

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Геометрическая теория динамических систем**

Направление подготовки (специальности)  
01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Математическое моделирование и численные методы»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 22.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины «Геометрическая теория динамических систем» – дать студентам представление о геометрии фазового пространства динамических систем, описываемых конечномерными нелинейными дифференциальными уравнениями. Задачами курса являются:

- познакомить студентов с физическими задачами, математическими моделями которых являются нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения;
- познакомить студентов с геометрией фазового пространства систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными и периодическими коэффициентами;
- научить студентов методам исследования поведения траекторий систем нелинейных автономных дифференциальных уравнений в окрестности грубого состояния равновесия;
- познакомить с понятием периодической траектории системы нелинейных автономных дифференциальных уравнений и методами исследования поведения решений в окрестности периодической траектории;
- дать представление о инвариантном торе системы нелинейных автономных дифференциальных уравнений;
- научить студентов методам построения нормальных форм нелинейных дифференциальных уравнений в окрестности периодической траектории.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной. Знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплины «Геометрическая теория динамических систем», используются студентами в ходе выполнения выпускных квалификационных работ.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесённые с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-2</b> Способен разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач	<b>И-ПК-2.1</b> Обладает устойчивыми знаниями в теоретических вопросах, связанных с профессиональной деятельностью	<b>Знать:</b> основные понятия и результаты геометрической теории динамических систем <b>Уметь:</b> решать типовые вычислительные и аналитические задачи геометрической теории динамических систем <b>Владеть навыками:</b> самостоятельного изучения вопросов геометрической теории динамических

		систем, в частности, в области разработки алгоритмов нахождения решения таких задач
	<b>И-ПК-2.2</b> Имеет опыт разработки теоретических моделей решаемых задач	<b>Знать:</b> основные алгоритмические методы геометрической теории динамических систем <b>Уметь:</b> выделять составляющие геометрической теории динамических систем в поставленных задачах <b>Владеть навыками:</b> геометрической теории динамических систем
	<b>И-ПК-2.3</b> Имеет представления о концептуальных моделях в области решаемых научных проблем и задач	<b>Уметь:</b> пользоваться аналитическими методами геометрической теории динамических систем (разработка алгоритмов, графика, применение систем компьютерной математики и др.) <b>Владеть:</b> способностью совершенствовать свои знания, относящиеся к геометрической теории динамических систем

#### 4. Объём, структура и содержание дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 2 зачётных единицы, 72 акад. час.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1.	Динамические системы. Основные понятия. Фазовое пространство динамической системы. Качественное интегрирование динамических систем. Физические задачами, математическими моделями которых являются нелинейные	3	4	4				5	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа

	обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные свойства решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.								
2.	Положения равновесия динамической системы. Линеаризованная система. Теорема об устойчивости положения равновесия по первому приближению (без доказательства). Критические случаи. Качественное исследование двумерных и трехмерных систем дифференциальных уравнений.	3	2	2		1		6	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
3.	Грубые периодические траектории динамических систем. Отображение Пуанкаре. Уравнение в вариациях. Мультипликаторы.	3	2	2				6	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
4.	Устойчивость периодических траекторий. Нормальные координаты в окрестности периодической траектории. Теорема Андронова-Витта.	3	2	2		1		6	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
5	Критические случаи устойчивости периодических траекторий. Теорема о центральном многообразии в окрестности периодической траектории (без доказательства). Автономные нормальные формы.	3	2	2		1		6	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа

6	Инвариантные торы. Принцип кольца. Теорема о существовании инвариантного тора. Основные понятия теории диффеоморфизмов окружности. Понятие синхронизации.	3	4	4		1		5	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
							0,3	1,7	Зачёт
	Всего		16	16		4	0,3	35,7	

## 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## 6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## 7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»  
<https://www.studentlibrary.ru>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература:**

1. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике – М.: Институт компьютерных исследований, 2003.  
<http://www.vixri.ru/d/Shil'nikov%20L.P.%20Metody%20kachestvennoj%20teorii%20v%20onlinejnoj%20dinamike.%202003.,%20442str.pdf>
2. Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. - М.: Из-во Мир, 1986. <https://ru.djvu.online/file/8IoOaBbhzzlIR?ysclid=llqsdK1meq562111553>
3. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Из-во Наука, 1972  
<https://djvu.online/file/acB4ODGXeJeSf?ysclid=llqs3xd5zh347518996>

### **б) дополнительная литература:**

1. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2 - М.: Институт компьютерных исследований, 2009

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

### **Автор:**

Профессор кафедры математического моделирования,  
доктор физ.-мат. наук, профессор

Кубышкин Е.П.

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Геометрическая теория динамических систем»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

***Пример задания, предлагающегося на экзамене***

1. Грубые периодические траектории динамических систем. Отображение Пуанкаре. Уравнение в вариациях. Мультипликаторы.
2. Исследовать на устойчивость нулевое состояние равновесия следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -5u + v \tan v \cos u, \\ \dot{v} &= 2v + \sin u \sinh u (1 + v).\end{aligned}$$

***Вопросы к экзамену***

1. Динамические системы. Основные определения. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши системы нелинейных автономных дифференциальных уравнений. Теорема о непрерывной зависимости решений от начальных условий и параметров. Теорема о дифференцируемости решений по начальным условиям и параметрам (формулировки и комментарии).
2. Положения равновесия нелинейной автономной системы дифференциальных уравнений. Линеаризованная система. Матрица Якоби. Теорема об устойчивости по первому приближению (формулировка). Критерий Рауса-Гурвица (формулировка). Критические случаи.
2. Качественное исследование двумерных и трехмерных линейных систем дифференциальных уравнений.
3. Грубые периодические траектории динамических систем. Отображение Пуанкаре. Уравнение в вариациях. Мультипликаторы.
4. Устойчивость периодических траекторий. Нормальные координаты в окрестности периодической траектории. Теорема Андронова-Витта.
5. Критические случаи устойчивости периодических траекторий. Теорема о центральном многообразии в окрестности периодической траектории (без доказательства).
6. Автономные нормальные формы.
7. Инвариантные торы. Принцип кольца. Теорема о существовании инвариантного тора.
8. Основные понятия теории диффеоморфизмов окружности. Понятие синхронизации.

## Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Геометрическая теория динамических систем»

### Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Автор считает целесообразным изложить некоторые свои соображения по вопросам, связанным с изучением данной дисциплины, других дисциплин и обучением на математическом факультете вообще.

Итак, вы выбрали для вашего образования математический факультет классического университета. Какие условия необходимы для овладения профессией математика? По мнению автора, таких условий пять:

- твёрдый характер;
- критическое отношение к себе;
- способность заниматься математикой и желание это делать;
- регулярные занятия математикой;
- хорошее здоровье.

Очень часто не все эти элементы имеются в наличии; в этом случае начинать нужно с работы по тем позициям, где вы сами видите свои недостатки. Однако даже в случае, когда эти условия соблюдены, в обучении студента могут присутствовать определённые трудности.

Одна из главных заключается в том, что студенты часто неправильно отвечают для себя на вопрос, в чём заключается понимание в математике, каков их уровень понимания, какова степень математизации их мышления. Дело в том, что даже регулярное посещение лекций и практических занятий не гарантирует хорошего понимания предмета. Для усвоения материала требуется большая самостоятельная работа по теоретическим вопросам и решению задач. Знать, помнить определения и формулировки теорем, конечно, необходимо, но это ещё не значит полностью понимать материал. Не следует заучивать математические факты так, как учат, например, стихи. Надо выработать в себе привычку осмысливать их, обдумывать, анализировать. Так, «чистое» знание определения без умения его применять в несложной ситуации должно быть оценено неудовлетворительно.

Особо следует сказать о необходимости и пользе изучения математических доказательств. Не секрет, что сейчас доказательство изживается из школьной математики. Однако именно доказательства, а не формулировки результатов, составляют суть математики. Именно доказательный стиль мышления выделяет математика из представителей многих других профессий и именно доказательства наиболее значительны для повышения степени математизации мышления. Не следует думать, что, прослушав доказательство на лекции, вы его полностью поняли и усвоили. Попробуйте воспроизвести его дома - как правило, вы встретитесь со значительными трудностями. В этом нет ничего необычного.

По нашему мнению, даже в каждом простом на вид доказательстве закодированы те откровения, находки и открытия, которые были сделаны его автором много лет назад. И хотя они сглажены при изложении на лекции или на страницах учебника, они существуют и требуют осмысления. Каждый скачок в познании, сделанный давным-давно учёным-математиком должен иметь своё отражение в голове изучающего этот предмет много лет спустя. Поэтому математика трудна не только для творчества, но и для изучения. В известном смысле изучение математики само является творчеством, только творчеством для себя. Трудность математического знания имеет и другую сторону: математические истины устойчивы, непеременимы и даже вечны. Это очень привлекательное качество нашей науки.