

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Динамика дискретных систем**

Направление подготовки (специальности)  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 22.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Динамика дискретных систем» обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом, содействует фундаментализации образования. Основная цель курса — дать доступное студентам введение в круг вопросов, связанных с поведением нелинейных дискретных динамических моделей, определяемых одномерными отображениями.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной. Дисциплина «Динамика дискретных систем» входит в цикл дисциплин, которые обеспечивают овладение аналитическими и численными методами, необходимыми для подготовки специалиста-математика. При освоении дисциплины необходим определенный уровень освоения дисциплин «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Алгебра». Знания и навыки, полученные при изучении дисциплины «Динамика дискретных систем», используются при изучении ряда специальных дисциплин.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-2</b> Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат.	<b>И-ПК-2.1</b> Обладает устойчивыми знаниями в области основных математических дисциплин, их аппарата и результатов.	<b>Знать:</b> - основные понятия и результаты теории дискретных систем. <b>Уметь:</b> - применять понятия, результаты и методы теории дискретных систем в других разделах математики. <b>Владеть навыками:</b> - систематического и результативного применения аппарата теории дискретных систем.
	<b>И-ПК-2.2</b> Обладает способностью применять современный математический аппарат в решении различных задач.	<b>Знать:</b> - методы решения важнейших задач теории дискретных систем. <b>Уметь:</b> - реализовывать основные способы и алгоритмы решения задач теории дискретных систем. <b>Владеть навыками:</b> - применения компьютера для решения задач теории дискретных систем.

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **3** зачетные единицы, **108** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1.	Вводная лекция. Дополнительные сведения из математического анализа.	7	2	2				9	
2.	Топологическая сопряжённость.	7	1	2				6	
3.	Локальные бифуркации.	7	3	3	4	1		7	
4.	Глобальные бифуркации. Порядок Шарковского.	7	2	2	3	1		7	
5.	Производная Шварца и устойчивость циклов.	7	2	2	2	1		6	
6.	Логистическое отображение.	7	2	1	3	1		5	
7.	Гиперболические множества и хаотичность отображений.	7	2	2	2	1		6	
8.	Многомерные отображения.	7	2	2	2	1		6	
							0,3	1,7	зачёт
	ИТОГО		16	16	16	6	0,3	53,7	

#### 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии.

**Вводная лекция** — даёт первое целостное представление о дисциплине (или её разделе) и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки специалиста. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных учёных, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках курса, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция (или лекция общего курса)** — последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

**Практическое занятие** — занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Лабораторная работа** – организация учебной работы с реальными материальными и информационными объектами, экспериментальная работа с аналоговыми моделями реальных объектов.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader;
- MikTeX (свободно распространяемое ПО).

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT» [http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Электронно-библиотечная система «Консультант Студента»: <https://www.studentlibrary.ru/>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Бурд В.Ш. Введение в динамику одномерных отображений: учебное пособие. — Ярославль, ЯрГУ, 2006. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20060201.pdf>
2. Бурд В.Ш. Дискретное операторное исчисление. — Ярославль, ЯрГУ, 2009. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20090230.pdf>

### **б) дополнительная литература**

1. Глызин С. Д. Дифференциальные и разностные уравнения и системы в примерах и задачах: учебное пособие для вузов - Ярославль: ЯрГУ, 2017.

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

### **Автор(ы):**

зав. кафедрой математического моделирования, д.ф.-м.н.

И.С. Кащенко

доцент кафедры математического моделирования, к.ф.-м.н.

А.В. Секацкая

## Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины

### «Динамика дискретных систем»

#### Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации студентов по дисциплине

#### 1. Типовые контрольные задания или иные материалы, используемые в процессе текущей аттестации

#### 2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

##### Список вопросов для подготовки к зачёту

1. Периодические точки. Исследование устойчивости.
2. Топологическая сопряжённость. Основные свойства. Примеры.
3. Локальные бифуркации. Бифуркация цикла.
4. Локальные бифуркации. Бифуркация удвоения периода.
5. Глобальные бифуркации. Диграфы и их применение.
6. Глобальные бифуркации. Порядок Шарковского, доказательство некоторых частных случаев: цикл  $\rightarrow$  неподвижная точка; цикл периода 3  $\rightarrow$  циклы всех периодов.
7. Производная Шварца и устойчивость циклов. Теорема Зингера.
8. Каскад бифуркаций удвоения логистического отображения.
9. Цикл периода 3 и число неустойчивых циклов логистического отображения.
10. Определение хаотической динамики. Примеры отображений, обладающей хаотической динамикой.
11. Динамика оператора сдвига в пространстве двоичных последовательностей.
12. Динамика логистического отображения при  $r \geq 4$ .
13. Лемма об эквивалентности определений гиперболического множества.
14. Многомерные отображения. Исследование устойчивости неподвижных точек и циклов. Примеры хаотических отображений.
15. Линейные многомерные отображения. Методы решения, устойчивость, основные свойства.

##### Задания на зачёт

##### Вариант 1

1. Дать определение притягивающего цикла периода  $n$ .
2. Дать определение топологически сопряжённых систем.
3. Дать определение хаотической динамики (расшифровать).
4. Сформулировать теорему о бифуркации цикла.
5. Выстроить в соответствии с рядом Шарковского числа: 4, 7, 11, 24, 44, 90, 4096.
6. Пусть  $a < b < c < d < e$ ,  $f(a) = c$ ,  $f(b) = e$ ,  $f(c) = b$ ,  $f(d) = a$ ,  $f(e) = d$ .  
Существование циклов каких периодов можно гарантировать у непрерывного отображения  $f(x)$ ?
7. Дано отображение  $f(x) = \arctan(ax)$ . Найдите неподвижные точки и исследуйте их устойчивость в зависимости от параметра  $a$ . Определите типы бифуркаций.
8. Известно, что у отображения  $f(x)$  есть точка, орбита которой всюду плотна на множестве  $A$ . Докажите, что оно топологически транзитивно на  $A$ .

## Вариант 2

1. Дать определение отталкивающего цикла периода  $n$ .
2. Дать определение топологически сопряжённых систем.
3. Дать определение хаотической динамики (расшифровать).
4. Сформулировать теорему о бифуркации удвоения цикла.
5. Выстроить в соответствии с рядом Шарковского числа: 8, 5, 13, 36, 44, 82, 2048.
6. Пусть  $a < b < c < d < e$ ,  $f(a) = b$ ,  $f(b) = e$ ,  $f(c) = d$ ,  $f(d) = a$ ,  $f(e) = c$ .  
Существование циклов каких периодов можно гарантировать у непрерывного отображения  $f(x)$ ?
7. Дано отображение  $f(x) = \arctan(ax)$ . Найдите неподвижные точки и исследуйте их устойчивость в зависимости от параметра  $a$ . Определите типы бифуркаций.
8. Отображение  $f(x) = 4 \sin x$  при  $x$  от 0 до  $\pi$ ,  $= 2x$  при отрицательных  $x$ , и  $= \pi - x$  при  $x$  больших  $\pi$ . Опишите его инвариантное множество (если оно существует) и докажете (или опровергните) гиперболичность отображения.

**Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины  
«Динамика дискретных систем»**

**Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Учебный материал по дисциплине «Динамика дискретных систем» излагается на лекциях, обсуждается на практических занятиях в виде задач.

Зачёт принимается в письменном виде. Зачётная работа содержит как теоретический материал (определения, формулировки теорем, задания связанные с тонкостями доказательства различных фактов из курса), так и задачи.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Динамика дискретных систем» самостоятельно студенту возможно, однако требует серьёзного умения работать с литературой. Поэтому посещение всех аудиторных занятий очень рекомендовано. В любом случае, без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать экзамен по итогам изучения дисциплины студенту практически невозможно.