

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_ Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Геометрическая теория динамических систем**

Направление подготовки (специальности)  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 22.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины «Геометрическая теория динамических систем» — дать студентам представление о геометрии фазового пространства динамических систем, описываемых конечномерными нелинейными дифференциальными уравнениями.

Задачами курса являются:

- познакомить студентов с физическими задачами, математическими моделями которых являются нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения;
- познакомить студентов с геометрией фазового пространства систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными и периодическими коэффициентами;
- научить студентов методам исследования поведения траекторий систем нелинейных автономных дифференциальных уравнений в окрестности грубого состояния равновесия;
- познакомить с понятием центрального многообразия системы нелинейных автономных дифференциальных уравнений в окрестности состояния равновесия;
- дать представление о нормальных формах нелинейных дифференциальных уравнений в окрестности состояния равновесия;
- научить студентов методам построения устойчивых, неустойчивых и центральных многообразий систем нелинейных автономных дифференциальных уравнений в окрестности состояний равновесия и методам построения уравнений поведения траекторий на центральном многообразии.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной. Знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплины «Геометрическая теория динамических систем», используются студентами в ходе выполнения курсовых и выпускных квалификационных работ.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-2</b> Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат.	<b>И-ПК-2.1</b> Обладает устойчивыми знаниями в области основных математических дисциплин, их аппарата и результатов.	<b>Знать:</b> - основные понятия и результаты геометрической теории динамических систем. <b>Уметь:</b> - применять понятия, результаты и методы геометрической теории динамических систем в других разделах математики.

		<b>Владеть навыками:</b> - систематического и результативного применения аппарата геометрической теории динамических систем.
	<b>И-ПК-2.2</b> Обладает способностью применять современный математический аппарат в решении различных задач.	<b>Знать:</b> - методы решения важных прикладных задач. <b>Уметь:</b> - реализовывать основные способы и алгоритмы решения задач. <b>Владеть навыками:</b> - применения компьютера для решения задач геометрической теории динамических систем.

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **4** зачетные единицы, **144** акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)					Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)	
			Контактная работа						самостоятельная работа
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1.	Динамические системы. Основные понятия. Фазовое пространство динамической системы. Качественное интегрирование динамических систем. Физические задачи, математическими моделями которых являются нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные свойства решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.	7	1	2		1		6	
2.	Положения равновесия динамической системы. Линеаризованная система. Качественное исследование двумерных и трёхмерных систем дифференциальных уравнений.	7	2	4				6	

3.	Многомерные линейные системы. Инвариантные подпространства. Ведущие и неведущие инвариантные подпространства.	7	2	4		1		6	
4.	Топологическая классификация грубых положений равновесия нелинейных автономных дифференциальных уравнений. Устойчивые положения равновесия. Ведущие и неведущие многообразия. Теорема об устойчивости по первому приближению (без доказательства).	7	2	4				6	
5.	Состояние равновесия седлового типа. Инвариантные многообразия. Краевая задача. Теорема о существовании устойчивого и неустойчивого многообразий.	7	2	4		1		6	
6.	Алгоритм построения инвариантных многообразий состояния равновесия седлового типа.	7	2	4		0.5		6	
7.	Центральное многообразие положения равновесия динамической системы. Теорема о центральном многообразии (без доказательства).	7	2	4		1		6	
8.	Понятие нормальной формы системы нелинейных автономных дифференциальных уравнений в окрестности состояния равновесия.	7	2	4		0.5		6	
9.	Алгоритм построения дифференциального уравнения поведения траекторий на центральном многообразии. Понятие бифуркации решений. Простейшие бифуркационные задачи.	7	1	2		1		6	
						2	0,5	33,5	экзамен
	<b>ИТОГО</b>		16	32		8	0,5	87,5	

## 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии.

**Академическая лекция (или лекция общего курса)** — последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя.

Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

**Практическое занятие** — занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** — вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT» [http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Электронно-библиотечная система «Консультант Студента»: <https://www.studentlibrary.ru/>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

- 1.Палис Ж. Геометрическая теория динамических систем: введение. / Ж. Палис, В. ди Мелу; пер. с англ. В. Н. Колокольцева; под ред. Д. В. Аносова - М.: Мир, 1986. - 301 с.
2. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / Колмогоров А. Н. , Фомин С. В. - 7-е изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 572 с. -

ISBN 978-5-9221-0266-7. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102667.html>

**б) дополнительная литература**

1. Методы качественной теории в нелинейной динамике / Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа. Ч. 1. / пер. с англ С. С. Пашкиной и др - Б.м.: Б.и., 2004. - 415 с.
2. Методы качественной теории в нелинейной динамике / Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа. Ч. 2. / пер. с англ. В. А. Осотовой; под науч. ред. Д. В. Тураева, А. Л. Шильникова - Б.м.: Б.и., 2009. - 546 с.

**9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

**Автор(ы):**

профессор кафедры математического моделирования,  
д.ф.-м.н., профессор  
доцент кафедры математического моделирования,  
к.ф.-м.н.

Е. П. Кубышкин

А. В. Секацкая

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Геометрическая теория динамических систем»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

**2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

**Список вопросов к экзамену**

1. Динамические системы. Основные определения. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши системы нелинейных автономных дифференциальных уравнений. Теорема о непрерывной зависимости решений от начальных условий и параметров. Теорема о дифференцируемости решений по начальным условиям и параметрам (формулировки и комментарии).
2. Положения равновесия нелинейной автономной системы дифференциальных уравнений. Линеаризованная система. Матрица Якоби. Теорема об устойчивости по первому приближению (формулировка). Критерий Рауса-Гурвица (формулировка).
3. Качественное исследование двумерной линейной системы уравнений. Случай узла.
4. Качественное исследование двумерной линейной системы уравнений. Случай фокуса.
5. Качественное исследование двумерной линейной системы уравнений. Случай седла.
6. Качественное исследование трёхмерной линейной системы уравнений. Случай узла.
7. Качественное исследование трёхмерной линейной системы уравнений. Случай фокуса.
8. Качественное исследование трёхмерной линейной системы уравнений. Случай седла.
9. Качественное исследование трёхмерной линейной системы уравнений. Случай седло-фокуса.
10. Многомерные линейные системы. Структура решений в случае простых корней.
11. Многомерные линейные системы. Структура решений в случае кратных корней.
12. Топологическая классификация грубых положений равновесия. Условие эквивалентности нелинейной автономной системы в окрестности положения равновесия ее линейной части. Теорема Гробмана-Хартмана (формулировка).
13. Топологическая эквивалентность линейных систем.
14. Состояние равновесия нелинейной автономной системы седлового типа. Двумерный случай.
15. Состояние равновесия нелинейной автономной системы седлового типа. Многомерный случай. Краевая задача. Теорема о существовании устойчивого и неустойчивого многообразий.
16. Состояние равновесия нелинейной автономной системы седлового типа. Алгоритм построения устойчивого и неустойчивого многообразий.
17. Центральное многообразие. Теорема о центральном многообразии (формулировка). Алгоритм построения центрального многообразия.

**Пример задания, предлагающегося на экзамене**

1. Топологическая эквивалентность линейных систем.

2. Построить с точностью до кубических слагаемых устойчивое и неустойчивое многообразия в окрестности нулевого положения равновесия следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{u} = -5u + v \tan v \cos u, \\ \dot{v} = 2v + \sin u \sinh u (1 + v). \end{cases}$$

## Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Геометрическая теория динамических систем»

### Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Автор считает целесообразным изложить некоторые свои соображения по вопросам, связанным с изучением данной дисциплины, других дисциплин и обучением на математическом факультете вообще.

Итак, Вы выбрали для Вашего образования математический факультет классического университета. Какие условия необходимы для овладения профессией математика? По мнению автора, таких условий пять:

- твёрдый характер;
- критическое отношение к себе;
- способность заниматься математикой и желание это делать;
- регулярные занятия математикой;
- хорошее здоровье.

Очень часто не все эти элементы имеются в наличии; в этом случае начинать нужно с работы по тем позициям, где Вы сами видите свои недостатки. Однако даже в случае, когда эти условия соблюдены, в обучении студента могут присутствовать определённые трудности.

Одна из главных заключается в том, что студенты часто неправильно отвечают для себя на вопрос, в чём заключается понимание в математике, каков их уровень понимания, какова степень математизации их мышления. Дело в том, что даже регулярное посещение лекций и практических занятий не гарантирует хорошего понимания предмета. Для усвоения материала требуется большая самостоятельная работа по теоретическим вопросам и решению задач. Знать, помнить определения и формулировки теорем, конечно, необходимо, но это ещё не значит полностью понимать материал. Не следует заучивать математические факты так, как учат, например, стихи. Надо выработать в себе привычку осмысливать их, обдумывать, анализировать. Так, «чистое» знание определения без умения его применять в несложной ситуации должно быть оценено неудовлетворительно.

Особо следует сказать о необходимости и пользе изучения математических доказательств. Не секрет, что сейчас доказательство изживается из школьной математики. Однако именно доказательства, а не формулировки результатов, составляют суть математики. Именно доказательный стиль мышления выделяет математика из представителей многих других профессий и именно доказательства наиболее значительны для повышения степени математизации мышления. Не следует думать, что, прослушав доказательство на лекции, вы его полностью поняли и усвоили. Попробуйте воспроизвести его дома — как правило, Вы встретитесь со значительными трудностями. В этом нет ничего необычного.

По нашему мнению, даже в каждом простом на вид доказательстве закодированы те откровения, находки и открытия, которые были сделаны его автором много лет назад. И хотя они сглажены при изложении на лекции или на страницах учебника, они существуют и требуют осмысления. Каждый скачок в познании, сделанный давным-давно учёным-математиком должен иметь своё отражение в голове изучающего этот предмет много лет спустя. Поэтому математика трудна не только для творчества, но и для изучения. В известном смысле изучение математики само является творчеством, только творчеством для себя. Трудность математического знания имеет и другую сторону: математические истины устойчивы, непеременимы и даже вечны. Это очень привлекательное качество нашей науки.