

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

Нестеров П.Н.

21 мая 2024 г.

Рабочая программа дисциплины
Классические модели теории приближений

Направление подготовки (специальности)
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 24.04.2024, протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 03.05.2024

1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Классические модели теории приближений» обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом, относится к фундаменту математического образования и содействует формированию мировоззрения математика-прикладника.

Целью преподавания дисциплины является ознакомление слушателей с основами теории приближений, её важнейшими понятиями, результатами и методами, а также подготовка студентов к эффективному применению этих методов в профессиональной деятельности.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Профессиональные компетенции		
ПК-2 Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	И-ПК-2.1 Обладает устойчивыми знаниями в области основных математических дисциплин, их аппарата и результатов	Знать: основные понятия и результаты теории приближений Уметь: решать типовые вычислительные и аналитические задачи с применением аппарата теории приближений Владеть навыками: самостоятельного изучения вопросов теории приближений, в частности, в области разработки алгоритмов решения задач
	И-ПК-2.2 Обладает способностью применять современный математический аппарат в решении различных задач	Знать: основные алгоритмические методы решения задач дисциплины Уметь: выделять составляющие теории приближений в поставленных задачах Владеть навыками: численного решения задач теории приближений
	И-ПК-2.3 Способен совершенствовать свои навыки, связанные с применением	Уметь: пользоваться аналитическим аппаратом теории приближений при применении компьютерных методов (разработка алгоритмов, графика, применение систем

	современного математического аппарата	компьютерной математики и др.) Владеть: способностью совершенствовать свои знания, относящиеся к теории приближений
ПК-3 Способен к разработке и применению алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программного обеспечения	И-ПК-3.1 Обладает устойчивыми знаниями в области разработки алгоритмов и программирования	Знать: типовые алгоритмы теории приближений (поиск элементов наилучшего приближения, проективные методы, полиномиальная интерполяция функций одного и нескольких переменных, приближение другими классами функций и др.)
	И-ПК-3.2 Имеет навыки разработки и реализации алгоритмов в области системного и прикладного программного обеспечения	Уметь: самостоятельно разрабатывать алгоритмы теории приближений, пригодные для компьютерной реализации Владеть навыками: компьютерной реализации алгоритмов теории приближений
	И-ПК-3.3 Обладает способностью критического анализа и совершенствования разрабатываемых алгоритмов и программ	Знать: основные вопросы, связанные с эффективностью компьютерных методов теории приближений Уметь: проводить сравнительный анализ различных алгоритмов теории приближений Владеть навыками: теоретического и практического совершенствования вычислительных методов теории приближений

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **4** зачетные единицы, **144** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1.	Вводная лекция	6	1	2				2	устный опрос
2.	Наилучшее приближение	6	2	6				4	задания для самостоятельной работы, устный опрос,

								контрольная работа
3.	Примеры задач на вычисление наилучшего приближения	6		10		2		8 задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
4.	Существование и единственность элемента наилучшего приближения	6	2	4				2 задания для самостоятельной работы, устный опрос
5.	Линейные методы приближения	6	1	4				2 задания для самостоятельной работы, устный опрос
6.	Некоторые классические результаты теории приближений	6	4	6		2		4 задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
7.	Полиномиальная интерполяция функций одного переменного	6	2	4		2		4 задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
8.	Полиномиальная интерполяция функций двух переменных	6	2	8		2		6 задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
9.	Аппроксимация с помощью функций, отличных от многочленов.	6	2	4				4 задания для самостоятельной работы, устный опрос
						2	0,5	33,5 экзамен
	ВСЕГО		16	48		10	0,5	69,5

Содержание разделов дисциплины:

- 1. Вводная лекция.** Предмет и задачи теории приближений. Цели, объекты и средства приближения. Измерение точности приближения. Линейные нормированные пространства. Примеры. Основные исторические этапы и творцы теории приближения. Алгоритмические вопросы теории приближений.
- 2. Наилучшее приближение.** Наилучшее приближение и его основные свойства. Ключевые вопросы теории наилучшего приближения.
- 3. Примеры задач на вычисление наилучшего приближения.** Дискретные пространства l_p^n . Пространства $C[a,b]$, $L_p[a,b]$. Константы наилучшего приближения.
- 4. Существование и единственность элемента наилучшего приближения.** Теорема о существовании элемента наилучшего приближения. Строго нормированные пространства. Примеры. Теорема о единственности элемента наилучшего приближения.
- 5. Линейные методы приближения.** Норма линейного оператора. Проектор. Неравенство Лебега. Примеры проекторов.
- 6. Некоторые классические результаты теории приближений.** Круг идей П.Л. Чебышёва. Задача Чебышёва о многочлене, наименее уклоняющемся от нуля. Многочлены Чебышёва и их свойства. Теорема Чебышёва об альтернансе. Примеры применения. Понятие об алгоритме Ремеза. Теорема Мюнца. Многочлены Лежандра. Теорема Вейерштрасса.
- 7. Полиномиальная интерполяция функций одного переменного.** Число нулей и задача интерполяции. Интерполяция алгебраическими и тригонометрическими многочленами. Формулы Лагранжа. Задача Эрмита. Одномерные интерполяционные проекторы и их оценки. Преимущества узлов Чебышёва. Теорема Фабера. Пример Рунге.

8. Полиномиальная интерполяция функций двух переменных. Пространства многочленов от двух переменных. Задачи двумерной интерполяции. Аналоги формул Лагранжа. Норма проектора. Линейная и квадратичная интерполяция на квадрате. Оптимальный выбор узлов на плоском множестве. Методы кусочно-полиномиальной интерполяции функций двух и трех переменных. Подходы к полиномиальной интерполяции функций многих переменных.

9. Аппроксимация с помощью функций, отличных от многочленов. Рациональные функции. Сплайны. Ортогональные ряды по различным системам. Вейвлеты. Обзор основных методов приближения.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний. В рамках практических занятий возможно привлечение компьютерного практикума.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине при формировании материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, при формировании методических материалов по дисциплине используются:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader

- система Wolfram Mathematica. (<https://www.wolframcloud.com/>)
- Network 15 Mathematica 11 Increment Standard Bundled List Price with Service.
- Network 15 Mathematica 11 Upgrade L3549-7407.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются (или могут использоваться):

- Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ
http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php
- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://www.biblio-online.ru/>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»
http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php
- Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU <http://elibrary.ru/>
- База научных статей Mathnet
- База Scopus
- База Web of Sciences

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Иродова И.П. Алгоритмы теории приближения [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие. / И.П. Иродова; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова - Ярославль: ЯрГУ, 2019. - 39 с. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20190202.pdf>
2. Невский М. В. Некоторые вопросы теории приближения функций [Электронный ресурс]: Учеб. пособие. / М. В. Невский, И. П. Иродова; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова - Ярославль: ЯрГУ, 1999. - 91 с. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/19990230.pdf>

б) дополнительная литература

1. Невский М. В. Избранные задачи анализа и вычислительной геометрии: учебное пособие / М. В. Невский, А. Ю. Ухалов; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. Часть 1 [Электронный ресурс]. - Б.м.: Б.и., 2020. - 97 с. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20200201.pdf>
2. Невский М. В. Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции [Электронный ресурс]: [монография]. / М. В. Невский; Яросл. гос. пед. ун-т им. П. Г. Демидова - Ярославль: ЯрГУ, 2012. - 217 с. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20120230.pdf>
3. Иродова И. П. Линейные функционалы и операторы в курсе функционального анализа: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2010. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20100299.pdf>
4. Брудный Ю. А. Теория приближения: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 1981.
5. Брудный Ю.А., Шалашов В.К. Теория сплайнов: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 1983.

6. Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций: учебное пособие. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.
7. Ухалов А. Ю. Практикум по Wolfram Mathematica [Электронный ресурс]: практикум. / А. Ю. Ухалов; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова - Ярославль: ЯрГУ, 2020. - 40 с. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20200205.pdf>
8. Климов В. С. Решение задач математического анализа с использованием систем компьютерной математики [Электронный ресурс]: учеб. пособие для студентов, обучающихся по направлениям Прикладная математика и информатика, Математика и компьютерные науки, и специальности Компьютерная безопасность. / В. С. Климов, А. Ю. Ухалов; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова, Науч.-метод. совет ун-та - Ярославль: ЯрГУ, 2014. - 95 с. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20140206.pdf>

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор:

зав. кафедрой математического анализа,
доктор физ.-мат. наук, доцент

М.В. Невский

Фонд оценочных средств
для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации студентов по дисциплине

1. Типовые контрольные задания и иные материалы,
используемые в процессе текущего контроля успеваемости

Задания для самостоятельной работы даются по лекциям и учебным пособиям и др.

Эти задания не оцениваются, но их выполнение контролируется на практических занятиях и (или) в ЭУК Moodle ЯрГУ. В последнем случае задания формулируются в соответствующих разделах курса.

Контрольная работа № 1

1. Вычислите $e(-t^6+t^5-2t^3+t^2-4t+7; P_5)_{C[-1,1]}$.
2. Найдите $e(x; A)_X$ и элементы наилучшего приближения, если $X=l^2_1$, $x=(-1,5)$, $A=\{(a_1, a_2): a_1-a_2=0\}$.
3. Найдите константы наилучшего приближения для функции $f(t)=t^2$ в пространствах $C[-1,1]$ и $L_1[-1,1]$.
4. Вычислите $e(f; P_1)_X$ и многочлен наилучшего приближения для функции $f(t)$ в пространстве $X=C[0,2]$, если $f(t)=1$ при $0 \leq t \leq 1$ и $f(t)=2-t$ при $1 < t \leq 2$.

Контрольная работа № 2.

1. Пусть p_n - интерполяционный многочлен степени $\leq n$ по чебышёвским узлам для функции $f(t)=\sin t + \cos t$ на отрезке $[0, 2\pi]$. Существует ли при $n \rightarrow \infty$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(\pi)$? Если существует, то чему он равен?
2. Пусть p - интерполяционный многочлен степени $\leq n$ по чебышёвским узлам для функции $f(t)=|t-1|+|t+1|$ на отрезке $[-2, 2]$. Чему равен предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - p\|_{C[-2,2]}$?
3. Вычислите базисные многочлены Лагранжа, напишите интерполяционную формулу и вычислите норму проектора при линейной интерполяции непрерывных функций на квадрате $[0,1]^2$ с узлами $(0,0), (1/2,1), (1,1/2)$.
4. Напишите интерполяционную формулу и вычислите норму проектора при билинейной интерполяции непрерывных функций на квадрате $[0,1]^2$, если узлы интерполяции имеют вид $(1/4, 1/6), (3/4, 1/6), (1/4, 5/6), (3/4, 5/6)$. Билинейной называется интерполяция с помощью пространства многочленов $P_{1,1}:=\text{lin}(xy, x, y, 1)$.

Методика оценивания контрольной работы состоит в следующем.

Полное решение каждой задачи оценивается в 25 баллов.

Оценка «неудовлетворительно» - набрано менее 25 баллов.

Оценка «удовлетворительно» - набрано от 25 баллов до 59;

Оценка «хорошо» - набрано от 60 до 74 баллов;

Оценка «отлично» - набрано 75 баллов и выше.

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Экзамен по дисциплине «Классические модели теории приближений» может приниматься как в устной, так и письменной форме. В случае проведения письменного

экзамена возможна дополнительная устная беседа со студентом по материалу (вопросам) дисциплины. Ниже даются вопросы к устному экзамену и тематика упражнений, на базе которых может быть сформированы варианты для письменного экзамена

Вопросы к экзамену

Теоретическая часть

1. Наилучшее приближение, элемент наилучшего приближения. Свойства наилучшего приближения.
2. Теорема о существовании элемента наилучшего приближения.
3. Строго нормированные пространства. Примеры. Теорема о единственности элемента наилучшего приближения.
4. Норма линейного оператора. Эквивалентные определения.
5. Проектор. Неравенство Лебега. Примеры проекторов.
6. Теорема Чебышёва об альтернансе. Примеры применения.
7. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами.
8. Многочлены Чебышёва и их свойства. Экстремальное свойство многочленов Чебышёва.
9. Постановка задачи одномерной интерполяции. Интерполяционная формула Лагранжа. Норма интерполяционного проектора.
10. Преимущества узлов Чебышёва при одномерной интерполяции.
11. Постановка задачи интерполяции на квадрате с помощью пространства P_n . Интерполяционная формула Лагранжа. Норма интерполяционного проектора.
12. Линейная и квадратичная интерполяция на квадрате. Примеры.
13. Постановка задачи интерполяции на квадрате с помощью пространства $P_{m,n}$. Интерполяционная формула Лагранжа. Норма проектора. Примеры.
14. Интерполяционные сплайны на треугольных сетках.
15. Интерполяционные сплайны на прямоугольных сетках.

Тематика упражнений

1. Свойства наилучшего приближения.
2. Приближение в пространствах l^2_1 , l^2_2 , l^2_∞ .
3. Вычисление константы наилучшего приближения в $C[a,b]$ и $L_1[a,b]$.
4. Нахождение многочлена наилучшего приближения в $C[a,b]$ с помощью теоремы Чебышёва об альтернансе.
5. Экстремальное свойство многочленов Чебышёва.
6. Вычисление нормы одномерного интерполяционного проектора.
7. Свойства сходимости интерполяционного процесса по чебышёвским узлам.
8. Вычисление нормы проектора при линейной интерполяции на квадрате.
9. Вычисление нормы проектора при интерполяции на квадрате с помощью $P_{m,n}$.

3. Правила выставления оценки на экзамене (в устной форме)

В экзаменационный билет включается два теоретических вопроса и задача. На подготовку к ответу дается 1 астрономический час. По итогам экзамена выставляется одна из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется студенту, который демонстрирует глубокое и полное владение содержанием материала и понятийным аппаратом дисциплины, дает

развернутые, полные и четкие ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, правильно решает задачу

Оценка «хорошо» выставляется студенту, ответ которого на экзамене в целом соответствуют указанным выше критериям, но отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой. В ответе имеют место отдельные неточности (несущественные ошибки), которые исправляются самим студентом после дополнительных и (или) уточняющих вопросов экзаменатора. Необходимым условием является хотя бы частичное решение задачи.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, который дает недостаточно полные ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, но при этом все же демонстрирует некоторые базовые знания по предмету. При аргументации ответа студент не обосновывает свои суждения. На часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не демонстрирует знания базовых понятий и результатов, не в состоянии решить задачу, плохо отвечает на дополнительные вопросы, не владеет понятийным материалом дисциплины. Дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора не приводят к коррекции ответов студента. На основную часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы. Кроме того, оценка «Неудовлетворительно» может быть выставлена при незнании каких-то базовых понятий и результатов. Оценка «Неудовлетворительно» выставляется также студенту, который взял экзаменационный билет, но отвечать отказался.

Правила выставления оценки на экзамене (в письменной форме)

Студенту предлагается индивидуальный вариант заданий, содержащий 4-6 задач. На выполнение и представление заданий дается 1.5-2 часа. При оценивании выполненных заданий может использоваться следующая система оценок за одно задание:

- + (4 балла) – задание выполнено полностью, без ошибок;
- +. (3 балла) – задание выполнено с незначительной ошибкой или почти полностью;
- +– (2 балла) – задание выполнено с существенной ошибкой или примерно наполовину;
- + (1 балл) – лишь какие-то элементы представленного ответа могут быть оценены положительно.

Пусть k – число задач в предложенном варианте. Определяется общее число M баллов, набранных студентом. Оценка зависит от величины отношения $r = \frac{M}{N}$, где $N=4k$ – максимальное возможное число баллов за работу. Возможная градация оценок следующая:

- $0.75 \leq r \leq 1$ – оценка «отлично»;
- $0.60 \leq r < 0.75$ – оценка «хорошо»;
- $0.26 \leq r \leq 0.59$ – оценка «удовлетворительно»;
- $0 \leq r \leq 0.25$ – оценка «неудовлетворительно».

Преподаватель имеет право учитывать на экзамене работу студента в семестре.

Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Классические модели теории приближений»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Студентам предлагается изучить не только рекомендованную литературу, но и возможные дополнительные источники (например, научные статьи), на которые может указать преподаватель. Эта работа по большей части может выполняться студентами индивидуально, под руководством преподавателя.

В процессе освоения дисциплины обучающиеся выполняют курсовые работы, которые являются важным этапом написания ВКР на 4-м курсе. Вопросы, связанные с выполнением курсовой работы и ВКР, оформлением текстов, разнообразные вопросы по выступлению на защитах этих работ, вполне целесообразно задать преподавателю дисциплины. Большую пользу принесет выступление на семинаре или студенческой (молодежной) конференции. Тема доклада для выступления вполне может быть связана с тематикой теории приближений и смежными науками, в том числе, с компьютерной реализацией алгоритмов аппроксимации. Такой расширенный подход к освоению материала дисциплины может быть весьма полезен студентам.

Отметим, наконец, важность самостоятельной работы над математическими доказательствами. Именно доказательства, а не формулировки результатов, составляют суть математики. Доказательный стиль мышления выделяет математика из представителей многих других профессий, и именно доказательства наиболее полезны для повышения степени математизации мышления. Не следует думать, что, прослушав доказательство на лекции, вы его полностью поняли и усвоили. Попробуйте его воспроизвести - как правило, вы встретитесь со значительными трудностями. В этом нет ничего необычного.

По нашему мнению, даже в каждом простом на вид доказательстве закодированы те откровения, находки и открытия, которые были сделаны его автором много лет назад. И хотя они сглажены при изложении на лекции или на страницах учебника, они существуют и требуют осмысления. Каждый скачок в познании, сделанный давным-давно учёным-математиком должен иметь своё отражение в голове изучающего этот предмет много лет спустя. Поэтому математика трудна не только для творчества, но и для изучения. В известном смысле изучение математики само является творчеством, только творчеством для себя. Трудность математического знания имеет и другую сторону: математические истины устойчивы, непеременимы и даже вечны. Это очень привлекательное качество нашей науки.