

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра нелинейной динамики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

_____ Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

Рабочая программа дисциплины
Алгебраические и геометрические методы исследования дифференциальных и
разностных уравнений

Направление подготовки (специальности)
01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)
«Математическое моделирование и численные методы»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 21.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 05.05.2025

1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Алгебраические и геометрические методы исследования дифференциальных и разностных уравнений» обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом.

Цели освоения данной дисциплины:

- ознакомить студентов с современными алгебраическими и геометрическими методами исследования дифференциальных и разностных уравнений, включая использование симметрий и преобразований Бэклунда для построения решений таких уравнений, в том числе солитонных решений нелинейных интегрируемых уравнений,
- предоставить студентам опыт использования основных пакетов компьютерного программного обеспечения для символьных вычислений (в том числе пакетов Wolfram Mathematica и Maple) для решения актуальных задач в области дифференциальных и разностных уравнений,
- привлекать студентов к научным исследованиям в области дифференциальных и разностных уравнений, включая нелинейные интегрируемые уравнения.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Алгебраические и геометрические методы исследования дифференциальных и разностных уравнений» входит в цикл дисциплин, которые обеспечивают овладение алгебраическими, геометрическими и вычислительными методами, необходимыми для подготовки специалиста-математика. Она основывается на знаниях, полученных слушателями при изучении курсов «Алгебра и геометрия», «Дифференциальные уравнения» и «Уравнения математической физики». Знания и навыки, полученные при изучении дисциплины «Алгебраические и геометрические методы исследования дифференциальных и разностных уравнений», используются при изучении общепрофессиональных дисциплин, а также ряда специальных курсов. Данная дисциплина является курсом по выбору.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Профессиональные компетенции		
ПК-2 Способен разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач	И-ПК-2.2 Имеет опыт разработки теоретических моделей решаемых задач	Знать: - основные понятия алгебраических и геометрических подходов к дифференциальным и разностным уравнениям, в том числе понятия алгебр Ли векторных полей, симметрий и преобразований Бэклунда для указанных уравнений; - основные результаты теорий симметрий и преобразований Бэклунда для

		<p>дифференциальных и разностных уравнений с использованием алгебр Ли векторных полей.</p> <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> - применять симметрии и преобразования Бэклунда для построения решений дифференциальных и разностных уравнений, включая построение решений, инвариантных относительно данной симметрии, а также размножение решений с помощью преобразований Бэклунда. <p>Владеть навыками:</p> <ul style="list-style-type: none"> - использования пакетов компьютерного программного обеспечения (включая Wolfram Mathematica и Maple) для построения решений дифференциальных и разностных уравнений с помощью симметрий и преобразований Бэклунда.
--	--	---

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единиц, 72 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Векторные поля на конечномерных и бесконечномерных пространствах.	1	2	2				4	
2	Геометрическая интерпретация дифференциальных уравнений.	1	2	2				5	
3	Симметрии дифференциальных уравнений и применение симметрий для построения решений дифференциальных уравнений.	1	2	2				5	
4	Преобразования Бэклунда для дифференциальных уравнений и их приложения для размножения решений	1	2	3		1		5	

	дифференциальных уравнений.								
5	Алгебраическая интерпретация дифференциально-разностных уравнений, симметрии дифференциально-разностных уравнений и применение симметрий для построения решений таких уравнений.	1	2	3		1		5	
6	Симметрии разностных уравнений на двумерной решетке и применение симметрий для построения решений таких уравнений.	1	3	2		1		5	
7	Преобразования Бэклунда для разностных и дифференциально-разностных уравнений.	1	3	2		1		5	
							0,3	1,7	зачет
	Итого		16	16		4	0,3	35,7	

Содержание разделов дисциплины:

Тема 1. Векторные поля на конечномерных и бесконечномерных пространствах.

Определение бесконечномерного пространства \mathbb{R}^∞ и гладких функций на нем. Определение векторных полей на конечномерных и бесконечномерных пространствах. Коммутатор векторных полей. Алгебры Ли: определение, свойства и примеры. Алгебра Ли векторных полей.

Тема 2. Геометрическая интерпретация дифференциальных уравнений.

Пространство джетов (струй) и векторные поля на нем. Оператор полной производной и его интерпретация как векторного поля на пространстве джетов. Геометрическая интерпретация дифференциальных уравнений с помощью пространства джетов и векторных полей, соответствующих операторам полной производной по независимым переменным.

Тема 3. Симметрии дифференциальных уравнений и применение симметрий для построения решений дифференциальных уравнений.

Определение симметрий дифференциальных уравнений с помощью векторных полей на пространстве джетов. Решения дифференциального уравнения, инвариантные относительно данной симметрии. Вычисление симметрий и инвариантных решений с помощью пакетов компьютерного программного обеспечения для символьных вычислений, включая пакеты Wolfram Mathematica и Maple.

Тема 4. Преобразования Бэклунда для дифференциальных уравнений и их приложения для размножения решений дифференциальных уравнений.

Определение преобразований Бэклунда. Примеры преобразований Бэклунда для нелинейных уравнений математической физики, включая уравнения Кортевега — де Фриза и синус-Гордона. Размножение решений дифференциальных уравнений с помощью преобразований Бэклунда. Вычисление солитонных решений уравнения Кортевега — де Фриза с помощью преобразования Бэклунда. Применение солитонных решений для описания волн на воде.

Тема 5. Алгебраическая интерпретация дифференциально-разностных уравнений, симметрии дифференциально-разностных уравнений и применение симметрий для построения решений таких уравнений.

Определение дифференциально-разностных уравнений. Алгебраическая интерпретация таких уравнений. Определение симметрий для таких уравнений. Решения дифференциально-разностного уравнения, инвариантные относительно данной симметрии. Вычисление симметрий и инвариантных решений с помощью пакетов компьютерного программного обеспечения для символьных вычислений, включая пакеты Wolfram Mathematica и Maple.

Тема 6. Симметрии разностных уравнений на двумерной решетке и применение симметрий для построения решений таких уравнений.

Определение разностных уравнений на двумерной решетке. Определение симметрий для таких уравнений. Примеры решений разностного уравнения, инвариантных относительно данной симметрии. Вычисление симметрий и инвариантных решений с помощью пакетов компьютерного программного обеспечения для символьных вычислений, включая пакеты Wolfram Mathematica и Maple.

Тема 7. Преобразования Бэклунда для разностных и дифференциально-разностных уравнений.

Примеры преобразований Бэклунда для разностных и дифференциально-разностных уравнений. Примеры вычисления решений таких уравнений с помощью преобразований Бэклунда. Метод построения преобразований Бэклунда типа Миуры.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- пакеты программного обеспечения Wolfram Mathematica и Maple для математических вычислений;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»
http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php
- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»
<https://www.studentlibrary.ru>

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Виноградов А. М., Красильщик И. С. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики - М.: Факториал, 1997
<https://djvu.online/file/TH0B6kruNcVrz?ysclid=lw3oi85zpy371086267>
2. D. Levi, P. Winternitz, R.I. Yamilov. Continuous Symmetries and Integrability of Discrete Equations. American Mathematical Society, 2023. 496 p.
3. G. Berkeley, S. Igonin. Miura-type transformations for lattice equations and Lie group actions associated with Darboux-Lax representations. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 49 (2016), 275201. <https://arxiv.org/pdf/1512.09123.pdf>
4. J. Hietarinta, N. Joshi, F.W. Nijhoff. Discrete Systems and Integrability. Cambridge University Press, 2016. 461 p.

б) дополнительная литература

1. F. Khanizadeh, A.V. Mikhailov, Jing Ping Wang. Darboux transformations and recursion operators for differential-difference equations. Theoretical and Mathematical Physics, Volume 177, pages 1606-1654, (2013). <https://arxiv.org/pdf/1305.0588.pdf>
2. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989
3. C. Rogers, W.K. Schief. Bäcklund and Darboux Transformations. Cambridge University Press, 2002. 432 p.
4. C. Rogers, W.F. Shadwick. Bäcklund transformations and their applications. Academic Press, 1982. 352 p.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;

- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор(ы) :

Доцент кафедры
нелинейной динамики, к.ф.-м.н.

Игонин С.А.

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины
«Алгебраические и геометрические методы исследования
дифференциальных и разностных уравнений»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,
используемые в процессе текущей аттестации**

1. Описать пространство джетов (бесконечного порядка) скалярных гладких функций $u(x,t)$ от двух переменных.
2. Написать формулы операторов полной производной D_x и D_t на пространстве джетов (бесконечного порядка) скалярных гладких функций $u(x,t)$ от двух переменных.
3. Написать общую формулу для эволюционного векторного поля, коммутирующего с операторами полной производной D_x и D_t , на пространстве джетов (бесконечного порядка) скалярных гладких функций $u(x,t)$ от двух переменных.
4. Описать геометрическую интерпретацию (бесконечное продолжение в пространстве джетов бесконечного порядка) для следующих дифференциальных уравнений в частных производных: уравнение Бюргерса, уравнение Кортевега — де Фриза, уравнение синус-Гордона.
5. Вычислить несколько линейно независимых симметрий для уравнения Бюргерса. Описать решения, инвариантные относительно данной симметрии.
6. Вычислить несколько линейно независимых симметрий для уравнения Кортевега — де Фриза. Описать решения, инвариантные относительно данной симметрии.
7. Написать преобразование Бэклунда для уравнения Кортевега — де Фриза и применить это преобразование для получения 1-солитонного решения уравнения Кортевега — де Фриза.
8. Применить 1-солитонное решение уравнения Кортевега — де Фриза для описания волн на воде.
9. Описать алгебраическую интерпретацию, включая оператор сдвига по дискретной переменной и оператор полной производной по непрерывной переменной, для дифференциально-разностного уравнения Вольтерры.
10. Написать преобразование Бэклунда для дифференциально-разностного уравнения Вольтерры. Описать размножение решений уравнения Вольтерры с помощью этого преобразования Бэклунда.

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

1. Бесконечномерное пространство \mathbb{R}^∞ и гладкие функции на нем.
2. Определение векторных полей на конечномерных и бесконечномерных пространствах.
3. Коммутатор векторных полей.
4. Алгебры Ли: определение, свойства и примеры.
5. Алгебра Ли векторных полей.
6. Пространство джетов (струй) и векторные поля на нем.
7. Оператор полной производной и его интерпретация как векторного поля на пространстве джетов.

8. Геометрическая интерпретация дифференциальных уравнений с помощью пространства джетов и векторных полей, соответствующих операторам полной производной по независимым переменным.
9. Определение симметрий дифференциальных уравнений с помощью векторных полей на пространстве джетов.
10. Решения дифференциального уравнения, инвариантные относительно данной симметрии.
11. Вычисление симметрий и инвариантных решений дифференциальных уравнений с помощью пакетов программного обеспечения Wolfram Mathematica и Maple.
12. Определение преобразований Бэклунда для дифференциальных уравнений.
13. Примеры преобразований Бэклунда для нелинейных уравнений математической физики, включая уравнения Кортевега — де Фриза и синус-Гордона.
14. Размножение решений дифференциальных уравнений с помощью преобразований Бэклунда.
15. Вычисление солитонных решений уравнения Кортевега — де Фриза с помощью преобразования Бэклунда.
16. Применение солитонных решений для описания волн на воде.
17. Определение дифференциально-разностных уравнений и их алгебраическая интерпретация.
18. Определение симметрий для таких уравнений.
19. Решения дифференциально-разностного уравнения, инвариантные относительно данной симметрии.
20. Вычисление симметрий и инвариантных решений дифференциально-разностных уравнений с помощью пакетов программного обеспечения Wolfram Mathematica и Maple.
21. Определение разностных уравнений на двумерной решетке.
22. Определение симметрий для разностных уравнений на двумерной решетке.
23. Примеры решений разностного уравнения, инвариантных относительно данной симметрии.
24. Вычисление симметрий и инвариантных решений разностных уравнений с помощью пакетов программного обеспечения Wolfram Mathematica и Maple.
25. Примеры преобразований Бэклунда для разностных и дифференциально-разностных уравнений. Примеры вычисления решений таких уравнений с помощью преобразований Бэклунда.

3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

Пороговый уровень (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;

- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

Продвинутый уровень (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объёме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

Высокий уровень (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

Описание процедуры выставления оценки

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо»,

«удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

**Приложение №2 к рабочей программе дисциплины
«Алгебраические и геометрические методы исследования
дифференциальных и разностных уравнений»**

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Алгебраические и геометрические методы исследования дифференциальных и разностных уравнений» являются лекции. Это связано с тем, что в основе используемых методов лежит серьезный математический аппарат, требующий детального разбора. По большинству тем предусмотрены практические занятия.

В конце семестра студенты сдают экзамен. Экзамен принимается по экзаменационным билетам, каждый из которых включает в себя два теоретических вопроса. На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется 3 дня, во время подготовки к экзамену предусмотрена групповая консультация.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Алгебраические и геометрические методы исследования дифференциальных и разностных уравнений» самостоятельно студенту затруднительно. Это связано со сложностью изучаемого материала и большим объемом курса. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать экзамен по итогам изучения дисциплины студенту практически невозможно.