

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_ Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Современная геометрия**

Направление подготовки (специальности)  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 21.04.2025, протокол № 10

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Современная геометрия» являются дополнение первоначальных геометрических курсов более современными геометрическими понятиями и методами.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной. Для освоения данной дисциплины студенты должны быть знакомы с одномерным дифференциальным и интегральным исчислениями, элементами линейной алгебры и аналитической геометрии.

Полученные в курсе «Современная геометрия» знания необходимы для изучения последующих дисциплин модуля «Математика и компьютерные науки», а также для продолжения обучения в магистратуре по направлению «Прикладная математика»

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС, ВО, ОП ВО и приобретение следующих знаний, умений, навыков (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-3</b> Способен создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках, промышленности и бизнесе, с учетом возможностей современных информационных технологий и программирования и компьютерной техники.	<b>И-ПК-3.1</b> Знает основные методы проектирования и производства программного продукта, принципы построения, структуры и приемы работы с инструментальными средствами, поддерживающими создание программных продуктов и программных комплексов, их сопровождения, администрирования и развития (эволюции).	<b>Знать:</b> Основные определения, теоремы дисциплины <b>Уметь:</b> - воспроизводить ключевые методы и приемы, используемые в современной геометрии, <b>Владеть навыками:</b> - решения задач вычислительного характера, методами современной геометрии.

## 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)		Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации
			Контактная работа		

			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	(по семестрам)
1	Дифференциальные формы	6	2	3		1		3	
2	Оператор Ходжа	6	2	3		1		3	
3	Векторные поля	6	3	3				10	Задания для самостоятельной работы
4	Голономность векторных полей	6	3	3		1		3	
5	Элементы теории графов	6	3	2		1		3	
6	Многокритериальные задачи	6	3	2				8	Контрольная работа
							0,3	5,7	Зачет
	<b>Всего</b>		<b>16</b>	<b>16</b>		<b>4</b>	<b>0,3</b>	<b>35,7</b>	

### Содержание разделов дисциплины:

#### 1. Дифференциальные формы

- 1.1. Свойства внешнего умножения в модуле дифференциальной формы. Внешнее произведение дифференциальных форм и его свойства.
- 1.2. Внутреннее произведение формы на векторном поле. Примеры.
- 1.3. Внешнее дифференцирование и его свойства. Примеры.
- 1.4. Замкнутые формы (коциклы), точные формы. Группы когомологий Де Рама. Примеры. Числа Бетти. Теорема Пуанкаре.
- 1.5. Значение дифференциальной формы на упорядоченном наборе векторов. Примеры.
- 1.6. Интеграл от дифференциальной формы по ориентированному гладкому многообразию и его свойства. Примеры.
- 1.7. Теорема Стокса для дифференциальных форм. Частные случаи.

#### 2. Оператор Ходжа

- 2.1. Оператор Ходжа и его свойства. Примеры.
- 2.2. Внешнее кодифференцирование и его свойства.
- 2.3. Внешний кодифференциал формы, примеры.
- 2.4. Оператор Лапласа-Бельтрами и его вычисление.
- 2.5. Связь операторов Ходжа и Лапласа-Бельтрами с внешним кодифференцированием.

#### 3. Векторные поля.

- 3.1. Вектор в точке и его свойства.
- 3.2. Векторное поле. Примеры. Градиент функции, дивергенции векторного поля. Ротор векторного поля.
- 3.3. Линия тока (интегральная кривая) векторного поля; Примеры.
- 3.4. Векторное поле на поверхностях. Касательные и нормальные поля. Невырожденные векторные поля.
- 3.5. Гладкие векторные поля. Теорема о «еже»
- 3.6. Линейно-независимые векторные поля. Теорема Радона-Гурвица-Экмана-Адамса о максимальном числе линейно независимых касательных векторных полей на сфере.
- 3.7. Параллелизуемость поверхности. Частный случай сфер. Примеры построения максимального числа линейно-независимых векторных полей на сферах.

#### 4. Голономность векторных полей.

- 4.1. Формы Пфаффа. Система уравнений Пфаффа.
- 4.2. невырожденные системы Пфаффа и их геометрическая интерпретация.
- 4.3. Интегральная поверхность системы Пфаффа. Голономность (вполне интегрируемость) системы Пфаффа.
- 4.4. Теорема Фробениуса о голономности системы Пфаффа.
- 4.5. Голономность векторного поля. Голономность распределения нескольких векторных полей. Критерий голономности. Примеры голономных и неголономных полей.

#### **5. Элементы теории графов.**

- 5.1. Основные понятия: вершины, ребра, порядок графа, петля. Полные графы.
- 5.2. Операции над графами. Добавление ребра. Слияние вершин. Стягивание ребра. Расщепленные вершины.
- 5.3. Раскраски графа. Правильные раскраски. Хроматическое число графа.
- 5.4. Хроматический полином графа и его свойства.
- 5.5. Вычисление хроматического полинома графа для графов малого порядка. Примеры.

#### **6. Многокритериальные задачи.**

- 6.1. Граница Парето множества в евклидовом пространстве. Примеры.
- 6.2. Граница Слейтера множества и ее связь с границей Парето. Примеры.
- 6.3. Постановка многокритериальной задачи. Точка утопии, идеальная точка.
- 6.4. Метод идеальной точки и метод последовательных уступок для многокритериальной задачи. Примеры.

### **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционно-образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвящённое освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний. В процессе проведения таких занятий устанавливается тесный контакт преподавателя со студентами.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

### **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:  
- программы Microsoft Office;

- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader;
- Network 15 Mathematica 11 Increment Standard Bundled List Price with Service;
- Network 15 Mathematica 11 Upgrade L3549-7407;
- MikTeX (свободно распространяемое ПО).

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются (или могут использоваться):

- Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ  
[http://www.lib.uniya.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniya.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://www.biblio-online.ru/>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniya.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniya.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU <http://elibrary.ru/>
- База научных статей Mathnet
- База Scopus
- База Web of Sciences

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Дубровин Б. А. Современная геометрия: методы и приложения / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко; МГУ. Т. 1: Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. - Б.м.: Б.и., 2013. - 335 с.
2. Дубровин Б. А. Современная геометрия: методы и приложения / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко; МГУ. Т. 2: Геометрия и топология многообразий. - Б.м.: Б.и., 2013. - 295 с.

### **б) дополнительная литература**

1. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004.  
<https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN5922104420-SCN0000/000.html>
2. Балабаев В.Е. Элементы топологии и анализа. Ярославль, ЯрГУ, 1990.
3. Аминов Ю.А. Геометрия векторного поля. М. Наука, 1990.
4. Кристофидес Н. Теория графов: алгоритмический подход. / Н. Кристофидес; пер. с англ - М.: Мир, 1978. - 432 с.

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;

- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

**Автор(ы) :**

Профессор кафедры математического анализа,  
д.ф-м.н.

Балабаев В.Е.

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Современная геометрия»**

**Фонд оценочных средств  
Для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

**Задания для самостоятельной работы**

Доказать утверждения (топология евклидова):

- 1) прямая  $\mathbb{R}$  гомеоморфна интервалу  $(0, 1)$ ;
- 2) пространство  $\mathbb{R}^n$  гомеоморфно открытому  $n$ -мерному шару  $B^n$ ;
- 3) интервал  $(0, 1)$  не гомеоморфен отрезку  $[0, 1]$ ;
- 4) плоскость  $\mathbb{R}^2$  не гомеоморфна прямой  $\mathbb{R}$ .

Доказать утверждения (топология евклидова):

- 1) прямая  $\mathbb{R}$  связное пространство;
- 2) подпространство рациональных чисел  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  — несвязное пространство.

**Контрольная работа «Современная геометрия».**

Пусть

$$U_1 = U_2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 1\}$$

— открытый квадрат,  $U_{12} = U_{21} = \{x_1 \neq 0\}$  и

$$\varphi_{12}(x) = \begin{cases} (x_1 + 1, x_2), & x_1 < 0, \\ (x_1 - 1, x_2), & x_1 > 0. \end{cases}$$

Показать, что тогда многообразие  $M = U_1 \amalg U_2 / \sim$  гомеоморфно открытому листу Мебиуса

**2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

**Список вопросов к зачёту**

1. Определение дифференциальной формы и её свойства.
2. Определение внешнего произведения дифференциальных свойств и его свойства.
3. Определение внутреннего произведения формы на векторном поле.
4. Определение внешнего дифференцирования и его свойства.
5. Определение замкнутой и точной форм, когомологий Де Рама, чисел Бетти.
6. Определение значения формы на наборе векторов.
7. Теорема Стокса для дифференциальных форм.
8. Определение оператора Ходжа.

9. Определение кодиференциала формы.
10. Определение голономности системы Пфаффа.
11. Теорема Фробениуса о голономности системы Пфаффа.
12. Голономность распределения векторных полей. Критерий голономности.
13. Определение графа, порядка графа, полного графа.
14. Операции над графами. Добавление ребра, слияние вершин, стягивание ряда, распределение вершины.
15. Раскраски графа. Правильные раскраски. Хроматическое число графа.
16. Хроматический полином графа и его свойства.
17. Вычисление хроматического полинома графа.
18. Граница Парето и примеры ее нахождения.
19. Граница Слейтера и примеры ее нахождения.
20. Постановка многокритериальной задачи. Точка утопии.
21. Метод идеальной точки. Метод последовательных уступок.

### **3. Правила выставления оценки**

#### **Правила выставления оценки на экзамене (в устной форме)**

В экзаменационный билет включается два теоретических вопроса и задача. На подготовку к ответу дается 1 астрономический час. По итогам экзамена выставляется одна из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется студенту, который демонстрирует глубокое и полное владение содержанием материала и понятийным аппаратом дисциплины, дает развернутые, полные и четкие ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, правильно решает задачу.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, ответ которого на экзамене в целом соответствует указанным выше критериям, но отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой. В ответе имеют место отдельные неточности (несущественные ошибки), которые исправляются самим студентом после дополнительных и (или) уточняющих вопросов экзаменатора. Необходимым условием является хотя бы частичное решение задачи.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, который дает недостаточно полные ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, но при этом все же демонстрирует некоторые базовые знания по предмету. При аргументации ответа студент не обосновывает свои суждения. На часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не демонстрирует знания базовых понятий и результатов, не в состоянии решить задачу, плохо отвечает на дополнительные вопросы, не владеет понятийным материалом дисциплины. Дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора не приводят к коррекции ответов студента. На основную часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы. Кроме того, оценка «Неудовлетворительно» может быть выставлена при незнании каких-то базовых понятий и результатов. Оценка «Неудовлетворительно» выставляется также студенту, который взял экзаменационный билет, но отвечать отказался.



### **Правила выставления оценки на экзамене (в письменной форме)**

Студенту предлагается индивидуальный вариант заданий, содержащий 4-6 задач. На выполнение и представление заданий дается не менее 3-х часов. При оценивании выполненных заданий может использоваться следующая система оценок за одно задание:

- + (4 балла) – задание выполнено полностью, без ошибок;
- + (3 балла) – задание выполнено с незначительной ошибкой или почти полностью;
- + (2 балла) – задание выполнено с существенной ошибкой или примерно наполовину;
- + (1 балл) – лишь какие-то элементы представленного ответа могут быть оценены положительно.

При таком подходе задания считаются примерно равноценными по трудоемкости. При проверке работы в каждом задании отмечаются недостатки (в форме, доступной студенту), и тем самым объясняется поставленные баллы за задания. Пусть  $k$  – число задач в предложенном варианте (например,  $k=5$ ). Определяется общее число  $M$  баллов, набранных студентом. Оценка зависит от величины отношения  $r = MN$ , где  $N=4k$  – максимальное возможное число баллов за работу. Возможная градация оценок следующая:

- $0.75 \leq r \leq 1$  - оценка «отлично»;
- $0.60 \leq r < 0.75$  - оценка «хорошо»;
- $0.26 \leq r \leq 0.59$  - оценка «удовлетворительно»;
- $0 \leq r \leq 0.25$  - оценка «неудовлетворительно».

Если задания имеют существенно различную трудоемкость (сложность), то их максимальная оценка может быть различной. В этом случае в указанную схему вносятся соответствующие изменения.

За преподавателем имеется право учитывать на экзамене в положительную сторону работу студента в семестре.

### **Требования для получения зачета**

Каждый студент получает индивидуальное задание. Зачет выставляется по результатам собеседования в ходе которого студент сдает задание и отвечает на вопросы.

## Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Современная геометрия»

### Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основу освоения курса «Современной геометрии» составляет сочетание лекций и практических занятий при определённом преобладании второго вида занятий. Если на лекциях излагаются основные теоремы и небольшое число примеров иллюстративного материала, то на практических занятиях решается значительное число задач.

Для успешного освоения дисциплины принципиально важно решение достаточно большого количества упражнений, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы математического анализа. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного материала. Конспекты лекции необходимо прорабатывать еще раз дома и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются объединением нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных навыков работы с аппаратом экстремальных задач, в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде контрольных работ и коллоквиума. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий, которые вызвали затруднения.

Зачёт выставляется по результатам контрольной работы и краткого собеседования по её результатам.

Освоить самостоятельно дисциплину «Современная геометрия» большинству студентов крайне сложно. В первую очередь это связано с тем, что используются многие понятия и методы смежных математических дисциплин : алгебра и аналитическая геометрия. Играет роль и большой объем материала. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий сдать экзамен по итогам изучения дисциплины практически невозможно.