

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра математического моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Методы вычислений

Направление подготовки (специальности)
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 22.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 05.05.2025

1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Методы вычислений» является изучение основных приемов и методик разработки и применения на практике методов решения на ЭВМ различных математических задач, возникающих как в теории, так и в приложениях к физике, механике, химии и т.п. Курс сопровождается как лекционными занятиями по численным методам (где рассматриваются конкретные приемы по построению численных методов), так и практикумом на ЭВМ (где студенты обязаны решить определенное количество задач на ЭВМ, используя известные методы). В результате выпускник должен уметь решать на ЭВМ определенный набор задач с использованием изученных методов и понимать, какие численные методы лежат в основе программ широко используемых математических пакетов.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Методы вычислений» относится к обязательной части образовательной программы и входит в модуль «Математика II». Для изучения и освоения дисциплины нужны первоначальные знания из курсов математического анализа, линейной алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики.

Хорошо известно, что в целом ряде математических задач получить точные решения удается крайне редко. По этой причине особую роль играют различного рода численные методы, позволяющие получить приближение к решению. Даже в тех случаях, когда решение может быть получено в явном виде – процесс его нахождения может занять слишком много времени. В этой ситуации целесообразнее оказывается использовать приближенное решение, которое может быть вычислено сравнительно быстро с требуемой точностью.

Знания и умения, приобретенные студентами в результате изучения дисциплины, будут использоваться при изучении курсов математического моделирования, вычислительного практикума, при выполнении курсовых и дипломных работ, связанных с математическим моделированием и обработкой наборов данных, решением конкретных задач из механики, физики и т.п.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

| Формируемая компетенция (код и формулировка) | Индикатор достижения компетенции (код и формулировка) | Перечень планируемых результатов обучения |
|---|---|---|
| Универсальные компетенции | | |
| УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач | И-УК-1.2 Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности | Знать: - базовые алгоритмы работы с математическими объектами. Уметь: - реализовывать численные методы с использованием базовых алгоритмов |

| | | |
|--|---|--|
| | | и оценивать вычислительную трудоемкость этих алгоритмов. Владеть навыками: - создания собственных эффективных алгоритмов для решения прикладных задач. |
| Общепрофессиональные компетенции | | |
| ОПК-1 Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности | И-ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук | Знать: - основные теоремы о сходимости итерационных методов решения частичной и полной проблемы собственных значений; - основные теоремы о сходимости итерационных методов решения СЛАУ; - формулы для интерполяционных многочленов в форме Лагранжа и Ньютона Уметь: - доказывать основные теоремы и выводить базовые формулы. |
| | И-ОПК-1.2 Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности | Уметь: - реализовывать численные методы решения математических задач на языке программирования высокого уровня Владеть навыками: - разработки численных методов для решения математических задач |

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **3** зачетных единицы, **108** акад. часов.

| № п/п | Темы (разделы) дисциплины, их содержание | Семестр | Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах) | | | | | | Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам) |
|----------|--|---------|---|--------------|--------------|--------------|-----------------------------|---------------------------|--|
| | | | Контактная работа | | | | | самостоятельная работа | |
| | | | лекции | практические | лабораторные | консультации | аттестационные испытания | | |
| 1 | Численные методы линейной алгебры | 5 | 14 | 6 | 6 | 2 | | 14 | Задания для лабораторных работ. Лабораторные работы №1,2. |

| | | | | | | | | | |
|---|--|---|-----------|-----------|-----------|----------|------------|-------------|--|
| 2 | Методы решения нелинейных алгебраических уравнений и систем. | 5 | 4 | 4 | 4 | 2 | | 6 | Задания для лабораторной работы. Лабораторная работа №3. |
| 3 | Теория интерполяции | 5 | 14 | 6 | 6 | 4 | | 14 | Задания для самостоятельной работы |
| | | | | | | | 0,3 | 1,7 | зачет |
| | ИТОГО | | 32 | 16 | 16 | 8 | 0,3 | 35,7 | |

Содержание разделов дисциплины:

1. Численные методы линейной алгебры

1.1. Частичная проблема собственных значений. Полная проблема собственных значений (метод вращений).

1.2. Итерационные методы решения СЛАУ. Метод простой итерации. Метод Зейделя. Метод наискорейшего градиентного спуска.

2. Методы решения нелинейных алгебраических уравнений и систем

2.1. Метод простой итерации. Метод Ньютона.

2.2. Методы решения скалярных нелинейных алгебраических уравнений (метод секущих, метод Стеффенсена, метод вилки).

3. Теория интерполяции

3.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка остаточного члена интерполяционного многочлена Лагранжа.

3.2. Разделенные разности и их свойства. Интерполяционная формула Ньютона с разделенными разностями.

3.3. Интерполирование с кратными узлами.

3.4. Многочлены Чебышёва и их свойства. Оптимальный выбор узлов интерполяции. Общая задача оптимизации методов.

3.5. Конечные разности и их свойства. Интерполяционные формулы для равноотстоящих узлов.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

Лабораторная работа – занятие, предусматривающие написание компьютерной программы для освоения конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов

рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»
http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php
- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»
<https://www.studentlibrary.ru>

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2020. <https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN9785001018360-SCN0000/000.html>
2. В.Н. Матвеев. Методы вычислений: учебное пособие. – Ярославль: ЯрГУ, 2007. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20070292.pdf>

б) дополнительная литература

1. Самарский А. А. Численные методы: учеб. пособие для вузов. / А. А. Самарский, А. В. Гулин; Гос. комитет СССР по народному образованию - М.: Наука, 1989. - 430 с.
2. Дж. Ортега, У. Пул. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- учебные аудитории для проведения лабораторных занятий (компьютерные классы);
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор:

Декан математического факультета, д.ф.-м.н.

П.Н. Нестеров

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины
«Методы вычислений»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**Контрольные задания и иные материалы,
используемые в процессе текущей аттестации**

Задания для лабораторной работы №1

Вычислить максимальное по модулю собственное значение матрицы A и соответствующий ему собственный вектор, нормированный на единицу в евклидовой норме.

Задание 1

Задание 2

Задание 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2.1 & 1 & 1.1 \\ 1 & 2.6 & 1.1 \\ 1.1 & 1.1 & 3.1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задания для лабораторной работы №2

Реализовать итерационный процесс по методу простой итерации, либо по методу Зейделя, либо по методу наискорейшего градиентного спуска.

Задание 1 – метод простой итерации.

$$\begin{pmatrix} 3.6 & 1 & 2.4 \\ 1 & 3.9 & 2.4 \\ 2.4 & 2.4 & 4.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.26 \\ 0.31 \\ 0.76 \end{pmatrix}.$$

Задание 2 – метод Зейделя.

$$\begin{pmatrix} 3.1 & 1 & 1.6 \\ 1 & 3.1 & 1.6 \\ 1.6 & 1.6 & 3.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.16 \\ 2.21 \\ 1.46 \end{pmatrix}.$$

Задание 3 – метод наискорейшего градиентного спуска.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1.4 \\ 1 & 4 & 2.5 \\ 1.4 & 2.5 & 4.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 2.2 \\ 3.1 \end{pmatrix}.$$

Задания для лабораторной работы №3

Используя метод секущих или метод Ньютона найти решения одного уравнения или

системы уравнений.

Задание 1 – метод секущих.

1.1. $x - \sin x = 0.25$, 1.2. $3x - \cos x = 1$, 1.3. $x \ln x = 1.5$.

Задание 2 – метод Ньютона.

2.1. $e^x - \frac{1}{x} = 0$, 2.2. $x^2 + 4 \sin x = 0$, 2.3. $e^x = 5x$.

Задание 3 – метод Ньютона для нелинейных систем.

$$\sin(x+1) - y = 1,$$

$$2x + \cos y = 2.$$

Все варианты заданий для лабораторных работ №1-3 можно найти в учебном пособии:
- В.Н. Матвеев. Методы вычислений: учебное пособие. – Ярославль: ЯрГУ, 2007.

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Список вопросов к зачету

(зачет выставляется по результатам выполнения лабораторных работ № 1-3
и краткого собеседования со студентом после их проверки).

1. Частичная проблема собственных значений. Итерационные методы.
2. Полная проблема собственных значений. Метод вращений.
3. Итерационные методы решения СЛАУ. Метод простой итерации.
4. Итерационные методы решения СЛАУ. Метод Зейделя.
5. Итерационные методы решения СЛАУ. Метод наискорейшего градиентного спуска.
6. Метод простой итерации решения систем нелинейных алгебраических уравнений.
7. Метод Ньютона решения систем нелинейных алгебраических уравнений.
8. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка остаточного члена интерполяционного многочлена Лагранжа.
9. Разделенные разности и их свойства. Интерполяционная формула Ньютона с разделенными разностями.
10. Интерполирование с кратными узлами.
11. Многочлены Чебышёва и их свойства.
12. Оптимальный выбор узлов интерполяции.
13. Конечные разности и их свойства.
14. Интерполяционные формулы для равноотстоящих узлов.