

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Дополнительные главы численных методов**

Направление подготовки (специальности)  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 21.04.2025, протокол № 10

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Дополнительные главы численных методов» являются овладение различными алгоритмами дискретного преобразования Фурье, применяемого при решении многих прикладных задач, и формирование практических навыков оценки сложности алгоритмов.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной. Для освоения данной дисциплиной студенты должны владеть математическим аппаратом тригонометрической интерполяции, основами прикладной и линейной алгебр, иметь представления об основных алгебраических структурах и владеть навыками их использования для построения алгоритмов, используемых при решении задач, возникающих в таких приложениях, как все виды связи, радиолокация, радиоастрономия, цифровая голография, медицинская электроника и др.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-2</b> Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	<b>И-ПК-2.1</b> Обладает устойчивыми знаниями в области основных математических дисциплин, их аппарата и результатов	<b>Знать:</b> - различные алгоритмы дискретного преобразования Фурье, - основные алгебраические структуры, используемые при разработке алгоритмов, - формулировки утверждений, - методы их доказательства.
	<b>И-ПК-2.2</b> Обладает способностью применять современный математический аппарат в решении различных задач	<b>Уметь:</b> - решать задачи; - применять понятия, результаты и методы теории алгоритмов. <b>Владеть:</b> - математическим аппаратом теории алгоритмов, - методами решения задач и доказательства утверждений. - практическими навыками оценки сложности алгоритмов.
	<b>И-ПК-2.3</b> Способен совершенствовать свои навыки, связанные с	<b>Уметь:</b> - совершенствовать знания, умения и навыки в области теории

	применением современного математического аппарата	алгоритмов; - применять результаты современных исследований при решении практических задач.
--	---	--

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **4** зачетные единицы, **144** акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Вводная лекция	7	1	1					
2	Тригонометрическая интерполяция, дискретное преобразование Фурье	7	5	5				10	
3	Основные алгебраические структуры, используемые при разработке алгоритмов	7	5	5		2		10	Самостоятельная работа № 1
4	Линейные и циклические свертки	7	5	5		2		10	Контрольная работа № 1
							0,3	5,7	зачет
	Всего за 7 семестр		16	16		4	0,3	35,7	
5	Быстрые алгоритмы коротких сверток	8		1				3	
6	Сложность алгоритмов вычисления сверток	8		1		1		3	
7	БПФ-алгоритмы	8		4				4	
8	Алгоритмы Рейдера	8		5		1		4	
9	Алгоритмы Винограда	8		5				4	
						2	0,5	33,5	экзамен
	Всего за 8 семестр			16		4	0,5	51,5	
	ВСЕГО		16	32		8	0,8	87,2	

#### Содержание разделов дисциплины:

##### Тема 1. Вводная лекция.

- 1.1. Введение. Приближение функций и смежные вопросы.
- 1.2. История развития быстрых алгоритмов цифровой обработки сигналов.

##### Тема 2. Тригонометрическая интерполяция. Дискретное преобразование Фурье.

- 2.1. Постановка задачи приближения функций.

- 2.2. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
- 2.3. Дискретное преобразование Фурье. Теорема о свертке. Вычисление циклической свертки с использованием теоремы о свертке и дискретного преобразования Фурье.
- 2.4. Вещественное преобразование Фурье.
- 2.5. Быстрое преобразование Фурье.

### **Тема 3. Основные алгебраические структуры, используемые при разработке быстрых алгоритмов.**

- 3.1. Группа. Кольцо. Поле.
- 3.2. Кольцо целых чисел Характеристика кольца. Кольца многочленов.
- 3.3. Сравнения и их свойства. Мультипликативная группа кольца вычетов.
- 3.4. Поля Галуа. Расширения. Подполя. Характеристика поля. Существование примитивного элемента.
- 3.5. Китайская теорема об остатках для чисел.
- 3.6. Китайская теорема об остатках для многочленов.
- 3.7. Функция Эйлера и ее свойства.

### **Тема 4. Линейные и циклические свертки.**

- 4.1. Определение линейной свертки. Запись через многочлены.
- 4.2. Циклическая свертка и ее связь с линейной. Запись через многочлены.

### **Тема 5. Быстрые алгоритмы коротких сверток.**

- 5.1. Алгоритм Кука-Тоома. вычисления линейной свертки. Матричная форма записи алгоритма.
- 5.2. Алгоритмы Винограда вычисления коротких сверток. Алгоритм Винограда как обобщение метода вычисления сверток с помощью преобразования Фурье. Матричная форма записи алгоритма.
- 5.3. Обобщение алгоритма Винограда.
- 5.4. Сравнение сложности разных алгоритмов.
- 5.5. построение алгоритмов коротких циклических сверток. Матричная запись.

### **Тема 6. Сложность алгоритмов вычисления сверток.**

- 6.1. Определение операций и вычислительного алгоритма.
- 6.2. Оценки числа умножений алгоритма с помощью рангов матрицы.
- 6.3. Теорема об оценке числа умножений алгоритма вычисления линейной свертки.

### **Тема 7. БПФ-алгоритмы.**

- 7.1. Алгоритм Кули-Тьюки быстрого преобразования Фурье. Оценка сложности алгоритма.
- 7.2. БПФ- алгоритм Кули-Тьюки по основанию 2.
- 7.3. Алгоритм Кули-Тьюки по основанию 4.
- 7.4. Иллюстрация на примере 8 – точечного преобразования.
- 7.5. Оценка сложности этих алгоритмов...

### **Тема 8. Алгоритмы Рейдера.**

- 8.1. Алгоритм Рейдера для простых чисел.
- 8.2. Построение 5 – точечного преобразования Фурье с помощью алгоритма Рейдера.
- 8.3. Алгоритм Рейдера для случая, когда длина преобразования равна степени двойки.
- 8.4. Иллюстрация на примере 16 – точечного преобразования Фурье.

### **Тема 9. Алгоритмы Винограда.**

- 9.1. Алгоритм Винограда для быстрого преобразования Фурье для случая, когда длина – простое число.
- 9.2. Алгоритм Винограда при длине, равной степени простого числа.
- 9.3. Алгоритм Винограда при длине, равной степени двойки.

## **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT» [http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Электронно-библиотечная система «Консультант Студента»: <https://www.studentlibrary.ru/>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2020. <https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN9785001018360-SCN0000/000.html>

### **б) дополнительная литература**

1. Яблокова С.И. Введение в быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов: учебное пособие. – Ярославль, ЯрГУ, 2009. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20090238.pdf>
2. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1989.
3. Самарский А. А. Численные методы: учеб. пособие для вузов. / А. А. Самарский, А. В. Гулин; Гос. комитет СССР по народному образованию - М.: Наука, 1989. - 430 с.

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и текущего обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

### **Автор(ы) :**

доцент кафедры математического анализа,  
кандидат физ.-мат. наук

Глазков Д. В.

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Дополнительные главы численных методов»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

**Самостоятельная работа № 1**

Построить быстрый алгоритм вычисления 5 – точечной циклической свертки над полем вещественных чисел. Записать алгоритм в матричной форме и оценить число умножений и сложений.

Построить быстрый алгоритм вычисления произведения двух многочленов по модулю многочлена  $x^3 + x + 1$  над полем комплексных чисел.

Записать алгоритм в матричной форме и оценить число умножений.

**Контрольная работа № 1**

Пользуясь алгоритмом Кули – Тьюки, построить быстрый алгоритм вычисления 4 – точечного преобразования Фурье. Записать алгоритм в матричной форме и оценить сложность.

Пользуясь алгоритмом Рейдера, свести 7 – точечное преобразование Фурье к 6 – точечной циклической свертке. Оценить сложность вычисления.

**2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

**Список вопросов к зачету**

1. Тригонометрическая интерполяция.
2. Дискретное преобразование Фурье. Теорема о свертке.
3. Линейная и циклическая свертки.
4. Алгоритм Винограда вычисления коротких сверток.
5. Построение алгоритмов коротких циклических сверток.
6. Дискретное преобразование и циклическая свертка.
7. Дискретное преобразование Фурье и многочлены.
8. Группа, кольцо, поле. Примеры конечных колец.
9. Кольцо целых чисел и кольцо многочленов.
10. Китайская теорема об остатках для чисел.
11. Китайская теорема об остатках для многочленов.
12. Построение алгоритмов коротких линейных сверток  $3 \times 3$ , их сравнение.
13. Линейные свертки над полем комплексных чисел.
14. Построение алгоритмов коротких циклических сверток. Два способа решения.
15. Пример построения 4 – точечной циклической свертки.

**Список вопросов к экзамену:**

1. Алгоритм Кули – Тьюки по основанию два.
2. Алгоритм Кули – Тьюки по основанию четыре.
3. Алгоритм Гуда – Томаса быстрого преобразования Фурье (БПФ).

4. Алгоритм Рейдера в случае, когда длина преобразования равна простому числу.
5. Алгоритм Рейдера в случае, когда длина преобразования равна степени 2.
6. Алгоритм Рейдера в случае, когда длина преобразования равна нечетному простому числу.
7. Алгоритм Винограда для БПФ в случае, когда длина преобразования равна простому числу.
8. Алгоритм Винограда БПФ в случае, когда длина преобразования равна есть степень простого числа.
9. Алгоритм Винограда БПФ в случае, когда длина преобразования есть степень 2.
10. Китайская теорема об остатках для чисел.
11. Китайская теорема об остатках для многочленов.
12. Оценка числа сложений и умножений в вещественном и комплексном полях.
13. Матричная запись алгоритмов. Примеры для  $n = 5$  и  $n = 7$ .
14. Поля Галуа. Примитивный элемент поля Галуа.
15. Алгоритм Винограда как обобщение метода вычисления свертки с помощью преобразования Фурье.
16. Алгоритм Винограда как метод разложения матриц.
17. Циклические и линейные свертки.
18. Алгоритм вычисления циклической свертки с помощью дискретного преобразования Фурье.

### **3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

#### **3.1 Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций**

**Пороговый уровень** (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

**Продвинутый уровень** (общие характеристики):



- достаточно полные и систематизированные знания в объёме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

#### **Высокий уровень (общие характеристики):**

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

### **3.2 Описание процедуры выставления оценки**

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Дополнительные главы численных методов»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Форма изложения материала – лекции и практические занятия. Для лучшего понимания теории необходимо решение задач, в том числе самостоятельное для закрепления полученных навыков.

Рекомендуется проведение в течение семестра контрольной работы для понимания степени усвоения дисциплины студентами. По ее итогам проводится разбор наиболее типичных ошибок и при необходимости повторение наиболее трудного материала. Также возможно поощрение отличившихся студентов некоторыми послаблениями на зачете и на экзамене на усмотрение преподавателя.