

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

Нестеров П.Н.

21 мая 2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Комплексный анализ

Направление подготовки (специальности)
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 24.04.2024, протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 03.05.2024

1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Комплексный анализ» обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом, относится к фундаменту математического образования и содействует формированию мировоззрения математика.

Целью преподавания дисциплины является ознакомление студентов с основами теории функций комплексного переменного, её важнейшими понятиями, результатами и методами, а также подготовка студентов к изучению других дисциплин.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

Дисциплина относится к числу важнейших фундаментальных математических дисциплин в силу особой значимости её материала для подготовки бакалавра. Знания и навыки, полученные при изучении дисциплины «Комплексный анализ», используются студентами в процессе изучения всех математических и компьютерных дисциплин.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Общепрофессиональные компетенции		
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	И-ОПК-1.1 Обладает основными фундаментальными знаниями в области математики и ее приложений, имеет представления о специфике их использования в профессиональной деятельности	Знать: основные понятия и результаты комплексного анализа, теории функций комплексного переменного Уметь: решать типовые вычислительные и аналитические задачи с применением аппарата комплексного анализа, теории функций комплексного переменного Владеть навыками: самостоятельного изучения вопросов комплексного анализа и теории функций комплексного переменного в области разработки алгоритмов решения задач
	И-ОПК-1.2 Умеет квалифицированно определять область фундаментальных знаний, относящихся к поставленной задаче	Знать: основные алгоритмические методы решения задач комплексного анализа и теории функций комплексного переменного, их особенности Уметь: выделять составляющие комплексного анализа и теории функций комплексного переменного в поставленных задачах Владеть навыками:

		численного решения геометрических задач комплексного анализа и теории функций комплексного переменного
	И-ОПК-1.3 Имеет навыки аналитической работы, связанной с применением фундаментальных знаний на практике	Уметь: пользоваться аналитическим аппаратом комплексного анализа при применении компьютерных методов (разработка алгоритмов, графика, применение систем компьютерной математики и др.) Владеть: способностью совершенствовать свои знания комплексному анализу и теории функций комплексного переменного

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **6** зачетных единиц, **216** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1.	Вводная лекция. Предмет и исторические этапы теории функций комплексного переменного. Подходы Коши, Вейерштрасса и Римана к характеристизации аналитической функции.	4	2	4				4	задания для самостоятельной работы
2.	Комплексные числа и действия с ними. Алгебраическая и тригонометрическая формы. Модуль и аргумент. Алгебраические свойства поля \mathbb{C} . Интерпретация Римана комплексных чисел.	4	2	4				4	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
3.	Множества на расширенной комплексной плоскости. Открытые и замкнутые множества.	4	2	4				4	задания для самостоятельной работы, устный опрос

	Граница. Связность. Односвязные и многосвязные множества.								
4.	Последовательности и ряды комплексных чисел. Предел последовательности. Сумма ряда. Основные теоремы о пределе.	4	2	4		1		4	задания для самостоятельной работы, устный опрос
5.	Однозначные и многозначные функции. Предел по Коши и по Гейне. Непрерывность и равномерная непрерывность.	4	2	4				4	задания для самостоятельной работы, устный опрос
6.	Функциональные ряды. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда.	4	2	4		1		4	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
7.	Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Формула Коши – Адамара. Определение функций $f(z) = e^z, \sin z, \cos z$ с помощью степенных рядов, их свойства	4	2	4		1		4	задания для самостоятельной работы, устный опрос
8.	Дифференцируемость функции комплексного переменного. Производная. Условия Коши – Римана. Аналитические функции. Аналитичность суммы степенного ряда	4	2	4				4	задания для самостоятельной работы, устный опрос
9	Понятие о конформном отображении. Свойства постоянства углов и постоянства растяжений для аналитической функции	4	2	4		1		5	задания для самостоятельной работы, устный опрос
10	Некоторые важные функции комплексного переменного. Области однолиственности функций $f(z) = z^n, e^z$. Понятие о римановой поверхности. Функции $f(z) = \sqrt[n]{z}, \operatorname{Ln} z$,	4	2	4		1		5	задания для самостоятельной работы, устный опрос

	In z . Дробно-линейные функции и их свойства								
11.	Интегрирование функций комплексного переменного. Определение и свойства интеграла. Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей. Интегральная формула Коши. Формула среднего значения. Принцип максимума модуля. Гармонические функции	4	2	4		1		6	задания для самостоятельной работы, устный опрос
12.	Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции. Теорема Лиувилля	4	2	4		1		4	задания для самостоятельной работы, устный опрос
13.	Ряды Тейлора. Теорема Тейлора. Неравенства Коши. Теорема о единственности аналитической функции. Нули аналитической функции. Правильные и особые точки	4	2	4		2		4	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
14.	Ряды Лорана. Кольцо сходимости ряда Лорана. Теорема Лорана. Единственность ряда Лорана	4	2	4		1		8	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
15.	Изолированные особые точки аналитической функции. Определение и классификация изолированных особых точек. Поведение в окрестности изолированной особой точки. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса.	4	2	4		1		4	задания для самостоятельной работы, устный опрос
16.	Вычеты. Теоремы о вычетах. Вычисление определённых интегралов с помощью вычетов. Логарифмический вычет. Число нулей аналитической функции. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная	4	2	4		1		4	задания для самостоятельной работы, устный опрос

	теорема алгебры (многочленов).								
						2	0.5	33.5	экзамен
	ВСЕГО		32	64		14	0.5	105.5	

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний. В рамках практических занятий возможно привлечение компьютерного практикума.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине при формировании материалов

для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, при формировании методических материалов по дисциплине используются:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader
- система Wolfram Mathematica. (<https://www.wolframcloud.com/>)
- Network 15 Mathematica 11 Increment Standard Bundled List Price with Service.
- Network 15 Mathematica 11 Upgrade L3549-7407.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются (или могут использоваться):

- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://www.biblio-online.ru/>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»
http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php
- Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU <http://elibrary.ru/>
- База научных статей Mathnet
- База Scopus
- База Web of Sciences

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

1. Е.П. Кубышкин Методы комплексного анализа в решении прикладных задач: Учебное пособие - Ярославль, ЯрГУ, 2014.
2. М.В. Невский Упражнения по дисциплине "Теория функций комплексного переменного". - ЯрГУ: Ярославль, 2006.
<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20080296.pdf>
3. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. <https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN9785922101332-SCN0000/000.html>

в) дополнительная литература:

1. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного: учебник для вузов — Санкт-Петербург: Лань, 2022. <https://reader.lanbook.com/book/193364>
2. Волковысский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций - М.: Физматлит, 2002.

в) ресурсы сети «Интернет»

- Математические журналы базы Scopus
- Математические журналы базы Mathnet

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор:

Профессор кафедры математического анализа,
доктор физ.-мат. наук, профессор

Кубышкин Е.П.

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины
«Комплексный анализ»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации студентов по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

Задания для самостоятельной работы даются по лекциям и учебным пособиям и др. Эти задания не оцениваются, но их выполнение контролируется на практических занятиях и (или) в ЭУК Moodle ЯрГУ. В последнем случае задания формулируются в соответствующих разделах курса.

Примеры практических заданий:

1. Вычислить:

$$(1+i)^5 / (1+2i)^7 + (6-7i)^4.$$

2. Найти модуль и аргумент комплексного числа:

$$(2+6i)^4 - (9+16i) / (3+5i)^5.$$

3. Вычислить:

$$((6+i)^2 / (1-3i)^4)^{1/3}.$$

4. Найти на комплексной плоскости вершины правильного 7 – угольника, если его центр находится в точке $1+2i$, а одна из вершин находится в точке $5+4i$.

5. Даны три вершины параллелограмма $z_1 = 1+3i, z_2 = -5+7i, z_3 = -1+8i$. Найти четвертую вершину, противоположную z_2 .

6. Построить на комплексной плоскости геометрическое место точек: $2 < |z+6-7i| \leq 7$.

7. Построить на комплексной плоскости линии: $\operatorname{Re}(1/z) = 3, \operatorname{Im}(1/z) = 3$.

8. Построить на сфере Римана образы следующих точек на комплексной плоскости: $z = 1 + \sqrt{2}i, 1 < |z-i| < 2$.

2. Вопросы к экзамену

1. Комплексные числа. Действия над комплексными числами. Модуль комплексного числа. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Степень комплексного числа, извлечение корня из комплексного числа.
2. Сфера Римана. Формулы стереографической проекции. Основное свойство стереографической проекции.
3. Последовательности и ряды комплексных чисел. Признаки сходимости.
4. Понятие функции комплексной переменной. Непрерывность и дифференцируемость функций комплексных переменных. Условия Коши-Римана. Свойства аналитических функций.
5. Геометрический смысл производной.
6. Элементарные функции комплексной переменной.
7. Интеграл по комплексной переменной.
8. Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей.
9. Неопределенный интеграл.
10. Интеграл Коши. Следствия из формулы Коши.
11. Принцип максимума модуля аналитической функции.

12. Интегралы, зависящие от параметра. Существование производных любого порядка для аналитической функции.
13. Теоремы Морера и Лиувилля.
14. Ряды функций комплексного переменного. Равномерная сходимость. Теоремы Вейерштрасса.
15. Степенные ряды. Теорема Абеля. Следствие из теоремы Абеля. Радиус сходимости степенного ряда.
16. Ряд Тейлора.
17. Нули аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции.
18. Аналитическое продолжение. Понятие Римановой поверхности на примере функции $w = \sqrt[n]{z}$. Полная аналитическая функция. Естественная область определения.
19. Ряд Лорана. Разложение аналитической функции в ряд Лорана.
20. Классификация изолированных особых точек. Теорема Сохоцкого.
21. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке.
22. Основная теорема вычетов.
23. Вычисление интегралов с помощью вычетов.
24. Логарифмический вычет. Подсчет числа нулей аналитической функции.
25. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.
26. Конформное преобразование

Билеты к экзамену

Билет № 1

Комплексные числа. Действия над комплексными числами. Модуль комплексного числа. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Степень комплексного числа, извлечение корня из комплексного числа.

Определить радиус и область сходимости ряда: $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(3m)^p} (z-1)^m, p > 0$.

Билет № 2

Сфера Римана. Формулы стереографической проекции. Основное свойство стереографической проекции.

Найти вычеты функции $\frac{1}{z^3 - z^5}$ относительно всех изолированных особых точек.

Билет № 3

Последовательности и ряды комплексных чисел. Признаки сходимости.

Вычислить интеграл: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$.

Билет № 4

Понятие функции комплексной переменной. Непрерывность и дифференцируемость функций комплексных переменных. Условия Коши-Римана. Свойства аналитических функций.

Вычислить интеграл: $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2 + \cos \varphi}$.

Билет № 5

Геометрический смысл производной.

Определить радиус и область сходимости ряда: $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(6m^2)^p} (z-i)^m, p > 0$.

Билет № 6

Элементарные функции комплексной переменной.

Определить порядок нуля аналитической функции $z^3(\exp(z^7) - 1)$ в окрестности точки $z = 0$.

Билет № 7

Интеграл по комплексной переменной.

Найти вычеты функции $\frac{1}{z^7 + z^5}$ относительно всех изолированных особых точек.

Билет № 8

Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей.

Вычислить интеграл: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \, dx}{(x^2 + 4x + 13)^3}$.

Билет № 9

Неопределенный интеграл.

Определить радиус и область сходимости ряда: $\sum_{m=1}^{\infty} 0.5^{m^2} (z-1)^m$.

Билет № 10

Интеграл Коши. Следствия из формулы Коши.

На комплексной плоскости даны три вершины параллелограмма

$z_1 = 2 - 11i, z_2 = 1 - 13i, z_3 = 4 + 4i$. Найти четвертую вершину, противоположную z_2 .

Билет № 11

Принцип максимума модуля аналитической функции.

Вычислить интеграл: $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4 + \cos \varphi}$

Билет № 12

Интегралы, зависящие от параметра. Существование производных любого порядка для аналитической функции.

Определить порядок нуля аналитической функции $z^3(\cos(z^5) - 1)$ в окрестности точки $z = 0$

Билет № 13

Теоремы Морера и Лиувилля.

Найти вычеты функции $\frac{z^2}{z^3 + z^5}$ относительно изолированных особых точек.

Билет № 14

Ряды функций комплексного переменного. Равномерная сходимость.

Теоремы Вейерштрасса.

Построить на комплексной плоскости геометрическое место точек:

$$|z - 2i| - |z + 6i| = 6.$$

Билет № 15

Степенные ряды. Теорема Абеля. Следствие из теоремы Абеля.

Радиус сходимости степенного ряда.

Построить на комплексной плоскости геометрическое место точек:

$$|z - 3i| + |z + 3i| = 12.$$

Билет № 16

Ряд Тейлора.

Вычислить интеграл: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$.

Билет № 17

Нули аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции.

Вычислить интеграл: $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2 + \cos \varphi)^2}$.

Билет № 18

Аналитическое продолжение. Понятие Римановой поверхности на примере функции $w = \sqrt[n]{z}$. Полная аналитическая функция. Естественная область определения.

Определить радиус и область сходимости ряда: $\sum_{m=1}^{\infty} 0.6^{m^2} (z-1)^m$.

Билет № 19

Ряд Лорана. Разложение аналитической функции в ряд Лорана.

Построить на комплексной плоскости линии: $\operatorname{Re}(2z^2 - 4i) = 9, \operatorname{Im}(2z^2 + 4i) = 6$.

Билет № 20

Классификация изолированных особых точек. Теорема Сохоцкого.

Вычислить: $\operatorname{Ln}(13 + 9i)$

3. Правила выставления оценки на экзамене (в устной форме)

В экзаменационный билет включается теоретический вопрос и задача. На подготовку к ответу дается 1 астрономический час. По итогам экзамена выставляется одна из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется студенту, который демонстрирует глубокое и полное владение содержанием материала и понятийным аппаратом дисциплины, дает развернутые, полные и четкие ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, правильно решает задачу.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, ответ которого на экзамене в целом соответствует указанным выше критериям, но отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой. В ответе имеют место отдельные неточности (несущественные ошибки), которые исправляются самим студентом после дополнительных и (или) уточняющих вопросов экзаменатора. Необходимым условием является хотя бы частичное решение задачи.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, который дает недостаточно полные ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, но при этом все же демонстрирует некоторые базовые знания по предмету. При аргументации ответа студент не обосновывает свои суждения. На часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не демонстрирует знания базовых понятий и результатов, не в состоянии решить задачу, плохо отвечает на дополнительные вопросы, не владеет понятийным материалом дисциплины. Дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора не приводят к коррекции ответов студента. На основную часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы. Кроме того, оценка «Неудовлетворительно» может быть выставлена при незнании каких-то базовых понятий и результатов. Оценка «Неудовлетворительно» выставляется также студенту, который взял экзаменационный билет, но отвечать отказался.

Правила выставления оценки на экзамене (в письменной форме)

Студенту предлагается индивидуальный вариант заданий, содержащий 4-6 задач. На выполнение и представление заданий дается не менее 3-х часов. При оценивании выполненных заданий может использоваться следующая система оценок за одно задание:

- + (4 балла) – задание выполнено полностью, без ошибок;
- + (3 балла) – задание выполнено с незначительной ошибкой или почти полностью;
- + (2 балла) – задание выполнено с существенной ошибкой или примерно наполовину;
- (1 балл) – лишь какие-то элементы представленного ответа могут быть оценены положительно.

При таком подходе задания считаются примерно равноценными по трудоемкости.

При проверке работы в каждом задании отмечаются недостатки (в форме, доступной студенту), и тем самым объясняется поставленные баллы за задания. Пусть k – число задач в предложенном варианте (например, $k=5$). Определяется общее число M баллов, набранных студентом. Оценка зависит от величины отношения $r = \frac{M}{N}$, где $N=4k$ – максимальное возможное число баллов за работу. Возможная градация оценок следующая:

- $0.75 \leq r \leq 1$ – оценка «отлично»;
- $0.60 \leq r < 0.75$ – оценка «хорошо»;
- $0.26 \leq r \leq 0.59$ – оценка «удовлетворительно»;
- $0 \leq r \leq 0.25$ – оценка «неудовлетворительно».

Если задания имеют существенно различную трудоемкость (сложность), то их максимальная оценка может быть различной. В этом случае в указанную схему вносятся соответствующие изменения.

За преподавателем имеется право учитывать на экзамене в положительную сторону работу студента в семестре.

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Автор считает целесообразным изложить некоторые свои соображения по вопросам, связанным с изучением данной дисциплины, других дисциплин и обучением на математическом факультете вообще.

Итак, вы выбрали для вашего образования математический факультет классического университета. Какие условия необходимы для овладения профессией математика? По мнению автора, таких условий пять:

- твёрдый характер;
- критическое отношение к себе;
- способность заниматься математикой и желание это делать;
- регулярные занятия математикой;
- хорошее здоровье.

Очень часто не все эти элементы имеются в наличии; в этом случае начинать нужно с работы по тем позициям, где вы сами видите свои недостатки. Однако даже в случае, когда эти условия соблюдены, в обучении студента могут присутствовать определённые трудности.

Одна из главных заключается в том, что студенты часто неправильно отвечают для себя на вопрос, в чём заключается понимание в математике, каков их уровень понимания, какова степень математизации их мышления. Дело в том, что даже регулярное посещение лекций и практических занятий не гарантирует хорошего понимания предмета. Для усвоения материала требуется большая самостоятельная работа по теоретическим вопросам и решению задач. Знать, помнить определения и формулировки теорем, конечно, необходимо, но это ещё не значит полностью понимать материал. Не следует заучивать математические факты так, как учат, например, стихи. Надо выработать в себе привычку осмысливать их, обдумывать, анализировать. Так, "чистое" знание определения без умения его применять в несложной ситуации должно быть оценено неудовлетворительно.

Особо следует сказать о необходимости и пользе изучения математических доказательств. Не секрет, что сейчас доказательство изживается из школьной математики. Однако именно доказательства, а не формулировки результатов, составляют суть математики. Именно доказательный стиль мышления выделяет математика из представителей многих других профессий и именно доказательства наиболее значительны для повышения степени математизации мышления. Не следует думать, что, прослушав доказательство на лекции, вы его полностью поняли и усвоили. Попробуйте воспроизвести его дома - как правило, вы встретитесь со значительными трудностями. В этом нет ничего необычного.

По нашему мнению, даже в каждом простом на вид доказательстве закодированы те откровения, находки и открытия, которые были сделаны его автором много лет назад. И хотя они сглажены при изложении на лекции или на страницах учебника, они существуют и требуют осмысления. Каждый скачок в познании, сделанный давным-давно учёным-математиком должен иметь своё отражение в голове изучающего этот предмет много лет спустя. Поэтому математика трудна не только для творчества, но и для изучения. В известном смысле изучение математики само является творчеством, только творчеством для себя. Трудность математического знания имеет и другую сторону: математические истины устойчивы, непеременимы и даже вечны. Это очень привлекательное качество нашей науки.