

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра нелинейной динамики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Уравнения  $n$ -симплекса и алгебраические структуры**

Направление подготовки (специальности)  
01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Математическое моделирование и численные методы»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 21.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Уравнения  $n$ -симплекса и алгебраические структуры» являются:

- введение в теорию отображений  $n$ -симплекса, включая отображения Янга-Бакстера и тетраэдров Замолотникова;
- ознакомление с алгебро-геометрическими методами построения отображений  $n$ -симплекса и исследование связей между уравнениями  $n$ -симплекса, интегрируемыми системами и алгебраическими структурами;
- получение опыта использования пакетов программного обеспечения (Wolfram Mathematica, Maple) для решения современных задач в области интегрируемых систем;
- привлечение студентов к научным исследованиям.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Уравнения  $n$ -симплекса и алгебраические структуры» относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной.

Теория уравнений  $n$ -симплекса использует инструменты из всех классических областей математики для построения и классификации их решений. Поэтому, для освоения данной дисциплины студенты должны иметь знания дисциплин «Алгебра и геометрия», «Дифференциальные уравнения» и «Уравнения математической физики».

Полученные в курсе «Уравнения  $n$ -симплекса и алгебраические структуры» знания необходимы для получения научных результатов в этой области наук.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесённые с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-1</b> Способен проводить научные исследования и получать новые научные и прикладные результаты самостоятельно и в составе научного коллектива	<b>И-ПК-1.1</b> Имеет способность проводить собственные научные исследования	<b>Знать:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- основные определения отображений <math>n</math>-симплексов и их интегрируемости;</li><li>- связь между уравнениями <math>n</math>-симплексов задачами матричной факторизации;</li><li>- методы построения отображений <math>n</math>-симплексов.</li></ul> <b>Уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- воспроизводить математические приемы, используемые при построении решений уравнений <math>n</math>-симплексов;</li><li>- строить отображения <math>n</math>-симплексов;</li><li>- находить их первые интегралы и делать вывод об интегрируемости;</li></ul>

		- связывать отображения n-симплексов с дискретными интегрируемыми системами. <b>Владеть навыками:</b> - построения отображений Янга-Бакстера; - построения отображений тетраэдров Замолотчикова; - построения отображений 4-симплексов; - построения отображений n-симплексов с помощью задач матричной факторизации - проверки интегрируемости отображений n-симплексов. - работы с пакетом Wolfram Mathematica.
	<b>И-ПК-1.2</b> Имеет опыт самостоятельного получения новых научных и (или) прикладных результатов	<b>Уметь:</b> - оформлять полученные научные или прикладные результаты согласно профессиональным требованиям <b>Владеть навыком:</b> - самостоятельного получения новых научных и (или) прикладных результатов,
	<b>И-ПК-1.3</b> Имеет опыт получения новых научных и (или) прикладных результатов в составе творческого коллектива	<b>Владеть навыком:</b> - научного исследования и решения прикладных задач в творческом коллективе <b>Уметь:</b> - распределять роли и выстраивать коммуникацию с другими участниками коллектива для достижения максимального результата

#### 4. Объём, структура и содержание дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 4 зачётных единицы, 144 акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Теоретико-множественное уравнение Янга-Бакстера	1	1	1				2	Задания для самостоятельной работы
2	Представление Лакса для отображений Янга- Бакстера.	1	2	2				3	Задания для самостоятельной работы
3	Связь между отображениями Янга- Бакстера и дискретными	1	1	1		1		3	Задания для самостоятельной работы

	интегрируемыми системами								
4	Интегрируемость по Лиувиллю	1	1	1				2	Задания для самостоятельной работы
5	Построение с помощью преобразований Дарбу	1	1	1				3	Задания для самостоятельной работы
6	Отображения Янга-Бакстера, связанные с уравнениями математической физики	1	1	1				3	Задания для самостоятельной работы
7	Линейные отображения Янга-Бакстера.	1	1	1		1		2	Задания для самостоятельной работы
	<b>Итого за 1 семестр 36 акад. часов</b>		<b>8</b>	<b>8</b>		<b>2</b>		<b>18</b>	
8	Уравнение тетраэдров Замолотчикова	2	1	1				7	Задания для самостоятельной работы
9	Отображение тетраэдров и задачи матричной рефакторизации	2	1	1				7	Задания для самостоятельной работы
10	Отображения тетраэдров и преобразования Дарбу	2	1	1				7	Задания для самостоятельной работы
11	Линейные отображения тетраэдров Замолотчикова	2	1	1		1		7	Задания для самостоятельной работы
12	Уравнение 4-симплекса Бажанова-Строганова	2	1	1				7	Задания для самостоятельной работы
13	Уравнение 4-симплекса и преобразования Дарбу	2	1	1				7	Задания для самостоятельной работы
14	Уравнения n-симплекса	2	1	1				7	Задания для самостоятельной работы
15	Некоммутативные аналоги отображений n-симплекса	2	1	1		1		5	Задания для самостоятельной работы
						<b>2</b>	<b>0,5</b>	<b>33,5</b>	<b>Экзамен</b>
	<b>Итого за 2 семестр 108 акад. часов</b>		<b>8</b>	<b>8</b>		<b>4</b>	<b>0,5</b>	<b>87,5</b>	
	<b>ИТОГО</b>		<b>16</b>	<b>16</b>		<b>6</b>	<b>0,5</b>	<b>105,5</b>	

#### Содержание разделов дисциплины:

### 1. Теоретико-множественное уравнение Янга-Бакстера.

- 1.1. Квантовое уравнение Янга-Бакстера.
- 1.2. Теоретико-множественное уравнение Янга-Бакстера.
- 1.3. Параметрическое уравнение Янга-Бакстера.
- 1.4. Отображения Янга-Бакстера. Отображение Адлера.
- 1.5. Приложения в Wolfram Mathematica.

### 2. Представление Лакса для отображения Янга-Бакстера.

- 2.1. Пара Лакса для отображения Янга-Бакстера.
- 2.2. Матричная трифакторизация и свойство Янга-Бакстера.
- 2.3. Пара Лакса для отображения Адлера.
- 2.4. Приложения в Wolfram Mathematica.
- 3. Связь между отображениями Янга-Бакстера и дискретными интегрируемыми системами.**
  - 3.1. Уравнения в квад-графах VS отображения Янга-Бакстера.
  - 3.2. Связь через симметрии: Уравнение  $\text{dpKdV}$  vs отображение Адлера.
  - 3.3. Связь через представления Лакса.
  - 3.4. Связь через инварианты.
  - 3.5. Приложения в Wolfram Mathematica.
- 4. Интегрируемость по Лиувиллю.**
  - 4.1. Первые интегралы и интегрируемость.
  - 4.2. Пуассоновы структуры. Ф-и Казимира.
  - 4.3. Интегрируемость по Лиувиллю.
  - 4.4. Приложение в отображение Адлера-Ямилова.
  - 4.5. Приложения в Wolfram Mathematica.
- 5. Построение с помощью преобразований Дарбу.**
  - 5.1. Задачи матричной рефакторизации для матриц Дарбу.
  - 5.2. Метод построения интегрируемых параметрических отображений Янга-Бакстера, как ограничения отображений Янга-Бакстера в симплектических листьях.
  - 5.3. Приложения в Wolfram Mathematica.
- 6. Отображения Янга-Бакстера, связанные с уравнениями математической физики.**
  - 6.1. Задачи матричной рефакторизации и соответствия.
  - 6.2. Отображения Янга-Бакстера типа  $\text{KdV}$ ,  $\text{Boussinesq}$  и другие.
  - 6.3. Приложения в Wolfram Mathematica.
- 7. Линейные отображения Янга-Бакстера.**
  - 7.1. Алгебраические соотношения, которым удовлетворяют линейные отображения Янга-Бакстера.
  - 7.2. Доказательство того, что дифференциал отображения Янга-Бакстера является отображением Янга-Бакстера.
  - 7.3. Частичные линеаризации отображений Янга-Бакстера.
  - 7.4. Приложения в Wolfram Mathematica.
- 8. Уравнение тетраэдров Замолодчикова.**
  - 8.1. Теоритико-множественные решения функционального уравнения тетраэдров Замолодчикова.
  - 8.2. Отображения тетраэдров. Отображение электрических сетей.
  - 8.3. Классификация Кашаева-Корепанова-Сергеева.
  - 8.4. Приложения в Wolfram Mathematica.
- 9. Отображения тетраэдров и задачи матричной рефакторизации.**
  - 9.1. Локальное уравнение Янга-Бакстера.
  - 9.2. Генератор отображения тетраэдров.
  - 9.3. Локальное уравнение Янга-Бакстера и соответствия.
  - 9.4. Задача матричной шесть-факторизации.
  - 9.5. Приложения в Wolfram Mathematica.
- 10. Отображения тетраэдров и преобразования Дарбу.**
  - 10.1. Построение отображений тетраэдров через задачи матричной рефакторизации для матриц Дарбу.
  - 10.2. Построение отображений тетраэдров типа  $\text{NLS}$ .
  - 10.3. Приложения в Wolfram Mathematica.
- 11. Линейные отображения тетраэдров Замолодчикова.**

- 11.1. Алгебраические соотношения, которым удовлетворяют линейные отображения тетраэдров Замолотчикова.
- 11.2. Доказательство того, что дифференциал отображения Янга-Бакстера является отображением тетраэдров Замолотчикова.
- 11.3. Частичные линеаризации отображений тетраэдров Замолотчикова.
- 11.4. Приложения в Wolfram Mathematica.
- 12. Уравнение 4-симплекса Бажанова-Строганова.**
  - 12.1. Теоретико-множественные решения уравнения 4-симплекса.
  - 12.2. Локальное уравнение тетраэдров и отображения 4-симплекса.
  - 12.3. Примеры отображений 4-симплекса.
  - 12.4. Приложения в Wolfram Mathematica.
- 13. Отображения 4-симплекса и преобразования Дарбу.**
  - 13.1. Построение отображений тетраэдров через задачи матричной шести-рефакторизации для матриц Дарбу.
  - 13.2. Построение отображений 4-симплекса типа NLS.
  - 13.3. Приложения в Wolfram Mathematica.
- 14. Уравнение n-симплекса.**
  - 14.1. Теоретико-множественные решения уравнения n-симплекса.
  - 14.2. Методы построения отображения n-симплекса.
  - 14.3. Отображения n-симплекса как расширения отображений 2-, 3- и 4- симплекса.
  - 14.4. Приложения в Wolfram Mathematica.
- 15. Некоммутативные аналоги отображений n-симплекса.**
  - 15.1. Методы построения некоммутативных отображений n-симплекса.
  - 15.2. Отображения n-симплекса в телах.
  - 15.3. Отображения n-симплекса в группах.
  - 15.4. Приложения в Wolfram Mathematica.

## **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader;
- пакет ПО Wolfram Mathematica.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»  
<https://www.studentlibrary.ru>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. А. И. Бобенко, Ю. Б. Сулис Дискретная дифференциальная геометрия – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010  
[https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o\\_26770](https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_26770)
2. S. Konstantinou-Rizos Darboux transformations, discrete integrable systems and related Yang-Baxter maps. PhD thesis. - University of Leeds, UK, 2014.  
<https://arxiv.org/pdf/1410.5013.pdf>

### **б) дополнительная литература**

1. S. Konstantinou-Rizos Birational solutions to the set-theoretical 4-simplex equation - Physica D: Nonlinear Phenomena, 2023 <https://arxiv.org/pdf/2211.16338.pdf>
2. S. Konstantinou-Rizos. Noncommutative solutions to Zamolodchikov tetrahedron equation and matrix six-factorization problems. - Physica D: Nonlinear Phenomena, 2022. <https://arxiv.org/pdf/2202.10491.pdf>
3. С. Игонин, С. Константину-Ризос. Алгебраические и дифференциально-геометрические построения теоретико-множественных решений уравнения тетраэдра Замолодчикова. - Журнал физики А: Математические и теоретические, 2022. <https://arxiv.org/pdf/2110.05998.pdf>
4. С. Игонин, В. Колесов, С. Константину-Ризос и М. Преображенская Карты тетраэдров, Карты Янга-Бакстера и частичные линеаризации. - Журнал физики А: Математика. Теор., 2021 <https://arxiv.org/pdf/2106.09130.pdf>
5. В. Бухштабер, И. Игонин, С. Константину-Ризос и М. Преображенская Карты Янга- Бакстера, преобразования Дарбу и линейные аппроксимации задач рефакторизации - Журнал физики А: Математика. Теория, 2020. <https://arxiv.org/pdf/2009.00045.pdf>

6. С. Константинову-Ризос Тетраэдрические отображения нелинейного типа Шредингера - Журнал: Ядерная физика В, 2020. <https://arxiv.org/pdf/2005.13574.pdf>
7. С. Константинову-Ризос О трехмерной согласованности расширенной решетки Грассмана Буссинеска система – Журнал: Ядерная физика В, 2020. <https://arxiv.org/pdf/1908.00565.pdf>
8. С. Константинову-Ризос, Г. Папамикос Вплетающие карты Янга-Бакстера, связанные с уравнениями типа NLS - Журнал физики А: Математический и теоретический, 2019. <https://arxiv.org/pdf/1907.00019.pdf>
9. С. Константинову-Ризос, Т. Кулукас Некоммутативный дискретный потенциальный подъем KdV – Журнал математической физики, 2018. <https://arxiv.org/pdf/1611.08923.pdf>
10. С. Константинову-Ризос, А. В. Михайлов Антиккоммутативное расширение карты Адлера - Журнал физики А: Математический и теоретический, 2016. <https://arxiv.org/pdf/1602.01714.pdf>
11. Г. Г. Граховски, С. Константинову-Ризос, А. В. Михайлов Грассмановские расширения Янга-Карты Бакстера - Журнал физики А: Математический и теоретический, 2016. <https://arxiv.org/pdf/1510.06913.pdf>
12. С. Константинову-Ризос, А. В. Михайлов Преобразования Дарбу, конечные редукционные группы и связанные с ними отображения Янга-Бакстера - Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2013. <https://arxiv.org/pdf/1205.4910.pdf>

## 9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий;
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

### Автор(ы) :

Доцент кафедры нелинейной динамики, к.ф.-м.н.

С. Константинову Ризос

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Уравнения п-симплекса и алгебраические структуры»**

**Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**Задания для самостоятельной работы**

(данные задания выполняются студентом самостоятельно и проверяются преподавателем)

**Задания по теме «Теоретико-множественное уравнение Янга-Бакстера»:**

- Проверить, что отображение перестановок  $P(x, y) = (y, x)$  удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера.
- Доказать, что отображение Адлера

$$(x, y) \xrightarrow{Y} (u, v) = \left( y - \frac{a-b}{x+y}, x + \frac{a-b}{x+y} \right),$$

удовлетворяет параметрическому уравнению Янга-Бакстера

$$Y_{a,b}^{12} \circ Y_{a,c}^{13} \circ Y_{b,c}^{23} = Y_{b,c}^{23} \circ Y_{a,c}^{13} \circ Y_{a,b}^{12}.$$

- Написать код в Mathematica, который будет проверять, что отображение  $((x, a), (y, b)) \xrightarrow{Y} ((u((x, a), (y, b)), a), (v((x, a), (y, b))))$  удовлетворяет параметрическому уравнению Янга-Бакстера.

**Задания по теме «Представление Лакса для отображений Янга-Бакстера»:**

- Доказать, что отображение Адлера  $(x, y) \xrightarrow{Y} (u, v) = \left( y - \frac{a-b}{x+y}, x + \frac{a-b}{x+y} \right)$  имеет матрицу Лакса:

$$L(x; a, \lambda) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ x^2 + a - \lambda & x \end{pmatrix}.$$

- Доказать, что отображение Адлера — инволютивное, т.е.  $Y^{ij} \circ Y^{ij} = Id$ . Найти для него первые интегралы.
- Если задача матричной рефакторизации

$$L(u; a, \lambda)L(v; b, \lambda) = L(y; b, \lambda)L(x; a, \lambda),$$

для какой-то квадратной матрицы  $L = L(x; a, \lambda)$ , определяет рациональное отображение, то это отображение является бирациональным.

- Пусть отображение

$$((x, a), (y, b)) \xrightarrow{Y_{a,b}} ((u((x, a), (y, b)), a), (v((x, a), (y, b)), b)).$$

Если  $Y_{a,b}$  удовлетворяет задаче матричной рефакторизации

$$L(u; a, \lambda)L(v; b, \lambda) = L(y; b, \lambda)L(x; a, \lambda),$$

то  $\text{Tr}(L(y; b, \lambda)L(x; a, \lambda))$  генерирует первые интегралы для  $Y_{a,b}$ .

### Задания по теме «Связь между отображениями Янга-Бакстера и дискретными интегрируемыми системами»:

- Используя симметрии дискретного потенциального уравнения КдФ построить отображение Янга-Бакстера Адлера.

### Задания по теме «Интегрируемость по Лиувиллю»:

- Найти инварианты для отображения Адлера-Ямилова

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) \xrightarrow{Y_{a,b}} \left( y_1 - \frac{a-b}{1+x_1y_2}x_1, y_2, x_1, x_2 + \frac{a-b}{1+x_1y_2}y_2 \right).$$

- Найти скобки Пуассона, относительно которых инварианты отображения Адлера-Ямилова в инволюции, и доказать интегрируемость по Лиувиллю.
- Написать код в Mathematica для проверки унитарности по Лиувиллю.

### Задания по теме «Построение с помощью преобразований Дарбу»:

- Доказать, что матрица

$$M = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f & p \\ \tilde{q} & 1 \end{pmatrix},$$

элементы которой удовлетворяют системе

$$\partial_x f = 2(pq - \tilde{p}\tilde{q}), \quad \partial_x p = 2(pf - \tilde{p}), \quad \partial_x \tilde{q} = 2(q - \tilde{q}f),$$

является преобразованием Дарбу для оператора НУШ  $\mathfrak{Q}(p, q; \lambda) = D_x + \lambda \text{diag}(1, -1) + \begin{pmatrix} 0 & 2p \\ 2q & 0 \end{pmatrix}$ .

- После замены  $(f, p, \tilde{q}) \mapsto (X, x_1, x_2)$  в преобразовании Дарбу для НУШ, поставить соответствующую матрицу  $M(x_1, x_2, X; a, \lambda)$  в задачу матричной рефакторизации

$$M(u_1, u_2, U; a, \lambda)M(v_1, v_2, V; b, \lambda) = M(y_1, y_2, Y; b, \lambda)M(x_1, x_2, X; a, \lambda),$$

и построить шестимерное отображение Янга-Бакстера типа НУШ.

- Найти первые интегралы шестимерного отображения Янга-Бакстера типа НУШ.
- Доказать, что можно ограничить шестимерное отображение Янга-Бакстера типа НУШ к отображению Адлера-Ямилова на инвариантных листьях.

### Задания по теме «Отображения Янга-Бакстера, связанные с уравнениями математической физики»:

- Построить отображение Янга-Бакстера с помощью преобразования Дарбу для КдФ.
- Построить отображение Янга-Бакстера с помощью преобразования Дарбу для Boussinesq.

### Задания по теме «Линейные отображения Янга-Бакстера»:

- Пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $\mathbb{K}$ . Рассмотрим линейное отображение  $Y: V \times V \rightarrow V \times V$ , заданную формулой

$$Y(x, y) = (Ax + By, Cx + Dy), \quad x, y \in V, \quad A, B, C, D \in (V).$$

Доказать, что отображение  $Y$  удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера тогда и только тогда, когда отображения  $A, B, C, D \in (V)$  в нем удовлетворяют следующим соотношениям

$$\begin{aligned} C^2 &= C - DCA, & B^2 &= B - ABD, \\ DC - CD &= DCB, & AB - BA &= ABC, \\ CA - AC &= BCA, & BD - DB &= CBD, \\ DA - AD &= BCB - CBC. \end{aligned}$$

#### Задания по теме «Уравнение тетраэдров Замолодчикова»:

- Пусть  $X$  — множество. Написать код в Mathematica, который проверяет удовлетворяет ли отображение  $T \in [(X \times \mathbb{C})^3]$ , namely  $T : ((x, a), (y, b), (z, c)) \mapsto ((u(x, y, z), a), (v(x, y, z), b), (w(x, y, z), c))$  параметрическому уравнению тетраэдров Замолодчикова

$$T_{a,b,c}^{123} \circ T_{a,d,e}^{145} \circ T_{b,d,f}^{246} \circ T_{c,e,f}^{356} = T_{c,e,f}^{356} \circ T_{b,d,f}^{246} \circ T_{a,d,e}^{145} \circ T_{a,b,c}^{123}.$$

- Проверить, что отображения тетраэдров из классификации Сергеева удовлетворяют уравнению тетраэдров Замолодчикова.

#### Задания по теме «Отображение тетраэдров и задачи матричной рефакторизации»:

- Пусть  $L = L(x, a; \lambda)$  — матрица, зависящая от переменной  $x \in X$ , параметра  $a \in \mathbb{C}$  и спектрального параметра  $\lambda \in \mathbb{C}$  вида

$$L(x, a; \lambda) = \begin{pmatrix} A(x, a; \lambda) & B(x, a; \lambda) \\ C(x, a; \lambda) & D(x, a; \lambda) \end{pmatrix}.$$

Написать код в Mathematica, который определяет  $3 \times 3$  расширения матрицы  $L = L(x, a; \lambda)$ , и генерирует через локальное уравнение Янга–Бакстера,

$$L_{12}(u, a; \lambda) L_{13}(v, b; \lambda) L_{23}(w, c; \lambda) = L_{23}(z, c; \lambda) L_{13}(y, b; \lambda) L_{12}(x, a; \lambda),$$

отображения тетраэдров Замолодчикова.

#### Задания по теме «Отображения тетраэдров и преобразования Дарбу»:

- Пусть матрица

$$M(x_1, x_2; a) = \begin{pmatrix} a + x_1 x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставить эту матрицу в локальное уравнение Янга–Бакстера и построить отображение тетраэдров типа НУШ.

- Найти первые интегралы для отображения тетраэдров типа НУШ.
- Ограничить отображение тетраэдров типа НУШ к отображению тетраэдров Сергеева на инвариантных листьях.

#### Задания по теме «Уравнение 4-симплекса Бажанова-Строганова»:

- Пусть  $X$  — множество. Написать код в Mathematica, который проверяет удовлетворяет ли отображение  $T \in [(X \times \mathbb{C})^3]$ , т.е.  $T : ((x, \alpha), (y, \beta), (z, \gamma)) \mapsto ((u(x, y, z), \alpha), (v(x, y, z), \beta), (w(x, y, z), \gamma))$  параметрическому уравнению 4-симплексов:

$$T_{\alpha,\beta,\gamma}^{123} \circ T_{\alpha,\delta,\epsilon}^{145} \circ T_{\beta,\delta,\zeta}^{246} \circ T_{\gamma,\epsilon,\zeta}^{356} = T_{\gamma,\epsilon,\zeta}^{356} \circ T_{\beta,\delta,\zeta}^{246} \circ T_{\alpha,\delta,\epsilon}^{145} \circ T_{\alpha,\beta,\gamma}^{123}.$$

- Построить расширения 4-симплексов для всех отображений тетраэдров в списке Сергеева.

## 2. Список вопросов для проведения промежуточной аттестации

### Зачет

Зачет ставится студентам, набравшим 40 и более баллов по каждой самостоятельной работе.

### Экзамен

Экзамен проводится в письменной форме. На экзамене проверяется понимание основных концепций дисциплины, определений и теорем. Также, проверяются вычислительные навыки студентов в конкретных задачах, а также навыки с использованием пакета программного обеспечения Wolfram Mathematica. Продолжительность экзамена -4 часа.

#### Вопросы к экзамену:

- Представление Лакса для отображения Янга Бакстера. Представление Лакса отображения Адлера.
- Доказательство теоремы о задаче матричной трифакторизации для проверки свойства Янга-Бакстера.
- Связь между отображениями Янга-Бакстера и уравнениями в квадграфах. Через симметрии и через представления Лакса.
- Построение первых интегралов. Интегрируемость по Лиувиллю.
- Построение отображений Янга Бакстера с помощью преобразований Дарбу.
- Линеаризация отображения Янга-Бакстера. Дифференциал отображения Янга-Бакстера.
- Алгебраические соотношения линейных отображений Янга-Бакстера.
- Некоммутативные отображения Янга-Бакстера в группах и телах.
- Локальное уравнение Янга-Бакстера.
- Уравнение тетраэдров Замолодчикова и параметрическое уравнение тетраэдров Замолодчикова.
- Классификация Сергеева-Кашаева-Корепанова.
- Доказательство теоремы о задаче матричной шесть-факторизации для проверки свойства тетраэдров Замолодчикова.
- Построение отображений тетраэдров Замолодчикова с помощью преобразований Дарбу. Отображения тетраэдров Замолодчикова типа НУШ. Их первые интегралы.
- Некоммутативные отображения тетраэдров Замолодчикова в группах и телах.
- Локальное уравнение тетраэдров Замолодчикова.
- Уравнения 4-симплексов Бажанова-Строганова.
- Расширения отображений тетраэдров Замолодчикова на отображении 4-симплексов Бажанова-Строганова через их генераторы.
- Примеры отображений 4-симплексов.

## 3. Правила оценивания при проведении промежуточной аттестации

### Система оценивания

Самостоятельные работы являются обязательными. Каждая работа проверяется, и студенты получают от 0 до 100 баллов по каждой работе. Итоговая оценка по этой дисциплине вычисляется по формуле:

Итоговая оценка =  $0.4 \times$  средний балл по самост. работам +  $0.4 \times$  итоговый балл экзамена

< 60 - неудовлетворительно.

71 - 90 - хорошо (4).

61 - 70 - удовлетворительно (3).

91 - 100 - отлично (5).

Поскольку одной из основных целей этого предмета является привлечение студентов к научным исследованиям, студенты, которые во время семестра получили оригинальные научные результаты, получают автоматически оценку отлично (5).