

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

24 мая 2022 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Комбинаторика**

Направление подготовки (специальности)  
10.05.01 Компьютерная безопасность

Направленность (профиль)  
«Математические методы защиты информации»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 11.04.2022, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 8 от 19.04.2022

## 1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Комбинаторика» является обеспечение фундаментальной подготовки в одной из важных областей современной прикладной математики, освоение языка и методов раздела математики, лежащего в значительной части теории вероятностей, теории кодирования, передачи, защиты и хранения информации, имеющего применение во многих областях новейшей вычислительной техники. Дополнительная цель - ознакомление с историей развития комбинаторного анализа, классических задач перечисления объектов в соответствии с заданными ограничениями. Основная задача дисциплины – научить студентов пониманию языка конечной алгебры и теории информации, воспитанию культуры вычислений с помощью комбинаторного анализа, умениям применять аппарат комбинаторики в различных контекстах.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к обязательной части образовательной программы и является элективной дисциплиной. Дисциплина имеет разносторонние связи со всеми специальными и основными математическими дисциплинами. Полученные при её изучении знания используются в различных специальных курсах, где она зачастую выступает в качестве основы курса. Основные математические дисциплины, связанные с указанной, таковы:

1. Теория кодирования и её связь с задачами защиты информации.
2. Теория вероятностей.
3. Теория автоматов.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
<b>ОПК 2.1</b> Способен разрабатывать алгоритмы, реализующие современные математические методы защиты информации	<b>И-ОПК-2.1.1</b> Применяет знание фундаментальных разделов математики для разработки методов защиты информации	<b>Знать:</b> - основные классы производящих функций, действия над производящими функциями, способы получения комбинаторных соотношений с помощью производящих функций; - понятие рекуррентного соотношения, порядок рекуррентного соотношения, методы решения задач с помощью рекуррентных соотношений, алгоритм решения линейного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами, решение рекуррентных соотношений с помощью производящих функций <b>Уметь:</b>

		<ul style="list-style-type: none"> <li>- уметь строить производящую функцию для последовательности чисел, получать комбинаторные соотношения с помощью производящих функций, применять операции над производящими функциями;</li> <li>- решать линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами, решать рекуррентные соотношения с помощью производящих функций</li> </ul>
	<b>И-ОПК-2.1.3</b> Применять аппарат производящих функций для решения комбинаторных задач	<b>Знать:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- основные модели комбинаторной математики, а именно знать формулы числа размещений, перестановок, сочетаний с повторениями и без повторений, а также модели комбинаторики разбиений;</li> <li>- основы теории перечисления Пойя;</li> <li>- метод математической индукции;</li> <li>- принцип включения и исключения, формулу включений и исключений для любого количества множеств;</li> </ul> <b>Уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- применять формулы числа размещений, перестановок, сочетаний, а также моделей комбинаторики разбиений при решении комбинаторных задач;</li> <li>- применять принцип включений и исключений для решения комбинаторных задач; применять метод математической индукции для доказательства математических утверждений</li> </ul> <b>Владеть навыками:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- математическим аппаратом комбинаторики, методами решения комбинаторных задач: правило суммы, правило произведения и др.</li> </ul>

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единиц, 72 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)					Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)	
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		самостоятельная работа

1.	Вводная лекция	3	1						
2	Комбинаторные числа	3	1	2				2	Проверка домашних заданий
3.	Формулы обращения	3	2	4		1		2	Проверка домашних заданий
4.	Комбинаторика разбиений	3	2	2				2	Проверка домашних заданий
5.	Метод математической индукции	3	2	4				2	Проверка домашних заданий
6.	Формальные степенные ряды и производящие функции	3	2	6		2		2	Проверка домашних заданий
7.	Рекуррентные соотношения	3	2	4				2	
8.	Задачи решаемые с помощью рекуррентных соотношений	3	2	4				2	
9.	Производящие функции и рекуррентные соотношения	3	2	6		2		2	Проверка домашних заданий
							0,3	2,7	Зачет
	<b>Всего</b>		<b>16</b>	<b>32</b>		<b>5</b>	<b>0,3</b>	<b>18,7</b>	

### Содержание разделов дисциплины:

#### Тема 1. Вводная лекция.

Предмет и методы комбинаторики. Некоторые проблемы. Краткий исторический очерк. Разделы комбинаторики: перечислительная, структурная, экстремальная комбинаторика и их взаимодействие. Комбинаторная оптимизация.

#### Тема 2. Комбинаторные числа.

Правило суммы, правило произведения. Размещения, перестановки, сочетания с повторениями и без повторений. Основные комбинаторные модели. Бином и полином. Свойства биномиальных и полиномиальных коэффициентов.

#### Тема 3. Формулы обращения.

Принцип включения и исключения. Задача о беспорядках. Формула обращения Мебиуса.

#### Тема 4. Комбинаторика разбиений.

Основные задачи комбинаторики разбиений. Тожества и арифметические свойства. Тожество Эйлера. Тожество Гаусса – Якоби. Асимптотические свойства функции  $p(n)$ .

#### Тема 5. Метод математической индукции.

Применение метода математической индукции для доказательства утверждений из различных разделов математики.

#### Тема 6. Формальные степенные ряды и производящие функции.

Действия над производящими функциями. Комбинаторные соотношения и производящие функции.

#### Тема 7. Рекуррентные соотношения.

Задачи решаемые с помощью рекуррентных соотношений.

#### Тема 8. Задачи решаемые с помощью рекуррентных соотношений.

Метод рекуррентных соотношений.

#### Тема 9. Производящие функции и рекуррентные соотношения.

Решение рекуррентных соотношений с помощью производящих функций.

**5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, место предметной области в теории и приложениях математики и в истории математики. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, стимулировать интерес и расставлять акценты, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний. На практическом занятии проводится также разбор вызвавших затруднение задач из заданий для самостоятельной работы.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:  
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»

[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>

- Электронно-библиотечная система «Консультант Студента»

<https://www.studentlibrary.ru/>

- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>

**8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

**а) основная литература**

1. Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко Задачи и упражнения по дискретной математике: учеб. пособие для вузов - М., Физматлит, 2009 <https://www.studentlibrary.ru/ru/book/ISBN9785922104777.html>
2. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. – М.: МЦНМО, 2006 <https://djvu.online/file/EaXF72N5r38Bg?ysclid=ljyaq2efv2422943515>

**б) дополнительная литература**

1. Холл, М., Комбинаторика: - М., Мир, 1970 <http://mathscinet.ru/files/HallM.pdf>
2. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика, М.: «Мир», 1998.
3. Дурнев В. Г., Башкин М. А., Якимова О. П. Элементы дискретной математики. Часть II. Ярославль, 2007. <http://www.lib.uniylar.ac.ru/edocs/iuni/20070280.pdf>
4. Ноден П. Алгебраическая алгоритмика: с упражнениями и решениями.: учебник для вузов. / П. Ноден, К. Китте; пер. с фр. В. А. Соколова; под ред. Л. С. Казарина; Науч.-метод. совет по прикладной математике УМО ун-тов - М.: Мир, 1999. - 719 с.
5. Биркгоф Г. Современная прикладная алгебра. / Г. Биркгоф, Т. К. Барти; пер. с англ. Ю. И. Манина - 2-е изд., стереотип. - СПб.: Лань, 2005. - 400 с.

**9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

**Автор(ы):**

Доцент, к.ф.-м.н.

М. А. Заводчиков

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Комбинаторика»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**Задание по теме Комбинаторные числа.**

По книге Гаврилов, Г. П., Задачи и упражнения по дискретной математике : учеб. пособие для вузов / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. - 3-е изд., перераб., М., Физматлит, 2009, 416с, Глава 8. параграф 1.

**Задание по теме Формулы обращения.**

По книге Гаврилов, Г. П., Задачи и упражнения по дискретной математике : учеб. пособие для вузов / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. - 3-е изд., перераб., М., Физматлит, 2009, 416с, Глава 8. параграф 2.

**Задание по теме Комбинаторика разбиений**

По книге Гаврилов, Г. П., Задачи и упражнения по дискретной математике : учеб. пособие для вузов / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. - 3-е изд., перераб., М., Физматлит, 2009, 416с, Глава 8. параграф 2.

**Задание по теме Формальные степенные ряды и производящие функции.**

По книге . Грэчем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика, Глава 2, 7.

**Задание по теме . Рекуррентные соотношения.**

По книге . Грэчем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика, Глава 2.

**Задание по теме Задачи решаемые с помощью рекуррентных соотношений.**

По книге . Грэчем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика, Глава 2,7.

**Задание по теме Производящие функции и рекуррентные соотношения.**

По книге . Грэчем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика, Глава 7.

**Контрольная работа 1.**

(проверка сформированности ОПК-2.1, индикатор И-ОПК-2.1.1 )

1. Пин-код состоит из четырех цифр. Сколько существует таких пин-кодов, у которых две цифры одинаковые?
2. Сколько делителей у числа 508032?
3. Сколько существует инъективных отображений из множества, состоящего из  $n$ , в  $m$  множество, состоящее из  $m$ ?
4. Сколькими способами можно разделить колоду в 36 карт на 6 одинаковых частей?
5. Сколькими способами можно представить натуральное число  $n$  в виде суммы пяти натуральных чисел? В частности, сколькими способами можно представить число 27 в виде суммы четырех чисел?
6. Сколько существует целых чисел от 1 до 15000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, но делятся на 11?

7. Трое сумасшедших маляров принялись красить пол каждый в свой цвет. Один успел закрасить красным 75\% пола, другой зелёным – 70\%, третий синим – 65\%. Какая часть пола заведомо закрашена всеми тремя красками?
  8. Антон, Артем и Вера решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества легких?
  9. Найти коэффициент при  $x^5$  в выражении  $(1+x-2x^2)^8$  после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых.
- Оценки 3 — 5,6 задач, 4 - 7 задач, 5 — 8,9 задач.

## Контрольная работа 2

(проверка сформированности ОПК-2.1, индикатор И-ОПК-2.1.3)

1. Решить рекуррентное соотношение  $f_{n+2}=f_{n+1}+12f_n$ ,  $f_0=1$ ,  $f_1=2$ .
2. Решить рекуррентное соотношение с помощью производящей функции  $f_{n+2}=f_{n+1}+12f_n+\frac{1}{n+1}$ ,  $f_0=1$ ,  $f_1=-1$ .
3. Решить рекуррентное соотношение  $f_{n+2}-f_{n+1}-12f_n=(2+n)5^n$ ,  $f_0=1$ ,  $f_1=0$ .
4. Решить рекуррентное соотношение  $f_{n+2}-f_{n+1}-12f_n=(1+n^2)3^n$ ,  $f_0=1$ ,  $f_1=0$ .
5. Найдите производящую функцию для последовательности  $1, C_m^1, C_{m+1}^2, C_{m+2}^3, \dots$ .
6. Докажите тождество  $F_1+F_3+F_5+\dots+F_{2n+1}=F_{2n+2}$ , где  $F_n$  - числа Фибоначчи.
7. Имеется возможность передавать 4 разных сигнала A, B, C и D, причем их передача занимает соответственно  $t_1=2$ ,  $t_2=3$ ,  $t_3=1$  и  $t_4=4$  единиц времени. Сколько различных сообщений может быть передано за время  $t=30$ ?

Оценки 3 — 4 задачи, 4 — 5 задач, 5 — 6,7 задач.

## 2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

### Вопросы к зачету

1. Правило суммы и произведения. Примеры.
2. Размещения, перестановки, сочетания без повторений.
3. Размещения, перестановки, сочетания с повторениями.
4. Бином и полином.
5. Свойства биномиальных коэффициентов.
6. Свойства полиномиальных коэффициентов.
7. Принцип включения – исключения. И формула обращения Мебиуса.
8. Частично упорядоченные множества.
9. Комбинаторика разбиений. Основные задачи.
10. Метод математической индукции.
11. Формальные степенные ряды.
12. Производящие функции.
13. Действия над производящими функциями.
14. Доказательство комбинаторных соотношений с помощью производящих функций.
15. Числа Каталана. Числа Стирлинга и Эйлера. Числа Бернулли и Фибоначчи.
16. Рекуррентные соотношения.
17. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.
18. Решение рекуррентных соотношений с помощью производящих функций.



### Некоторые задания для зачетной работы

1. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого – 9. Сколькими способами они могут обменять книгу одного на книгу другого?
2. Сколькими способами можно разделить 10 белых грибов, 15 подберезовиков и 8 подосиновиков между 4 ребятами?
3. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение  $x+y+z=15$ ?
4. Сколько существует целых чисел от 1 до 33000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, но делятся на 11?
5. С помощью метода математической индукции докажите  $n^3+5n$  кратно 6.
6. Сколькими способами можно выпуклый  $(n+2)$ -угольник разбить на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри этого многоугольника?
7. Решить рекуррентное соотношение  $f_{n+2}=f_{n+1}+12f_n$ ,  $f_0=1$ ,  $f_1=2$ .
8. Решить рекуррентное соотношение  $f_{n+2}-f_{n+1}-12f_n=(1+n^2)3^n$ ,  $f_0=1$ ,  $f_1=0$ .

Студент получает зачет при выполнении 70% задач и ответе на вопрос.

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка («зачтено», «незачтено»), которая определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на необходимом уровне.

## **Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Комбинаторика»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Курс «Комбинаторика» отличается высокой степенью абстрактности применяемых методов, но в то же время, один из немногих курсов, позволяющих студентам составить представление о практическом применении абстрактных конструкций. Он насыщен весьма нетривиальными теоремами и, в то же время требует от слушателя высокой алгоритмической культуры. Поэтому возможно приглашение практических работников. Непосредственная роль этого курса – подготовка к восприятию идеологии теории вероятностей, что предполагает хорошее умение вычислять в тех разделах математики, которые получили название «конкретная математика». В то же время, последние темы предваряют в последующем выход на новый уровень абстрактности. Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий.