

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

21 мая 2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Теория представлений**

Направление подготовки (специальности)  
02.04.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Компьютерная математика»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 12 апреля 2024 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2024 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Теория представлений» являются: обеспечение подготовки в одной из важных областей математики и ее приложений, знакомство с современными понятиями теории обыкновенных линейных представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Математический аппарат теории представлений широко используется во многих разделах математики и физики, причем сфера его приложений все время расширяется. Более того, будучи относительно законченной, данная теория служит образцом для теории представлений других алгебраических систем – компактных групп, групп Ли и теории сложности вычислений.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория представлений» относится к обязательной части образовательной программы и является элективной дисциплиной. Данная дисциплина входит в раздел «Дополнительные главы фундаментальных дисциплин направления».

Данная дисциплина направлена на освоение алгоритмов, применяемых для анализа представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Для ее успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения предшествующих математических дисциплин: теории чисел, линейной алгебры, аналитической геометрии.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
<b>ОПК-2</b> Способен создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках, совершенствовать и разрабатывать концепции, теории и методы	<b>И-ОПК-2.1</b> Владеет навыками создания и исследования новых математических моделей в естественных науках <b>И-ОПК-2.3</b> Имеет практический опыт создания и исследования подобных математических моделей и разработки теорий и методов для их описания	<b>Знать:</b> основные методы и формулировки результатов, использующихся в защите информации <b>Уметь:</b> обосновывать алгоритмы защиты информации <b>Владеть:</b> навыками быстрых вычислений в основных алгебраических системах

## 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единицы, 72 акад. часов

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости	
			Контактная работа							Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа		
1	Представления над $\mathbb{C}$ и характеры. Теорема Машке. Лемма Шура	1	5	5				10	Задания для самостоятельной работы. Контрольная работа	
2	Строение колец, соотношения орто- гональности. Таблицы характеров	1	5	5		2		10	Задания для самостоятельной работы	
3	Применения теории представлений в физике и комбинаторике, быстрым вычисления	1	6	6		2		10	Задания для самостоятельно работы	
							0,3	5,7	Зачет	
	Всего		16	16		4	0,3	35,7		

### Содержание разделов дисциплины:

#### Тема 1. Представления над $\mathbb{C}$ и характеры. Теорема Машке. Лемма Шура.

Приводимые и неприводимые представления. Характеры. Комплексные и целочисленные представления. Центр групповой алгебры. Теорема Машке и Лемма Шура. Свойства характеров конечных групп. Регулярное представление и групповая алгебра. Представления абелевых групп и дискретное преобразование Фурье.

#### Тема 2. Строение колец, соотношения ортогональности. Таблицы характеров.

Скалярное произведение и соотношения ортогональности для обыкновенных характеров. Таблица характеров конечной группы. Поле алгебраических чисел. Индуцированные характеры. Теорема взаимности Фробениуса. Лемма Бернсайда и ее следствия. Разрешимые группы. Теорема Казарина и модулярные представления.

#### Тема 3. Применения теории представлений в физике и комбинаторике, быстрым вычисления.

Перечислительная теорема Бернсайда. Действие группы на множестве и подсчет орбит. Свертка и ДПФ. Применение преобразования Фурье к быстрым вычислениям. Обработка сигналов и теория групп. Теорема Вигнера о просто разложимых группах и теоремы Казарина, Чанкова и Янишевского.

#### 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader;
- Microsoft Windows (в составе Microsoft Imagine Premium Electronic Software Delivery);
- Microsoft OfficeSTD 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232 Microsoft Open License №0005279522;
- MikTeX (свободно распространяемое ПО);
- GAP (GNU GPL).

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»  
<https://www.studentlibrary.ru>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры - М.: Физматлит, 2000  
<https://djvu.online/file/sJxPy5ql9dVbj?ysclid=llo0b0o1dq109562465>
2. Белоногов В. А. Представления и характеры в теории конечных групп. - Екатеринбург: УрО РАН, 2009  
<http://www.vixri.ru/d/Belonogov%20V.%20A.%20Predstavlenija%20i%20xaraktery%20v%20teorii%20konechnyx%20grupp..pdf>
3. Ноден П., Китте К. Алгебраическая алгоритмика - М.: Мир, 1999.
4. Белоногов В.А. Задачник по теории групп. - М.: Наука, 2000.  
[http://www.vixri.ru/d/Belonogov%20V.%20A.%20\\_ZADACHNIK%20po%20TEORII%20GRUPP.pdf](http://www.vixri.ru/d/Belonogov%20V.%20A.%20_ZADACHNIK%20po%20TEORII%20GRUPP.pdf)

#### **б) дополнительная литература**

1. Циммерман К.-Х., Методы теории модулярных представлений в алгебраической теории кодирования. - М.: МЦНМО, 2011.
2. Струнков С. П. Введение в теорию представлений конечных групп. - М: МИФИ, 1999
3. Глухов М. М., Круглов И. А. Элементы теории обыкновенных представлений и характеров с приложениями в криптографии. - Сп-б: Лань, 2015
4. Хамермеш М. Теория групп и ее применения к физическим проблемам - Ленанд, 2015 [http://lib.ysu.am/open\\_books/152281.pdf](http://lib.ysu.am/open_books/152281.pdf)
5. Казарин Л.С. О  $p^a$ -лемме Бернсайда – Журнал: Математические заметки. 1990. Т. 48, вып. 2. – С. 45-48.  
[https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mzm&paperid=3306&option\\_lang=rus&ysclid=llo0tmcco3215776028](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mzm&paperid=3306&option_lang=rus&ysclid=llo0tmcco3215776028)
6. Казарин Л. С., Чанков Е. И. Конечные просто приводимые группы разрешимы. - Журнал: Математический сборник. 2010. Т. 201, вып. 5. – С. 27 - 40.  
[https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=7540&option\\_lang=rus&ysclid=llo0kt7r88855227820](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=7540&option_lang=rus&ysclid=llo0kt7r88855227820)
7. Винберг Э. Б. Курс алгебры. - М., "Факториал Пресс", 2001.  
[https://mathprofi.com/uploads/files/2581\\_f41\\_e.b.vinberg-kurs-algebry-2-e-izd.pdf?key=d04a1718e76a1b8366c8fc0d4d87caf3/](https://mathprofi.com/uploads/files/2581_f41_e.b.vinberg-kurs-algebry-2-e-izd.pdf?key=d04a1718e76a1b8366c8fc0d4d87caf3/)
8. Джекобсон Н. Алгебры Ли. - М., Мир, 1964.  
<https://djvu.online/file/UxCSTzWtBxiQn?ysclid=llo0hjz3lu924615529>
9. W.Feit, Characters of finite groups, Yale University.W.A.Benjamin, Inc., N.Y.-Amsterdam, 1967  
[https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=5577&option\\_lang=eng&ysclid=llo13wp2z4853592360](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=5577&option_lang=eng&ysclid=llo13wp2z4853592360)

#### **в) ресурсы сети «Интернет»**

1. <http://mech.math.msu.su/department/>
2. <http://www.tc26.ru>
3. [http://www.nist.gov/manuscript-publication-search.cfm?pub\\_id=919061](http://www.nist.gov/manuscript-publication-search.cfm?pub_id=919061)
4. <http://habrahabr.ru/post/210684/>
5. [http://www.nist.gov/customcf/getpdf.cfm?pub\\_id=919061](http://www.nist.gov/customcf/getpdf.cfm?pub_id=919061)

### **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;

- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

**Автор(ы):**

Заведующий кафедрой алгебры и математической логики  
профессор, д.ф-м.н.

Казарин Л.С.

**Приложение к №1 рабочей программе дисциплины  
«Теория представлений»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и/или промежуточной аттестации аспирантов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
необходимые для проведения текущей аттестации**

**Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущей  
аттестации**

**Задания для самостоятельной работы по теме 1**

По задачку Белоногов В.А. Задачник по теории групп. М.Наука, 2000, § 22, задачи из подпунктов 22.1 – 22.19, .

По книге Кострикина А.И. «Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры», гл.3, §3 и , §4, гл.4, §4

**Задания для самостоятельной работы по теме 2**

По задачку Белоногов В.А. Задачник по теории групп. М.Наука, 2000, , § 22, задачи из подпунктов 22.21 – 22.42, 22.45 – 22.58, .

По книге Кострикина А.И. «Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры», гл.3, §6 и , §7, гл

**Задания для самостоятельной работы по теме 3**

По книге Ноден П., Китте К. «Алгебраическая алгоритмика», гл.V, упражнения 29 – 36

По книге Кострикина А.И. «Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры», гл.3, §3 и , §4

**Контрольная работа**

1. Вычислить таблицу характеров знакопеременной группы степени 5.
2. Найти формулы для свертки двух многочленов степени 5, используя дискретное преобразование Фурье в конечном поле (в зависимости от значений коэффициентов).
3. Верно ли, что любое точное двумерное представление конечной группы над  $\mathbb{C}$  неприводимо?
4. Пусть  $H$  – подгруппа группы  $G$  и  $\beta$  – ее регулярный характер. Доказать, что индуцированный характер  $\beta^G$  является ее регулярным характером.
5. Найти все неприводимые характеры группы, являющейся прямым произведением двух групп кватернионов порядка 8.

**Тест для самопроверки по результатам освоения дисциплины**

**Компетенция ОПК-2**

**1. Группа порядка 36 действует на некотором множестве. Орбиты каких длин возможны?**

А) 1,2,4,

Б) 1,3,9,

В) 1,2,3,4,6,9,12,18,36

Г) длин, не являющихся делителями 36.

**2. Перечислите число и степени неэквивалентных неприводимых представлений группы кватернионов  $Q_8$**

- А) 5 представлений степеней 1,1,1,1,2
- Б) 2 представления степеней 2 и 2
- В) 3 представления степени 2
- Г) 2 представления степени 3

**3. Регулярное представление конечной нетривиальной группы**

- А) имеет степень, равную порядку группы, и неприводимо
- Б) имеет степень, равную порядку группы, и всегда приводимо
- В) имеет степень, равную 1.

**4. Неприводимые неэквивалентные представления абелевой группы порядка 12**

- А) имеют степени 1,2,3,4,12,
- Б) имеют степень 1, их 12 штук,
- В) имеют степень 1, их 5 штук.

Вопрос №	Правильный ответ
1	В
2	А
3	Б
4	Б

**Оценка сформированности компетенций**

Компетенции	Номера вопросов	Уровень формирования	Количество правильных ответов, критерии
ОПК-2	1-4	Пороговый	Не менее 2
		Продвинутый	Не менее 3
		Высокий	Не менее 4

**2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

**Список вопросов к зачету:**

1. Представление группы. Приводимые и неприводимые представления.
2. Характер представления.
3. Комплексные и модулярные представления. Примеры.
4. Центр групповой алгебры.
5. Теорема Машке.
6. Лемма Шура.
7. Регулярное представление. Конечность числа попарно неэквивалентных неприводимых представлений конечной группы.
8. Представления конечных абелевых групп.
9. Циклическая свертка и ДПФ.
10. Скалярное произведение характеров и соотношения ортогональности.
11. Таблица характеров конечной группы.
12. Поле алгебраических чисел.
13. Теорема взаимности Фробениуса.
14. Лемма Бернсайда и разрешимые группы.
15. Теорема Казарина –Бернсайда (без доказательства).



16. Обработка сигналов и теория групп.
17. Просто приводимые группы. Теорема Вигнера.
18. Теоремы Казарина-Чанкова-Янишевского.

**Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины  
«Теория представлений»**

**Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

**Учебно-методическое обеспечение  
самостоятельной работы студентов по дисциплине**

В качестве учебно-методического обеспечения рекомендуется использовать литературу, указанную в разделе № 7 данной рабочей программы.