

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Методы компьютерного исследования динамических систем**

Направление подготовки (специальности)  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 18.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Методы компьютерного исследования динамических систем» обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом, содействует фундаментализации образования, формированию научного мышления и способности к восприятию науки как единого целого, частью которого является математика. Целью преподавания дисциплины является ознакомление слушателей с физическими принципами, законами, моделями позволяющими объяснить окружающий нас мир живой и неживой природы с позиций современной физики, а также некоторых разделов экологии.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы бакалавриата

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной. Дисциплина «Методы компьютерного исследования динамических систем» входит в цикл дисциплин, которые обеспечивают овладение общенаучными знаниями в области современного естествознания и связь их с математическими дисциплинами необходимыми для подготовки специалиста математика. Она основывается на знаниях, полученных слушателями при изучении дисциплин «Математический анализ», «Алгебра», «Дифференциальные уравнения». Знания и навыки, полученные при изучении дисциплины «Методы компьютерного исследования динамических систем», используются при изучении общепрофессиональных дисциплин, а также ряда специальных дисциплин.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы бакалавриата

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-1</b> Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	<b>И-ПК-1.1</b> Обладает способностью критического отбора данных, связанных с научными исследованиями	<b>Владеть навыками:</b> - критического отбора данных, связанных с исследованиями динамических систем, проводимые в рамках изучения дисциплины
	<b>И-ПК-1.2</b> Имеет навыки обработки данных с применением современных информационных технологий и алгоритмов	<b>Уметь:</b> - численно и теоретически определять устойчивость решений, - определять размерность аттракторов, - составлять алгоритмы и писать компьютерные программы, - пользоваться математическими пакетами.
	<b>И-ПК-1.3</b> Способен самостоятельно	<b>Владеть навыками:</b> - основными навыками компьютерных

	интерпретировать данные научных исследований и формулировать соответствующие выводы	исследований динамических систем, - использования современных разработок в прикладных задачах
<b>ПК-3</b> Способен к разработке и применению алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программного обеспечения	<b>И-ПК-3.1</b> Обладает устойчивыми знаниями в области разработки алгоритмов и программирования	<b>Знать:</b> - определение динамической системы и основных понятий этого раздела дифференциальных уравнений, - методы приближенных решений дифференциальных уравнений, - классификацию особых точек, - итерационные методы.

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **2** зачетные единицы, **72** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1.	Методы приближенного интегрирования дифференциальных ур-й. Методы Рунге – Кутты. Фазовые портреты на плоскости. Сечение Пуанкаре. Отображение Пуанкаре	5	2	2		1		4	Фронтальный опрос и обсуждение пройденной темы
2.	Отображения (каскады). Метод простой итерации. Условия сходимости. Неподвижные точки отображения и итераций отображения	5	2	2				4	Фронтальный опрос. обсуждение.

3.	Линейные системы с постоянными коэффициентами. Приближенное построение матричной экспоненты. Анализ устойчивости решений	5	2	2		1		4	Фронтальный опрос. Обсуждение.
4.	Ляпуновские показатели. Ляпуновская размерность	5	2	2				4	Обсуждение в форме круглого стола
5.	Лабораторная работа 1	5						2	Лабораторная работа 1
6.	Канонические фракталы	5	1	1					
7.	Расчет отображений Пуанкаре	5	2	2					
8.	Лабораторная работа 2	5						2	Лабораторная работа 2
9.	Численный анализ периодических решений	5	2	2				4	Фронтальный опрос. Обсуждение
10.	Размерность аттрактора	5	1	1					
11.	Численный анализ некоторых динамических систем с распределенными параметрами	5	1	1		1		4	Фронтальный опрос. Обсуждение
12.	Пакеты программ	5	1	1		1		4	Обсуждение пройденных тем, анализ лабораторных работ 1, 2
							0,5	3,7	зачет
	<b>ИТОГО</b>		<b>16</b>	<b>16</b>		<b>4</b>	<b>0,5</b>	<b>35,7</b>	

#### Содержание разделов дисциплины:

- 1. Методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Методы Рунге – Кутты. Фазовые портреты на плоскости. Сечение Пуанкаре. Отображение. Пуанкаре.** Приближенное интегрирование: метод прямоугольников, трапеций, схема Эйлера. Метод Рунге-Кутты 4 порядка. Понятия: седло, фокус, центр.
- 2. Отображения (каскады). Метод простой итерации. Условия сходимости. Неподвижные точки отображения и итераций отображения.** Основные отображения. Понятия неподвижной точки. Итерации в отображениях. Понятия периода отображений.
- 3. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Приближенное построение матричной экспоненты. Анализ устойчивости решений.** Теорема Ляпунова по первому приближению. Производная в силу системы. 2 основных способа построения матричной экспоненты.
- 4. Ляпуновские показатели. Ляпуновская размерность.** Матрица Якоби с переменными коэффициентами. О невозможности для нее применения теоремы Ляпунова по первому приближению для исследования устойчивости. Определение ляпуновских показателей. Способы подсчета. Алгоритм Бенеттина.
- 5. Канонические фракталы.** Понятия меры. Мера Хаусдорфа. Основные фракталы.
- 6. Расчет отображений Пуанкаре.** Понятия отображений Пуанкаре. Секущая Пуанкаре.

7. **Численный анализ периодических решений.** Ляпуновские показатели — как определители динамики решений (цикл, хаос и т.д.). Спектр Фурье.
8. **Размерность аттрактора.** Алгоритм подсчета размерности аттрактора.
9. **Численный анализ некоторых динамических систем с распределенными параметрами.** Алгоритм подсчета. Основные схемы анализа.
10. **Пакеты программ.** Основные математические пакеты, помогающие считать и анализировать динамические системы, размерности.
11. Численный анализ некоторых динамических систем с распределенными параметрами.
12. **Пакеты программ.** Основные математические пакеты, помогающие считать и анализировать динамические системы, размерности.

## **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** — последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** — занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** — вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются: для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT» [http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>

- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Электронно-библиотечная система «Консультант Студента»:  
<https://www.studentlibrary.ru/>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков Численные методы - Москва: Лаборатория знаний, 2020. <https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN9785001018360-SCN0000/000.html>
2. Чуличков А.И. Математические модели нелинейной динамики. М.: Физматлит, 2003. <https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN5922103660-SCN0000/000.html>

### **б) дополнительная литература**

1. Глызин С.Д. Методы компьютерной графики в качественной теории динамических систем на плоскости: метод. указания – Ярославль: ЯрГУ, 1982.

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

### **Автор:**

профессор кафедры дифференциальных уравнений, д.ф.-м.н.

А.Н. Куликов

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Методы компьютерного исследования динамических систем»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

**Контрольная работа №1  
(состоит из множества вариантов – номер варианта – номер задания)**

1. Используя метод Рунге-Кутты второго порядка построить фазовый портрет следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 + dx_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2 + dx_2(x_1^2 + x_2^2),\end{aligned}$$

где  $\alpha = 1, d = -1$ .

2. Используя метод Рунге-Кутты третьего порядка построить фазовый портрет следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 + dx_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2 + dx_2(x_1^2 + x_2^2),\end{aligned}$$

где  $\alpha = -1, d = 1$ .

3. Используя метод Рунге-Кутты четвертого порядка построить фазовый портрет следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 + dx_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2 + dx_2(x_1^2 + x_2^2),\end{aligned}$$

где  $\alpha = 0, d = -2$ .

4. Используя метод Рунге-Кутты второго порядка построить фазовый портрет следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 + dx_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2 + dx_2(x_1^2 + x_2^2),\end{aligned}$$

где  $\alpha = -2, d = 0.01$ .

5. Используя метод Рунге-Кутты третьего порядка построить фазовый портрет следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + dx_1 dx_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2 + (x_1^2 + x_2^2),\end{aligned}$$

где  $d = 1$ .

6. Используя метод Рунге-Кутты четвертого порядка построить фазовый портрет следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + dx_1 dx_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2 + (x_1^2 + x_2^2),\end{aligned}$$

где  $d = -1$ .

7. Используя метод Рунге-Кутты третьего порядка построить фазовый портрет следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + dx_1 dx_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + dx_1(x_1 + x_2),\end{aligned}$$

где  $d = -1$ .

8. Используя метод Рунге-Кутты третьего порядка построить фазовый портрет следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + dx_1 dx_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + d(x_1 + x_2),\end{aligned}$$

где  $d = 1$ .

### Правила выставления оценки по результатам контрольной работы

Оценка по результатам самостоятельной работы считается в баллах по следующему принципу:

- за каждое полностью правильно выполненное задание — 3 балла;
- при решении допущены незначительные ошибки — 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены грубые ошибки — 1 балл.

### Контрольная работа 2 (состоит из множества вариантов – номер варианта – номер задания)

1. Построить фазовые портреты следующих систем при различных значениях параметра

$$\ddot{x} + x = \sigma(1 - x^2)\dot{x}.$$

2. Построить фазовые портреты следующих систем при различных значениях параметров

$$\ddot{x} + x = \sigma(1 + ax^2 - bx^4)\dot{x}, a = 5, b = 0.5, \sigma = 1.5.$$

3. Построить фазовые портреты следующей системы при различных значениях параметров (уравнение Дуффинга)

$$\ddot{x} + x + \beta x^3 = 0.$$

4. Создать программу, которая демонстрирует аттракторы отображения Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - y_n, \\ y_{n+1} &= x_n.\end{aligned}$$

5. Создать программу, которая демонстрирует аттракторы отображения (на вибрирующем шарике)

$$v_{n+1} = (1 - \varepsilon)v_n + K \sin \varphi,$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + v_n \pmod{2\pi}.$$

6. Создать программу, которая демонстрирует аттракторы отображения (системы Икеда)

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp(i |z_n|^2).$$

7. Создать программу, которая позволяет вычислить старший показатель Ляпунова для следующих одномерных отображений: а) кубическое; б) логистическое; в) окружности.

8. Создать программу, которая позволяет вычислить старший показатель Ляпунова для следующих одномерных отображений: а) отображение Эно; б) системы Икеда.

### **Правила выставления оценки по результатам контрольной работы**

Оценка по результатам самостоятельной работы считается в баллах по следующему принципу:

- за каждое полностью правильно выполненное задание — 3 балла;
- при решении допущены незначительные ошибки — 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены грубые ошибки — 1 балл.

### **2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

#### **Вопросы к экзамену**

1. Дифференциальные уравнения и системы первого порядка. Примеры автономных уравнений и систем. Примеры неавтономных уравнений и систем.
2. Общие свойства автономных дифференциальных уравнений. Типы траекторий автономных дифференциальных уравнений.
3. Решение систем дифференциальных уравнений в случаях: а) все собственные значения простые б) собственные значения комплексные в) случай кратных собственных значений
4. Матричная экспонента. Задача Коши. Траектории решений.
5. Скалярные уравнения. Условия существования и единственности решений. Примеры, когда нет единственности.
6. Особые точки. Классификация особых точек. Фазовый портрет.
7. Инвариантные множества. Предельные точки. Теорема Пуанкаре-Бендиксона.
8. Понятие степени свободы. Отображение. Сведение дифференциальных уравнений к отображениям.
9. Системы в вариациях. Фазовый объем. Теорема Лиувилля.
10. Численные методы решения систем дифференциальных уравнений. Методы Эйлера, трапеции, прямоугольников.
11. Ляпуновские показатели. Интерпретация поведения решений от величины ляпуновских показателей. Алгоритм подсчета ляпуновских показателей для отображений.
12. Понятие хаоса для отображений. Условия для хаотичности отображений. Примеры хаотических отображений.
13. Грубые динамические системы. Примеры грубых и негрубых систем.
14. Простейшие бифуркационные задачи. Интерпретация полученных результатов.

## **Описание процедуры выставления оценки**

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачтено» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Методы компьютерного исследования динамических систем»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Концепции современного естествознания» являются лекции, причем в достаточно большом объеме. Это связано с тем, что в основе «Методы компьютерного исследования динамических систем» лежит особый математический аппарат. По большинству тем предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным физическим задачам и отработка навыков работы с математическим аппаратом «Концепции современного естествознания».

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия, законы и основы данного курса. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков работы проводятся семинарские занятия, которые помогают разъяснить материал по пройденной теме.

В конце семестра изучения дисциплины студенты сдают зачет. Зачет по итогам первого семестра выставляется по итогам тестирования и краткого собеседования по его результатам.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Концепции современного естествознания» самостоятельно студенту крайне сложно. Это связано со сложностью изучаемого материала и большим объемом курса. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать зачет и экзамен по итогам изучения дисциплины студенту практически невозможно.