

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Методы анализа динамических систем**

Направление подготовки (специальности)  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 22.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины «Методы анализа динамических систем» – дать представление студентам о методах качественного и количественного анализа динамических систем. Задачами курса являются:

- познакомить студентов с основными понятиями теории бифуркации;
- научить студентов использовать локальные методы анализа динамических систем;
- познакомить студентов с бифуркацией Андронова-Хопфа и другими бифуркациями, связанными с рождением и исчезновением предельных циклов;
- познакомить студентов с классом почти периодических функций;
- дать представление о методах усреднения;
- научить студентов исследовать вопросы существования и устойчивости почти периодических решений у систем в стандартной форме.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной. Эта дисциплина является курсом по выбору. Для ее успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин: «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ». Методы качественной теории необходимы для аналитического исследования нелинейных моделей и могут использоваться студентами в курсовых и дипломных работах, а также в их научно-исследовательской деятельности.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-2</b> Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	<b>И-ПК-2.1</b> Обладает устойчивыми знаниями в области основных математических дисциплин, их аппарата и результатов	<b>Знать:</b> - основные утверждения теории центральных многообразий; - основные идеи метода нормальных форм; - основные утверждения метода усреднения на бесконечном промежутке <b>Уметь:</b> - строить критическое многообразие в конкретных задачах; - строить динамическую систему, описывающую динамику решений на критическом многообразии; - строить нормальные формы в случае бифуркаций коразмерности 1
	<b>И-ПК-2.2</b>	<b>Уметь:</b>

	Обладает способностью применять современный математический аппарат в решении различных задач	<ul style="list-style-type: none"> <li>- исследовать задачу бифуркации почти периодических решений путем приведения исходной задачи к стандартной форме Н.Н. Боголюбова.</li> </ul> <b>Владеть навыками:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- использования локальных методов для анализа динамики конкретных прикладных систем</li> </ul>
	<b>И-ПК-2.3</b> Способен совершенствовать свои навыки, связанные с применением современного математического аппарата	<b>Знать:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- качественные и количественные методы теории динамических систем.</li> </ul> <b>Владеть навыками:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- исследования динамики конкретных практических задач</li> </ul>
<b>ПК-3</b> Способен к разработке и применению алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программного обеспечения	<b>И-ПК-3.1</b> Обладает устойчивыми знаниями в области разработки алгоритмов и программирования	<b>Знать:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- алгоритм исследования динамики решений конкретных задач;</li> <li>- численные и аналитические методы теории динамических систем</li> </ul> <b>Уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- проводить численное и аналитическое исследование динамики решений конкретных задач</li> </ul>
	<b>И-ПК-3.2</b> Имеет навыки разработки и реализации алгоритмов в области системного и прикладного программного обеспечения	<b>Знать:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- алгоритмы приближенного интегрирования систем дифференциальных уравнений</li> </ul> <b>Уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- реализовывать численные методы исследования динамики систем на языках программирования высокого уровня</li> </ul>
	<b>И-ПК-3.3</b> Обладает способностью критического анализа и совершенствования разрабатываемых алгоритмов и программ	<b>Уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- проводить асимптотический анализ эффективности разрабатываемых алгоритмов и программ</li> </ul> <b>Владеть навыками:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- асимптотического анализа</li> </ul>

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **2** зачетные единицы, **72** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)		Формы текущего контроля успеваемости
			Контактная работа		

			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
1.	Методы упрощения динамических систем.	6	6	12		2		6	
2.	Определение и основные свойства почти периодических функций.	6	4	8		2		5	
3.	Метод усреднения в нелинейных системах на бесконечном промежутке.	6	6	12		2		5	
							0,3	1,7	зачет
	Всего		16	32		6	0,3	17,7	

### Содержание разделов дисциплины:

#### Тема 1. Методы упрощения динамических систем.

Теорема о существовании центрального многообразия. Теоремы о редукции и приближении центрального многообразия. Теорема о нормальной форме. Вывод гомологического уравнения. Резонансные соотношения. Нормальные формы векторных полей с параметрами. Бифуркация Андронова-Хопфа.

#### Тема 2. Определение и основные свойства почти периодических функций.

Определение почти периодической функции по Бору. Элементарные свойства почти периодических функций (п.п.ф.). Ограниченность и равномерная непрерывность почти периодической функции. Почти периодические функции по Бохнеру. Арифметические действия с почти периодическими функциями. Равномерно сходящиеся последовательности почти периодических функций. Почти периодическая функция как равномерный предел последовательности тригонометрических полиномов. Дифференцирование и интегрирование почти периодических функций. Среднее значение почти периодической функции.

#### Тема 3. Метод усреднения в нелинейных системах на бесконечном промежутке.

Метод усреднения в линейных системах с почти периодическими коэффициентами. Нелинейные системы в стандартной форме Боголюбова. Первое приближение. Теоремы о существовании и устойчивости почти периодических режимов. Некоторые примеры (уравнение Ван дер Поля, уравнение Дуффинга и др.). Маятниковые системы с колеблющимся подвесом. Высшие приближения метода усреднения. Бифуркация Андронова-Хопфа.

### 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно

вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT» [http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Электронно-библиотечная система «Консультант Студента»: <https://www.studentlibrary.ru/>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Горяченко В. Д. Элементы теории колебаний. – М.: Высшая школа, 2001. <https://djvu.online/file/1Zv0MDEqhctWT?ysclid=ln6b9dvdm9736215044>
2. Баев В. К. Теория колебаний: учебное пособие для вузов — Москва: Издательство Юрайт, 2022. <https://urait.ru/viewer/teoriya-kolebaniy-494483>

### **б) дополнительная литература**

1. Боголюбов Н.Н. Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.

2. Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

3. Бурд В.Ш. Метод усреднения на бесконечном промежутке и некоторые задачи теории колебаний. – Ярославль: ЯрГУ, 2013.

<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20130230.pdf>

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

### **Автор:**

Декан математического факультета, д.ф.-м.н.

Нестеров П. Н.

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Методы анализа динамических систем»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

—

**2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной  
аттестации**

**Список вопросов для подготовки к зачету**

(зачет выставляется по результатам выполнения заданий в выбранном студентом билете после их проверки).

1. Теорема о существовании центрального многообразия. Редукция системы на центральное многообразие.
2. Нормальные формы. Вывод гомологического уравнения.
3. Бифуркация Андронова–Хопфа.
4. Определение почти периодической функции по Бору. Элементарные свойства почти периодических функций. Ограниченность и равномерная непрерывность п.п.ф.
5. Арифметические действия с почти периодическими функциями.
6. Равномерно сходящиеся последовательности почти периодических функций. Почти периодическая функция как равномерный предел последовательности тригонометрических полиномов.
7. Дифференцирование и интегрирование почти периодических функций.
8. Понятие о среднем значении почти периодической функции. Теорема о существовании среднего значения для любой почти периодической функции. Простейшие свойства среднего значения.
9. Системы в стандартной форме с почти периодическими коэффициентами. Вторая теорема Боголюбова.
10. Маятник с колеблющейся точкой подвеса.