

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_ Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Методы оптимизации**

Направление подготовки (специальности)  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 21.04.2025, протокол № 10

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Методы оптимизации» являются изучение основ теории экстремальных задач и приобретение навыков использования её аппарата для решения конкретных задач, возникающих в естествознании, технике и экономике.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений. Для усвоения данной дисциплины студенты должны владеть аппаратом дифференциального и интегрального исчисления, основами алгебры и функционального анализа, уметь решать основные типы дифференциальных уравнений, иметь представление о геометрических структурах и быть знакомыми с методами приближённого решения систем линейных и нелинейных уравнений.

Полученные в курсе «Методы оптимизации» знания необходимы для изучения последующих дисциплин образовательной программы.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

| Формируемая компетенция<br>(код и формулировка)   | Индикатор достижения компетенции<br>(код и формулировка)   | Перечень планируемых результатов обучения   |
|---|--|---|
| <b>Профессиональные компетенции</b>   |  |   |
| <b>ПК-3</b><br>Способен создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках, промышленности и бизнесе, с учетом возможностей современных информационных технологий и программирования и компьютерной техники. | <b>И-ПК-3.1</b><br>Знает основные методы проектирования и производства программного продукта, принципы построения, структуры и приемы работы с инструментальными средствами, поддерживающими создание программных продуктов и программных комплексов, их сопровождения, администрирования и развития (эволюции). | <b>Знать:</b><br>- основные теоремы теории экстремальных задач;<br>- методы решения классических задач вариационного исчисления.<br><b>Уметь:</b><br>- формулировать практические задачи в терминах теории экстремальных задач;<br>- оптимально выбирать метод решения задачи;<br>- представлять решение задачи в форме, удобной для программирования и интегрирования в программный продукт. |

## 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **5** зачетные единицы, **180** акад. часа.

| №<br>п/п | Темы (разделы)<br>дисциплины,<br>их содержание   | Семестр | Виды учебных занятий,<br>включая самостоятельную<br>работу студентов,<br>и их трудоемкость<br>(в академических часах) |              |              |              |                             |                           | Формы текущего<br>контроля успеваемости<br><br>Форма промежуточной<br>аттестации<br>(по семестрам) |
|----------|--|---------|---|--------------|--------------|--------------|-----------------------------|---------------------------|--|
|          |  |         | Контактная работа   |              |              |              |                             | самостоятельная<br>работа |  |
|          |  |         | лекции  | практические | лабораторные | консультации | аттестационные<br>испытания |                           |  |
| 1.       | Задача о безусловной<br>оптимизации              |         | 3   | 4            |              |              |                             | 5                         |  |
| 2.       | Оптимизация при наличии<br>ограничений           |         | 3   | 5            |              | 1            |                             | 8                         |  |
| 3.       | Выпуклые функции и<br>выпуклые множества         |         | 3   | 5            |              |              |                             | 5                         |  |
| 4.       | Выпуклая оптимизация                             |         | 3   | 4            |              | 1            |                             | 5                         |  |
| 5.       | Простейшая задача<br>вариационного исчисления    |         | 4   | 5            |              |              |                             | 5                         |  |
| 6.       | Изопериметрическая задача                        |         | 3   | 5            |              | 1            |                             | 8                         |  |
| 7.       | Функционалы, зависящие<br>от старших производных |         | 3   | 5            |              |              |                             | 5                         |  |
| 8.       | Функционалы, зависящие<br>от вектор-функций      |         | 3   | 5            |              | 1            |                             | 5                         |  |
| 9.       | Задача Больца                                    |         | 3   | 5            |              |              |                             | 5                         |  |
| 10.      | Экстремальные принципы                           |         | 4   | 5            |              | 1            |                             | 8                         |  |
|          |  |         |   |              |              | 2            | 0,5                         | 33,5                      | экзамен  |
|          | Всего  |         | 32  | 48           |              | 7            | 0,5                         | 92,5                      |  |

### Содержание разделов дисциплины:

#### Тема 1. Задача о безусловной оптимизации.

1.1. Общие сведения об экстремальных задачах. Теоремы Вейерштрасса о разрешимости экстремальных задач для функций конечного числа переменных.

1.2. Понятия производной и градиента. Теорема Ферма о необходимых условиях экстремума.

1.3. Матрица Гессе для функции многих переменных, Достаточные условия локального и глобального минимума. Иллюстрирующие примеры.

#### Тема 2. Оптимизация при наличии ограничений.

2.1. Постановка задачи об относительном экстремуме.

2.2. Метод исключения – достоинства и недостатки.

2.3. Правило множителей Лагранжа.

2.4. Условия регулярности.

2.5. Понятие о достаточных условиях относительного экстремума.

#### Тема 3. Выпуклые функции и выпуклые множества

3.1. Выпуклые множества. Основные свойства. Крайние точки выпуклого множества.

3.2. Выпуклые функции многих переменных. Критерии выпуклости

3.3. Примеры выпуклых функций и выпуклых множеств

#### Тема 4. Выпуклая оптимизация

4.1. Точки экстремума выпуклой функции на выпуклом множестве

4.2. Теорема Куна-Таккера. Двойственные экстремальные задачи.

4.3. Особенности задач линейной оптимизации. Понятие о симплекс-методе.

#### **Тема 5. Простейшая задача вариационного исчисления**

5.1. Принцип Ферма в геометрической оптике

5.2. Постановка простейшей вариационной задачи

5.3. Уравнения Эйлера – необходимое условие экстремума.

5.4. Достаточное условие экстремума для простейшей вариационной задачи

5.5. Интегралы импульса и энергии.

#### **Тема 6. Изопериметрическая задача.**

6.1. Изопериметрическая задача в геометрии

6.2. Постановка изопериметрической задачи в вариационном исчислении

6.3. Правило множителей Лагранжа для изопериметрической задачи

6.4. Задача о тяжёлой однородной нити. Подходы Галилея и принцип Торричелли.

#### **Тема 7. Функционалы, зависящие от старших производных**

7.1. Постановка и особенности задачи

7.2. Уравнение Пуассона.

7.3. Методы решения вариационных задач со старшими производными

#### **Тема 8. Функционалы, зависящие от вектор-функций**

8.1. Постановка и особенности задач с векторными функциями

8.2. Система уравнений Эйлера – Лагранжа

8.3. Принцип стационарного действия

#### **Тема 9. Задача Больца**

9.1. Особенности вариационных задач с незакреплённой границей

9.2. Условия трансверсальности

9.3. Естественные краевые условия

#### **Тема 10. Экстремальные принципы**

10.1. Роль экстремальных принципов в естествознании

10.2. Вариационные принципы в механике и физике

10.3. Вариационные принципы в экономике и биологии.

### **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:  
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader;
- Wolfram Mathematica;
- GNU Octave;
- Maxima;
- <https://www.wolframcloud.com/>

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»  
<https://www.studentlibrary.ru>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Климов В. С., Бычкова Т. Г., Ухалов А. Ю. Конечномерная оптимизация - Ярославль, ЯрГУ, 2008. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20080299.pdf>
2. Климов В.С. Одномерные вариационные задачи. Ярославль. 2011. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20110201.pdf>

### **б) дополнительная литература**

1. А. В. Пантелеев, Т. А. Летова Методы оптимизации в примерах и задачах: учебное пособие — Санкт-Петербург: Лань, 2022. <https://reader.lanbook.com/book/212129>
2. Колбин В. В. Специальные методы оптимизации: учебное пособие — Санкт-Петербург: Лань, 2022. <https://reader.lanbook.com/book/211448>

### **в) ресурсы сети «Интернет» (при необходимости)**

- <https://reference.wolfram.com/language/?source=nav>
- <https://maxima.sourceforge.io/ru/>
- <https://www.gnu.org/software/octave/>

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

### **Автор:**

Профессор кафедры  
математического анализа, д.ф.-м.н.

В. С. Климов

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Методы оптимизации»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**Вопросы к экзамену по курсу «Методы оптимизации»**

1. Предварительные сведения. Постановка задачи.
2. Теоремы существования. Проекция точки на множество.
3. Дифференцируемые функции многих переменных.
4. Условия локального минимума.
5. Предварительное обсуждение правила множителей Лагранжа.
6. Доказательство правила множителей Лагранжа.
7. Условия регулярности.
8. Задача на минимакс (необходимые условия).
9. Определение и простейшие свойства выпуклых функций.
10. Критерий выпуклости дифференцируемых функций.
11. Выпуклая и коническая оболочка множества.
12. Условия минимума на выпуклом множестве.
13. Характеристика проекции на выпуклое множество. Условие Слейтера.
14. Дифференциальные варианты теоремы Куна – Таккера.
15. Теорема Фаркаша.
16. Экстремальные задачи с линейными ограничениями.
17. Максимизация выпуклой функции.
18. Постановка простейшей вариационной задачи.
19. Вспомогательные предложения.
20. Уравнение Эйлера.
21. Интеграл импульса и интеграл энергии.
22. Достаточные условия абсолютного минимума.
23. Постановка изопериметрической задачи.
24. Правило множителей для изопериметрической задачи.
25. Простейшая вариационная задача для вектор-функций.
26. Функционалы, содержащие старшие производные.
27. Уравнение Эйлера – Пуассона.
28. Задача Больца.
29. Принцип Ферма и закон Снеллиуса.
30. Задача Лопиталья.
31. Принцип Тррричелли и задача о прогибе нити.
32. Принцип стационарного действия.

**Задачи по курсу**

Решение задач по курсу «Методы оптимизации и вариационное исчисление» играет важнейшую роль при оценке знаний студентов. При успешном их решении студент может улучшить свой результат. Приведу несколько задач такого рода

1. Разделить число 8 на две части так, чтобы произведение их произведения на разность было максимально.
2. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, если сумма длин его катетов равна заданному числу.
3. Вписать в круг прямоугольник максимальной площади
4. Вписать в круг треугольник максимальной площади.
5. Среди треугольников фиксированного периметра найти треугольник максимальной площади.
6. Среди всех тетраэдров с данным основанием и высотой найти тетраэдр с наименьшей боковой поверхностью
7. Среди сегментов шаров, имеющих заданную площадь боковой поверхности, найти сегмент наибольшего объёма.
8. Вписать в единичный шар конус наибольшего объёма.
9. Даны угол и точка внутри него. Через эту точку провести отрезок, имеющий концы на сторонах угла, так, чтобы полученный треугольник имел наименьшую площадь.
10. Найти расстояние от точки до эллипса (задача Аполлония).
11. Решить задачу Аполлония для параболы.
12. На плоскости даны три точки: P, Q и R. Найти такую точку A, чтобы сумма квадратов расстояний от A до P, Q, R была минимальной.
13. Норманнское окно имеет форму прямоугольника, завершённого полукругом. Дан периметр фигуры. Каковы должны быть её размеры, чтобы окно пропускало наибольшее количество света?
14. Через данную точку P внутри круга провести две взаимно перпендикулярные хорды AC и BD так, чтобы площадь четырёхугольника была наименьшей.
15. Дан выпуклый четырёхугольник. Найти такую точку, чтобы сумма расстояний от неё до вершин четырёхугольника была наименьшей.
16. Забором длины l нужно огородить с трёх сторон участок пляжа прямоугольной формы. Какова наибольшая площадь этого участка.
17. В вершине A куба с ребром единичной длины сидит маленький паук. Как ему по поверхности куба перебраться в вершину B, наиболее удалённую от A, кратчайшим путём.
18. На поверхности сферы фиксированного радиуса выбрать пять точек, так, чтобы объём их выпуклой оболочки был максимальным.
19. Какой из n-угольников, вписанных в данный полукруг так, что одна из сторон совпадает с диаметром, имеет наибольшую площадь.
20. На стороне BC треугольника ABC найти точку, сумма расстояний до двух других сторон – наименьшая.

### 3. Правила выставления оценки на экзамене

В экзаменационный билет включаются два теоретических вопроса и одна задача. На подготовку к ответу даётся не менее часа.

По итогам экзамена выставляется одна из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

Оценка «Отлично» выставляется студенту, который демонстрирует глубокое и полное владение содержанием материала, осуществляет межпредметные связи и успешно решает предложенную задачу. Студент даёт развёрнутые, полные и чёткие ответы на вопросы билета и дополнительные вопросы, соблюдает логическую последовательность при изложении материала. Грамотно использует терминологию теории экстремальных задач.

Оценка «Хорошо» выставляется студенту, ответ которого на экзамене в целом соответствует указанным выше критериям, но отличается меньшей обстоятельностью, обоснованностью и полнотой. В ответе и решении задачи имеют место отдельные



неточности, которые исправляются самим студентом после уточняющих вопросов экзаменатора.

Оценка «Удовлетворительно» выставляется студенту, дающего недостаточно полные и последовательные ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, но при этом демонстрирует умение выделить существенные и несущественные признаки и установить причинно-следственные связи. В ответе допускаются ошибки в определении и раскрытии некоторых основных понятий, которые студент затрудняется исправить самостоятельно. В случае неясности ситуации с оценкой следует предложить студенту дополнительную задачу. В случае успешности её решения студент заслуживает удовлетворительной оценки.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется студенту, демонстрирующему разрозненные, бессистемные знания; беспорядочно и не уверен, но излагает материал, не умеет выделять главное и второстепенное, не умеет соединять теоретические положения с практикой, не справляется с простыми задачами; даёт неполные ответы. Дополнительные вопросы и задачи не приводят к коррекции ответов студента.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется также студенту, который взял билет, но отвечать отказался.

## Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Методы оптимизации»

### Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Учебный план по дисциплине «Методы оптимизации и вариационного исчисления» достаточно своеобразен. Соотношение лекций и практических занятий нестандартно: 2 к 3. Для успешного усвоения дисциплины представляется важным сочетание теоретических познаний и решения достаточно большого количества задач. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях. Теоретический материал с достаточной полнотой изложен в двух учебно-методических пособиях автора, одно из которых написано совместно с доцентами кафедры математического анализа Бычковой Т.Г. и Ухаловым А.Ю. Материал для практических занятий брался в основном из выпускной квалификационной работы студента Озерец А.О. (руководитель Климов В.С.).

В его работе приводятся в достаточно краткой форме сведения теоретического характера, затем излагаются полные решения экстремальных задач. Существенное место в ВКР занимает набор задач для самостоятельного решения. Часть задач решалась в аудитории, большая часть предлагалась в качестве домашних заданий. Каждый студент при этом получал индивидуальное задание. Студенты через некоторое время приносили выполненные задания, иногда возникали определённые трудности. Соответствующие вопросы обсуждались либо в аудитории, либо на консультациях, носивших, как правило, индивидуальный характер. Важно заметить, что Озерец А.О. не ограничился классическими методами решения экстремальных задач, но в своей работе привёл методы решения с помощью специальной программы – Maple.

По данной дисциплине есть два учебно-методических пособия преподавателей ЯрГУ с соответствующими рекомендациями по изучению разделов дисциплины. Поэтому данное приложение достаточно кратко.