

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Выпуклое программирование**

Направление подготовки (специальности)  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 18.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина "Выпуклое программирование" обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом. Целью спецкурса «Выпуклое программирование» является ознакомление студентов с методами выпуклого программирования.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной. Дисциплина "Выпуклое программирование" входит в цикл дисциплин, которые обеспечивают овладение аналитическими и численными методами, необходимыми для подготовки специалиста-математика. Она основывается на знаниях полученных слушателями при изучении дисциплин "Математический анализ", "Алгебра," "Функциональный анализ." Знания и навыки, полученные при изучении дисциплины "Выпуклое программирование", используются при изучении общепрофессиональных дисциплин, а также ряда специальных дисциплин. Данная дисциплина является дисциплиной по выбору.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-2</b> Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	<b>И-ПК-2.2</b> Обладает способностью применять современный математический аппарат в решении различных задач	<b>Знать:</b> основные понятия выпуклого программирования. <b>Уметь:</b> - разрабатывать алгоритмы для решения задач выпуклого программирования, - реализовывать эти методы на языке программирования высокого уровня. <b>Владеть навыками:</b> использования методов выпуклого программирования для решения прикладных задач

## 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единиц, 144 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Вводная лекция. Обзор литературы. Основные понятия выпуклого программирования.	7	1						
2	Выпуклые множества. Их свойства. Исторический экскурс. Аффинные множества. Аффинная зависимость и ее связь с линейной зависимостью. Выпуклые множества. Их свойства. Выпуклые оболочки множеств. Их описание. Выпуклые многогранники. Теоремы Радона и Каратеодори. Компактность и выпуклость.	7	2	6		1		4	
3	Опорные гиперплоскости и полупространства. Опорные гиперплоскости и полупространства. Описание линейных функционалов в $\mathbb{R}^d$ .	7	2	6		1		4	
4	Теоремы отделимости в $\mathbb{R}^d$ . Теоремы отделимости для выпуклого множества в $\mathbb{R}^d$ . Теорема о том, что всякое выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$ есть пересечение всех своих опорных полупространств.	7	2	6		1		6	Контрольная работа
5	Выпуклые конусы и их свойства. Коническая оболочка и её свойства. Теорема об опорной плоскости к выпуклому конусу	7	2	6		1		4	

6	Крайние точки выпуклых множеств и их свойства. Необходимые и достаточные условия того, что $x \in A$ , где $A$ -- множество заданное линейными ограничениями. Теорема Крейна-Мильмана.	7	2	6		1		4	
7	Выпуклые и вогнутые функции и их свойства. Надграфик. Необходимые и достаточные условия выпуклости функций. Теорема о непрерывности выпуклой функции. Множество решений задачи минимизации для выпуклой функции.	7	2	6		1		4	
8	Задача выпуклого программирования для дифференцируемой функции. Понятие субградиента и субдифференциала. Их свойства. Субградиентные методы решения задачи выпуклого программирования	7	2	6		1		6	Контрольная работа
9	Метод отсечений. Задача линейного программирования и методы её решения.	7	1	6		1		4	
						2	0,5	33,5	экзамен
	<b>Итого</b>		16	48		10	0,5	69	

## 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя.

Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»  
<https://www.studentlibrary.ru>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учебное пособие — Санкт-Петербург: Лань, 2011 <https://reader.lanbook.com/book/2027>
2. Балдин К. В. Математическое программирование - Москва: Дашков и К, 2014.  
<https://www.studentlibrary.ru/ru/book/ISBN9785394014574.html>
3. Калихман И. Л. Сборник задач по математическому программированию: учеб. пособие для вузов. / И. Л. Калихман; М-во высш. и сред. спец. образования СССР - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Высшая школа, 1975. - 270 с.

4. Ашманов С. А., Тимохов А. В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. - М.: Наука, 1991 <https://reader.lanbook.com/book/210911>

**б) дополнительная литература**

1. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. / Е. С. Вентцель - 2-е изд., стереотип. - М.: Наука, 1988. - 208 с.: ил.
2. Карманов В. Г. Математическое программирование – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. <https://www.studentlibrary.ru/ru/book/ISBN5922101706.html>
3. Красс, М. С. Математика в экономике: математические методы и модели : учебник для бакалавров / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов ; ответственный редактор М. С. Красс. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 541 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-3138-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/508865>
4. Сакович В. А. Исследование операций. – Минск: Высшейш.шк., 1985.
5. Петров Н. Н. Введение в выпуклый анализ: учебное пособие. - Ижевск, УдГУ, 2008 <http://elibrary.udsu.ru/xmlui/bitstream/handle/123456789/3747/2009138.pdf>

**9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

**Автор(ы) :**

Старший преподаватель  
кафедры дифференциальных уравнений

Преображенский И. Е.

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Выпуклое программирование»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

1. Изобразить на плоскости сумму множеств  $A = [-1; 1] \times [-1; 1]$  и  $B = \text{co}\{x_1, x_2, x_3\}$ , где  $x_1 = (-1; 0)$ ,  $x_2 = (0; 1)$ ,  $x_3 = (1; -1)$ .
2. Пусть  $A$  совокупность всех квадратных трёхчленов вида  $x^2 + bx + c$  с нулевым дискриминантом. Найдите  $\text{co}(A)$ .
3. Найти выпуклую оболочку множества

$$A = \{(x, y) \in R^2 : x, y \in [0, 1]\} \cup \{(x, y) \in R^2 : y = x > 1\}.$$

4. Изобразить на плоскости сумму множеств отрезка  $[x_1; x_2]$ , где

$$x_1 = (4; 1), x_2 = (4; 3) \text{ и } B = \text{co}\{(-2; -1), (1; 2), (3; -1)\}.$$

5. Изобразить на плоскости сумму множеств отрезка  $[x_1; x_2]$ , где

$$x_1 = (4; 0), x_2 = (4; 3) \text{ и } B = \text{co}\{(-2; -1), (1; 3), (3; -2)\}.$$

6. Изобразить на плоскости сумму треугольников

$$A = \text{co}\{(0; 0), (2; 0), (1; 2)\} \text{ и } B = \text{co}\{(2; 2), (5; 2), (3; 1)\}$$

7. В пространстве  $R^3$  заданы 6 точек:  $x_1 = (-2; 1; 4)$ ,  $x_2 = (7; -3; -10)$ ,  $x_3 = (6; -1; -4)$ ,  $x_4 = (1; -1; -5)$ ,  $x_5 = (1; 0; 1)$ ,  $x_6 = (-13; 4; 14)$ , а также точка  $x_0 = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 x_j$ . Представьте  $x_0$  в виде выпуклой комбинации не более чем четырёх точек из  $x_1, x_2, \dots, x_6$ .

8. Докажите, что множество

$$A = \left\{ (x; y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$$

является выпуклым.

9. Изобразить суммы следующих пар множеств  $R^2$

$$A = \text{co}\{(1; 2), (1; -3)\} \text{ и } B = \text{co}\{(2; -3), (4; -1), (0; 1), (3; 2)\}.$$

10. Изобразить суммы следующих пар множеств  $R^2$

$$A = \text{co}\{(-1; 0), (1; 3), (2; -4)\} \text{ и } B = \text{co}\{(-1; 0), (1; 3), (-2; 2)\}.$$

11. Найдите размерность множества  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3, x_1 x_2 x_3 \geq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ .

12. Найти размерность выпуклого множества задаваемого системой

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \\ x_1^2 + x_2 - x_3^2 \geq 1. \end{cases}$$

13. Вывести уравнение гиперплоскости, отделяющей точку  $x_0 = (3, 2, 1, 1)$  от  $X \subset R^4$ , которое задается системой

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 6x_3 - 9x_4 \leq 7 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 1 \\ -x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \leq 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 5. \end{cases}$$

14. Вывести уравнение гиперплоскости, опорной к множеству

$$A = \left\{ x \in R^3 : \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} + \frac{x_3^2}{25} \leq 1 \right\}$$

в точке  $x_0 = (0; \frac{9}{5}; 4)$ .

**2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

1. Аффинные подпространства. Аффинная оболочка.

2. Выпуклые множества и их свойства.
3. Выпуклые оболочки и их описание.
4. Теорема Каратеодори.
5. Внутренность и относительная внутренность выпуклых множеств.
6. Проекция точки на замкнутое выпуклое множество.
7. Опорные гиперплоскости и полупространства.
8. Теоремы отделимости для выпуклого множества в  $\mathbb{R}^d$ .
9. Опорная плоскость выпуклого множества.
10. Теорема о том, что всякое выпуклое множество в  $\mathbb{R}^d$  есть пересечение всех своих опорных полупространств.
11. Выпуклые конусы и их свойства.
12. Коническая оболочка и её свойства.
13. Теорема об опорной плоскости к выпуклому конусу.
14. Крайние точки выпуклых множеств и их свойства.
15. Необходимые и достаточные условия того, что  $X \in \text{ext } A$ , где  $A$  --- множество заданное линейными ограничениями. Теорема Крейна-Мильмана.
16. Выпуклые и вогнутые функции и их свойства. Надграфик.
17. Необходимые и достаточные условия выпуклости функций.
18. Теорема о непрерывности выпуклой функции.
19. Множество решений задачи минимизации для выпуклой функции.
20. Задача выпуклого программирования для дифференцируемой функции.
21. Понятие субградиента и субдифференциала. Их свойства.
22. Субградиентные методы решения задачи выпуклого программирования.
23. Метод отсечений.
24. Задача линейного программирования и методы её решения.

### **3. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкалы оценивания**

#### **3.1 Шкала оценивания сформированности компетенций и ее описание**

Оценивание уровня сформированности компетенций в процессе освоения дисциплины осуществляется по следующей трехуровневой шкале:

**Пороговый уровень** - предполагает отражение тех ожидаемых результатов, которые определяют минимальный набор знаний и (или) умений и (или) навыков, полученных студентом в результате освоения дисциплины. Пороговый уровень является обязательным уровнем для студента к моменту завершения им освоения данной дисциплины.

**Продвинутый уровень** - предполагает способность студента использовать знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, полученные при освоении дисциплины, для решения профессиональных задач. Продвинутый уровень превосходит пороговый уровень по нескольким существенным признакам.

**Высокий уровень** - предполагает способность студента использовать потенциал интегрированных знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, полученных при освоении дисциплины, для творческого решения профессиональных задач и самостоятельного поиска новых подходов в их решении путем комбинирования и использования известных способов решения применительно к конкретным условиям. Высокий уровень превосходит пороговый уровень по всем существенным признакам.

#### **3.2 Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций**



### на различных этапах их формирования

Код компетенции	Форма контроля	Этапы формирования (№ темы (раздела))	Показатели оценивания	Шкала и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования		
				Пороговый уровень	Продвинутый уровень	Высокий уровень
Профессиональные компетенции						
ПК-2	Экзамен		Знать: Основные понятия выпуклого программирования. Уметь: разрабатывать методы решения практических задач на основе выпуклого программирования. Уметь реализовывать эти методы на языке программирования высокого уровня. Владеть навыками: использования методов выпуклого программирования для решения прикладных задач.	Знать определения выпуклых множеств. Формулировки основных теорем курса. Умение формулировать задачу линейного программирования. Умение применять простейшие методы выпуклого программирования для решения практических задач.	Знание свойств выпуклых и аффинных множеств, выпуклых оболочек, опорных гиперплоскостей, выпуклых многогранников. Умение формулировать постановку задачи выпуклого программирования.	Знание основных методов выпуклого программирования Умение применять методы выпуклого программирования для решения практических задач.

### 3.3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

## **Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций**

### **Пороговый уровень (общие характеристики):**

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

### **Продвинутый уровень (общие характеристики):**

- достаточно полные и систематизированные знания в объёме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

### **Высокий уровень (общие характеристики):**

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

## **3.4 Описание процедуры выставления оценки**

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение

нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Выпуклое программирование»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Выпуклое программирование» являются лекции. Это связано с тем, что в основе численных методов лежит серьезный математический аппарат, требующий детального разбора. По большинству тем предусмотрены практические занятия.

В конце семестра студенты сдают экзамен. Экзамен принимается по экзаменационным билетам, каждый из которых включает в себя два теоретических вопроса. На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется 3 дня, во время подготовки к экзамену предусмотрена групповая консультация.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Выпуклое программирование» самостоятельно студенту затруднительно. Это связано со сложностью изучаемого материала и большим объемом курса. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать экзамен по итогам изучения дисциплины студенту практически невозможно.