

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений**

Направление подготовки (специальности)  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 18.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина "Качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений" обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом, содействует фундаментализации образования, формированию культуры аналитических вычислений в рамках цикла аналитических дисциплин. Целью преподавания дисциплины является освоение ключевых понятий, вопросов теории дифференциальных уравнений, аналитических методов решения и качественного исследования задач, формулируемых в виде обыкновенных дифференциальных уравнений.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений» относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной.

Дисциплина "Качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений" входит в цикл дисциплин, которые обеспечивают овладение аналитическими и численными методами, необходимыми для подготовки специалиста математика. Она основывается на знаниях, полученных слушателями при изучении дисциплин "Математический анализ", "Алгебра", "Дифференциальные уравнения". Знания и навыки, полученные при изучении дисциплины "Качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений", используются как при изучении общепрофессиональных дисциплин, так и при изучении ряда специальных дисциплин.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-2</b> Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	<b>И-ПК-2.1</b> Обладает устойчивыми знаниями в области основных математических дисциплин, их аппарата и результатов	<b>Знать:</b> - топологическую классификацию простейших особых точек; - условия грубости особой точки на плоскости; условия существования и условия единственности периодического решения уравнений вида $x'' + F(x') + x = 0$ .
	<b>И-ПК-2.2</b> Обладает способностью применять современный математический аппарат в решении различных задач	<b>Уметь:</b> - определять индекс особой точки на плоскости; - находить периодические решения уравнения вынужденных колебаний $x'' + F(x') + x = e(t)$ .
	<b>И-ПК-2.3</b>	<b>Уметь:</b>

	Способен совершенствовать свои навыки, связанные с применением современного математического аппарата	- критически мыслить при решении практических задач, - подбирать научную литературу, включая современные наработки в области теории дифференциальных уравнений
<b>ПК-3</b> Способен к разработке и применению алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программного обеспечения	<b>И-ПК-3.1</b> Обладает устойчивыми знаниями в области разработки алгоритмов и программирования	<b>Знать:</b> - основные свойства траекторий автономных систем; - предельные циклы и функция последования.
	<b>И-ПК-3.3</b> Обладает способностью критического анализа и совершенствования разрабатываемых алгоритмов и программ	<b>Уметь:</b> критически анализировать задачу <b>Владеть:</b> способностью анализа и совершенствования изученных и вновь разработанных алгоритмов.

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **3** зачетные единицы, **108** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Свойства траекторий автономных систем.	8	1	2				2	
2	Предельные множества траекторий в $R^n$ . Траектории на плоскости, их предельные множества.	8	1					2	
3	Существование особой точки внутри замкнутой траектории. Теоремы о кольцевидной области без особых точек.	8	1	2				2	
4	Поведение траекторий в окрестности замкнутой траектории.	8		2				2	

5	Предельные циклы и функция последования.	8	1	2				2	
6	Траектории в окрестности особой точки. Секторы Бендиксона (гиперболический, параболический, эллиптический).	8		2				2	
7	Исключительные направления. Секторы Фракмера. Проблемы различия.	8	1	2				2	
8	Отыскание исключительных направлений. Исследование неособого исключительного направления. Примеры исследования сложных особых точек.	8	1	2				2	
9	Вращение векторного поля на плоскости. Индекс особой точки на плоскости. Примеры его вычисления.	8	1	2				2	
10	Теорема Брауэра о неподвижной точке для случая плоской области.	8		2				2	
11	Топологическая классификация простейших особых точек в $R^3$ .	8						2	
12	Условия существования и условия единственности периодического решения уравнения $x'' + F(x') + x = 0$ .	8	1	2		3		5	К.р.№1
13	Периодические решения уравнения вынужденных колебаний $x'' + F(x') + x = e(t)$ .	8	1	2		3		5	К.р.№2
14	Грубые и негрубые системы. Примеры бифуркаций.	8	1	2				2	

15	Определение грубости системы и формулировка теоремы о грубости.	8	1					2	
16	Свойства простых и кратных корней функции.	8	1	2				2	
17	Грубость точки пересечения двух кривых.	8	1	2				2	
18	Условия грубости особой точки на плоскости.	8	1	2				2	
19	Грубые и негрубые предельные циклы. Условия грубости сепаратрисы.	8	1	2				2	
20	Понятие о степени негрубости. Примеры.	8	1					2	
							0,3	7,7	Зачет
	<b>ИТОГО</b>		<b>16</b>	<b>32</b>		<b>6</b>	<b>0,3</b>	<b>53,7</b>	

## 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## 6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:  
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader;

- MikTeX (свободно распространяемое ПО).

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Электронно-библиотечная система «Консультант Студента»:  
<https://www.studentlibrary.ru/>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики: учебник для вузов. - М.: Наука, 2004.  
<https://djvu.online/file/XY0Zgytes78pt?ysclid=lu18b5ixci367405186>
2. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М., Наука, 1982  
<https://djvu.online/file/MX2nNLBujD0kr?ysclid=lu18heu4745755621>
3. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М., Наука, 1984 <https://djvu.online/file/NpliBm61K5EzQ?ysclid=lu18kyu2b4888562396>
4. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. - М., Мир, 1986 <http://www.t-library.net/read.php?id=2002>

### **б) дополнительная литература**

5. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. - Минск, Наука и техника, 1972. <https://mechmath.ipmnet.ru/lib/?s=ode>
6. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1971  
<https://djvu.online/file/1bd9rXXXMeU0c?ysclid=lu18ret166310586184>

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной тех-

ником с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

**Автор(ы):**

Д.ф.-м.н., профессор

Бережной Е. И.

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений»**

**Фонд оценочных средств для проведения текущей и промежуточной  
аттестации студентов по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта  
деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

**Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе  
текущей аттестации**

Примерные варианты контрольных работ:

Контрольная работа № 1

Решение уравнений вида  $x'' + F(x') + x = 0$ .

Решение уравнений вида  $x'' + F(x') + x = e(t)$ .

Контрольная работа № 2

Показать, что все траектории системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - (1 - x_1^2)x_2,$$

проходящие через точки  $(x_1, x_2)$  с  $x_1^2 + x_2^2 < 1$ ,  
стремятся к началу координат при  $t \rightarrow \infty$ .

Показать, что начало координат — неустой-  
чивая неподвижная точка для системы

$$\dot{x}_1 = x_1^2, \quad \dot{x}_2 = 2x_2^2 - x_1x_2$$

с помощью функции

$$V(x_1, x_2) = \alpha x_1^3 + \beta x_1^2 x_2 + \gamma x_1 x_2^2 + \delta x_2^3$$

при подходящем выборе констант  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .

**2. Список вопросов и (или) заданий для проведения  
промежуточной аттестации**

1. Свойства траекторий автономных систем.
2. Предельные множества траекторий в  $R^n$ .
3. Траектории на плоскости, их предельные множества.
4. Существование особой точки внутри замкнутой траектории.
5. Теоремы о кольцевидной области без особых точек.
6. Поведение траекторий в окрестности замкнутой траектории.
7. Предельные циклы и функция последования.
8. Траектории в окрестности особой точки.
9. Секторы Бендиксона (гиперболический, параболический, эллиптический).
10. Исключительные направления. Секторы Фракмера. Проблемы различения.
11. Отыскание исключительных направлений.
12. Исследование неособого исключительного направления. Примеры



исследования сложных особых точек.

13. Вращение векторного поля на плоскости. Индекс особой точки на плоскости. Примеры его вычисления.

14. Теорема Брауэра о неподвижной точке для случая плоской области.

15. Топологическая классификация простейших особых точек в  $R^3$ .

16. Условия существования и условия единственности периодического решения уравнения

17. Периодические решения уравнения вынужденных колебаний

18. Грубые и негрубые системы. Примеры бифуркаций.

19. Определение грубости системы и формулировка теоремы о грубости.

20. Свойства простых и кратных корней функции.

21. Грубость точки пересечения двух кривых.

22. Условия грубости особой точки на плоскости.

23. Грубые и негрубые предельные циклы.

24. Условия грубости сепаратрисы.

25. Понятие о степени негрубости. Примеры.

### **3. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкалы оценивания**

#### **3.1 Шкала оценивания сформированности компетенций и ее описание**

Оценивание уровня сформированности компетенций в процессе освоения дисциплины осуществляется по следующей трехуровневой шкале:

Пороговый уровень - предполагает отражение тех ожидаемых результатов, которые определяют минимальный набор знаний и (или) умений и (или) навыков, полученных студентом в результате освоения дисциплины. Пороговый уровень является обязательным уровнем для студента к моменту завершения им освоения данной дисциплины.

Продвинутый уровень - предполагает способность студента использовать знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, полученные при освоении дисциплины, для решения профессиональных задач. Продвинутый уровень превосходит пороговый уровень по нескольким существенным признакам.

Высокий уровень - предполагает способность студента использовать потенциал интегрированных знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, полученных при освоении дисциплины, для творческого решения профессиональных задач и самостоятельного поиска новых подходов в их решении путем комбинирования и использования известных способов решения применительно к конкретным условиям. Высокий уровень превосходит пороговый уровень по всем существенным признакам.

#### **3.2 Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования**

Код компетенции	Форма контроля	Этапы формирования (№ темы, раздела)	Показатели оценивания	Шкала и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования		
				Пороговый уровень	Продвинутый уровень	Высокий уровень
ПК-2	к/р в течен	все	Знать:	основные свойства	основные свойства траекторий	основные свойства траекторий

	ие семест ра			траекторий автономных систем; топологическую классификацию простейших особых точек;	автономных систем; топологическую классификацию простейших особых точек;	автономных систем; топологическую классификацию простейших особых точек;
			Знать:		условия грубости особой точки на плоскости;	условия грубости особой точки на плоскости;
			Знать:			условия существования и условия единственности периодического решения уравнений вида $x'' + F(x') + x = 0$ .
			Уметь:	определять индекс особой точки на плоскости;	определять индекс особой точки на плоскости;	определять индекс особой точки на плоскости;
			Уметь:		находить периодические решения уравнения вынужденных колебаний $x'' + F(x') + x = e(t)$ .	находить периодические решения уравнения вынужденных колебаний $x'' + F(x') + x = e(t)$ .

### 3.3 Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций

#### Пороговый уровень (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

#### Продвинутый уровень (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объеме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;

- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

#### **Высокий уровень (общие характеристики):**

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически верное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- глубокое усвоение необходимого материала из основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

### **3.4 Описание процедуры выставления оценки**

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «не зачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачтено» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Студенту желательно проявлять активное участие на занятиях, задавать вопросы, поскольку умение обосновывать свою точку зрения, нахождение компромиссного решения в этически выдержанной дискуссии не только важно для лучшего усвоения материала, но и ценится в реальной жизни. Важным моментом при изучении любой дисциплины является организация самостоятельной работы.

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Государственным стандартом предусматривается, как правило, 50% часов из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу студентов (далее СРС). В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования - «подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности».

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

В освоении дисциплины (модуля) инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная работа. Под индивидуальной работой подразумевается две формы взаимодействия с преподавателем:

индивидуальная учебная работа (консультации), т.е. дополнительное разъяснение учебного материала и углубленное изучение материала с теми обучающимися, которые в этом заинтересованы, и индивидуальная воспитательная работа. Индивидуальные консультации по предмету является важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или обучающимся с ограниченными возможностями здоровья.