n+q-1}{q}.$$

Введем обозначение

$$A(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_q}) = v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_q}$$

(значок  $\wedge$  называется символом внешнего умножения). Заметим теперь, что перестановка любых двух векторов в  $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_q}$  меняет знак этого произведения.

Задача 3.7. Показать, что:

- 1)  $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_q} = 0$ , если  $i_a = i_b$  для некоторых  $a, b$ ;
- 2) тензоры вида  $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_q}$ , где  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq n$ , образуют базис пространства  $\Lambda^q(V)$  при  $1 \leq q \leq n$ ;

3)  $\Lambda^q(V) = 0$  при  $q > n$ ;

4)  $\dim \Lambda^q(V) = \binom{n}{q}$  при  $1 \leq q \leq n$ .

Положим

$$T^0(V) = K, \quad T(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} T^q(V).$$

Бесконечномерное пространство  $T(V)$  с операцией тензорного умножения называется тензорной алгеброй пространства  $V$ .

Положим

$$S^0(V) = K, \quad S(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} S^q(V).$$

Введем на пространстве  $S(V)$  билинейное умножение по формуле

$$t_1 t_2 = S(t_1 \otimes t_2), \quad t_1 \in S^p(V), \quad t_2 \in S^q(V).$$

Задача 3.8. Показать, что  $S(V)$  с введенным умножением является коммутативной ассоциативной алгеброй над полем  $K$ .

Положим

$$\Lambda^0(V) = K, \quad \Lambda(V) = \bigoplus_{q=0}^n \Lambda^q(V).$$

Введем на пространстве  $\Lambda(V)$  билинейное умножение по формуле

$$t_1 \wedge t_2 = A(t_1 \otimes t_2), \quad t_1 \in \Lambda^p(V), \quad t_2 \in \Lambda^q(V).$$

Задача 3.9. Показать, что  $\Lambda(V)$  с введенным умножением является ассоциативной алгеброй над полем  $K$ , удовлетворяющей свойству

$$t_2 \wedge t_1 = (-1)^{pq} t_1 \wedge t_2, \quad t_1 \in \Lambda^p(V), \quad t_2 \in \Lambda^q(V).$$

Алгебра  $\Lambda(V)$  называется внешней алгеброй или алгеброй Грассмана пространства  $V$ .

Задача 3.10. Используя определение 2.1 показать, что:

- 1)  $T^q(V^*)$  – пространство полилинейных функций

$$f: \underbrace{V \times \dots \times V}_{q \text{ раз}} \rightarrow K;$$

- 2)  $S^q(V^*)$  – пространство симметрических полилинейных функций, т.е.

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)}) = f(v_1, \dots, v_q);$$

- 3)  $\Lambda^q(V^*)$  – пространство кососимметрических полилинейных функций, т.е.

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)}) = \varepsilon(\sigma) f(v_1, \dots, v_q);$$

- 4) если  $t_1 \in T^p(V^*)$ ,  $t_2 \in T^q(V^*)$ , то

$$(t_1 \otimes t_2)(v_1, \dots, v_{p+q}) = t_1(v_1, \dots, v_p) \cdot t_2(v_{p+1}, \dots, v_{p+q});$$

- 5) если  $t_1 \in S^p(V^*)$ ,  $t_2 \in S^q(V^*)$ , то

$$(t_1 \cdot t_2)(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma} t_1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \cdot t_2(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)});$$

- 6) если  $t_1 \in \Lambda^p(V^*)$ ,  $t_2 \in \Lambda^q(V^*)$ , то

$$(t_1 \wedge t_2)(v_1, \dots, v_{p+q}) =$$

$$\frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) t_1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \cdot t_2(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}).$$

## Глава II. ЛОКАЛЬНАЯ РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ

### 1. Векторные поля в области $R^n$ .

Далее  $U$  — область в  $R^n$ . Пусть  $x_0 \in U$  — фиксированная точка, тогда через  $T_{x_0}U$  будем обозначать множество векторов в  $R^n$  с началом в точке  $x_0$  (см. рис.1). Это множество является, на самом деле, векторным пространством. Оно называется касательным пространством к  $U$  в точке  $x_0$ .

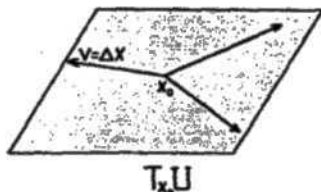


Рисунок 1.

Пусть далее  $f(x)$  — функция, определенная в окрестности точки  $x_0$ . Будем предполагать, что она класса  $C^\infty$  в этой окрестности. Тогда определен дифференциал этой функции  $df(x_0)$  и он является линейной формой на касательном пространстве  $T_{x_0}U$ . Действительно, дифференциал  $df(x_0)$  является линейной функцией от приращения  $\Delta x$ , но  $\Delta x$  — это вектор с началом в точке  $x_0$ . Таким образом, дифференциал  $df(x_0)$  является элементом двойственного пространства  $(T_{x_0}U)^*$ . Оно обозначается через  $T_{x_0}^*U$  и называется кокасательным пространством к  $U$  в точке  $x_0$ . Элементы пространства  $T_{x_0}^*U$  называются касательными ковекторами. Итак, дифференциал  $df(x_0)$  является касательным ковектором. Рассмотрим дифференциалы координатных функций  $dx_1, \dots, dx_n$ . Равенство  $dx_i = \Delta x_i$  означает, что значение дифференциала  $dx_i$  на векторе  $v = \Delta x$  равно  $i$ -ой координате вектора  $v$  в стандартном базисе  $e_1, \dots, e_n$ . Таким образом, дифференциалы координатных функций  $dx_1, \dots, dx_n$  в точке  $x_0$  являются элементами двойственного базиса  $e_1^*, \dots, e_n^*$ , а разложение

дифференциала функции  $f(x)$

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} dx_i$$

является разложением ковектора  $df(x_0)$  по базису ковекторов  $c_1^*, \dots, c_n^*$ .

Если функции  $f_1, f_2$  совпадают при ограничении их на маленькую окрестность точки  $x_0$ , то дифференциалы  $df_1(x_0), df_2(x_0)$  равны. Отсюда следует, что удобно рассматривать дифференциал от роста функции. Будем говорить, что функции  $f_1, f_2$  имеют одинаковые ростки в точке  $x_0$ , если при ограничении их на достаточно маленькую окрестность точки  $x_0$  получаем равные функции. Заметим, что мы рассматриваем только функции класса  $C^\infty$ . Можно дать определение роста более формально следующим образом. Пусть функции  $f_1, f_2$  определены в окрестностях  $U_1, U_2$  точки  $x_0$ , соответственно. Будем считать функции  $f_1, f_2$  эквивалентными ( $f_1 \sim f_2$ ), если существует третья окрестность  $U_3 \subset U_1 \cap U_2$  точки  $x_0$  такая, что  $f_1|_{U_3} = f_2|_{U_3}$ . Тогда росток функции  $f$  — это класс эквивалентности данной функции. Множество ростков функций в точке  $x_0$  обозначим через  $\mathcal{O}_{x_0}$ . Росток функции  $f$  будем обозначать через  $[f]$ , а если не приводит к путанице, то просто через  $f$ . Формулы

$$c[f] = [cf], \quad [f] + [g] = [f + g], \quad [f] \cdot [g]$$

определяют операцию умножения роста на число, операцию сложения ростков и операцию умножения ростков. Благодаря этим операциям множество  $\mathcal{O}_{x_0}$  становится алгеброй над полем  $\mathbb{R}$ . Дифференциал определяет отображение

$$d: \mathcal{O}_{x_0} \rightarrow T_{x_0}^* U,$$

которое линейно над  $\mathbb{R}$  и удовлетворяет правилу Лейбница

$$d([f] \cdot [g]) = g(x_0) \cdot d[f] + f(x_0) \cdot d[g].$$

Если  $f \in \mathcal{O}_{x_0}$  и  $v \in T_{x_0}$ , то число  $df(x_0)(v)$  будем обозначать через  $\partial_v(f)$  и называть производной  $f$  по направлению вектора  $v$ . В результате получаем отображение

$$\partial_v: \mathcal{O}_{x_0} \rightarrow \mathbb{R},$$

которое линейно над  $\mathbb{R}$  и удовлетворяет правилу Лейбница

$$\partial_v(f \cdot g) = g(x_0) \cdot \partial_v(f) + f(x_0) \cdot \partial_v(g).$$

**Определение 1.1.** *Отображение  $\partial : \mathcal{O}_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  называется дифференцированием алгебры  $\mathcal{O}_{x_0}$ , если оно линейно над  $\mathbb{R}$  и удовлетворяет правилу Лейбница*

$$\partial(f \cdot g) = g(x_0) \cdot \partial f + f(x_0) \cdot \partial g.$$

**Задача 1.2.** Показать, что  $\partial(C) = 0$ , где  $C = \text{const}$ .

Таким образом, каждый касательный вектор  $v \in T_{x_0}U$  определяет дифференцирование алгебры  $\mathcal{O}_{x_0}$ . В частности, базисные векторы  $e_1, \dots, e_n$  определяют дифференцирования  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ , то есть

$$\partial_{e_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обозначим через  $D_{x_0}$  множество дифференцирований алгебры  $\mathcal{O}_{x_0}$ , тогда формулы

$$(c\partial)(f) = c\partial(f), \quad (\partial_1 + \partial_2)(f) = \partial_1(f) + \partial_2(f)$$

определяют операцию умножения на число и операцию сложения во множестве  $D_{x_0}$ , благодаря которым  $D_{x_0}$  становится векторным пространством.

**Теорема 1.3.** *Дифференцирования  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  образуют базис пространства дифференцирований  $D_{x_0}$ .*

Сначала будет доказана

**Лемма 1.4.** *Пусть  $f(x)$  функция класса  $C^\infty$  в сферической окрестности  $U$  точки  $0 \in \mathbb{R}^n$ , тогда существуют функции класса  $C^\infty$   $g_1(x), \dots, g_n(x)$  в области  $U$  такие, что*

$$f(x) = f(0) + g_1(x) \cdot x_1 + \dots + g_n(x) \cdot x_n,$$

$$g_1(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial x_1}, \dots, g_n(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial x_n}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим равенства

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt} dt =$$

$$\int_0^1 \left( \sum_1^n \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} \cdot x_i \right) dt = \sum_1^n \left( \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt \right) \cdot x_i.$$



Осталось положить

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt, \quad i = 1, \dots, n.$$

Лемма доказана.

**Доказательство теоремы.** Покажем сначала, что дифференцирования  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  линейно независимы. Если имеем соотношение

$$a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} = 0,$$

то, применяя его к координатной функции  $x_i$ , получим равенство  $a_i = 0$ . Итак, линейная независимость дифференцирований  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  доказана. Пусть теперь  $\partial$  — произвольное дифференцирование, покажем, что существуют такие числа  $a_1, \dots, a_n$ , что

$$\partial = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Для этого положим  $a_i = \partial(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , (что необходимо) и проверим, что дифференцирование

$$\partial' = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

совпадает с дифференцированием  $\partial$ . Для сокращения записи мы можем рассматривать только случай  $x_0 = 0$ , в противном случае можно совершить замену координат  $x \rightarrow x - x_0$ . Пусть  $f \in \mathcal{O}_0$ , докажем равенство  $\partial(f) = \partial'(f)$ . По лемме 1.4 имеем разложение

$$f(x) = f(0) + \sum_i g_i(x) \cdot x_i, \quad g_i(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial x_i}.$$

Применим лемму 1.4 к функциям  $g_1(x), \dots, g_n(x)$ , тогда получим, что существуют функции  $h_{ij}(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , такие, что

$$g_i(x) = g_i(0) + \sum_j h_{ij}(x) \cdot x_j.$$

Следовательно, имеем разложение

$$f(x) = f(0) + \sum_i \frac{\partial f(0)}{\partial x_i} \cdot x_i + \sum_{i,j} h_{ij}(x) \cdot x_i x_j.$$

Применим теперь дифференцирования  $\partial, \partial'$  к этому разложению, тогда получим равенства

$$\partial(f) = \sum_i a_i \frac{\partial f(0)}{\partial x_i}, \quad \partial'(f) = \sum_i a_i' \frac{\partial f(0)}{\partial x_i}.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает, что отображение  $T_{x_0}^* \rightarrow D_{x_0}$ , заданное правилом  $v \rightarrow \partial_v$ , является изоморфизмом векторных пространств.

Пусть для каждой точки  $x \in U$  задан вектор  $v(x) \in T_x U$ , тогда говорят, что задано *векторное поле*  $v(x)$  на  $U$ . Векторное поле  $v(x)$  можно разложить по базису  $e_1, \dots, e_n$ :

$$v(x) = a_1(x)e_1 + \dots + a_n(x)e_n,$$

где  $a_1(x), \dots, a_n(x)$  функции на  $U$ . Если все эти функции принадлежат классу  $C^\infty$ , то векторное поле  $v(x)$  называется *дифференцируемым* (бесконечное число раз). Множество дифференцируемых векторных полей на  $U$  обозначим через  $\mathcal{T}(U)$ . На этом множестве определена операция умножения на число и операция сложения, они превращают его в векторное пространство.

Обозначим через  $\mathcal{O}(U)$  множество функций класса  $C^\infty$  на  $U$ . На этом множестве определена операция сложения и операция умножения, которые превращают его в коммутативное кольцо. Если  $v(x)$  – векторное поле,  $a(x)$  – функция, то определено векторное поле  $a(x)v(x)$ . Благодаря этой операции умножения на функции множество  $\mathcal{T}(U)$  становится модулем над кольцом  $\mathcal{O}(U)$ . Мы хотим определить еще одну операцию на множестве дифференцируемых векторных полей, она обозначается через  $[v_1, v_2]$  и называется *коммутатором* векторных полей  $v_1, v_2$ .

**Теорема 1.5.** Пусть  $v_1, v_2$  – дифференцируемые векторные поля на  $U$ , тогда существует и единственное дифференцируемое векторное поле  $w$  на  $U$  такое, что для каждой функции  $f \in \mathcal{O}(U)$  выполняется равенство

$$\partial_w(f) = \partial_{v_2}(\partial_{v_1}(f)) - \partial_{v_1}(\partial_{v_2}(f)). \quad (1.1)$$

**Доказательство.** Пусть

$$v_1 = \sum_i a_1^i e_i, \quad v_2 = \sum_i a_2^i e_i.$$

Вычислим правую часть равенства (1.1)

$$\begin{aligned}
 & \partial_{v_2}(\partial_{v_1}(f)) - \partial_{v_1}(\partial_{v_2}(f)) = \\
 & \left(\sum_j a_2^j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \left(\left(\sum_i a_1^i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)(f)\right) - \left(\sum_j a_1^j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \left(\left(\sum_i a_2^i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)(f)\right) = \\
 & \left(\sum_j a_2^j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \left(\sum_i a_1^i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) - \left(\sum_j a_1^j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \left(\sum_i a_2^i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \\
 & \sum_{i,j} a_2^j \cdot \frac{\partial a_1^i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{i,j} a_1^j \cdot \frac{\partial a_2^i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = \\
 & \left(\sum_i \left(\sum_j \left(a_2^j \frac{\partial a_1^i}{\partial x_j} - a_1^j \frac{\partial a_2^i}{\partial x_j}\right)\right) \frac{\partial}{\partial x_i}\right)(f).
 \end{aligned}$$

Из этих вычислений следует, что векторное поле

$$w = \sum_i \left(\sum_j \left(a_2^j \frac{\partial a_1^i}{\partial x_j} - a_1^j \frac{\partial a_2^i}{\partial x_j}\right)\right) e_i$$

является искомым векторным полем, причем других векторных полей, удовлетворяющих равенству (1.1), нет. Теорема доказана.

Векторное поле  $w$  из теоремы 1.5 обозначается через  $[v_1, v_2]$  и называется коммутатором векторных полей  $v_1, v_2$ .

Задача 1.6. Пусть  $v_1, v_2, v_3$  дифференцируемые векторные поля на  $U$ . Показать, что выполняются следующие равенства:

- 1)  $[v_2, v_1] = -[v_1, v_2]$ ,
- 2)  $[a_1 v_1 + a_2 v_2, v_3] = a_1 [v_1, v_3] + a_2 [v_2, v_3]$ ,  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ ,
- 3)  $[v_1, [v_2, v_3]] + [v_2, [v_3, v_1]] + [v_3, [v_1, v_2]] = 0$ ,
- 4)  $[f v_1, v_2] = f [v_1, v_2] - (\partial_{v_2} v_1) f$ ,  $f \in O(U)$ .

## 2. Риманова метрика в области $\mathbb{R}^n$ .

Пусть на каждом касательном векторном пространстве  $T_x U$ ,  $x \in U$ , определено скалярное умножение  $(v, w)_x$ ,  $v, w \in T_x U$ ; тогда говорят, что на  $U$  задана риманова метрика. Таким образом, риманова метрика — это "поле" скалярных умножений. Опишем риманову метрику в координатах. Если  $g_{ij}(x) = (e_i, e_j)_x$  и  $v = v^1 e_1 + \dots + v^n e_n$ ,  $w = w^1 e_1 + \dots + w^n e_n$ , то

$$(v, w)_x = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) v^i w^j. \quad (2.1)$$

Данная риманова метрика называется дифференцируемой, если все функции  $g_{ij}(x)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , являются функциями класса  $C^\infty$ . Далее мы предполагаем, что риманова метрика дифференцируемая. Так как  $v^i = dx_i(v)$ ,  $w^j = dx_j(w)$ , то равенство (2.1) можно записать следующим образом

$$(v, w)_x = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx_i(v) \cdot dx_j(w).$$

С помощью римановой метрики можно определить длину вектора  $v \in T_x U$  по формуле

$$|v| = \sqrt{(v, v)_x} = \left( \sum_{i,j} g_{ij}(x) v^i v^j \right)^{1/2},$$

а также угол между векторами  $v, w \in T_x U$  по формуле

$$\cos(\widehat{v, w}) = \frac{(v, w)_x}{|v| \cdot |w|} = \frac{\sum_{i,j} g_{ij}(x) v^i w^j}{\left( \sum_{i,j} g_{ij}(x) v^i v^j \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i,j} g_{ij}(x) w^i w^j \right)^{1/2}}.$$

Кроме этого, определяется длина кривой  $\Gamma \subset U$ , заданной параметрически:  $x = x(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , по формуле

$$s(\Gamma) = \int_a^b |\dot{x}(t)| dt = \int_a^b \left( \sum_{i,j} g_{ij}(x(t)) \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t) \right)^{1/2} dt. \quad (2.2)$$

Предполагается, что параметризация  $x = x(t)$  класса  $C^1$ .

Вектор

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

называется вектором скорости (см. рис.2). Произведение  $|\dot{x}(t)| dt$  можно рассматривать как "бесконечно малый" путь, пройденный за "бесконечно малое" время  $dt$ , поэтому интеграл в формуле (2.2) можно рассматривать как путь, пройденный от момента  $t = a$  до момента  $t = b$ ,

что оправдывает определение длины кривой по формуле (2.2). Благодаря формуле (2.2) риманову метрику обычно обозначают следующим образом

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx_i dx_j,$$

где  $ds$  – дифференциал длины параметрической кривой.

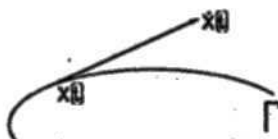


Рисунок 2.

В качестве примера рассмотрим метрику Лобачевского на круге  $x^2 + y^2 < 1$

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Если положить  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ , то получим равенства

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2}, \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

Далее мы найдем линии в этом круге, которые выполняют роль прямых в этой "плоскости Лобачевского", в частности, интервалы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 1 \\ y = kx \end{cases}$$

являются "прямыми", проходящими через точку  $O(0,0)$ . Вычислим длину отрезка "прямой":  $x \in [0; 1/2]$ ,  $y = 0$ . Имеем

$$s = \int_0^{1/2} \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

Задача 2.1. Показать, что каждый радиус окружности  $x^2 + y^2 = 1/4$  имеет в метрике Лобачевского длину  $\frac{1}{2} \ln 3$ . Найти длину окружности  $x^2 + y^2 = 1/4$  в метрике Лобачевского.

### 3. Ковариантное дифференцирование.

Пусть  $v \in T_{x_0}U$  – касательный вектор,  $w(x)$  – дифференцируемое векторное поле, определенное в окрестности точки  $x_0 \in U$ . Тогда определена производная функции  $w(x)$  в точке  $x_0$  по направлению  $v$ , которая обозначается через  $\partial_v w$ . Эта производная определяется равенством

$$\partial_v w = \sum_i (\partial_v w^i) e_i,$$

где  $w_1(x), \dots, w_n(x)$  – координаты  $w(x)$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ . Удобнее дифференцировать ростки векторных полей. Они определяются так же, как ростки функций. Множество ростков дифференцируемых векторных полей в точке  $x_0$  будем обозначать через  $T_{x_0}$ . Это множество является векторным пространством над  $\mathbf{R}$ , а также модулем над кольцом  $\mathcal{O}_{x_0}$ . Таким образом, дифференцирование векторного поля по направлению вектора задает отображение

$$\partial : T_{x_0} \times T_{x_0} \rightarrow T_{x_0}, \quad (v, w) \rightarrow \partial_v w.$$

Предлагается проверить, что это отображение удовлетворяет свойствам:

- 1)  $\partial$  – билинейное отображение;
- 2)  $\partial$  удовлетворяет правилу Лейбница

$$\partial_v(fw) = \partial_v f \cdot w(x_0) + f(x_0) \cdot \partial_v w,$$

где  $f \in \mathcal{O}_{x_0}$ .

**Определение 3.1.** Ковариантное дифференцирование векторных полей в точке  $x_0$  – это билинейное отображение

$$\nabla : T_{x_0} \times T_{x_0} \rightarrow T_{x_0}, \quad (v, w) \rightarrow \nabla_v w,$$

удовлетворяющее правилу Лейбница

$$\nabla_v(fw) = \partial_v f \cdot w(x_0) + f(x_0) \cdot \nabla_v w,$$

где  $f \in \mathcal{O}_{x_0}$ .

Таким образом, обычное дифференцирование  $\partial$  дает пример ковариантного дифференцирования. Сравним произвольное ковариантное дифференцирование с обычным дифференцированием. Для этого обозначим через  $\Gamma_{ij}^k$   $k$ -ую координату вектора  $\nabla_{e_i} e_j$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ , то есть

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k e_k.$$

Числа  $\Gamma_{ij}^k$ ,  $1 \leq i, j, k \leq n$ , называются символами Кристоффеля для данного ковариантного дифференцирования.

**Теорема 3.2.** Выполняется равенство

$$\nabla_v w = \partial_v w + \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k v^i w^j e_k, \quad (3.1)$$

где  $v^1, \dots, v^n$  — координаты  $v$ ,  $w^1, \dots, w^n$  — координаты  $w$ .

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \nabla_v w &= \nabla_{\sum_i v^i e_i} \sum_j w^j e_j = \sum_i v^i \nabla_{e_i} \sum_j w^j e_j = \\ &= \sum_i v^i \sum_j (\partial_{e_i} w^j) e_j + \sum_i v^i \sum_j w^j \nabla_{e_i} e_j = \\ &= \sum_i v^i \partial_{e_i} w + \sum_i v^i \sum_{j,k} w^j \Gamma_{ij}^k e_k = \\ &= \partial_v w + \sum_{j,k} \Gamma_{ij}^k v^i w^j e_k. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Замечание 3.3.** Набор чисел  $\Gamma_{ij}^k$  определяет билинейное отображение  $\Gamma: T_{x_0} \times T_{x_0} \rightarrow T_{x_0}$  по формуле

$$\Gamma(v, w) = \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k v^i w^j e_k. \quad (3.2)$$

Таким образом формулу (3.1) можно записать следующим образом

$$\nabla_v w = \partial_v w + \Gamma(v, w(x_0)), \quad (3.3)$$

где  $\Gamma(v, w(x_0))$  — билинейное отображение, определенное формулой (3.2).

**Замечание 3.4.** Если  $\Gamma: T_{x_0} \times T_{x_0} \rightarrow T_{x_0}$  — произвольное билинейное отображение, то формула (3.3) определяет ковариантное дифференцирование.

#### 4. Аффинная связность.

Пусть в каждой точке  $x \in U$  задано ковариантное дифференцирование, то есть билинейное отображение

$$\nabla: T_x \times T_x \rightarrow T_x,$$

удовлетворяющее правилу Лейбница. Тогда говорят, что на  $U$  определена аффинная связность. Таким образом, аффинная связность является "полем" ковариантных дифференцирований. Если  $v(x), w(x)$  дифференцируемые векторные поля, то ковариантная производная в переменной точке  $\nabla_{v(x)} w(x)$  является векторным полем. Мы будем предполагать, что векторное поле  $\nabla_{v(x)} w(x)$  является дифференцируемым для каждого дифференцируемого векторного поля  $v(x), w(x)$ . В этом случае связность называется дифференцируемой. Заметим, что для выполнения этого условия достаточно потребовать дифференцируемости векторных полей  $\nabla_{e_i} e_j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , где  $e_1, \dots, e_n$  рассматриваются как векторные поля. Так как  $k$ -ая координата векторного поля  $\nabla_{e_i} e_j$  является символом Кристоффеля  $\Gamma_{ij}^k(x)$ , то для дифференцируемости связности достаточно потребовать, чтобы символы Кристоффеля были функциями класса  $C^\infty$ .

Главное значение аффинной связности состоит в том, что она дает возможность определить новый параллельный перенос вдоль параметрической кривой. Но сначала мы определим ковариантную производную вдоль кривой.

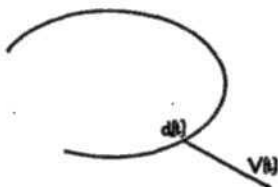


Рисунок 3.

Пусть дана параметрическая кривая класса  $C^\infty$  в области  $U$ , то есть отображение класса  $C^\infty$   $\alpha : I \rightarrow U$ , где  $I$  — промежуток в  $\mathbb{R}$ . Векторное поле вдоль кривой  $\alpha$  — это функция  $v(t)$ ,  $t \in I$ , такая, что  $v(t) \in T_{\alpha(t)} U$  (см. рис.3). Мы предполагаем, что функция  $v(t)$  класса  $C^\infty$ . Векторному полю  $v(t)$  вдоль кривой  $\alpha$  соответствует новое векторное поле  $\frac{Dv(t)}{dt}$  вдоль кривой  $\alpha$ , называемое ковариантной производной поля  $v(t)$ . Операция  $v(t) \rightarrow \frac{Dv(t)}{dt}$  определяется следующими аксиомами:

- 1) если  $v(t), w(t)$  — векторные поля вдоль кривой  $\alpha$ , то

$$\frac{D(v(t) + w(t))}{dt} = \frac{Dv(t)}{dt} + \frac{Dw(t)}{dt};$$



2) если  $f(t)$  функция класса  $C^\infty$  на  $I$ , то

$$\frac{D(f(t)v(t))}{dt} = \frac{df(t)}{dt} \cdot v(t) + f(t) \cdot \frac{Dv(t)}{dt};$$

3) если  $v(t)$  индуцировано дифференцируемым векторным полем  $w(x)$  на  $U$ , то есть  $v(t) = w(\alpha(t))$  при каждом  $t \in I$ , то

$$\frac{Dv(t)}{dt} = \nabla_{\dot{\alpha}(t)} w.$$

**Теорема 4.1.** Существует одна и только одна операция  $v(t) \rightarrow \frac{Dv(t)}{dt}$ , удовлетворяющая трем перечисленным условиям.

**Доказательство.** Если  $v(t) = \sum_j v^j(t) e_j$ , то из аксиом 1), 2), 3) вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{Dv(t)}{dt} &= \sum_j \left( \frac{dv^j(t)}{dt} e_j + v^j(t) \nabla_{\dot{\alpha}(t)} e_j \right) = \\ &= \sum_k \left( \frac{dv^k(t)}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx_i(t)}{dt} \Gamma_{ij}^k(\alpha(t)) v^j(t) \right) e_k, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  — координаты  $\alpha(t)$ . Обратно, не трудно проверить, что определенная последним равенством операция  $\frac{Dv(t)}{dt}$  удовлетворяет условиям 1), 2), 3). Теорема доказана.

**Определение 4.2.** Векторное поле  $v(t)$  вдоль кривой  $\alpha(t)$  называется параллельным, если его ковариантная производная  $\frac{Dv(t)}{dt}$  тождественно равна нулю.

**Теорема 4.3.** Пусть дана кривая  $\alpha(t)$  и вектор  $v_0 \in T_{\alpha(t_0)} U$ . Тогда существует одно и только одно параллельное векторное поле  $v(t)$  вдоль кривой  $\alpha(t)$  такое, что  $v(t_0) = v_0$ .

**Доказательство.** Дифференциальные уравнения

$$\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx_i(t)}{dt} \Gamma_{ij}^k(\alpha(t)) v^j = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

имеют решение  $v^k(t)$  однозначно определенное начальными данными  $v^k(t_0) = v_0^k$ . Так как уравнения линейны, то решения можно определить для всех  $t \in I$ . Теорема доказана.

## 5. Риманова связность.

Пусть на  $U$  задана риманова метрика  $(v, w)_x$  и связность  $\nabla$ . Связность совместима с римановой метрикой, если параллельный перенос, заданный этой связностью, сохраняет скалярное произведение. То есть для любой параметрической кривой  $\alpha(t)$  в  $U$  и для любой пары параллельных векторных полей  $v(t), w(t)$  вдоль  $\alpha(t)$  скалярное произведение  $(v(t), w(t))_{\alpha(t)}$  не зависит от  $t$ .

**Теорема 5.1.** Предположим, что связность совместима с римановой метрикой и  $v(t), w(t)$  — два векторных поля вдоль кривой  $\alpha(t)$ . Тогда выполняется равенство

$$\frac{d}{dt}(v(t), w(t))_{\alpha(t)} = \left( \frac{Dv(t)}{dt}, w(t) \right)_{\alpha(t)} + \left( v(t), \frac{Dw(t)}{dt} \right)_{\alpha(t)}. \quad (5.1)$$

**Доказательство.** Выберем ортонормированный базис в  $T_{\alpha(t_0)}U$   $e_1, \dots, e_n$ , и затем параллельно разнесем его вдоль кривой  $\alpha(t)$ . Тогда получим параллельные векторные поля  $e_1(t), \dots, e_n(t)$ , образующие ортонормированный базис в каждой точке  $\alpha(t)$ . Векторные поля  $v(t), w(t)$  можно разложить по базису  $e_1(t), \dots, e_n(t)$

$$v(t) = \sum_i v^i(t) e_i(t), \quad w(t) = \sum_i w^i(t) e_i(t)$$

Следовательно,  $(v(t), w(t)) = \sum_i v^i(t) w^i(t)$  и

$$\frac{Dv(t)}{dt} = \sum_i \frac{Dv^i(t)}{dt} e_i(t), \quad \frac{Dw(t)}{dt} = \sum_i \frac{Dw^i(t)}{dt} e_i(t).$$

Поэтому,

$$\left( \frac{Dv}{dt}, w \right) + \left( v, \frac{Dw}{dt} \right) = \sum_i \left( \frac{dv^i}{dt} w^i + v^i \frac{dw^i}{dt} \right) = \frac{d}{dt}(v, w).$$

Теорема доказана.

**Следствие 5.2.** Для любых векторных полей  $v, w$  на  $U$  и вектора  $u \in T_{x_0}U$  выполняется равенство

$$\partial_u(v, w) = (\nabla_u v, w) + (v, \nabla_u w). \quad (5.2)$$

**Доказательство.** Выберем параметрическую кривую  $\alpha(t)$ , имеющую при  $t = 0$  вектор скорости  $u$ , а затем применим теорему 5.1, тогда

из равенства (5.1) получим при  $t = 0$  равенство (5.2). Следствие доказано.

Связность  $\nabla$  называется *симметрической*, если для любых векторных полей  $v, w$  выполняется равенство

$$\nabla_v w - \nabla_w v = [v, w]. \quad (5.3)$$

Применим соотношение (5.3) к базисным векторным полям  $e_i, e_j$ . Так как  $\partial_{e_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$ , то  $[e_i, e_j] = 0$ ; поэтому  $\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i = 0$ . Из равенства

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k$$

тогда получаем равенство

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (5.4)$$

Мы показали, что из равенства (5.3) следует равенство (5.4). Предлагается проверить, что верно обратное утверждение. Итак, симметричность связности означает симметричность символов Кристоффеля относительно нижних индексов.

**Теорема 5.3.** Существует и единственная симметрическая связность на  $U$ , совместимая с данной римановой метрикой.

**Доказательство.** Сначала установим единственность связности. Применим равенство (5.2) к базисным векторным полям  $e_i, e_j, e_k$ . Так как  $(e_i, e_j) = g_{ij}$ , то получаем тождество

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} = (\nabla_{e_i} e_j, e_k) + (e_j, \nabla_{e_i} e_k).$$

Переставляя индексы  $i, j, k$  получим еще следующие тождества

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = (\nabla_{e_k} e_i, e_j) + (e_i, \nabla_{e_k} e_j),$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = (\nabla_{e_j} e_i, e_k) + (e_i, \nabla_{e_j} e_k).$$

Из первого тождества вычтем второе, а затем прибавим третье, тогда получается первое тождество Кристоффеля (нужно использовать равенство  $\nabla_{e_i} e_j = \nabla_{e_j} e_i$ )

$$(\nabla_{e_i} e_j, e_k) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \right).$$

Левая часть этого тождества равна  $\sum_i \Gamma_{ij}^k g_{ik}$ . Умножая его на обратную к  $(g_{ik})$  матрицу  $(g^{ki})$ , получим второе тождество Кристоффеля

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_l \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \right) g^{kl} \quad (5.5)$$

Следовательно, связность однозначно определяется метрикой. Обратно, определяя  $\Gamma_{ij}^k$  формулой (5.5), можно проверить, что полученная связность симметрическая и совместна с заданной метрикой.

Теорема доказана.

Связность из теоремы 5.3 называется *римановой связностью* или *связностью Леви-Чивита*, ее символы Кристоффеля вычисляются по формуле (5.5). Далее рассматривается только риманова связность.

Параметрическая кривая  $\alpha: I \rightarrow U$  называется *геодезической*, если векторное поле ускорения  $\frac{D}{dt} \frac{d\alpha}{dt}$  тождественно равно нулю. Соответственно, поле скорости  $\frac{d\alpha}{dt}$  должно быть параллельным вдоль  $\alpha(t)$ . Если  $\alpha$  — геодезическая, то как показывает тождество

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right) = 2 \left( \frac{D}{dt} \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right) = 0,$$

длина  $\left| \frac{d\alpha}{dt} \right| = \left( \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right)^{1/2}$  вектора скорости постоянна вдоль  $\alpha$ . Вводя длину дуги

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| dt = \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| \cdot (t - t_0),$$

можно выразить это утверждение следующим образом: параметр  $t$  вдоль геодезической линейно зависит от длины дуги

$$t = \left| \frac{d\alpha}{dt} \right|^{-1} \cdot s + t_0$$

В координатах  $x_1, \dots, x_n$  уравнение  $\frac{D}{dt} \frac{d\alpha}{dt} = 0$  принимает вид

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(x_1, \dots, x_n) \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0. \quad (5.6)$$

## 6. Изометрии римановой области.

Пусть  $F : U \rightarrow U$  — отображение класса  $C^\infty$ ,  $x_0 \in U$ ,  $y_0 = F(x_0)$ , тогда дифференциал  $dF(x_0)$  задает линейное отображение

$$dF(x_0) : T_{x_0}U \rightarrow T_{y_0}U. \quad (6.1)$$

А именно

$$dF(x_0)(v) = \sum_{k=1}^n dF_k(x_0)(v) \cdot e_k,$$

где  $F_1(x), \dots, F_n(x)$  — координаты  $F(x)$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ . В частности, имеем равенство

$$dF(x_0)(e_i) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k(x_0)}{\partial x_i} e_k.$$

Таким образом, матрица линейного отображения (6.1) в базисе  $e_1, \dots, e_n$  является матрицей Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n(x_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Далее, для краткости, отображение (6.1) будем обозначать через

$$F_* : T_{x_0}U \rightarrow T_{y_0}U. \quad (6.3)$$

Пусть далее отображение  $F : U \rightarrow U$  является диффеоморфизмом класса  $C^\infty$ . Это означает, что отображение  $F : U \rightarrow U$  является биекцией, и отображения  $F, F^{-1}$  принадлежат классу  $C^\infty$ . Тогда матрица Якоби (6.2) имеет обратную матрицу, а именно матрицу Якоби отображения  $F^{-1} : U \rightarrow U$  в точке  $y_0$ . Следовательно, отображение касательных пространств (6.3) является изоморфизмом. Пусть на  $U$  определена риманова метрика  $(v, w)_x$ , тогда диффеоморфизм  $F : U \rightarrow U$  называется изометрией, если для каждой точки  $x \in U$  отображение  $F_* : T_xU \rightarrow T_yU$  сохраняет скалярное произведение, то есть

$$(v, w)_x = (F_*v, F_*w)_y, \quad y = F(x). \quad (6.4)$$

Так как

$$F_*e_i = \sum_k \frac{\partial F_k(x)}{\partial x_i} \cdot e_k, \quad F_*e_j = \sum_k \frac{\partial F_k(x)}{\partial x_j} \cdot e_k,$$

то из (6.4) получаем набор равенств

$$\sum_{k,l} g_{kl}(y) \frac{\partial F_k(x)}{\partial x_i} \frac{\partial F_l(x)}{\partial x_j} = g_{ij}(x). \quad (6.5)$$

Нетрудно проверить, что если выполняются равенства (6.5) при  $1 \leq i, j \leq n$ , то выполняется равенство (6.4). Заметим также, что набор равенств (6.5) равносильен равенству

$$\sum_{k,l} g_{kl}(y) dy_k dy_l = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx_i dx_j, \quad (6.6)$$

где  $y_k$  —  $k$ -ая координата функции  $y = F(x)$ .

В качестве примера рассмотрим евклидову метрику на  $\mathbb{R}^n$

$$ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2.$$

Это риманова метрика с  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

— символ Кронекера. Рассмотрим аффинное преобразование  $\mathbb{R}^n$   $y = Ax + b$ , где  $A = (a_{ij})$  — обратимая матрица,  $b \in \mathbb{R}^n$  — вектор. Равенство (6.5) тогда приобретет вид

$$\sum_{k,l} \delta_{kl} a_{ki} a_{lj} = \delta_{ij},$$

то есть

$$\sum_k a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij},$$

что означает ортогональность матрицы  $A$ .

Пусть  $\alpha(t)$  кривая в области  $U$ , тогда через  $\tilde{\alpha}(t)$  обозначим кривую  $F(\alpha(t))$ . Покажем, что при изометрии  $F: U \rightarrow U$  длины кривых  $\alpha(t)$ ,  $\tilde{\alpha}(t)$  совпадают. Действительно,

$$\begin{aligned} s(\tilde{\alpha}) &= \int_a^b \left| \frac{d\tilde{\alpha}}{dt} \right| dt = \int_a^b \left| \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{d\alpha}{dt} \right| dt = \\ &= \int_a^b \left| F_* \left( \frac{d\alpha}{dt} \right) \right| dt = \int_a^b \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| dt = s(\alpha). \end{aligned}$$

Далее мы покажем, что если  $\alpha(t)$  — геодезическая, а  $F: U \rightarrow U$  — изометрия, то кривая  $\tilde{\alpha}(t)$  также будет геодезической.

## 7. Вариационное определение геодезических.

Пусть  $L(x, v)$  — функция класса  $C^\infty$  точки  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$  и касательного вектора  $v = (v^1, \dots, v^n) \in T_x U$  в этой точке. Рассмотрим фиксированную пару точек  $x_0, x_1 \in U$  и всевозможные кривые класса  $C^\infty$   $\alpha(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  (с фиксированными  $t_0, t_1$ ), соединяющие эти точки:  $\alpha(t_0) = x_0$ ,  $\alpha(t_1) = x_1$ . Рассмотрим теперь величину

$$S[\alpha] = \int_{t_0}^{t_1} L(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) dt,$$

она называется действием. На какой кривой  $\alpha(t)$  действие  $S[\alpha]$  будет минимальным?

**Лемма 7.1.** Если  $S[\alpha]$  минимально, то для любой вектор-функции  $\beta(t)$  класса  $C^\infty$ , обращающейся в нуль на концах  $t_0, t_1$ , выполняется тождество

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\alpha + \varepsilon\beta]|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Доказательство получается из того, что функция  $S[\alpha + \varepsilon\beta]$  в точке  $\varepsilon = 0$  принимает минимальное значение.

**Теорема 7.2.** Если величина

$$S[\alpha] = \int_{t_0}^{t_1} L(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) dt$$

достигает минимума на некоторой кривой  $\alpha(t) = x(t)$ , то вдоль кривой  $x(t)$  выполнены уравнения

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7.1)$$

где

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L(x, v)}{\partial v^i} \Big|_{v=\dot{x}},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \ddot{x}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial x^j} \dot{x}_j \right) \Big|_{v=\dot{x}}.$$

**Доказательство.** Развернем выражение

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\alpha + \varepsilon\beta]|_{\varepsilon=0},$$

тогда имеем

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\alpha + \varepsilon\beta]|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \beta_i + \frac{\partial L}{\partial v^i} \dot{\beta}_i \right) \right) dt = 0, \quad (7.2)$$

где интеграл вычислен вдоль кривой  $\alpha(t) = x(t)$ . Это равенство верно для любой вектор-функции  $\beta(t)$  класса  $C^\infty$  такой, что  $\beta(t_0) = \beta(t_1) = 0$ . С помощью интегрирования по частям получаем равенства

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial v^i} \dot{\beta}_i dt = \left( \frac{\partial L}{\partial v^i} \beta_i \right) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) \beta_i dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) \beta_i dt.$$

Тогда равенство (7.2) можно записать следующим образом

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\alpha + \varepsilon\beta]|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_i \left[ \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] \beta_i \right) dt = 0. \quad (7.3)$$

Так как функции  $\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)$  могут быть любыми функциями  $C^\infty$ , обращающимися в нуль в точках  $t_0, t_1$ , то равенство (7.3) равносильно системе равенств (7.1). Теорема доказана.

Заметим, что решения системы уравнений (7.1) называются *экстремалими* функционала действия  $S[\alpha]$ . Они дают необходимые условия для того, чтобы значение  $S[\alpha]$  на заданной кривой  $\alpha(t) = x(t)$  было экстремальным. Имеются достаточные условия для этого, но про них речь пойдет в курсе "Методы оптимизации".

Пусть теперь на  $U$  задана риманова метрика

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx_i dx_j,$$

тогда рассмотрим функционал

$$S[\alpha] = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\alpha}(t)|^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{i,j} g_{ij}(\alpha(t)) \dot{\alpha}_i(t) \dot{\alpha}_j(t) \right) dt. \quad (7.4)$$

**Теорема 7.3.** *Экстремали функционала (7.4) — это в точности геодезические.*

**Доказательство.** Так как

$$L(x, v) = \sum_{k,l} g_{kl}(x) v^k v^l,$$



то

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} = 2 \sum_l g_{il} v^l, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{j,l} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} v^j v^l.$$

Поэтому уравнение (7.1) имеет вид

$$2 \sum_l g_{il} \ddot{x}_l + 2 \sum_{j,l} \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} \dot{x}_j \dot{x}_l - \sum_{j,l} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} \dot{x}_j \dot{x}_l = 0.$$

Так как

$$\sum_i g_{il} g^{ik} = \delta_l^k,$$

то получаем

$$\ddot{x}_k + \sum_{j,l} \left( \sum_i \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} \right) g^{ik} \right) \dot{x}_j \dot{x}_l = 0.$$

Из тождества

$$\sum_{i,j,l} \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} g^{ik} \dot{x}_j \dot{x}_l = \frac{1}{2} \sum_{i,j,l} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_l} \right) g^{ik} \dot{x}_j \dot{x}_l$$

получаем, что предыдущее уравнение имеет вид

$$\ddot{x}_k + \sum_{j,l} \Gamma_{jl}^k \dot{x}_j \dot{x}_l = 0,$$

где

$$\Gamma_{jl}^k = \sum_i \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right) g^{ik},$$

то есть получаем уравнение геодезических (5.6). Теорема доказана.

**Следствие 7.4.** Если  $F: U \rightarrow U$  — изометрия,  $\alpha(t)$  — геодезическая, то  $\tilde{\alpha}(t) = F(\alpha(t))$  — также геодезическая.

**Доказательство.** Так как  $S[\tilde{\alpha}] = S[\alpha]$ , то кривые  $\alpha, \tilde{\alpha}$  становятся одновременно экстремалими функционала  $S$ . Это вытекает из определения экстремали

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\alpha + \varepsilon \beta] \Big|_{\varepsilon=0} \equiv 0.$$

Следствие доказано.

**Задача 7.5.** Показать, что экстремали функционала

$$S = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\alpha}(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{i,j} g_{ij}(\alpha(t)) \dot{\alpha}_i(t) \dot{\alpha}_j(t) \right)^{1/2} dt$$

будут также совпадать с геодезическими, если рассматривать параметрические кривые с параметром пропорциональным натуральному параметру.

## 8. Плоскость Лобачевского.

Рассмотрим круг  $U = \{x^2 + y^2 < 1\}$  с метрикой Лобачевского

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Если положить  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ , то получим равенства

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2}, \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

Формула (5.5) приводит к следующим равенствам для символов Кристоффеля

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{2x_1}{1 - x_1^2 - x_2^2},$$

$$\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{2x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}.$$

Таким образом, уравнения геодезических имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{2x_1}{1 - x_1^2 - x_2^2}(\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2) + \frac{4x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}\dot{x}_1\dot{x}_2 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + \frac{2x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}(\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2) + \frac{4x_1}{1 - x_1^2 - x_2^2}\dot{x}_1\dot{x}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Непосредственно проверяется, что параметрическая кривая  $(x_1, x_2) = (th \ t, 0)$  удовлетворяет уравнениям (8.1), то есть является геодезической. Чтобы получить другие геодезические, мы рассмотрим всевозможные изометрии "плоскости Лобачевского". Эти изометрии хорошо записываются в комплексной форме. А именно, положим  $x + iy = z$ , тогда метрика Лобачевского приобретает вид

$$ds^2 = \frac{dz d\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2}. \quad (8.2)$$

Непосредственно проверяется, что дробно-линейное преобразование единичного круга

$$w = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad \theta \in \mathbb{R}, |a| < 1 \quad (8.3)$$

сохраняет метрику (8.2), то есть является изометрией.

В ТФКП доказывается, что интервал  $(-1; 1)$  на оси  $Ox$  при преобразовании (8.3) переходит в дугу окружности ортогональной стандартной окружности  $x^2 + y^2 = 1$  (см. рис.4). Так как через данную точку круга  $U$  в заданном направлении проходит одна такая окружность (см. рис.4), то получаем, что все геодезические исчерпываются такими дугами. Действительно, решения системы (8.1) определяются начальной точкой и вектором скорости в этой точке. В частности, все диаметры круга  $U$  являются геодезическими, что утверждалось раньше. Заметим, что геодезические играют роль прямых.

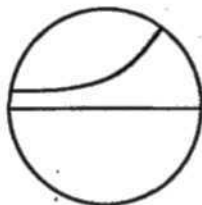


Рисунок 4.

Пусть  $A, B$  — две точки в круге  $U$  (см. рис.5), проведем через них единственную геодезическую; длину дуги  $AB$  обозначим через  $\rho(A, B)$  и назовем расстоянием от точки  $A$  до точки  $B$ . Это расстояние можно определить с помощью двойного отношения четырех точек. Пусть  $z_1, z_2, z_3, z_4$  четыре точки на комплексной плоскости  $C$ , тогда через  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  обозначается отношение

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2},$$

которое называется *двойным отношением*.

В ТФКП доказывается, что оно сохраняется при дробно-линейных отображениях, то есть если  $w_1, w_2, w_3, w_4$  — образы точек  $z_1, z_2, z_3, z_4$  при дробно-линейном отображении

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

то  $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ . Пусть  $\tilde{A}, \tilde{B}$  точки "пересечения" геодезической  $AB$  с окружностью  $|z| = 1$  (см. рис.5), тогда можно образовать двойное отношение  $(\tilde{A}, \tilde{B}, A, B)$ .

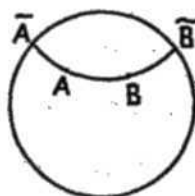


Рисунок 5.

**Теорема 8.1.** *Выполняется равенство*

$$\rho(A, B) = \frac{1}{2} \ln(\bar{A}, \bar{B}, A, B). \quad (8.4)$$

**Доказательство.** Обозначим правую часть равенства (8.4) через  $d(A, B)$ . Проверяется, что  $\rho(A, B)$  и  $d(A, B)$  удовлетворяют всем аксиомам расстояния. С другой стороны, они не меняются при дробно-линейных преобразованиях (8.3). Отсюда вытекает, что они должны быть пропорциональны. Осталось убедиться, что  $\rho(0, 1/2) = d(0, 1/2) = \frac{1}{2} \ln 3$ . Теорема доказана.

## 9. Тензор кривизны римановой связности.

Рассмотрим вторые смешанные ковариантные производные векторного поля  $v = v(x)$  на области  $U \subset \mathbb{R}^n$

$$\nabla_{e_j}(\nabla_{e_i} v), \quad \nabla_{e_i}(\nabla_{e_j} v).$$

Они не обязаны совпадать, в связи с этим  $l$ -ую координату векторного поля

$$\nabla_{e_j}(\nabla_{e_i} e_k) - \nabla_{e_i}(\nabla_{e_j} e_k)$$

обозначим через  $R_{ijk}^l$ . Тогда получим набор из  $n^4$  функций на  $U$ . Этот набор функций называется тензором кривизны исходной связности. Вычислим его через символы Кристоффеля.

**Теорема 9.1.** *Выполняются равенства*

$$R_{ijk}^l = \left( \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} \right) + \sum_s \left( \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l \right).$$

**Доказательство.** Для краткости обозначим  $\nabla_{e_i}$  через  $\nabla_i$ , тогда имеем равенства

$$\begin{aligned} \sum_i R_{ijk}^l e_l &= \nabla_j(\nabla_i e_k) - \nabla_i(\nabla_j e_k) = \nabla_j\left(\sum_s \Gamma_{ik}^s e_s\right) - \nabla_i\left(\sum_s \Gamma_{jk}^s e_s\right) = \\ &= \sum_s \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x_j} e_s + \sum_s \Gamma_{ik}^s \sum_t \Gamma_{js}^t e_t - \sum_s \frac{\partial \Gamma_{jk}^s}{\partial x_i} e_s - \sum_s \Gamma_{jk}^s \sum_t \Gamma_{is}^t e_t = \\ &= \sum_s \left( \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^s}{\partial x_i} \right) e_s + \sum_t \left( \sum_s (\Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^t - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^t) \right) e_t = \\ &= \sum_i \left[ \left( \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} \right) + \sum_s (\Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l) \right] e_l. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Можно дать более инвариантное определение тензора кривизны, то есть не зависящее от выбранного базиса  $e_1, \dots, e_n$ . По трем векторным полям  $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$  определим новое векторное поле  $R(u, v)w$  с помощью равенства

$$R(u, v)w = \nabla_u(\nabla_v w) - \nabla_v(\nabla_u w) - \nabla_{[u, v]}w. \quad (9.1)$$

**Теорема 9.2.** Значение  $R(u, v)w$  в точке  $x_0 \in U$  зависит только от значений векторных полей  $u(x), v(x), w(x)$  в этой точке, а не зависит от их значений в близких точках. Далее, соответствие

$$(u(x_0), v(x_0), w(x_0)) \rightarrow R(u(x_0), v(x_0))w(x_0)$$

является трilinearным отображением

$$T_{x_0}U \times T_{x_0}U \times T_{x_0}U \rightarrow T_{x_0}U.$$

**Доказательство.** Очевидно,  $R(u, v)w$  есть трilinearная функция от  $u, v, w$ . Если заменить  $u$  на  $fu$ , где  $f$  — функция, то три члена в правой части равенства (9.1) заменяются, соответственно, членами

- 1)  $\nabla_{fu}(\nabla_v w)$ ,
- 2)  $(\partial_v f)\nabla_u w + f\nabla_v(\nabla_u w)$ ,
- 3)  $-(\partial_v f)\nabla_u w + f\nabla_{[u, v]}w$ , поэтому получаем тождество

$$R(fu, v)w = fR(u, v)w.$$

Соответствующие тождества для  $u, w$  получаются при помощи аналогичных вычислений. Предположим теперь, что

$$u = \sum_i u^i e_i, v = \sum_j v^j e_j, w = \sum_k w^k e_k.$$

Тогда

$$R(u, v)w = \sum_{i,j,k} u^i v^j w^k R(e_i, e_j)e_k = \sum_{i,j,k,l} u^i v^j w^k R_{ijk}^l e_l.$$

Тем самым  $R(u, v)w$  в точке  $x_0$  зависит только от значений  $u^i(x_0), v^j(x_0), w^k(x_0)$ , то есть от значений  $u(x_0), v(x_0), w(x_0)$ . Теорема доказана.

**Замечание 9.3.** Теорема 9.2 показывает, что  $R(u, v)w$  является тензорным полем на  $U$ , а из доказательства видно, что  $R_{ijk}^l$  — координаты этого тензорного поля. Заметим, что значение  $R(u, v)w$  в точке  $x_0$  — это элемент тензорного произведения

$$T_{x_0}^* U \otimes T_{x_0}^* U \otimes T_{x_0}^* U \otimes T_{x_0} U.$$

**Теорема 9.4.** Тензор кривизны римановой связности удовлетворяет следующим соотношениям:

- 1)  $R(u, v)w = -R(v, u)w$ ,
- 2)  $R(u, v)w + R(v, w)u + R(w, u)v = 0$ ,
- 3)  $(R(u, v)w, z) = -(R(u, v)z, w)$ ,
- 4)  $(R(u, v)w, z) = (R(w, z)u, v)$ .

**Доказательство.** Соотношение кососимметричности 1) немедленно вытекает из определения тензора  $R$ . Так как все три слагаемых в формуле 2) тензоры, то достаточно доказать эту формулу в случае, когда векторные поля  $[u, v], [v, w], [w, u]$  равны нулю, например, для базисных векторных полей  $e_i, e_j, e_k$ . При этом предположении нужно проверить тождество

$$\nabla_u(\nabla_v w) - \nabla_v(\nabla_u w) + \nabla_v(\nabla_w u) - \nabla_w(\nabla_v u) + \nabla_w(\nabla_u v) - \nabla_u(\nabla_w v) = 0. \quad (9.2)$$

Но из симметрии связности вытекает, что

$$\nabla_v w - \nabla_w v = [v, w] = 0.$$

Поэтому первый член в сумме (9.2) сокращается с последним, остальные члены также попарно сокращаются, что доказывает соотношение 2).

Тождество 3) означает, что выражение  $(R(u, v)w, z)$  кососимметрично по  $w, z$ . Это эквивалентно утверждению, что  $(R(u, v)w, w) = 0$  при всех  $u, v, w$ . Снова можно предположить, что  $[u, v] = 0$ , так что  $(R(u, v)w, w)$  равно

$$(\nabla_u(\nabla_v w) - \nabla_v(\nabla_u w), w).$$

Иначе говоря, мы должны доказать симметричность выражения  $(\nabla_v(\nabla_u w), w)$  относительно  $u, v$ . Так как  $[u, v] = 0$ , то выражение  $\partial_u(\partial_v(w, w))$  симметрично относительно  $u, v$ . Из совместимости связности с метрикой получаем

$$\partial_u(w, w) = 2(\nabla_u w, w),$$

следовательно,

$$\partial_u(\partial_v(w, w)) = 2(\nabla_v(\nabla_u w), w) + 2(\nabla_u w, \nabla_v w).$$

Но второе слагаемое в последнем выражении симметрично относительно  $u, v$ , поэтому выражение  $(\nabla_v(\nabla_u w), w)$  также симметрично относительно  $u, v$ , что и доказывает свойство 3).

Свойство 4) выводится из предыдущих свойств, предлагается проверить это самостоятельно. Теорема доказана.

Замечание 9.5. В координатах тождества 1), 2) теоремы 9.4 записываются следующим образом:

- 1)  $R_{ijk}^l = -R_{jik}^l$ ,
- 2)  $R_{ijk}^l + R_{jki}^l + R_{kij}^l = 0$ .

Положим  $R_{ijkl} = (R(e_i, e_j)e_k, e_l)$ , то есть

$$R_{ijkl} = \sum_s R_{ijk}^s g_{sl},$$

тогда тождества 3), 4) записываются следующим образом:

- 3)  $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$ ,
- 4)  $R_{ijkl} = R_{klij}$ .

Заметим также, что тензор  $(R(u, v)w, z)$  называется тензором Римана, в каждой точке  $x_0 \in U$  он является элементом тензорного произведения

$$T_{x_0}^* U \otimes T_{x_0}^* U \otimes T_{x_0}^* U \otimes T_{x_0}^* U.$$

Набор функций

$$R_{jk} = \sum_i R_{ijk}^i$$

называется тензором Риччи, а функция

$$R = \sum_{j,k} g^{jk} R_{jk}$$

называется скалярной кривизной, где  $(g^{jk})$  – обратная матрица к  $(g_{jk})$ .

Задача 9.6. Дать инвариантное определение тензора Риччи и скалярной кривизны.

Пример 9.7. Рассмотрим поверхность в  $\mathbb{R}^3$ , заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v), \end{cases}$$

где  $u, v$  – параметры. Тогда первая квадратичная форма

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$$

определяет риманову метрику в области с координатами  $u, v$ . Пусть  $R$  – скалярная кривизна соответствующей римановой связности. Покажем, что  $R = -2K$ , где  $K$  – гауссова кривизна поверхности.

Положим  $u = u_1, v = u_2, E = g_{11}, F = g_{12} = g_{21}, G = g_{22}$ , а  $\Gamma_{ij}^k$  – символы Кристоффеля, то есть

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_l \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right) g^{lk}.$$

Тогда в дифференциальной геометрии поверхностей доказывается равенство

$$K = \frac{1}{g_{11}} \left[ \left( \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u_2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u_1} \right) + \sum_k (\Gamma_{11}^k \Gamma_{k2}^2 - \Gamma_{12}^k \Gamma_{k1}^2) \right],$$

то есть

$$K = \frac{1}{g_{11}} R_{121}^2.$$

Выразим  $K$  через тензор Римана

$$\frac{1}{g_{11}} R_{121}^2 = \frac{1}{g_{11}} \sum_l g^{2l} R_{121l} = \frac{1}{g_{11}} (g^{21} R_{1211} + g^{22} R_{1212}) =$$

$$\frac{g^{22}}{g_{11}} R_{12112} = \Delta \cdot R_{1212},$$



где  $\Delta = \det(g^{jk})$ . Таким образом,

$$K = \Delta \cdot R_{1212}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} R &= \sum_{j,k=1}^2 g^{jk} R_{jk} = \sum_{i,j,k=1}^2 g^{jk} R_{ijk}^i = \\ &= g^{11} R_{211}^2 + g^{12} R_{212}^2 + g^{21} R_{121}^1 + g^{22} R_{122}^1 = \\ &= g^{11} g^{22} R_{2112} + g^{12} g^{21} R_{2121} + g^{21} g^{12} R_{1212} + g^{22} g^{11} R_{1221} = \\ &= -g^{11} g^{22} R_{1212} + g^{12} g^{21} R_{1212} + g^{21} g^{12} R_{1212} - g^{22} g^{11} R_{1212} = \\ &= -2\Delta \cdot R_{1212}, \end{aligned}$$

то есть  $R = -2K$ .

Задача 9. §. Показать, что для метрики Лобачевского  $R = 8$ .

## 10. Внешние дифференциальные формы.

Сначала поговорим о внешних формах. Пусть  $V$  —  $n$ -мерное векторное пространство над полем  $K$ . Внешняя  $q$ -форма  $\omega^q$  на  $V$  — это кососимметрическая полинейная функция

$$\underbrace{V \times \dots \times V}_{q \text{ раз}} \rightarrow K$$

Согласно другому определению — это элемент пространства  $\Lambda^q(V^*)$  (см. задачу 3.10 в гл. I). Если  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $V$ , а  $e_1^*, \dots, e_n^*$  — двойственный базис  $V^*$ , то внешние произведения  $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_q}^*$ ,  $i_1 < \dots < i_q$ , образуют базис пространства внешних  $q$ -форм  $\Lambda^q(V^*)$ . Следовательно,

$$\dim \Lambda^q(V^*) = \binom{n}{q}.$$

В частности,  $\dim \Lambda^n(V^*) = 1$ .

Пусть далее  $V$  — вещественное векторное пространство. Тогда пространство  $\Lambda^n(V^*)$  изоморфно  $\mathbb{R}$ , но на нем нет фиксированного направления. Ориентация  $V$  — это направление на  $\Lambda^n(V^*)$  (см. рис.6). Так как возможны два направления, то на  $V$  возможны две ориентации.

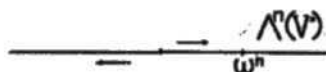


Рисунок 6.

Если мы выберем ненулевую форму  $\omega^n$ , то получим направление на  $\Lambda^n(V^*)$  от 0 к  $\omega^n$ . Таким образом, форма  $\omega^n$  задает ориентацию на  $V$ . Заметим, что формы  $\omega_1^n, \omega_2^n$  определяют одинаковую ориентацию, если  $\omega_2^n = a \cdot \omega_1^n$ , где  $a > 0$ . Пусть ориентация задана формой  $\omega^n$ , назовем базис  $e_1, \dots, e_n$  *положительным*, если  $\omega^n(e_1, \dots, e_n) > 0$ , в противном случае базис называется *отрицательным*. Таким образом, ориентация разбивает множество базисов на два класса эквивалентности. Если базис  $e'_1, \dots, e'_n$  получается из базиса  $e_1, \dots, e_n$  с помощью матрицы перехода  $A$ , то

$$\omega^n(e'_1, \dots, e'_n) = \det A \cdot \omega^n(e_1, \dots, e_n).$$

Поэтому базисы  $e_1, \dots, e_n$ ,  $e'_1, \dots, e'_n$  эквивалентны, если определитель матрицы перехода положительный. Заметим, что выбрав один из классов эквивалентности базисов, мы определим ориентацию на  $V$  требованием, чтобы задающая ориентацию форма  $\omega^n$  принимала на базисах выбранного класса положительные значения.

Пусть на  $V$  задано скалярное произведение, тогда оно определяет изоморфизм  $V \rightarrow V^*$ , заданный правилом: вектору  $v \in V$  сопоставляется линейная функция  $\tilde{v}(w) = (v, w)$ . Заметим, что если  $e_1, \dots, e_n$  — ортонормированный базис  $V$ , то линейные функции  $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$  образуют двойственный базис, то есть для ортонормированного базиса выполняется равенство  $\tilde{e}_i = e_i^*$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Положим  $(\tilde{v}, \tilde{w}) = (v, w)$ , тогда получим скалярное произведение на  $V^*$ , в частности, если  $e_1, \dots, e_n$  — ортонормированный базис в  $V$ , то  $e_1^*, \dots, e_n^*$  — ортонормированный базис в  $V^*$ . Если положить

$$(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_q, \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_q) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) (\alpha_1, \beta_{\sigma(1)}) \cdot \dots \cdot (\alpha_q, \beta_{\sigma(q)}),$$

то это умножение продолжается до скалярного умножения в пространстве внешних  $q$ -форм  $\Lambda^q(V^*)$ . В частности, если  $e_1, \dots, e_n$  — ортонорми-

рованный базис  $V$ , то  $q$ -формы  $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_q}^*$ ,  $i_1 < \dots < i_q$ , образуют ортонормированный базис  $\Lambda^q(V^*)$ .

Пусть на  $V$  задано скалярное произведение, тогда получим скалярное произведение на одномерном пространстве  $\Lambda^n(V^*)$ , благодаря этому определяются две  $n$ -формы единичной длины, которые определяют противоположные ориентации. Если на  $V$  фиксирована ориентация, то существует единственная  $n$ -форма единичной длины, определяющая данную ориентацию. Обозначим ее через  $\Omega^n$  и назовем формой объема. Пусть  $\beta^q \in \Lambda^q(V^*)$  и  $*\beta^q$  — такая  $(n-q)$ -форма, что для любой формы  $\alpha^q \in \Lambda^q(V^*)$  выполняется равенство

$$\alpha^q \wedge *\beta^q = (\alpha^q, \beta^q) \Omega^n.$$

Тогда проверяется, что форма  $*\beta^q$  существует и она единственная, причем отображение

$$*: \Lambda^q(V^*) \rightarrow \Lambda^{n-q}(V^*)$$

является линейным изоморфизмом. Это отображение называется оператором Ходжа.

Задача 10.1. Доказать утверждения:

- 1) если  $v_1, \dots, v_n$  — произвольный базис  $V$ ,  $g_{ij} = (v_i, v_j)$ , то  $(v_i^*, v_j^*) = g^{ij}$ , где  $(g^{ij})$  — обратная матрица к  $(g_{ij})$ ;
- 2) если  $\omega^q \in \Lambda^q(V^*)$ , то  $**\omega^q = (-1)^{q(n-q)}\omega^q$ ;
- 3)  $|\omega^q| = |*\omega^q|$ ;
- 4) если  $e_1, \dots, e_n$  — ортонормированный базис, то  $*(e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_q}^*) = \pm e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_{n-q}}^*$ , где  $\{j_1, \dots, j_{n-q}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_q\}$ .

Перейдем к определению внешних дифференциальных форм на области  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Если для каждой точки  $x \in U$  определена внешняя форма  $\omega_x^q \in \Lambda^q(T_x^*U)$ , то говорят, что определена внешняя дифференциальная  $q$ -форма  $\omega_x^q$  на  $U$ . Таким образом, внешняя дифференциальная  $q$ -форма на  $U$  — это поле внешних  $q$ -форм. Например, дифференциал функции  $df(x)$  является внешней дифференциальной 1-формой. А сама функция является внешней дифференциальной 0-формой. Пусть даны функции  $f_1(x), \dots, f_q(x), g(x)$ , тогда из них получается внешняя дифференциальная  $q$ -форма

$$\omega_x^q = g(x) df_1(x) \wedge \dots \wedge df_q(x).$$

Так как дифференциалы координатных функций  $dx_1, \dots, dx_n$  дают базис кокасательного пространства  $T_x^*U$ , то внешние произведения  $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}$ ,  $i_1 < \dots < i_q$ , дают базис пространства внешних  $q$ -форм

$\Lambda^q(T_x^*U)$  при каждом  $x \in U$ . Отсюда следует, что каждая внешняя дифференциальная  $q$ -форма  $\omega_x^q$  на  $U$  имеет единственное представление

$$\omega_x^q = \sum_{i_1 < \dots < i_q} a_{i_1 \dots i_q}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}, \quad (10.1)$$

где  $a_{i_1 \dots i_q}(x)$  — функции на  $U$ . Эта форма принадлежит классу  $C^\infty$ , если все коэффициенты  $a_{i_1 \dots i_q}(x)$  — функции класса  $C^\infty$ . Далее мы рассматриваем только формы класса  $C^\infty$ . Множество таких  $q$ -форм обозначим через  $\Lambda^q(U)$ . Относительно операций сложения и умножения на число  $\Lambda^q(U)$  — векторное пространство. Умножение  $q$ -форм на функции превращает  $\Lambda^q(U)$  в модуль над кольцом  $\mathcal{O}(U)$ . Заметим, что  $\Lambda^0(U) = \mathcal{O}(U)$ . Положим

$$\Lambda^*(U) = \bigoplus_{q=0}^n \Lambda^q(U),$$

тогда на  $\Lambda^*(U)$  определена операция внешнего умножения: если  $\alpha^p \in \Lambda^p(U)$ ,  $\beta^q \in \Lambda^q(U)$ , то  $\alpha^p \wedge \beta^q \in \Lambda^{p+q}(U)$ . Благодаря этой операции умножения  $\mathcal{O}(U)$ -модуль  $\Lambda^*(U)$  становится  $\mathcal{O}(U)$ -алгеброй. Операция взятия дифференциала функции определяет отображение  $d: \Lambda^0(U) \rightarrow \Lambda^1(U)$ . Следующая теорема показывает, что это отображение однозначно продолжается до отображения  $d: \Lambda^*(U) \rightarrow \Lambda^*(U)$ , если потребовать от продолжения выполнения естественных условий.

**Теорема 10.2.** Существует и единственное отображение  $d: \Lambda^*(U) \rightarrow \Lambda^*(U)$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1)  $d$  является  $\mathbb{R}$ -линейным отображением;
- 2) если  $\omega^q \in \Lambda^q(U)$ , то  $d\omega^q \in \Lambda^{q+1}(U)$ ;
- 3) если  $\alpha^p \in \Lambda^p(U)$ ,  $\beta^q \in \Lambda^q(U)$ , то

$$d(\alpha^p \wedge \beta^q) = d\alpha^p \wedge \beta^q + (-1)^p \alpha^p \wedge d\beta^q;$$

- 4) выполняется равенство  $d \circ d = 0$ ;
- 5) если  $\omega^0 \in \Lambda^0(U)$ , то  $d\omega^0$  — дифференциал функции.

**Доказательство.** Пусть  $\omega^q \in \Lambda^q(U)$  имеет разложение

$$\omega^q = \sum_{i_1 < \dots < i_q} a_{i_1 \dots i_q}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q},$$

тогда из условий 1)–5) вытекает равенство

$$d\omega^q = \sum_{i_1 < \dots < i_q} da_{i_1 \dots i_q}(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}.$$

С другой стороны, это равенство определяет отображение  $d : \mathcal{A}^*(U) \rightarrow \mathcal{A}^*(U)$ , удовлетворяющее условиям 1)–5). Соответствующие вычисления мы опускаем. Теорема доказана.

**Задача 10.3.** Провести вычисления, опущенные в доказательстве теоремы 10.2.

Пусть в области  $U$  определена риманова метрика  $(v, w)_x$ , тогда определен оператор Ходжа

$$* : \mathcal{A}^q(U) \rightarrow \mathcal{A}^{n-q}(U).$$

Действительно, дифференциальная форма  $\omega^n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  определяет ориентацию на каждом касательном пространстве  $T_x U$ . Поэтому скалярное произведение  $(v, w)_x$  определяет оператор Ходжа

$$*_x : \Lambda^q(T_x^* U) \rightarrow \Lambda^{n-q}(T_x^* U).$$

Если теперь  $\omega^q \in \mathcal{A}^q(U)$ , то положим  $(*\omega^q)_x = *_x \omega_x^q$ . Заметим, что отображение  $*_x : \Lambda^q(T_x^* U) \rightarrow \Lambda^{n-q}(T_x^* U)$  является изоморфизмом.

**Задача 10.4.** Пусть на  $U \subset \mathbb{R}^3$  рассматривается евклидова метрика

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

тогда выполняются равенства:

- 1)  $*1 = dx \wedge dy \wedge dz$ ;
- 2)  $*dx = dy \wedge dz$ ,  $*dy = dz \wedge dx$ ,  $*dz = dx \wedge dy$ ;
- 3)  $*(dx \wedge dy) = dz$ ,  $*(dy \wedge dz) = dx$ ,  $*(dz \wedge dx) = dy$ ;
- 4)  $*(dx \wedge dy \wedge dz) = 1$ .

Дифференциальная форма  $\Omega^n = *1$  называется формой объема. Если  $K \subset U$  – компактное измеримое по Жордану множество, то интеграл

$$\int_K \Omega^n$$

называется объемом множества  $K$ . Заметим, что если

$\omega^n = a(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ , то интеграл  $\int_K \omega^n$  по определению равен  $n$ -кратному интегралу

$$\int \dots \int_K a(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

**Задача 10.5.** Пусть риманова метрика имеет вид

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx_i dx_j.$$

Показать, что выполняется равенство

$$\Omega^n = (\det(g_{ij}(x)))^{1/2} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

## Глава III. ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ

### 1. Криволинейные координаты в $\mathbb{R}^n$ .

Система координат в области  $U \subset \mathbb{R}^n$  — это набор дифференцируемых функций  $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$ , удовлетворяющих условиям:

- 1) Якобиан  $J = \frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$  не обращается в нуль на  $U$ ;
- 2) Отображение  $y = y(x) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , заданное набором функций  $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$ , является биекцией на область  $V \subset \mathbb{R}^n$ .

Пример 1.1. Сферические координаты  $r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$  в  $\mathbb{R}^n$  вводятся по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_1, \\ x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ x_3 &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \\ x_n &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}. \end{aligned}$$

Эти формулы определяют однозначные функции  $r = r(x)$ ,  $\varphi_1 = \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1} = \varphi_{n-1}(x)$ , если потребовать выполнения условий:

$0 < r < +\infty$ ,  $0 < \varphi_1 < \pi, \dots, 0 < \varphi_{n-2} < \pi$ ,  $0 < \varphi_{n-1} < 2\pi$ . Заметим, что якобиан

$$\frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2}$$

не равен нулю при выполнении верхних условий.

Задача 1.2. Дать геометрическое описание сферических координат в  $\mathbb{R}^n$ .

Рассмотрим уравнение  $y_n(x) = c$ , оно определяет координатную гиперповерхность в  $U$  (см. рис.7). Функции  $y_1(x), \dots, y_{n-1}(x)$  задают систему координат на этой гиперповерхности. Рассмотрим систему уравнений:  $y_{k+1} = c_{k+1}, \dots, y_n(x) = c_n$ , она определяет координатную  $k$ -мерную поверхность в  $U$ . Функции  $y_1(x), \dots, y_k(x)$  задают систему

координат на этой поверхности. Если мы ограничимся случаем  $n = 2$ , то уравнения  $y_1 = c_1, y_2 = c_2$  определяют координатные линии.



Рисунок 7.

Через каждую точку области  $U$  проходят две координатные линии (см. рис.8). С помощью криволинейных координат мы дадим определение дифференцируемого многообразия в  $\mathbb{R}^n$ . Это понятие обобщает понятие кривой и поверхности в  $\mathbb{R}^3$ .

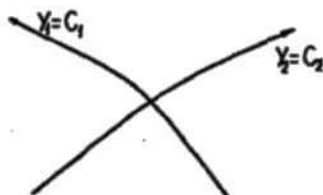


Рисунок 8.

Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  называется дифференцируемым  $k$ -мерным многообразием, если для каждой точки  $x_0 \in M$  существует окрестность  $U(x_0)$  с криволинейными координатами  $y_1, \dots, y_n$  такими, что уравнения  $y_{k+1} = 0, \dots, y_n = 0$  определяют множество  $M \cap U(x_0)$  (см. рис.9).

Рассмотрим, например, сферу  $S^{n-1}$ , заданную уравнением

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

Покажем, что она является  $(n-1)$ -мерным многообразием. Пусть  $y_1 = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$ , тогда  $\frac{\partial y_1}{\partial x_i} = 2x_i$ . Если теперь  $x_0 \in S^{n-1}$  и  $x_{0i} \neq 0$ , то

набор функций

$$\begin{cases} y_1 = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1, \\ y_2 = x_1, \\ \vdots \\ y_i = x_{i-1}, \\ y_{i+1} = x_{i+1}, \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

образует криволинейную систему координат в окрестности  $U(x_0)$ . Это следует из того, что  $\frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$  в окрестности точки  $x_0$ .

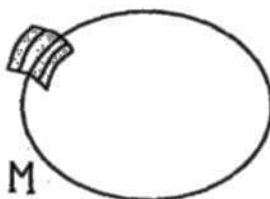


Рисунок 9.

2. Группы преобразований как многообразия в  $N$ -мерном пространстве.

### 2.1. Задание многообразия системой уравнений.

Пусть  $U$  – область в  $\mathbb{R}^n$  и  $M \subset U$  – множество, заданное системой уравнений

$$F_{k+1}(x) = 0, \dots, F_n(x) = 0,$$

где  $F_{k+1}(x), \dots, F_n(x)$  – дифференцируемые функции  $U$ , причем ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_{k+1}}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial F_{k+1}}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

в каждой точке  $x \in M$  максимален, то есть равен  $n - k$ . Тогда множество  $M$  является  $k$ -мерным многообразием. Действительно, если



$x_0 \in M$  и, например, определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_{k+1}}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial F_{k+1}}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

не равен нулю в точке  $x_0$ , то система функций

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ \vdots \\ y_k = x_k, \\ y_{k+1} = F_{k+1}(x), \\ \vdots \\ y_n = F_n(x) \end{cases}$$

задает систему криволинейных координат в окрестности  $U(x_0)$ , причем пересечение  $M \cap U(x_0)$  определяется системой уравнений  $y_{k+1} = 0, \dots, y_n = 0$ . Таким образом, множество  $M$  является  $k$ -мерным многообразием.

Заметим, что аналогичный результат имеет место, если  $M$  задается системой уравнений

$$F_{k+1}(y) = 0, \dots, F_n(y) = 0,$$

где  $y = (y_1, \dots, y_n)$  — криволинейная система координат в области  $U$ . Доказательство то же самое.

## 2.2. Экспонента от матрицы.

Пусть  $M(n, R)$  — множество матриц размера  $n \times n$  с вещественными элементами. Если  $X = (x_{ij}) \in M(n, R)$ , то ее элементы можно рассматривать как координаты точки в  $R^{n^2}$ . Поэтому  $M(n, R)$  отождествляется с  $R^{n^2}$ . Определим норму матрицы  $X = (x_{ij})$  равенством

$$\|X\| = \max \frac{|Xv|}{|v|}, \quad 0 \neq v \in R^n,$$

тогда  $M(n, R)$  становится нормированным векторным пространством. По индукции доказывается неравенство  $\|X^k\| \leq \|X\|^k$ . Поэтому ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$$

нормально сходится. Таким образом, определено отображение

$$\exp : M(n, R) \rightarrow M(n, R)$$

с помощью равенства

$$\exp X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}.$$

Задача 2.2.1. Доказать утверждения:

- 1) выполняются равенства

$$\exp X^t = (\exp X)^t, \exp(YXY^{-1}) = Y(\exp X)Y^{-1}, \det(\exp X) = \exp(\operatorname{tr} X);$$

- 2) если  $A$  и  $B$  коммутируют, то

$$\exp(A+B) = (\exp A) \cdot (\exp B);$$

- 3)  $\exp$  — отображение класса  $C^\infty$ ;

- 4)  $\exp$  отображает диффеоморфно окрестность  $O \in M(n, R)$  на окрестность  $E \in M(n, R)$ ;

- 5) отображение

$$Y = \ln X = (X - E) - \frac{(X - E)^2}{2} + \dots$$

определено в окрестности  $E \in M(n, R)$  и является обратным к отображению  $\exp$ .

Заметим теперь, что отображение  $Y = \ln X$  определяет криволинейную систему координат  $y_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , в окрестности единичной матрицы.

### 2.3. Группы $GL(n, R)$ , $SL(n, R)$ , $O(n, R)$ , $SO(n, R)$ .

Множество обратимых матриц в  $M(n, R)$  обозначается через  $GL(n, R)$  и называется *общей линейной группой*. Это действительно группа относительно операции умножения. С другой стороны,  $GL(n, R)$  — это открытое множество в  $M(n, R) = \mathbb{R}^{n^2}$ , заданное неравенством  $\det X \neq 0$ , так как функция  $\det : M(n, R) \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывная. Заметим, что операция умножения

$$Z = X \cdot Y : GL(n, R) \times GL(n, R) \rightarrow GL(n, R)$$

является дифференцируемым отображением. Аналогично, операция взятия обратной матрицы

$$Y = X^{-1} : GL(n, R) \rightarrow GL(n, R)$$

также дифференцируемая.

Подгруппа  $GL(n, R)$ , заданная уравнением  $\det X = 1$ , обозначается через  $SL(n, R)$  и называется специальной линейной группой. Покажем, что она является дифференцируемым многообразием в  $R^{n^2}$  размерности  $n^2 - 1$ . Для этого достаточно проверить, что система уравнений

$$\begin{cases} \det X = 1 \\ \frac{\partial \det X}{\partial x_{ij}} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

не имеет решений. Обозначим через  $\Delta_{ij}$  алгебраическое дополнение элемента  $x_{ij}$ , тогда

$$\frac{\partial \det X}{\partial x_{ij}} = \Delta_{ij}.$$

Поэтому из равенств

$$\frac{\partial \det X}{\partial x_{ij}} = 0$$

следует равенство нулю всех алгебраических дополнений  $\Delta_{ij}$ , следовательно,  $\det X = 0$ . Итак, система уравнений (2.3.1) не имеет решений, поэтому группа  $SL(n, R)$  является дифференцируемым многообразием в  $GL(n, R) \subset R^{n^2}$ .

Подгруппа  $GL(n, R)$ , заданная уравнением  $X \cdot X^t = E$ , обозначается через  $O(n, R)$  и называется ортогональной группой. Обозначим через  $e_1, \dots, e_n$  строки матрицы  $X$ , тогда равенство  $X \cdot X^t = E$  равносильно системе равенств  $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ , то есть условиям ортогональности системы векторов. Так как  $(e_i, e_j) = (e_j, e_i)$ , то множество  $O(n, R)$  задается системой из  $\frac{n(n-1)}{2}$  уравнений:

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (2.3.2)$$

Вполне возможно, что они задают многообразие размерности

$$n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Чтобы доказать это утверждение, мы будем использовать криволинейную систему координат  $Y = \ln X$ , определенную в окрестности

точки  $E \in GL(n, R)$ . Тогда условие  $X \cdot X^t = E$  равносильно условию  $Y + Y^t = 0$ , то есть в окрестности точки  $E$  множество  $O(n, R)$  задается системой уравнений:

$$y_{ij} + y_{ji} = 0, \quad 1 \leq i \leq j \leq n. \quad (2.3.3)$$

Система уравнений (2.3.3) линейно независимая, поэтому она определяет многообразие размерности  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Пусть теперь  $X_0$  — произвольная матрица из  $O(n, R)$ , тогда система функций  $Y = \ln(X \cdot X_0^{-1})$  определяет криволинейную систему координат в окрестности точки  $X_0$ . С помощью этой системы координат множество  $O(n, R)$  в окрестности точки  $X_0$  задается системой уравнений (2.3.3), а поэтому является многообразием размерности  $\frac{n(n-1)}{2}$  в окрестности точки  $X_0$ .

Если  $X \in O(n, R)$ , то  $\det X = \pm 1$ . Открытое множество в  $O(n, R)$ , заданное условием  $\det X = 1$ , является подгруппой, которая обозначается через  $SO(n, R)$  и называется специальной ортогональной группой. Она является многообразием размерности  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

Задача 2.3.1. Показать, что многообразия  $SL(n, R), SO(n, R)$  связные, а многообразия  $GL(n, R), O(n, R)$  состоят из двух компонент связности.

### 3. Топологические многообразия.

Далее через  $B^n$  обозначается открытый шар в  $R^n$ . Топологическое многообразие локально устроено как  $B^n$ . Точнее, хаусдорфово топологическое пространство  $M$  называется  $n$ -мерным топологическим многообразием, если для каждой точки  $p \in M$  существует окрестность  $U(p)$  гомеоморфная открытому шару  $B^n$ . Заметим, что в этом определении шар можно заменить на произвольное открытое множество  $V(p) \subset R^n$ . Хаусдорфовость  $M$  нужна из технических соображений, также иногда приходится требовать, чтобы  $M$  обладало счетной базой.

Задача 3.1. Показать, что  $k$ -мерное дифференцируемое многообразие в  $R^n$  является  $k$ -мерным топологическим многообразием со счетной базой.

Топологические многообразия можно получать из открытых множеств в  $R^n$  с помощью операции склейки. Рассмотрим сначала случай, когда имеем два открытых множества  $U_1, U_2$ . Пусть  $U_{12} \subset U_1, U_{21} \subset U_2$  — открытые подмножества,  $\varphi_{12} : U_{12} \rightarrow U_{21}$  — гомеоморфизм (см. рис.10). Тогда отождествим точки  $x \in U_{12}$  с точками  $\varphi_{12}(x) \in U_{21}$ ,

то есть рассмотрим отношение эквивалентности  $x \sim \varphi_{12}(x)$ . В результате из объединения  $U_1 \cup U_2$  получается топологическое пространство  $M = U_1 \cup U_2 / \sim$ , каждая точка которого обладает окрестностью гомеоморфной открытому шару. Но топологическое пространство  $M = U_1 \cup U_2 / \sim$  может быть нехаусдорфовым.

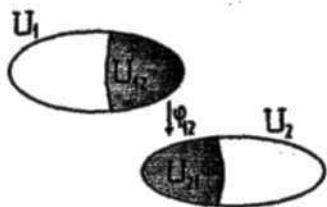


Рисунок 10.

**Задача 3.2.** Пространство  $M = U_1 \cup U_2 / \sim$  хаусдорфово тогда и только тогда, когда график отображения  $\Gamma_{\varphi_{12}} \subset U_1 \times U_2$  — замкнутое множество.

Отметим также, что множества  $U_1, U_2$  могут пересекаться, в этом случае нужно заменить обычное объединение  $U_1 \cup U_2$  на несвязное объединение  $U_1 \amalg U_2$ , которое по определению равно  $(U_1 \times \{1\}) \cup (U_2 \times \{2\})$ .

**Задача 3.3.** Пусть

$$U_1 = U_2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 1\}$$

— открытый квадрат,  $U_{12} = U_{21} = \{x_1 \neq 0\}$  и

$$\varphi_{12}(x) = \begin{cases} (x_1 + 1, x_2), & x_1 < 0, \\ (x_1 - 1, x_2), & x_1 > 0. \end{cases}$$

Показать, что тогда многообразие  $M = U_1 \amalg U_2 / \sim$  гомеоморфно открытому листу Мебиуса (см. рис.11).

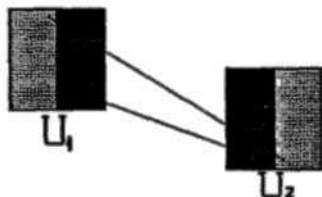


Рисунок 11.

Предыдущую конструкцию склейки можно обобщить следующим образом. Пусть имеем:

1) Последовательность (конечную или счетную) открытых множеств  $U_i \subset \mathbb{R}^n$ .

2) При каждом  $i \neq j$  открытые множества (может быть пустые)  $U_{ij} \subset U_i$ .

3) При каждом  $i \neq j$  гомеоморфизмы  $\varphi_{ij} : U_{ij} \rightarrow U_{ji}$ , удовлетворяющие условиям

$$\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}, \quad \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} \circ \varphi_{ki} = id.$$

Тогда на несвязном объединении

$$\coprod_i U_i = \bigcup_i (U_i \times \{i\})$$

определено отношение эквивалентности  $x \sim \varphi_{ij}(x)$ , где  $x \in U_i$ . А факторпространство

$$M = (\coprod_i U_i) / \sim$$

удовлетворяет условию, что для каждой точки  $x \in M$  существует окрестность, гомеоморфная открытому шару в  $\mathbb{R}^n$ .

Задача 3.5. Пусть

$$R = \{(x, y) \in (\coprod_i U_i) \times (\coprod_i U_i) | x \sim y\},$$

тогда факторпространство  $(\coprod_i U_i) / \sim$  хаусдорфово, если и только если множество  $R$  замкнутое.

#### 4. Карты и атласы.

Далее  $M$  —  $n$ -мерное топологическое многообразие. Карта на  $M$  — это гомеоморфизм  $\varphi : U \rightarrow V$ , где  $U \subset M$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$  — открытые множества (см. рис.12).

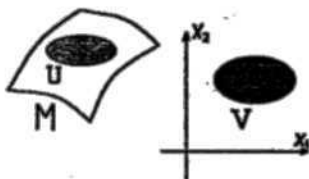


Рисунок 12.

Гомеоморфизм  $\varphi : U \rightarrow V$  задается набором функций  $x_1 = x_1(p), \dots, x_n = x_n(p)$ , то есть  $\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$ , где  $p$  — переменная точка из  $U$ . Эти функции называются *координатными функциями* или *координатами*. Далее про карту  $\varphi : U \rightarrow V$  мы будем говорить, что дана карта  $U$  с координатами  $x_1, \dots, x_n$ .

Пусть даны две карты на топологическом многообразии  $M$   $\varphi : U \rightarrow V$ ,  $\varphi' : U' \rightarrow V'$ , причем пересечение  $U \cap U'$  непустое (см. рис.13). Тогда отображение

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \rightarrow \varphi'(U \cap U')$$

называется *отображением перехода* от первой карты ко второй. Оно задается набором функций от  $n$ -переменных

$$\begin{cases} x'_1 = x'_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = x'_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $x_1, \dots, x_n$  — координаты в первой карте, а  $x'_1, \dots, x'_n$  — координаты во второй карте. Эти функции называются *функциями перехода* от карты с координатами  $x_1, \dots, x_n$  к карте с координатами  $x'_1, \dots, x'_n$ . Карты  $\varphi : U \rightarrow V$ ,  $\varphi' : U' \rightarrow V'$  дифференцируемо согласованы, если функции перехода (4.1), а также функции обратного перехода, принадлежат классу  $C^\infty$ .

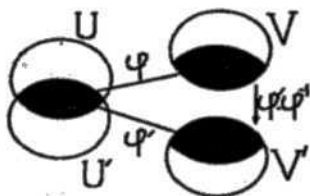


Рисунок 13.

Набор карт  $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ ,  $i \in I$ , на топологическом многообразии  $M$  называется атласом, если множества  $U_i$ ,  $i \in I$ , покрывают  $M$ , то есть  $\bigcup_i U_i = M$ . Атлас называется дифференцируемым, если каждые две его карты дифференцируемо согласованы. Два дифференцируемых атласа эквивалентны, если их объединение дает дифференцируемый атлас. Это означает, что функции перехода от координат в первом атласе к координатам во втором атласе принадлежат классу  $C^\infty$ .

Класс эквивалентности дифференцируемых атласов на топологическом многообразии называется дифференцируемой структурой на этом многообразии. Таким образом, дифференцируемый атлас задает дифференцируемую структуру. Топологическое многообразие с фиксированной дифференцируемой структурой называется дифференцируемым многообразием.

Задача 4.1. Построить на дифференцируемом многообразии в  $\mathbb{R}^n$  каноническую дифференцируемую структуру.

Задача 4.2. Пусть  $M = \mathbb{R}$  и рассмотрим два атласа на  $M$ . Первый атлас состоит из одной карты  $\varphi(x) = x$ , а второй атлас состоит из одной карты  $\varphi'(x) = x^3$ . Показать, что эти атласы не эквивалентны.

## 5. Проективное пространство.

Проективное пространство над полем  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$  является примером абстрактного, то есть не вложенного в  $\mathbb{R}^N$ , многообразия. Сначала мы рассмотрим вещественное проективное пространство. Оно обозначается через  $\mathbb{RP}^n$  и, как множество, является множеством прямых, то есть одномерных подпространств в  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Таким образом, элементами  $\mathbb{RP}^n$  являются прямые в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , проходящие через  $O$ . Каждая такая прямая  $l$  определяется ненулевым направляющим вектором  $v \in \mathbb{R}^{n+1}$  (см. рис.14). Координаты этого вектора



$(v_0, \dots, v_n)$  называются *однородными координатами* точки  $l \in \mathbb{RP}^n$ . Они определяются с точностью до умножения на ненулевой скаляр: вектор  $\lambda v = (\lambda v_0, \dots, \lambda v_n)$  лежит на той же прямой  $l$  и все ненулевые векторы на  $l$  получаются таким образом. Поэтому вектор однородных координат точки  $l \in \mathbb{RP}^n$  по традиции обозначается через  $(v_0 : \dots : v_n)$ .

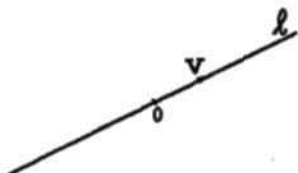


Рисунок 14.

Пользуясь однородными координатами, можно построить атлас на  $\mathbb{RP}^n$ . Положим

$$U_i = \{(v_0 : \dots : v_n) | v_i \neq 0\}, \quad i = 0, \dots, n,$$

и определим биекцию  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  правилом

$$\varphi_i(v_0 : \dots : v_i : \dots : v_n) = \left( \frac{v_0}{v_i}, \dots, 1, \dots, \frac{v_n}{v_i} \right).$$

(На самом деле 1 нужно выкинуть, но мы оставляем ее для напоминания, как возникла эта строка.) Эта биекция определяется набором координатных функций

$$x_0^{(i)} = \frac{v_0}{v_i}, \dots, x_i^{(i)} = 1, x_{i+1}^{(i)} = \frac{v_{i+1}}{v_i}, \dots, x_n^{(i)} = \frac{v_n}{v_i}.$$

(На самом деле функцию  $x_0^{(i)} = 1$  нужно выкинуть.) Функции перехода от  $i$ -ой карты к  $j$ -ой находятся из равенства

$$\frac{v_k}{v_j} = \frac{v_k}{v_i} \cdot \frac{v_i}{v_j}.$$

Таким образом,  $x_k^{(j)} = x_k^{(i)} / x_j^{(i)}$ . Заметим, что функции перехода принадлежат классу  $C^\infty$ , но говорить, что получен дифференцируемый атлас, еще рано, так как на  $\mathbb{RP}^n$  еще нет топологии. Остается заметить, что топология на  $\mathbb{RP}^n$  задается требованием, чтобы отображения  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  были гомеоморфизмами. Нетрудно проверить, что такая топология на  $\mathbb{RP}^n$  существует и она единственная.

**Задача 5.1.** Рассмотрим на  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  отношение эквивалентности  $v \sim \lambda v$ . Показать, что факторпространство  $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$  совпадает с  $\mathbb{RP}^n$ , а фактортопология удовлетворяет требованию, чтобы отображения  $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  были гомеоморфизмами при  $i = 0, \dots, n$ .

Более наглядно вещественное проективное пространство  $\mathbb{RP}^n$  получается из  $n$ -мерной сферы  $S^n$ , заданной уравнением (см. рис. 15)

$$v_0^2 + \dots + v_n^2 = 1.$$

Каждая прямая  $l$  пересекает сферу  $S^n$  в двух диаметрально противоположных точках. Поэтому  $\mathbb{RP}^n$  получается из  $S^n$  отождествлением диаметрально противоположных точек. В частности, проективная прямая  $\mathbb{RP}^1$  устроена как окружность, а проективная плоскость  $\mathbb{RP}^2$  — как лист Мебиуса, к которому по границе приклеен круг.

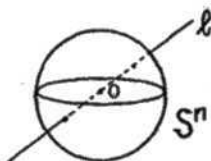


Рисунок 15.

Комплексное проективное пространство  $\mathbb{CP}^n$  определяется аналогично. Это множество прямых (комплексных) в  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

**Задача 5.2.** Показать, что комплексная проективная прямая  $\mathbb{CP}^1$  совпадает со сферой Римана  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

## 6. Абстрактные дифференцируемые многообразия.

Дифференцируемое многообразие — это топологическое многообразие с фиксированной на нем дифференцируемой структурой. Дифференцируемая структура задается дифференцируемым атласом. Главное значение дифференцируемой структуры состоит в том, что она позволяет определить дифференцируемые функции на многообразии. Это делается следующим образом.

Пусть  $M$  —  $n$ -мерное дифференцируемое многообразие. Если  $p_0 \in M$  — фиксированная точка, то она вместе с некоторой окрестностью  $U(p_0)$  попадает в одну из карт  $U$  с координатами  $x_1, \dots, x_n$ . Поэтому

функцию  $f : U(p_0) \rightarrow \mathbb{R}$  можно рассматривать как функцию от  $n$ -переменных  $f(p) = f(x_1, \dots, x_n)$ . Функция  $f(p)$  является функцией класса  $C^\infty$  в точке  $p_0$ , если функция от  $n$ -переменных  $f(x_1, \dots, x_n)$  имеет производные любого порядка в точке  $p_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ .

Если  $U$  — открытое множество в  $M$ , то через  $\mathcal{O}(U)$  будем обозначать множество функций класса  $C^\infty$  на  $U$ . Множество  $\mathcal{O}(U)$  является алгеброй над  $\mathbb{R}$  относительно сложения и умножения. Через  $\mathcal{O}_{p_0}$  мы будем обозначать алгебру ростков дифференцируемых функций в точке  $p_0$ . Тогда векторное пространство дифференцирований  $D_{p_0}$  алгебры  $\mathcal{O}_{p_0}$  называется касательным пространством к  $M$  в точке  $p_0$  и обозначается через  $T_{p_0}M$ . Если точка  $p_0$  попадает в карту с координатами  $x_1, \dots, x_n$ , то дифференцирования  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  образуют базис касательного пространства. Теперь без труда переносятся на многообразия определения векторного поля, ковариантного дифференцирования, аффинной связности, римановой метрики и римановой связности, геодезических линий, тензора кривизны, внешних дифференциальных форм и внешнего дифференциала. Предлагается самостоятельно повторить эти определения для многообразий, а мы остановимся на ориентации, так как оказывается, что существуют многообразия, не обладающие ориентацией.

Ориентация на многообразии  $M$  — это непрерывное поле ориентаций касательных пространств  $T_pM$ . Уточним данное определение. Если в каждом касательном пространстве  $T_pM$  выбрать ориентацию, то получим поле ориентаций. Оно будет непрерывным, если для двух близких точек  $p_1, p_2$ , попадающих в одну карту с координатами  $x_1, \dots, x_n$ , базисы  $\frac{\partial}{\partial x_1}|_{p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_{p_1}$  пространств  $T_{p_i}M$ ,  $i = 1, 2$ , задают либо совпадающие ориентации с данными ориентациями пространств  $T_{p_i}$ , либо противоположные к данным ориентациям в обоих касательных пространствах.

Многообразие  $M$  называется неориентируемым, если на нем не существует ориентации, в противном случае оно называется ориентируемым.

Задача 6.1. Показать, что  $\mathbb{R}P^n$  — ориентируемое многообразие тогда и только тогда, когда  $n$  нечетное.

Если многообразие ориентируемое и на нем фиксирована ориентация, то такое многообразие называется ориентированным. Для внешних дифференциальных форм на ориентированном многообразии определен оператор Ходжа  $*$ , если на нем выбрана риманова метрика. Предлагается самостоятельно повторить определение оператора Ходжа для многообразия.

Отображение дифференцируемых многообразий  $F: X \rightarrow Y$  называется дифференцируемым, если для каждой дифференцируемой функции  $g(y)$  на открытом множестве  $V \subset Y$  сложная функция  $g(F(x))$  будет дифференцируемой функцией на открытом множестве  $F^{-1}(V)$ . Предлагается проверить, что композиция дифференцируемых отображений будет дифференцируемым отображением.

Задача 6.2. Показать, что функция  $f(p)$  на дифференцируемом многообразии  $M$  дифференцируема тогда и только тогда, когда соответствующее отображение дифференцируемых многообразий  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  будет дифференцируемым.

Задача 6.3. Показать, что произведение дифференцируемых многообразий  $X \times Y$  будет дифференцируемым многообразием, если  $X, Y$  дифференцируемые многообразия, причем проекции  $X \times Y \rightarrow X, X \times Y \rightarrow Y$  — дифференцируемые отображения.

Задача 6.4. Рассмотрим сферу  $S^3$  как подмногообразие  $\mathbb{C}^2$ , заданное уравнением  $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ . Показать, что отображение  $p: S^3 \rightarrow S^2 = \overline{\mathbb{C}}$ , заданное правилом:  $(z_1, z_2) \rightarrow z_1/z_2$ , дифференцируемое.

Задача 6.5. Рассмотрим в произведении  $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$  множество  $M^{n+1}$ , состоящее из пар  $(l, x)$ , где  $l$  — прямая в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , а  $x$  — точка на этой прямой. Показать, что  $M^{n+1}$  —  $(n+1)$ -мерное дифференцируемое многообразие, а проекции  $M^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}P^n, M^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  — дифференцируемые отображения.

Отображение дифференцируемых многообразий  $F: X \rightarrow Y$  называется диффеоморфизмом, если оно биективно, а отображения  $F, F^{-1}$  дифференцируемые. Многообразия, между которыми существует диффеоморфизм, называются диффеоморфными.

Задача 6.6. Показать, что биекция  $y = x^3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  не является диффеоморфизмом.

Задача 6.7. Показать, что  $\mathbb{R}P^2$  не диффеоморфно  $S^2$ ,  $\mathbb{R}P^3$  не диффеоморфно  $S^3$ ,  $\mathbb{R}P^3$  диффеоморфно  $SO(3)$ .

## 7. Обобщенная формула Стокса.

### 7.1. Формула Стокса для $n$ -мерного куба.

Пусть  $V$  —  $n$ -мерное ориентированное вещественное векторное пространство. Тогда  $V$  является  $n$ -мерным ориентированным дифференцируемым многообразием. Действительно, если выберем базис  $V$ , то разложение векторов по этому базису задает карту на  $V$ . Эта карта

отождествляет  $V$  с  $\mathbb{R}^n$ . Мы предполагаем, что выбранный базис задает ориентацию  $V$ , которая имела там ранее. Благодаря отождествлению  $V = \mathbb{R}^n$  мы можем определить компактные измеримые по Жордану множества в  $V$ . Предлагается проверить, что определение компактного измеримого множества в  $V$  не зависит от выбора базиса. Пусть  $K \subset V$  компактное измеримое множество,  $\omega^n$   $n$ -мерная дифференциальная форма, определенная и дифференцируемая в окрестности  $K$ . Тогда определен интеграл  $\int_K \omega^n$ . Действительно, выбранный базис определяет координаты  $x_1, \dots, x_n$  на  $V$ , поэтому форма  $\omega^n$  имеет представление

$$\omega^n = f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

и по определению полагаем

$$\int_K \omega^n = \int \dots \int_K f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

где справа стоит обычный кратный интеграл. Предлагается проверить, что определение интеграла от дифференциальной формы не зависит от выбора базиса, но при изменении ориентации он умножается на  $-1$ . Эти факты проверяются с помощью формулы замены переменных в кратном интеграле.

Множество в  $\mathbb{R}^n$ , заданное неравенствами  $0 \leq x_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , обозначим через  $Q^n$  и назовём **единичным  $n$ -мерным кубом** (см. рис.16)

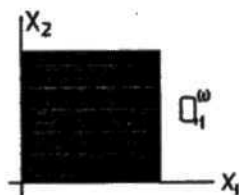


Рисунок 16.

Через  $Q_i^{(0)}$ ,  $Q_i^{(1)}$  будем обозначать грани куба, заданные, соответственно, равенствами  $x_i = 0$ ,  $x_i = 1$  (см. рис.16). Ориентация на кубе  $Q^n$  задается формой  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ , то есть стандартным базисом  $e_1, \dots, e_n$ . Ориентация на грани  $Q_i^{(0)}$  задается формой

$$(-1)^i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

где крышечка означает, что стоящее под ней выражение нужно выкинуть. Ориентация на грани  $Q_i^{(1)}$  задается формой

$$(-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Такой выбор ориентации на гранях определяется следующим правилом внешней нормали. Выберем базис в  $\mathbb{R}^n$  следующим образом. Первый вектор  $v_1$  является внешней нормалью к данной грани, остальные векторы  $v_2, \dots, v_n$  выбираются на данной грани, причем так, чтобы базис  $v_1, \dots, v_n$  задавал фиксированную ориентацию куба. Тогда ориентация на данной грани задается базисом  $v_2, \dots, v_n$  (см. рис.17). Заметим, что по этому правилу на границе квадрата  $Q^2$  ориентация задается направлением обхода против часовой стрелки. А ориентация на границе трёхмерного куба  $Q^3$  задается по правилу винта. По этому правилу направление обхода грани куба совпадает с направлением вращения винта, когда винт движется наружу. Таким образом, общее определение согласуется с обычными определениями ориентации на границе в курсе математического анализа.

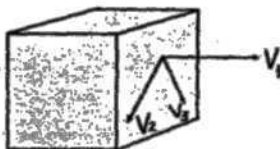


Рисунок 17.

**Теорема 7.1.1.** Пусть на кубе  $Q^n$  задана дифференциальная форма

$$\omega^{n-1} = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

тогда выполняется формула

$$\int_{\partial Q^n} \omega^{n-1} = \int_{Q^n} d\omega^{n-1}, \quad (7.1.1)$$

где  $\partial Q^n$  — ориентированная граница куба  $Q^n$ .

**Доказательство.** Достаточно проверить равенство (7.1.1) для формы вида

$$\omega^{n-1} = a_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Вычислим  $d\omega^{n-1}$ , тогда получим

$$d\omega^{n-1} = (-1)^{i-1} \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Поэтому имеем равенства

$$\begin{aligned} \int_{Q^n} d\omega^{n-1} &= \\ (-1)^{i-1} \int_{Q_i^{(0)}} dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n \int_0^1 \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i} dx_i &= \\ (-1)^{i-1} \int_{Q_i^{(0)}} dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n [a_i(x_1, \dots, 1, \dots, x_n) - a_i(x_1, \dots, 0, \dots, x_n)] &= \\ \int_{Q_i^{(1)}} a_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n + \int_{Q_i^{(0)}} a_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n &= \\ \int_{\partial Q^n} \omega^{n-1}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Замечание 7.1.2.** Интеграл от дифференциальной формы определен только по ориентированной области, причем при изменении ориентации области интеграл умножается на -1. Это свойство интеграла от дифференциальной формы, конечно, применялось при доказательстве теоремы.

**Задача 7.1.3.** Показать, что на плоскости теорема дает формулу Грина

$$\int_{\partial Q} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int \int_Q \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy.$$

## 7.2. Дифференцируемые многообразия с краем.

Через  $B_-^n$  мы будем обозначать полушар  $\{x \in B^n | x_1 \leq 0\}$  (см. рис.18). Топологическое многообразие с краем — это хаусдорфово топологическое пространство, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной шару  $B^n$  или полушару  $B_-^n$  (см. рис.18).

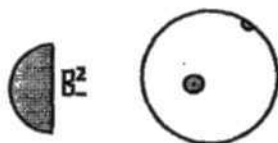


Рисунок 18.

Если  $M$ -топологическое многообразие с краем, то множество точек из  $M$ , которые обладают окрестностью, гомеоморфной полушару, обозначается через  $\bar{M}$  и называется краем многообразия  $M$ . Заметим, что обычное многообразие является многообразием с краем, у которого край пустой. На топологическом многообразии с краем мы можем рассматривать карты и атласы, а также вводить дифференцируемую структуру (если она существует), поэтому определены дифференцируемые многообразия с краем как обобщения обычных дифференцируемых многообразий. Край дифференцируемого многообразия с краем является дифференцируемым многообразием без края размерности на 1 меньше.

На дифференцируемые многообразия с краем переносятся все понятия, которые раньше вводились для многообразий без края, например, аналогично вводится понятие ориентации. Если многообразие с краем  $M$  ориентированное, то на крае  $\bar{M}$  канонически определяется ориентация по правилу внешней нормали. А именно, в окрестности точки  $p \in \bar{M}$  выбираются такие координаты  $x_1, \dots, x_n$ , задающие ориентацию  $M$ , чтобы край определялся уравнением  $x_1 = 0$ , а окрестность точки  $p$  в  $M$  задавалась неравенством  $x_1 \leq 0$  (см. рис.19).

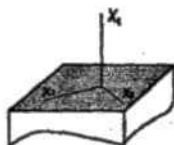


Рисунок 19.



Тогда координаты  $x_2, \dots, x_n$  определяют ориентацию края в окрестности точки  $p$ . Канонически ориентированный край будет обозначаться через  $\partial M$ .

Множество  $K^n$  на многообразии  $M$  называется криволинейным кубом, если найдется система координат  $x_1, \dots, x_n$  на  $M$  такая, что множество  $K^n$  определяется системой неравенств  $0 \leq x_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , причем предполагается, что точки на  $M$  с произвольными такими координатами существуют в данной карте (см. рис.20). Грани куба  $K^n$  также будут криволинейными кубами, но размерности на 1 меньше. Грани граней мы будем называть также гранями куба  $K^n$ , но соответствующей размерности.

Если  $M$ -компактное многообразие с краем, то, оказывается, его можно представить в виде объединения конечного числа криволинейных кубов

$$M = K_1 \cup \dots \cup K_s$$

так, что два куба могут пересекаться только по одной грани какой-то размерности.



Рисунок 20.

Это утверждение является теоремой дифференциальной топологии, мы его доказывать не будем. Такое представление многообразия в виде объединения криволинейных кубов будем называть разбиением многообразия.

**Теорема 7.2.1.** Пусть  $M$  —  $n$ -мерное компактное ориентированное дифференцируемое многообразие с краем,  $\omega^{n-1}$  — дифференциальная форма на  $M$ , тогда выполняется формула

$$\int_{\partial M} \omega^{n-1} = \int_M d\omega^{n-1}.$$

**Доказательство.** Из разбиения  $M = \cup_i K_i$  получаем равенство

$$\int_M d\omega^{n-1} = \sum_i \int_{K_i} d\omega^{n-1}.$$

Так как формула Стокса для куба доказана, то имеем равенство

$$\int_{K_i} d\omega^{n-1} = \int_{\partial K_i} \omega^{n-1}.$$

Остаётся доказать равенство

$$\sum_i \int_{\partial K_i} \omega^{n-1} = \int_{\partial M} \omega^{n-1}.$$

Чтобы его доказать, заметим, что если грань куба  $K_i$  находится внутри  $M$ , то она дважды входит в левую сумму равенства, но с противоположной ориентацией, поэтому интегралы по ним уничтожаются. Таким образом, в левой части остаются интегралы по граням, лежащим на границе  $M$ , сумма которых даёт интеграл по ориентированному краю  $\partial M$ .

Теорема доказана.

**Задача 7.2.2.** Вывести из теоремы 7.2.1 классическую формулу Стокса и формулу Остроградского.

### 7.3. Когомологии де Рама.

В этом пункте  $M$ -компактное дифференцируемое многообразие (может быть с краем). Пусть  $\mathcal{A}^q(M)$ -пространство дифференциальных  $q$ -форм на  $M$ , тогда определен внешний дифференциал

$$d: \mathcal{A}^q(M) \rightarrow \mathcal{A}^{q+1}(M),$$

который удовлетворяет равенству  $d^2 = 0$ . Форма  $\omega^q$  называется замкнутой, если она удовлетворяет уравнению  $d\omega^q = 0$ . Если для формы  $\omega^q$  существует форма  $\alpha^{q-1}$  такая, что  $\omega^q = d\alpha^{q-1}$ , то форма  $\omega^q$  называется точной. Пространство замкнутых  $q$ -форм обозначим через  $\hat{\mathcal{A}}^q(M)$ , а пространство точных  $q$ -форм обозначим через  $d\mathcal{A}^{q-1}(M)$ , тогда имеем вложение векторных пространств

$$d\mathcal{A}^{q-1}(M) \subset \hat{\mathcal{A}}^q(M).$$

Это вложение вытекает из равенства  $d^2 = 0$ . Факторпространство

$$\dot{A}^q(M)/dA^{q-1}(M)$$

обозначается через  $H_{DR}^q(M)$  и называется  $q$ -мерной группой когомологий де Рама многообразия  $M$ . Оказывается, это векторное пространство имеет конечную размерность, она обозначается через  $b^q(M)$  и называется  $q$ -м числом Бетти многообразия  $M$ . Обозначим через  $\mathcal{H}^q(M)$  пространство  $q$ -форм, удовлетворяющих системе уравнений:

$$d\omega^q = 0, \quad d * \omega^q = 0,$$

где  $*$  — оператор Ходжа на ориентированном римановом многообразии  $M$ . Это пространство называется пространством гармонических  $q$ -форм. Так как каждая гармоническая форма является замкнутой, то определен гомоморфизм

$$\mathcal{H}^q(M) \rightarrow H_{DR}^q(M).$$

Оказывается, что он является изоморфизмом.

Мы хотим привести геометрическое определение групп когомологий. Выберем разбиение многообразия  $M$  на криволинейные кубы. Рассмотрим грани этих кубов любой размерности, они сами являются криволинейными кубами. Зафиксируем на всех кубах ориентации, полученные ориентированные криволинейные кубы будем называть клетками. Эти клетки будем рассматривать в качестве базисных элементов некоторого векторного пространства. Пусть

$$\sigma_1^q, \dots, \sigma_m^q$$

— это все клетки размерности  $q$ , их линейные комбинации с вещественными коэффициентами

$$a_1 \sigma_1^q + \dots + a_m \sigma_m^q$$

будем называть  $q$ -мерными цепями. Пространство  $q$ -мерных цепей обозначим через  $C_q(M)$ . Если  $\dim M = n$ , то  $C_q(M) = 0$  при  $q < 0$  и при  $q > n$ . При каждом  $q$  определен линейный гомоморфизм границы

$$\partial : C_q(M) \rightarrow C_{q-1}(M).$$

По определению

$$\partial \sigma_i^q = \{\text{сумма граней клетки } \sigma_i^q\},$$

причем перед гранью ставится знак "+", если ориентация этой грани по правилу внешней нормали совпадает с фиксированной на ней ориентацией, в противном случае ставится знак "-". Предлагается проверить, что  $\partial^2 = 0$ . Если  $c$  — цепь и  $\partial c = 0$ , то цепь  $c$  называется циклом. Пространство  $q$ -мерных циклов обозначим через  $\hat{C}_q(M)$ . Из равенства  $\partial^2 = 0$  вытекает вложение

$$\partial C_{q+1}(M) \subset \hat{C}_q(M).$$

Факторпространство

$$\hat{C}_q(M)/\partial C_{q+1}(M)$$

обозначается через  $H_q(M)$  и называется пространством  $q$ -мерных гомотопий многообразия  $M$ .

Формула Стокса показывает, что интегрирование дифференциальных форм по цепям

$$\int_c \omega$$

определяет спаривание между пространствами гомотопий и когомотопий  $(\omega, c) = \int_c \omega$ . Оказывается, что оно невырожденное.

Задача 7.3.1. Рассмотрим дифференциальную форму

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Показать, что эта форма замкнутая, но не является точной на  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Задача 7.3.2. Найти пространства

$$H_{DR}^q(S^1), H_q(S^2), H_q(S^1 \times S^1).$$

Задача 7.3.3. Доказать равенство

$$H_q(X \times Y) = \sum_{r+s=q} H_r(X) \otimes H_s(Y).$$

## Глава IV. КОМПЛЕКСНЫЙ ЯЗЫК В ГЕОМЕТРИИ

### 1. Комплексные векторы и ковекторы.

Пусть  $M$ -дифференцируемое многообразие,  $p \in M$ , тогда элементы комплексификации  $T_p M \otimes \mathbb{C}$  называются комплексными векторами. Например, если  $x_1, \dots, x_n$  координаты на  $M$  в окрестности точки  $p$ , то

дифференцирование  $\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2}$  является комплексным касательным вектором, то есть элементом комплексного касательного пространства  $T_p M \otimes \mathbb{C}$ . Заметим, что произвольный вектор этого пространства имеет разложение

$$v = \sum_{k=1}^n v^k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (1.1)$$

где  $v^1, \dots, v^n$  — комплексные числа. Заметим, что дифференцирование (1.1) можно применять к комплексно-значным дифференцируемыми функциям. Если мы имеем такую функцию  $f(p) = u(p) + iv(p)$ , то её дифференциал  $df(p) = du(p) + i dv(p)$  является комплексным кокасательным вектором, то есть принадлежит комплексному кокасательному пространству  $T_p^* M \otimes \mathbb{C}$ . Если размерность  $M$  четная, то есть  $n = 2m$ , то можно рассматривать комплексные координаты  $z_1, \dots, z_m$  в окрестности точки  $p$ . Это набор дифференцируемых комплексно-значных функций, которые диффеоморфно отображают окрестность точки  $p$  на открытое множество в  $\mathbb{C}^m$ . Дифференциалы

$$dz_1, \dots, dz_m, d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_m, \quad (1.2)$$

образуют базис комплексного векторного пространства  $T_p^* M \otimes \mathbb{C}$ . Пусть координата  $z_k$  имеет разложение  $z_k = x_k + iy_k$ , тогда положим

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k} \right), \quad k = 1, \dots, m, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k} \right), \quad k = 1, \dots, m. \quad (1.4)$$

Дифференцирования (1.3), (1.4) называются дифференцированиями Коши. Их определение оправдывает

**Теорема 1.1.** Ковекторы (1.2) образуют двойственный базис к базису векторов, составленных из дифференцирований Коши (1.3), (1.4).

**Доказательство.** Непосредственная проверка показывает, что

$$dz_k \left( \frac{\partial}{\partial z_l} \right) = \delta_l^k, \quad dz_k \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} \right) = 0,$$

$$d\bar{z}_k \left( \frac{\partial}{\partial z_l} \right) = 0, \quad d\bar{z}_k \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} \right) = \delta_l^k.$$

Теорема доказана.

Замечание 1.2. Если  $M$ -поверхность с римановой метрикой  $ds^2$ , то в окрестности точки  $p \in M$  существуют вещественные координаты  $x, y$  такие, что выполняется равенство (см. [1])  $ds^2 = a(x, y)(dx^2 + dy^2)$ . Такие координаты называются изотермическими. Если теперь мы положим  $z = x + iy$ , то получим равенство  $ds^2 = a(z)dzd\bar{z}$ .

Задача 1.3. Показать, что для поверхности с римановой метрикой

$$ds^2 = a(z)dzd\bar{z}$$

гауссова кривизна примет вид

$$K = -\frac{2}{a(z)} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \ln a(z). \quad (1.5)$$

## 2. Многообразия, заданные комплексными уравнениями.

Сначала мы рассмотрим группы преобразований пространства  $\mathbb{C}^n$  как многообразия, заданные комплексными уравнениями. Мы будем опускать подробности, так как в вещественном случае эта задача уже рассмотрена.

Множество обратимых комплексных матриц в  $M(n, \mathbb{C})$  обозначается через  $GL(n, \mathbb{C})$  и называется *общей линейной группой*. Эта группа образует открытое множество в  $M(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ , заданное неравенством  $\det X \neq 0$ .

Подгруппа  $GL(n, \mathbb{C})$ , заданная уравнением  $\det X = 1$ , обозначается через  $SL(n, \mathbb{C})$  и называется *специальной линейной группой*. Подгруппа  $GL(n, \mathbb{C})$ , заданная уравнением  $X \cdot \bar{X}^t = E$ , обозначается через  $U(n)$  и называется *унитарной группой*. Подгруппа  $U(n)$ , заданная уравнением  $\det X = 1$ , обозначается через  $SU(n)$  и называется *специальной унитарной группой*.

Задача 2.1. Доказать следующие утверждения:

1) Элементы группы  $U(n)$  задают преобразования  $\mathbb{C}^n$ , которые сохраняют эрмитово скалярное произведение

$$(v, w) = v^1 \bar{w}^1 + \dots + v^n \bar{w}^n.$$

2) Множества  $GL(n, \mathbb{C})$ ,  $SL(n, \mathbb{C})$ ,  $U(n)$ ,  $SU(n)$  в  $M(n, \mathbb{C})$  являются дифференцируемыми многообразиями размерности, соответственно,  $2n^2$ ,  $2n^2 - 2$ ,  $n^2$ ,  $n^2 - 1$ .

3). Выполняются равенства  $U(1) = S^1$ ,  $SU(2) = S^3$ , где  $S^1$  – окружность,  $S^3$  – сфера.

Наиболее интересные многообразия в  $\mathbb{C}^n$  задаются комплексно-аналитическими уравнениями.

**Определение 2.2.** Комплексно-значная функция  $f(z_1, \dots, z_n)$  называется аналитической, если она дифференцируемая и удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

А теперь определим криволинейную комплексно-аналитическую систему координат в области  $U \subset \mathbb{C}^n$ .

**Определение 2.3.** Набор комплексно-аналитических функций  $w_k = w_k(z)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , образует комплексно-аналитическую систему координат в области  $U$ , если они задают биекцию на область  $V$  в  $\mathbb{C}^n$ , причем обратное отображение также задается комплексно-аналитическими функциями.

Множество  $M \subset \mathbb{C}^n$  называется комплексно-аналитическим  $k$ -мерным многообразием, если для каждой точки  $z_0 \in M$  существует окрестность  $U(z_0)$  с криволинейными комплексно-аналитическими координатами  $w_1, \dots, w_n$  такими, что уравнения  $w_{k+1} = 0, \dots, w_n = 0$  определяют множество  $M \cap U(z_0)$ . Заметим, что  $k$ -мерное комплексно-аналитическое многообразие является также  $2k$ -мерным дифференцируемым многообразием.

**Задача 2.4.** Показать, что множества  $GL(n, \mathbb{C})$ ,  $SL(n, \mathbb{C})$  являются комплексно-аналитическими многообразиями в  $\mathbb{C}^n$ , а множества  $U(n)$ ,  $SU(n)$  являются только дифференцируемыми многообразиями.

Пусть  $U$  – область в  $\mathbb{C}^n$  и  $M \subset U$  – множество, заданное системой уравнений

$$F_{k+1}(z) = 0, \dots, F_n(z) = 0,$$

где  $F_{k+1}(z), \dots, F_n(z)$  – комплексно-аналитические функции на  $U$ , причем ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_{k+1}}{\partial z_{k+1}} & \dots & \frac{\partial F_{k+1}}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial z_{k+1}} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

в каждой точке  $z \in M$  максимален, то есть равен  $n-k$ . Тогда множество  $M$  является  $k$ -мерным комплексно-аналитическим многообразием. Это утверждение вытекает из комплексно-аналитического аналога теоремы

о неявной функции, которую предлагается сформулировать и доказать самостоятельно.

Также предлагается самостоятельно, с помощью карт и атласов, определить комплексно-аналитическую структуру на топологическом многообразии и определить абстрактное комплексно-аналитическое многообразие. В качестве примера показать, что  $\mathbb{C}P^n$  является комплексно-аналитическим многообразием.

Задача 2.5. Показать, что каждое абстрактное комплексно-аналитическое многообразие является ориентированным четномерным дифференцируемым многообразием.

Задача 2.6. Рассмотрим отображение  $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^3$ , заданное формулами

$$w_{00} = u_0 v_0, w_{01} = u_0 v_1, w_{10} = u_1 v_0, w_{11} = u_1 v_1,$$

где  $(u_0 : u_1)$  – однородные координаты первой комплексной прямой,  $(v_0 : v_1)$  – координаты второй прямой, а  $(w_{00} : w_{01} : w_{10} : w_{11})$  – координаты  $\mathbb{C}P^3$ . Показать, что это отображение инъективно и комплексно-аналитическое. Найти образ этого отображения.

### 3. Плоские комплексные кривые.

В этом пункте мы рассмотрим как пример плоские комплексно-аналитические кривые. Пусть такая кривая задается уравнением

$$f(z, w) = 0, \quad (3.1)$$

где  $f(z, w)$  – комплексно-аналитическая функция двух комплексных переменных  $z, w$ . Уравнение (3.1) есть система двух вещественных уравнений  $u = 0, v = 0$ , где  $f = u + iv$ , и поэтому задает двумерную поверхность в  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ . Введем комплексный градиент

$$\text{grad}_{\mathbb{C}} f = \left( \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial w} \right).$$

Точка  $(z_0, w_0)$  на кривой (3.1) называется неособой, если

$$\text{grad}_{\mathbb{C}} f|_{(z_0, w_0)} \neq 0.$$

Имеет место следующий комплексный аналог теоремы о неявной функции (который мы приводим без доказательства).



**Теорема 3.1.** Пусть  $f(z, w)$  — комплексно-аналитическая функция, причем в точке  $(z_0, w_0)$  с  $f(z_0, w_0) = 0$  градиент  $\text{grad}_{\mathbb{C}} f$  отличен от нуля. Пусть, например,  $\frac{\partial f}{\partial w} \neq 0$ . Тогда в достаточно малой окрестности точки  $(z_0, w_0)$  уравнение  $f(z, w) = 0$  имеет единственное и при этом комплексно-аналитическое решение  $w = w(z)$ , так что  $f(z, w(z)) = 0$ ,  $w_0 = w(z_0)$ .

**Пример 3.2.** Пусть  $f(z, w)$  — многочлен от двух переменных. Тогда полная совокупность решений уравнения  $f(z, w) = 0$  вида  $w = w(z)$  называется многозначной алгебраической функцией, а сама поверхность (комплексная кривая)  $f(z, w) = 0$  называется графиком или римановой поверхностью этой многозначной функции.

Важный частный случай — это гиперэллиптические кривые, то есть римановы поверхности, задаваемые уравнением  $w^2 = P_n(z)$ , где  $P_n(z)$  — многочлен  $n$ -ой степени.

**Задача 3.3.** Показать, что кривая  $w^2 = P_n(z)$  неособая тогда и только тогда, когда многочлен  $P_n(z)$  не имеет кратных корней. Выяснить топологический тип этой кривой в случае отсутствия кратных корней.

Вернемся к случаю произвольной неособой комплексно-аналитической кривой  $f(z, w) = 0$ . Пусть

$$\left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_{(z_0, w_0)} \neq 0$$

в некоторой точке  $(z_0, w_0)$ . Тогда

$$w = w(z), \quad dw = \frac{\partial w}{\partial z} dz,$$

поэтому метрика на  $\mathbb{C}^2$

$$ds^2 = dzd\bar{z} + dw d\bar{w}$$

на поверхности  $f(z, w) = 0$  превращается в

$$ds^2 = \left( 1 + \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 \right) dzd\bar{z}.$$

Если  $z = x + iy$ , то  $x, y$  — изотермические координаты на этой поверхности.

Пусть теперь  $f(z, w)$  многочлен степени  $d$ , тогда введем однородные координаты  $(z_0 : z_1 : z_2)$  и положим

$$z = \frac{z_1}{z_0}, \quad w = \frac{z_2}{z_0},$$

и рассмотрим однородный многочлен степени  $d$

$$F(z_0, z_1, z_2) = z_0^d f\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right).$$

Тогда уравнение  $F(z_0, z_1, z_2) = 0$  задает комплексную кривую в  $\mathbb{CP}^2$ . Заметим, что  $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^2$  и кривая  $F(z_0, z_1, z_2) = 0$  является замыканием кривой  $f(z, w) = 0$ .

#### 4. Кватернионы.

Множество кватернионов — это совокупность  $\mathbb{H}$  линейных комбинаций с вещественными коэффициентами вида

$$q \in \mathbb{H}, \quad q = a + bi + cj + dk, \quad (4.1)$$

где  $i, j, k$  — некоторые линейно независимые символы. Введём билинейное умножение в  $\mathbb{H}$ , положив

$$ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1. \quad (4.2)$$

Легко проверить, что  $\mathbb{H}$  с так определённым умножением превращается в ассоциативную, но не коммутативную алгебру над полем вещественных чисел. Эту алгебру можно представить в матричном виде. Обозначим через  $Q$  множество комплексных матриц вида

$$\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix},$$

где  $i$  — мнимая единица, тогда справедливо

**Предложение 4.1.** Рассмотрим отображение  $A: \mathbb{H} \rightarrow Q$

$$A(a + bi + cj + dk) = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

тогда получим изоморфизм вещественных алгебр.

**Доказательство.** Отображение  $A$  является изоморфизмом 4-мерных вещественных пространств, остаётся проверить, что оно сохраняет операцию умножения. Для этого достаточно проверить, что матрицы

$$A(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, A(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A(k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

удовлетворяют соотношениям (4.2). Эту проверку предлагается провести самостоятельно. Предложение доказано.

Введем операцию сопряжения в  $\mathbf{H}$ , полагая для кватерниона вида (4.1)

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk.$$

**Предложение 4.2.** Отображение  $q \rightarrow \bar{q}$  — антиавтоморфизм алгебры  $\mathbf{H}$ , то есть

$$\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2, \overline{q_1 \cdot q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1.$$

**Доказательство.** Это сразу видно из того, что

$$A(\bar{q}) = (\overline{A(q)})^t,$$

а отображение  $X \rightarrow \bar{X}^t$  является антиавтоморфизмом алгебры матриц  $M(n, C)$ . Предложение доказано.

Определим норму  $|q|$ , полагая для кватерниона вида (4.1)

$$|q|^2 = q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Прямое вычисление показывает, что

$$|q|^2 = \det A(q),$$

поэтому норма обладает свойством

$$|q_1 \cdot q_2| = |q_1| \cdot |q_2|. \quad (4.4)$$

**Предложение 4.3.** Алгебра кватернионов  $\mathbf{H}$  является телом, то есть для каждого ненулевого кватерниона  $q$  определен обратный кватернион  $q^{-1}$  такой, что  $qq^{-1} = 1$ .

**Доказательство.** Можно положить

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}, \quad (4.5)$$

тогда  $qq^{-1} = q\bar{q}/|q|^2 = 1$ . Предложение доказано.

Множество кватернионов с нормой 1 обозначим через  $H_1$ . В силу (4.4) это группа по умножению, а из (4.5) следует, что если  $q \in H_1$ , то  $q^{-1} = \bar{q}$ .

В четырехмерном пространстве  $R^4$  с координатами  $a, b, c, d$  множество  $H_1$  задается уравнением

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1,$$

то есть является сферой  $S^3$ .

**Предложение 4.4.** Образ гомоморфизма  $A: H_1 \rightarrow GL(2, C)$  равен группе  $SU(2)$ .

**Доказательство.** Если  $q = a + bi + cj + dk \in H_1$ , то положим

$$z = a + bi, \quad w = c + di.$$

Тогда  $|z|^2 + |w|^2 = 1$  и матрица  $A(q)$  имеет вид

$$A(q) = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица  $A(q)$  принадлежит группе  $SU(2)$ . Остается проверить, что так получаем любую матрицу из  $SU(2)$ . Предложение доказано.

Пусть  $H_0$  — трехмерное пространство кватернионов  $x$ , удовлетворяющих условию  $\bar{x} = -x$ . Метрика в этом пространстве задается формулой

$$|x|^2 = x\bar{x} = -x^2.$$

Предлагается проверить, что это пространство евклидово.

**Предложение 4.5.** Если  $|q| = 1$ , то преобразование

$$\alpha_q: x \rightarrow qxq^{-1} \tag{4.6}$$

является вращением трехмерного пространства  $H_0 = R^3$ .

**Доказательство.** Так как  $\bar{x} = -x$ ,  $\bar{q} = q^{-1}$ , то

$$\overline{qxq^{-1}} = \bar{q}^{-1}\bar{x}\bar{q} = -qxq^{-1}.$$

Поэтому трехмерное пространство  $H_0$  при преобразовании  $\alpha_q$  переходит в себя. Кроме того,  $|qxq^{-1}| = |x|$ , то есть длина вектора в  $H_0$  сохраняется. Предложение доказано.

Задача 4.6. Доказать утверждения:

- 1) Каждый элемент группы  $SO(3)$  задается формулой (4.6).
- 2) Если  $\alpha_{q_1} = \alpha_{q_2}$ , то  $q_1 = \pm q_2$ .
- 3) Выполняется равенство  $SU(2)/\pm 1 = SO(3)$ .
- 4) Группа  $SO(3)$  диффеоморфна  $\mathbb{R}P^3$ .

## 5. Вещественные и комплексные коники.

Далее однородные координаты на  $\mathbb{C}P^2$  будем обозначать через  $(z_0 : z_1 : z_2)$ . Рассмотрим отображение  $\sigma : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ , заданное правилом  $\sigma(z_0 : z_1 : z_2) = (\bar{z}_0 : \bar{z}_1 : \bar{z}_2)$ , тогда  $\sigma^2 = 1$ , то есть  $\sigma$  является инволюцией. Неподвижные точки этой инволюции имеют вещественные однородные координаты  $(x_0 : x_1 : x_2)$ , то есть определяют точку  $\mathbb{R}P^2$ .

Рассмотрим однородное уравнение степени  $d$  с комплексными коэффициентами

$$\sum_{k+l+m=d} a_{klm} z_0^k z_1^l z_2^m = 0$$

Обозначим его через  $E$ , а через  $E(\mathbb{C})$  будем обозначать множество точек  $(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{C}P^2$ , удовлетворяющих уравнению  $E$ . Если умножить уравнение  $E$  на ненулевой множитель  $\lambda$ , то есть рассмотреть уравнение  $(\lambda E)$ , то его множество решений  $(\lambda E)(\mathbb{C})$  совпадет со множеством решений  $E(\mathbb{C})$ . Обратное утверждение неверно. Если уравнения  $E$ ,  $(\lambda E)$  не различать, а нулевое уравнение не рассматривать то множество уравнений степени  $d$  образует комплексное проективное пространство размерности

$$N(d) = \binom{d+2}{2} - 1,$$

то есть множество уравнений равно  $\mathbb{C}P^{N(d)}$ . Его однородные координаты — это коэффициенты уравнений  $a_{klm}$ . В линейной геометрии уравнения и множества решений рассматриваются с точностью до проективных преобразований. Такие преобразования задаются формулой  $w = Az$ , где  $A$  — линейное преобразование  $\mathbb{C}^3$ , то есть  $A$  — матрица. Например, линейное уравнение приводится к каноническому виду  $z_0 = 0$ , а уравнение второй степени к одной из следующих канонических форм:  $z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0$ ,  $z_0^2 + z_1^2 = 0$ ,  $z_0^2 = 0$ . Уравнение  $z_0 = 0$  задает проективную прямую  $C^1 = \bar{C}$ . Уравнение  $z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0$  задает одномерное комплексно-аналитическое многообразие, комплексно-аналитически эквивалентное проективной прямой. Этот факт проверяется с помощью стереографической проекции с центром в точке  $(1 : i : 0)$  (см. рис.21).

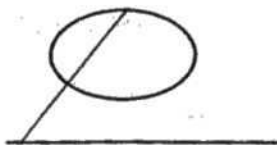


Рисунок 21.

Уравнение  $z_0^2 + z_1^2 = 0$  задает объединение проективных прямых

$$z_0 + iz_1 = 0, \quad z_0 - iz_1 = 0,$$

а уравнение  $z_0^2 = 0$  задает "двойную" проективную прямую.

В линейной алгебре и геометрии рассматриваются только уравнения степени  $d = 1, 2$ . Случай  $d > 2$  исследуется в алгебраической геометрии, мы им заниматься не будем, а собираемся дополнить результаты об уравнениях второй степени.

При  $d = 2$  множество  $E(\mathbb{C})$  называется коникой, таким образом коника задается уравнением

$$\sum_{k,l=0}^2 a_{kl} z_k z_l = 0, \quad (5.1)$$

где комплексные коэффициенты  $a_{kl}$  образуют ненулевую симметрическую матрицу. По конике  $E(\mathbb{C})$ , заданной уравнением (5.1), это уравнение восстанавливается с точностью до ненулевого множителя, то есть восстанавливается точка в проективном пространстве уравнений второй степени. Поэтому уравнение (5.1) мы будем также называть коникой. Коника (5.1) называется неособой, если  $\det(a_{kl}) \neq 0$ , то есть уравнение (5.1) можно привести к первой канонической форме. Особые коники образуют гиперповерхность третьей степени в проективном пространстве коник  $\mathbb{CP}^5$ . Коника (5.1) называется вещественной, если все коэффициенты  $a_{kl}$  вещественные. Мы хотим изучить множество особых вещественных коник.

Рассмотрим инволюцию комплексного сопряжения  $\sigma : \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ . Будем считать точки  $z, \sigma(z)$  эквивалентными, тогда получим факторпространство  $\mathbb{CP}^2/\sigma$ .

**Предложение 5.1.** Множество особых вещественных коник равно факторпространству  $\mathbb{CP}^2/\sigma$ .

**Доказательство.** Сопоставим точке факторпространства  $\mathbb{CP}^2/\sigma$  особую вещественную конику. Точка факторпространства  $\mathbb{CP}^2/\sigma$  — это пара комплексных точек  $(a_0 : a_1 : a_2)$ ,  $(\bar{a}_0 : \bar{a}_1 : \bar{a}_2)$ . Из этой пары образуем следующую особую вещественную конику

$$(a_0 z_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2)(\bar{a}_0 z_0 + \bar{a}_1 z_1 + \bar{a}_2 z_2) = 0.$$

Нетрудно проверить биективность построенного отображения. Предложение доказано.

**Задача 5.2.** Показать, что множество особых вещественных коник гомеоморфно сфере  $S^4$ .

**Задача 5.3.** Вычислить группу вещественных проективных преобразований плоскости  $\mathbb{CP}^2$ , переводящих в себя прямую  $z_0 = 0$ , а также пару точек на ней  $(0 : 1 : i)$ ,  $(0 : 1 : -i)$ .

## 6. Зачем нужен комплексный язык в геометрии?

После того как Декарт ввел систему координат на плоскости, стало ясно, что простые и хорошо изученные геометрические объекты (например, прямые и коники) можно задать также с помощью простых полиномиальных уравнений (соответственно линейных и квадратичных). Это навело на мысль, что в качестве следующего шага можно было бы попробовать изучить кривые, заданные многочленами более высокой степени. Уже Ньютон глубоко изучал плоские кубики. Однако существовали две проблемы, которые приводили к громоздкости результатов. Первая из них заключалась в отсутствии бесконечно удаленных точек. Две различные прямые, как правило, пересекаются в одной точке, но бывают случаи, когда они параллельны. Оказывается, очень удобно в последнем случае считать, что эти прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке. Это обстоятельство приводит к введению понятия проективной плоскости  $\mathbb{RP}^2$ . Пока, казалось, можно обойтись без комплексных решений уравнений. Что это не так, показывают уже многочлены от одной переменной. Многочлен может иметь корней (с кратностью) меньше его степени, причем корни достаточно простых многочленов могут оказаться расположенными вдали от вещественной оси на комплексной плоскости. Даже когда, с вещественной точки зрения, ситуация не предвещает ничего плохого, объяснение некоторых явлений

в математике можно получить, только изучая их над  $\mathbb{C}$ . Таким, например, является вопрос, почему ряд Тейлора функции  $(1+x^2)^{-1}$  отказывается быть всюду сходящимся? Таким образом, изучение множеств решений уравнений будет происходить более эффективно, если рассматривать и комплексные решения. Введение "мнимых" элементов геометрии XIX века приводило к замечательным результатам. С другой стороны, современная физика требует в своих теоретических исследованиях применять комплексный язык.

В качестве примера приведем математическую модель механической системы в квантовой механике. В этой модели состояния физической системы задаются прямыми в комплексном гильбертовом пространстве  $H$ , то есть элементами комплексного проективного пространства  $P(H)$ . Каждой скалярной физической величине соответствует самосопряженный оператор  $A : H \rightarrow H$ , причем спектр  $A$  есть полное множество значений величины, которое можно получить, производя измерения этой величины на разных состояниях системы.

Более полную аксиоматику квантовой механики можно посмотреть в книге [3].

## Глава V. ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ И СВЯЗНОСТИ

### 1. Определение и примеры векторных расслоений.

Пусть дано дифференцируемое отображение дифференцируемых многообразий  $\pi : E \rightarrow X$ , тогда для каждой точки  $x \in X$  прообраз  $\pi^{-1}(x)$  будем обозначать через  $E_x$  и называть слоем, а отображение  $\pi : E \rightarrow X$  будем называть расслоением со слоем  $E_x$  над точкой  $x$  (см. рис.22).

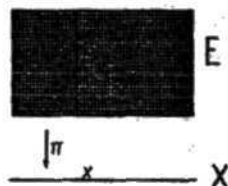


Рисунок 22.

Если каждый слой  $E_x$  является векторным пространством (здесь мы



будем рассматривать только вещественные векторные пространства), то это расслоение называется векторным.

Пример 1.1. Пусть  $V$ -векторное пространство, тогда рассмотрим произведение  $E = X \times V$  и проекцию  $\pi : E \rightarrow X$ ,  $\pi(x, v) = x$ , мы получим векторное расслоение, которое называется тривиальным.

Далее мы будем рассматривать только локально-тривиальные векторные расслоения. Это такие расслоения, которые над маленькими окрестностями устроены как тривиальные векторные расслоения, но глобально не обязаны быть тривиальными. Прежде чем дать точное определение, введем вспомогательное обозначение. Пусть  $\pi : E \rightarrow X$  векторное расслоение,  $U \subset X$  открытое множество, прообраз  $\pi^{-1}U$  обозначим через  $E_U$ , тогда получаем векторное расслоение  $\pi : E_U \rightarrow U$ , оно называется ограничением первоначального расслоения на множество  $U$ .

Определение 1.2. Гомоморфизмом векторного расслоения  $\pi : E \rightarrow X$  в векторное расслоение  $\pi : F \rightarrow X$  называется дифференцируемое отображение  $h : E \rightarrow F$ , удовлетворяющее условиям:

- 1) Коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & F \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ X & = & X. \end{array}$$

- 2) Отображение слоёв  $h : E_x \rightarrow F_x$  линейное.

Этот гомоморфизм будет изоморфизмом, если  $h$  диффеоморфизм. Изоморфизм расслоений  $h$  называется тривиализацией, если второе расслоение  $\pi : F \rightarrow X$  тривиальное.

Определение 1.3. Векторное расслоение  $\pi : E \rightarrow X$  локально-тривиальное, если для каждой точки  $x_0 \in X$  существует окрестность  $U \subset X$  такая, что расслоение  $\pi : E_U \rightarrow U$  изоморфно тривиальному расслоению  $\pi : U \times V \rightarrow U$ .

Пример 1.4. Пусть  $E$ -подмногообразие в произведении  $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ , заданное условием  $x \in l$ , где  $l \in \mathbb{R}P^n$  — прямая в  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $x$  — точка в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Тогда проекция  $\pi : E \rightarrow \mathbb{R}P^n$  задается правилом  $(l, x) \rightarrow l$ . Предлагается проверить, что получается локально-тривиальное векторное расслоение, слой которого прямая, причем оно не будет тривиальным.

Локально-тривиальное расслоение можно задавать функциями перехода. Это делается следующим образом. Пусть

$$X = \bigcup_i U_i$$

открытое покрытие дифференцируемого многообразия  $X$ . И на каждом пересечении  $U_i \cap U_j$  определена дифференцируемая функция  $g_{ij}(x)$  со значениями в группе  $GL(m, R)$ , причем должны выполняться условия:

- 1)  $g_{ji}(x) = g_{ij}^{-1}(x)$ ,
- 2)  $g_{ij}(x)g_{jk}(x)g_{ki}(x) = 1$ .

Тогда из тривиального расслоения на несвязном объединении

$$\pi : \bigsqcup_i (U_i \times \mathbb{R}^m) \rightarrow \bigsqcup_i U_i$$

получается локально-тривиальное расслоение на  $X$ , если на

$$\bigsqcup_i (U_i \times \mathbb{R}^m)$$

ввести следующее отношение эквивалентности. Если  $x \in U_i \cap U_j$ , то точка  $(x, v) \in U_i \times \mathbb{R}^m$  эквивалентна точке  $(x, g_{ij}(x)v) \in U_j \times \mathbb{R}^m$ . Таким образом,

$$E = \bigsqcup_i (U_i \times \mathbb{R}^m) / \sim.$$

**Задача 1.5.** Показать, что каждое локально-тривиальное векторное расслоение можно получить с помощью некоторых функций склейки  $g_{ij}(x)$ .

**Задача 1.6.** Перенести операции над векторными пространствами (образование двойственного пространства, пространства эндоморфизмов  $End(V) = L(V; V)$ , прямой суммы, тензорного произведения, ...) на векторные расслоения.

## 2. Касательное расслоение.

Для дифференцируемого многообразия  $M$  существует каноническое векторное расслоение, которое обозначается через  $\pi : TM \rightarrow M$  и называется касательным расслоением на  $M$ . Как множество  $TM$  является несвязным объединением касательных пространств

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

Проекция  $\pi : TM \rightarrow M$  отображает касательное пространство  $T_p M$  в точку  $p$ . Построим дифференцируемый атлас на множестве  $TM$ . Пусть

$U \subset M$  карта на  $M$  с координатами  $x_1, \dots, x_n$  и вектор  $v_x \in T_x M$  имеет в базисе  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  разложение

$$v_x = v^1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + v^n(x) \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Тогда вектору  $v_x$  сопоставим набор чисел  $(x_1, \dots, x_n, v^1(x), \dots, v^n(x))$ , благодаря этому правилу мы получим биекцию  $TM_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ . Эта биекция определяет топологию на множестве  $TM_U$  и карту на нём. Остается проверить, что существует и единственная топология на всём множестве  $TM$ , которая для каждой карты  $U \subset M$  индуцирует построенную топологию на множестве  $TM_U$ . Также нужно проверить, что из дифференцируемого атласа  $U_i, i \in I$ , на  $M$  получается дифференцируемый атлас на  $TM$ .

Задача 2.1. Закончить построение дифференцируемого атласа на  $TM$ , найти функции перехода от одной карты к другой, убедиться, что проекция  $\pi : TM \rightarrow M$  будет дифференцируемым отображением.

Задача 2.2. Показать, что касательное расслоение к сфере  $\pi : TS^2 \rightarrow S^2$  не тривиальное.

Задача 2.3. Показать, что касательное расслоение к тору  $S^1 \times S^1$  тривиальное.

Задача 2.4. Доказать, что многообразие  $M$  ориентируемое тогда и только тогда, когда расслоение  $\Lambda^n TM$  тривиальное, где  $n = \dim M$ .

Рассмотрим векторное поле  $v_p$  на многообразии  $M$ , из него получается отображение  $M \rightarrow TM$ , заданное правилом  $p \rightarrow v_p$ .

Задача 2.5. Показать, что векторное поле  $v_p$  тогда и только тогда дифференцируемое, когда соответствующее отображение  $M \rightarrow TM$  дифференцируемое.

### 3. Сечения векторного расслоения.

Далее  $\pi : E \rightarrow X$  — локально-тривиальное векторное расслоение, многообразие  $X$  обычно называют базой расслоения, а  $E$  — пространством расслоения, причем через  $E$  обозначают всё расслоение. Пусть  $U \subset X$  — открытое множество и для каждой точки  $x \in U$  задан вектор  $s_x \in E_x$ , тогда говорят, что на  $U$  задано сечение расслоения  $E$ . Это сечение определяет отображение  $s : U \rightarrow E$  по правилу  $x \rightarrow s_x$ . Заметим, что выполняется равенство  $\pi \circ s = id$  (см. рис.23)

Сечение  $s(x)$ ,  $x \in U$ , называется дифференцируемым, если соответствующее отображение  $s : U \rightarrow E$  — дифференцируемое.

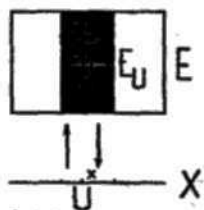


Рисунок 23.

Множество дифференцируемых сечений расслоения  $E$  на  $U$  обозначим через  $\mathcal{E}(U)$ . Это множество является модулем над кольцом  $\mathcal{O}(U)$ .

Если для расслоения  $\pi: E_U \rightarrow U$  задана тривиализация, то есть коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E_U & \xrightarrow{h} & U \times V \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ U & = & U \end{array}$$

где  $h$  — диффеоморфизм, то определяются базисные сечения  $s_1(x), \dots, s_m(x)$ . Эти сечения определяются равенствами  $h(s_i(x)) = (x, v_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , где  $v_1, \dots, v_m$  — фиксированный базис пространства  $V$ . Тогда для каждой точки  $x \in U$  векторы  $s_1(x), \dots, s_m(x)$  образуют базис пространства  $E_x$ . Следовательно, произвольное сечение  $s(x)$  раскладывается в линейную комбинацию

$$s(x) = a_1(x)s_1(x) + \dots + a_m(x)s_m(x),$$

где  $a_1(x), \dots, a_m(x)$  — функции на  $U$ .

**Задача 3.1.** Показать, что сечение  $s(x)$  — дифференцируемое тогда и только тогда, когда функции  $a_1(x), \dots, a_m(x)$  — дифференцируемые.

Через  $\mathcal{E}_{x_0}$  мы будем обозначать множество ростков дифференцируемых сечений в точке  $x_0$  расслоения  $E$ . Это множество является модулем над кольцом  $\mathcal{O}_{x_0}$ .

#### 4. Ковариантная производная и связность.

**Определение 4.1.** Ковариантное дифференцирование сечений расслоения  $E$  в точке  $x_0$  — это билинейное отображение

$$\nabla: T_{x_0} \times \mathcal{E}_{x_0} \rightarrow E_{x_0}, \quad (v, s) \rightarrow \nabla_v s,$$

удовлетворяющее правилу Лейбница

$$\nabla_v(fs) = \partial_v f \cdot s(x_0) + f(x_0) \cdot \nabla_v s,$$

где  $f \in \mathcal{O}_{x_0}$ .

Пусть точка  $x_0$  находится в карте  $U$  с координатами  $x_1, \dots, x_n$ , причем имеется тривиализация расслоения  $E$  с базисными сечениями  $s_1(x), \dots, s_m(x)$ , тогда можем определить символы Кристоффеля для данного ковариантного дифференцирования. Для этого обозначим через  $\Gamma_{ij}^k$   $k$ -ую координату вектора  $\nabla_{e_i} s_j \in E_{x_0}$  в базисе  $s_1, \dots, s_m$ , то есть

$$\nabla_{e_i} s_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k s_k.$$

Задача 4.2. Пусть  $s(x)$  имеет разложение

$$s(x) = \sum_{j=1}^m a_j(x) s_j(x),$$

тогда положим

$$\partial_v s(x_0) = \sum_{j=1}^m (\partial_v a_j(x_0)) s_j(x_0).$$

Доказать, что выполняется равенство

$$\nabla_v s(x_0) = \partial_v s(x_0) + \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k v^i a^j(x_0) s_k(x_0), \quad (4.1)$$

где  $v^1, \dots, v^n$  — координаты  $v$ ,  $a^1, \dots, a^m$  — координаты  $s$ .

Пусть в каждой точке  $x \in X$  задано ковариантное дифференцирование сечений расслоения  $E$ , то есть билинейное отображение

$$\nabla : T_x \times \mathcal{E}_x \rightarrow E_x,$$

удовлетворяющее правилу Лейбница. Тогда говорят, что на расслоении  $E$  определена связность. Таким образом, связность на расслоении  $E$  является "полем" ковариантных дифференцирований. Если  $v(x)$ -дифференцируемое векторное поле, а  $s(x)$ -дифференцируемое сечение, то ковариантная производная в переменной точке  $\nabla_{v(x)} s(x)$  является сечением расслоения  $E$ . Мы будем предполагать, что сечение  $\nabla_{v(x)} s(x)$  является дифференцируемым для каждого дифференцируемого векторного поля  $v(x)$  и дифференцируемого сечения  $s(x)$ , в этом случае связность

называется дифференцируемой. Заметим, что для дифференцируемости связности достаточно потребовать, чтобы символы Кристоффеля были функциями класса  $C^\infty$ .

Главное значение связности на расслоении состоит в том, что она дает возможность определить параллельный перенос слоя  $E_x$  вдоль параметрической кривой. Но сделать это предлагается самостоятельно, используя доказательство теоремы 4.1 в главе II.

Задача 4.3. Дать определение тензора кривизны для связности на векторном расслоении.

Приведем другое, но эквивалентное, определение связности на векторном расслоении. Обозначим через  $A^q(X, E)$  множество сечений векторного расслоения  $\Lambda^q T^*X \otimes E$ . Эти сечения называются дифференциальными  $q$ -формами на  $X$  со значениями в векторном расслоении  $E$ . Значение этой формы в точке  $x \in X$  — это кососимметрическая функция  $\omega^q(v_1, \dots, v_q)$  от  $q$  касательных векторов со значениями в векторном пространстве  $E_x$ . Связность  $\nabla$  определяет дифференциал

$$D: \mathcal{E}(X) \rightarrow A^1(X, E) \quad (4.2)$$

следующим правилом:

$$Ds(x)(v_x) = \nabla_{v_x} s(x). \quad (4.3)$$

Задача 4.4. Показать, что дифференциал (4.2) удовлетворяет правилу Лейбница.

Задача 4.5. Показать, что отображение вида (4.2), удовлетворяющее правилу Лейбница, определяет связность с помощью правила (4.3).

Задача 4.6. Показать, что с помощью правила Лейбница ковариантный дифференциал (4.2) однозначно расширяется до последовательности дифференциалов

$$D: A^q(X) \rightarrow A^{q+1}(X, E).$$

Задача 4.6. Показать, что существует и единственная внешняя дифференциальная форма

$$R_\nabla \in A^2(X, \text{End}(E))$$

такая, что отображение

$$D^2: A^q(X, E) \rightarrow A^{q+2}(X, E)$$

совпадает с внешним умножением на форму  $R\gamma$ .

Задача 4.7. Показать, что форма  $R\gamma$  является тензором кривизны связности  $\nabla$ .

Замечание 4.8. В физике связности на векторных расслоениях называют калибровочными полями, они описывают "поля взаимодействия". Эти связности, как правило, рассматриваются на комплексных векторных расслоениях. Для изучения этой темы полезна книга Ю.И.Манина "Комплексная геометрия и калибровочные поля".

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Геометрия — это наука о пространстве, причем понятие пространства является историческим. Сначала математическое пространство отождествлялось с физическим пространством. Но в прошлом веке стало понятно, что такой подход очень неудобен, и математики пришли к убеждению о независимости математического пространства от физического. Этот взгляд привел к "созданию" различных математических пространств, мало похожих на физическое пространство. Тем не менее, теории о некоторых "созданных" пространствах стали применяться в физике.

Главная цель данного курса — это познакомить студентов с различными пространствами, "сотворенными" математиками в XX веке. Мы начинаем с проективного пространства, которое будет служить моделью, а также играть вспомогательную роль при определении некоторых других пространств. Заметим, что проективное пространство было введено в XIX веке.

Так как пространств много, то и геометрий не одна, например, риманова геометрия изучает римановы пространства. В этом курсе мы более подробно познакомились с этой геометрией, а на другие не хватает времени.

С другой стороны, мы подготовили почву для изучения других геометрических пространств по монографиям и специальным статьям. Например, можно подробно познакомиться с геометрией комплексных алгебраических многообразий по книгам Ф.Гриффитса, Дж.Харриса "Принципы алгебраической геометрии". В этом труде развиваются и используются методы дифференциальной геометрии для решения задач комплексной алгебраической геометрии. Чтобы изучить современную дифференциальную геометрию фундаментально, мы рекомендуем проработать книги С.Кобаяси, К.Номидзу "Основы дифференциальной геометрии".

### Литература

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
2. Картан Э. Геометрия римановых пространств. М.: ИЛ, 1936.
3. Кострикин А.Н., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. М.: МГУ, 1980.
4. Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965.