

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_ Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Численные методы**

Направление подготовки (специальности)  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 21.04.2025, протокол № 10

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Численные методы» обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с ФГОС, содействует формированию мировоззрения математика-прикладника и обеспечивает приобретение специальных знаний.

Целью преподавания дисциплины является ознакомление слушателей с основными понятиями, результатами и методами вычислительной математики, а также их иллюстрация на актуальных примерах.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к обязательной части образовательной программы. Знания и навыки, полученные при изучении дисциплины «Численные методы», используются студентами в процессе изучения других дисциплин, решения практических задач, а также при выполнении выпускных квалификационных работ.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

| Формируемая компетенция<br>(код и формулировка)                                                                                                                                    | Индикатор достижения компетенции<br>(код и формулировка)                                                                                                              | Перечень планируемых результатов обучения                                                                                                                                                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Общепрофессиональные компетенции</b>                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>ОПК-2</b><br>Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач | <b>И-ОПК-2.1</b><br>Имеет представление об имеющихся математических методах и систем программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач | <b>Знать:</b><br>- основные понятия вычислительной математики, возможные сферы их приложений.<br>- математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач |
|                                                                                                                                                                                    | <b>И-ОПК-2.2</b><br>Умеет определять круг методов и систем программирования, необходимых для решения задачи                                                           | <b>Уметь:</b><br>- пользоваться численными методами в прикладных задачах.<br><b>Владеть:</b><br>- методами решения задач.                                                                                           |

## 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **5** зачетных единиц, **180** акад. часов.

**Содержание разделов дисциплины:**

| №<br>п/п | Темы (разделы)<br>дисциплины,<br>их содержание                | Семестр | Виды учебных занятий,<br>включая самостоятельную<br>работу студентов,<br>и их трудоемкость<br>(в академических часах) |              |              |              |                             |      | Формы текущего<br>контроля<br>успеваемости<br><br>Форма<br>промежуточной<br>аттестации<br>(по семестрам) |
|----------|---------------------------------------------------------------|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|--------------|--------------|-----------------------------|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|          |                                                               |         | Контактная работа                                                                                                     |              |              |              |                             |      |                                                                                                          |
|          |                                                               |         | лекции                                                                                                                | практические | лабораторные | консультации | аттестационные<br>испытания |      |                                                                                                          |
| 1        | Численные методы алгебры.                                     | 5       | 4                                                                                                                     | 4            |              | 1            |                             | 10   |                                                                                                          |
| 2        | Методы решения нелинейных алгебраических уравнений и систем.  | 5       | 6                                                                                                                     | 6            |              | 2            |                             | 10   | Лабораторная работа                                                                                      |
| 3        | Теория интерполяции.                                          | 5       | 6                                                                                                                     | 6            |              | 1            |                             | 10   |                                                                                                          |
|          |                                                               |         |                                                                                                                       |              |              |              | 0.3                         | 5.7  | зачет                                                                                                    |
|          | Всего за 5 семестр                                            |         | 16                                                                                                                    | 16           |              | 4            | 0.3                         | 35.7 |                                                                                                          |
| 4        | Численные методы анализа.                                     | 6       | 8                                                                                                                     | 4            |              | 2            |                             | 5    | Лабораторная работа                                                                                      |
| 5        | Наилучшее приближение в линейных нормированных пространствах. | 6       | 8                                                                                                                     | 4            |              | 1            |                             | 4    |                                                                                                          |
| 6        | Численные методы решения задачи Коши.                         | 6       | 8                                                                                                                     | 4            |              | 1            |                             | 4    |                                                                                                          |
| 7        | Численные методы решения краевых задач.                       | 6       | 8                                                                                                                     | 4            |              | 2            |                             | 5    |                                                                                                          |
|          |                                                               |         |                                                                                                                       |              |              | 2            | 0.5                         | 33.5 | экзамен                                                                                                  |
|          | Всего за 6 семестр                                            |         | 32                                                                                                                    | 16           |              | 8            | 0.5                         | 51.5 |                                                                                                          |
|          | Всего                                                         |         | 48                                                                                                                    | 32           |              | 12           | 0.8                         | 87.2 |                                                                                                          |

### Тема 1. Численные методы алгебры.

Итерационные методы решения СЛАУ. Методы простой итерации, Якоби, Зейделя, релаксации, градиентного спуска. Условия сходимости.

### Тема 2. Методы решения нелинейных алгебраических уравнений и систем.

Методы простой итерации, Ньютона. Методы решения скалярных нелинейных алгебраических уравнений (методы секущих, Стеффенсена, дихотомии).

### Тема 3. Теория интерполяции.

Постановка задачи интерполяции. Интерполяционный многочлен Лагранжа и оценка остаточного члена. Разделенные разности и их свойства. Интерполяционная формула Ньютона с разделенными разностями. Интерполяция с кратными узлами. Многочлены Чебышёва и их свойства. Оптимальный выбор узлов интерполяции. Конечные разности и их свойства. Интерполяционные формулы для равноотстоящих узлов.

### Тема 4. Численные методы анализа.

Простейшие формулы численного дифференцирования и их погрешность. Численное интегрирование. Квадратуры Ньютона – Котеса (прямоугольников, трапеций, Симпсона). Составные квадратурные формулы. Процесс ортогонализации. Ортогональные многочлены, свойства их нулей. Квадратуры Гаусса. Квадратуры Гаусса в случае весовой функции. Многочлены Лежандра. Квадратура Эрмита. Правило Рунге оценки погрешности.

### Тема 5. Наилучшее приближение в линейных нормированных пространствах.

Постановка задачи. Существование и единственность элемента наилучшего приближения. Наилучшее приближение в гильбертовых пространствах. Наилучшее равномерное приближение. Теоремы Валле-Пуссена и Чебышёва. Свойства многочлена наилучшего равномерного приближения.

#### **Тема 6. Численные методы решения задачи Коши.**

Методы решения задачи Коши для ОДУ. Методы Рунге-Кутты. Оценка полной погрешности метода Эйлера. Конечно-разностные методы.

#### **Тема 7. Численные методы решения краевых задач.**

Простейшая разностная схема для краевой задачи второго порядка. Погрешность аппроксимации. Методы стрельбы и прогонки

### **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

### **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В образовательном процессе по дисциплине используются:  
для формирования материалов для контроля успеваемости и проведения аттестации:

- программы Microsoft Office и свободные аналоги;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

### **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Электронно-библиотечная система «Консультант Студента»:  
<https://www.studentlibrary.ru/>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Бахвалов Н.С. Численные методы: учеб. пособие для вузов; М.: Наука, 1973.
2. Матвеев В.Н. Методы вычислений: учебное пособие. – Ярославль: ЯрГУ, 2007.  
<http://www.lib.uni Yar.ac.ru/edocs/iuni/20070292.pdf>

### **б) дополнительная литература**

1. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков Численные методы: учеб. пособие для вузов - Москва: Лаборатория знаний, 2020.  
<https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN9785001018360-SCN0000/000.html>

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и текущего обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

### **Автор(ы):**

доцент кафедры математического анализа  
кандидат физ.-мат. наук

Глазков Д. В.

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Численные методы»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

Пример лабораторного задания в 5 семестре

Найти приближение к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

с заданной точностью  $\varepsilon = 0.001$ , используя метод наискорейшего градиентного спуска.

Пример лабораторного задания в 6 семестре

Исследовать в окрестности стационарных решений методами Рунге – Кутты численного интегрирования поведение траекторий системы ОДУ

$$\dot{x} = y^2 - 4x, \quad \dot{y} = 4y - 8.$$

Пример экзаменационного билета

1. Оптимальный выбор узлов интерполяции.
2. Квадратурные формулы Гаусса.
3. Найти многочлен 1 степени наилучшего приближения функции  $f(x) = 2/(1+x)$  на отрезке  $[0;1]$ .

**2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

1. Метод простой итерации решения систем линейных алгебраических уравнений.
2. Метод Зейделя. Достаточное условие сходимости.
3. Метод наискорейшего градиентного спуска.
4. Метод релаксации решения СЛАУ.
5. Метод простой итерации решения нелинейных уравнений.
6. Метод Ньютона.
7. Метод секущих.
8. Метод Стеффенсена.
9. Постановка задачи интерполяции алгебраическими многочленами. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
10. Оценка погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа.
11. Разделенные разности и их свойства.
12. Формула Ньютона с разделенными разностями.
13. Многочлены Чебышева и их свойства.
14. Оптимальный выбор узлов интерполяции.

15. Конечные разности и их свойства.
16. Формулы Ньютона для интерполирования вперед и назад.
17. Простейшие формулы численного дифференцирования; оценки остаточных членов.
18. Вычислительная погрешность формул численного дифференцирования.
19. Простейшие квадратуры типа Ньютона-Котеса - прямоугольников, трапеций, Симпсона; оценка погрешности.
20. Процесс ортогонализации.
21. Ортогональные многочлены; свойство их нулей.
22. Квадратурные формулы Гаусса.
23. Квадратуры Гаусса для  $p(x)=1$ ; многочлены Лежандра.
24. Квадратура Эрмита.
25. Составные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.
26. Правило Рунге практической оценки погрешности.
27. Наилучшие приближения в гильбертовом пространстве.
28. Постановка задачи наилучшего равномерного приближения. Теоремы Валле-Пуссена и Чебышева. Теорема единственности.
29. Свойства многочленов наилучшего равномерного приближения и примеры их построения.
30. Методы Рунге-Кутты.
31. Оценка полной погрешности метода Эйлера.
32. Конечноразностные методы.
33. Простейшая разностная схема для краевой задачи второго порядка. Погрешность аппроксимации.
34. Метод стрельбы.
35. Метод прогонки.

### **3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

#### **3.1 Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций**

**Пороговый уровень** (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;

- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

**Продвинутый уровень** (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объёме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

**Высокий уровень** (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

### **3.2 Описание процедуры выставления оценки**

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

**Приложение №2 к рабочей программе дисциплины  
«Численные методы»**

**Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Форма изложения материала – лекции и практические занятия. Для лучшего понимания теории необходимо решение задач, в том числе самостоятельное для закрепления полученных навыков.

Рекомендуется проведение в течение семестра лабораторных работ для понимания степени усвоения дисциплины студентами. По ее итогам проводится разбор наиболее типичных ошибок и при необходимости повторение наиболее трудного материала. Также возможно поощрение отличившихся студентов некоторыми послаблениями на зачете и на экзамене на усмотрение преподавателя.