

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Триангуляции Делоне и симплициальные сетки**

Направление подготовки (специальности)  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 21.04.2025, протокол № 10

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Триангуляции Делоне и симплициальные сетки» являются развитие геометрического мышления у студентов, а также овладение методами решения основных типов задач, связанных с использованием триангуляций.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина является факультативной дисциплиной. Для освоения данной дисциплины студенты быть знакомы с классическим аппаратом математического анализа, линейной алгебры и геометрии. Знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплины «Компьютерные технологии в математических дисциплинах», используются студентами в процессе изучения специальных дисциплин, а также полезны для продолжения обучения в магистратуре по направлению «Прикладная математика».

### 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-2</b> Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	<b>И-ПК-2.2</b> Обладает способностью применять современный математический аппарат в решении различных задач	<b>Владеет:</b> применением методов построения и обработки триангуляций к практическим задачам.

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **1** зачетная единица, **36** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)					Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)	
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		самостоятельная работа

1	<b>Вводная лекция.</b> Основные понятия дискретной геометрии. Симплекс. Симплициальный комплекс.	6		2				3	Задания для самостоятельной работы
2	<b>Диаграмма Вороного и триангуляция Делоне.</b>	6		4				3	Задания для самостоятельной работы
3	<b>Алгоритмы построения триангуляции Делоне.</b>	6		4				3	Задания для самостоятельной работы
4	<b>Трехмерные триангуляции Делоне.</b>	6		3		1		3	Задания для самостоятельной работы
5	<b>Симплициальные сетки.</b>	6		3		1		3	Задания для самостоятельной работы
							<b>0,3</b>	<b>2,7</b>	<b>зачет</b>
	<b>Всего</b>			<b>16</b>		<b>2</b>	<b>0,3</b>	<b>17,7</b>	

### Содержание разделов дисциплины:

#### Тема 1. Вводная лекция.

- 1.1. Определение основных понятий.
- 1.2. Понятие степени точки относительно окружности. Решение геометрических задач, связанных с использованием степени точки.

#### Тема 2. Диаграмма Вороного и триангуляция Делоне.

- 2.1. Определение клетки Вороного и диаграммы Вороного множество точек на плоскости.
- 2.2. Введение триангуляции Делоне как дуального множества к диаграмме Вороного.
- 2.3. Понятие несвободной триангуляции Делоне.

#### Тема 3. Алгоритмы построения триангуляции Делоне.

- 3.1. Основные структуры данных, используемые для хранения триангуляции.
- 3.2. Алгоритм построения триангуляции Делоне с помощью реберных флипов. Сходимость алгоритма. Оценка трудоемкости.
- 3.3. Алгоритм построения несвободной триангуляции Делоне с помощью реберных флипов. Сходимость алгоритма. Оценка трудоемкости.

#### Тема 4. Трехмерные триангуляции Делоне.

- 4.1. Обобщение основных понятий на трехмерный случай.
- 4.2. Понятие трехмерной триангуляции Делоне.
- 4.3. Алгоритм последовательного добавления (обобщение плоского алгоритма построения триангуляции Делоне с помощью реберных флипов).

#### Тема 5. Симплициальные сетки.

- 5.1. Понятия полиэдра и симплициальной сетки.
- 5.2. Алгоритм разбиения полиэдра на тетраэдры

### 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине (или ее разделе) и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных

дисциплин и в системе подготовки специалиста. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках курса, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader;
- MikTeX (свободно распространяемое ПО).

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT» [http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Электронно-библиотечная система «Консультант Студента»: <https://www.studentlibrary.ru/>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Edelsbrunner H. Geometry and Topology for Mesh Generation. Cambridge University Press, 2001. <https://www.cambridge.org/core/books/geometry-and-topology-for-mesh-generation/261548A36951B9F3E7E26506C26A447A>

2. Д. П. Ильютко, В. О. Мантуров, И. М. Никонов Комбинаторная топология и теория графов в задачах и упражнениях: - Ярославль: ЯрГУ, 2013.  
<http://www.lib.uni Yar.ac.ru/edocs/iuni/20130236.pdf>

**б) дополнительная литература**

1. Edelsbrunner H., Harer J.L. Computational topology, An Introduction. AMS, 2010.  
<https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/edelcomp.pdf>
2. Скворцов А. В. Триангуляция Делоне и ее применение. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. [https://indorsoft.ru/books/2002/SkvortsovAV-2002-01.Book\(Trn\).pdf](https://indorsoft.ru/books/2002/SkvortsovAV-2002-01.Book(Trn).pdf)

**9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

**Автор:**

доцент кафедры  
математического анализа, к.ф.-м.н.

М. М. Преображенская

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Триангуляции Делоне и симплициальные сетки»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**Задания для самостоятельной работы**

**Задания по теме № 1 «Введение»**

1. Докажите, множество точек, для которых степени относительно двух окружностей равны является прямой перпендикулярной линии, соединяющей центры данных окружностей.

**Задания по теме № 2 «Диаграмма Вороного и триангуляция Делоне»**

1. Пусть  $K$  - триангуляция множества из  $n$  точек на плоскости. Пусть  $l$  - прямая, которая не проходит ни через одну из этих точек. Докажите, что  $l$  пересекает не более  $2n-4$  ребер триангуляции  $K$  и что эта оценка является точной при  $n > 2$ .
2. Пусть  $K$  – триангуляция конечного множества на плоскости. Пусть  $t$  - количество треугольников в триангуляции, рассмотрим вектор из упорядоченных углов  $v(K) = (a_1, a_2, \dots, a_{3t})$ . Докажите, что либо  $v(K) = v(D)$ , либо  $v(K)$  лексикографически меньше чем  $v(D)$ , где  $D$  - триангуляция Делоне исходного множества.
3. Пусть  $K$  - триангуляция конечного множества на плоскости и  $r(K)$  - наибольший из радиусов описанных окружностей треугольников из  $K$ . Докажите, что  $r(K) > r(D)$  или  $r(K) = r(D)$ , где  $D$  - триангуляция Делоне того же множества.

**Задания по теме № 3 «Алгоритмы построения триангуляции Делоне»**

Пусть  $L$  множество из  $n$  отрезков на плоскости, попарно не имеющих общих точек. Назовем расстоянием от точки  $x$  из плоскости до отрезка  $ab$  из  $L$  минимальное из расстояний от  $x$  до некоторой точки  $ab$ . Областью Вороного отрезка  $ab$  назовем множество таких точек  $x$ , которые не дальше от  $ab$  чем от других отрезков из  $L$ .

1. Докажите, что область Вороного каждого отрезка из  $L$  связна.
2. Докажите, что ребра областей Вороного являются отрезками или участками парабол.
3. Докажите, что количество ребер Вороного не превосходит константы, умноженной на  $n$ .

**Задания по теме № 4 «Трехмерные триангуляции Делоне»**

1. Если мы возьмем все точки с целочисленными координатами, то получим пространственную сетку кубов. В центр каждого куба поместим по одной вершине. Таким образом мы построили центр-кубическую решетку. Для центра одного из кубов постройте клетку Вороного.
2. Докажите, что куб\* с одной отрезанной вершиной не может быть вписанным в сферу. Под кубом\* подразумевается многогранник, полученный путем таких геометрических преобразований обычного куба, что ребра и грани остаются прямолинейными и сохраняется комбинаторная структура.

### **Задания по теме № 5 «Симплициальные сетки»**

1. Пусть  $P$  выпуклый многогранник в  $R^3$  с  $n$  вершинами. Докажите, что  $P$  можно разбить на тетраэдры, удалив одну из вершин  $u$ , заменив  $P$  на выпуклую оболочку оставшихся вершин и добавив тетраэдры с вершиной в  $u$  и основаниями на границе усеченного  $P$ . Докажите, что существует такое упорядочивание вершин  $P$ , что в результате получается не более  $3n-11$  тетраэдров.

### **Список вопросов к зачёту**

1. Определение триангуляции диаграммы Вороного. Определение триангуляции Делоне как дуального множества. Корректность определения
2. Лемма о пустой окружности
3. Лемма об ацикличности
4. Лемма об опорной окружности
5. Лемма Делоне
6. Алгоритм реберных флипов. Определить его трудоемкость
7. Лемма о поднятой окружности
8. Свойство максимальности минимального угла
9. Алгоритм заматающей прямой для построения несвободной триангуляции
10. Несвободная лемма Делоне
11. Алгоритм реберных флипов для несвободной триангуляции Делоне
12. Определение трехмерной триангуляции Делоне, как дуального множества к трехмерной диаграмме Вороного. Корректность определения.
13. Существование разбиения полиэдра на тетраэдры с дополнительными внутренними точками. Алгоритм.
14. Пример полиэдра, который невозможно разбить на тетраэдры без добавления дополнительных вершин. Полиэдр Шенхардта.

### **Правила выставления оценки на зачёте.**

По окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка «зачтено» или «незачтено». Зачёт включает в себя два теоретических вопроса, на подготовку к ответу даётся не менее 1 часа.

Оценка «зачтено» выставляется студенту, успешно сдавшему практические задания по каждой теме в ходе семестра, а также у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Уровни сформированности компетенций оцениваются согласно критериям, приведённым ниже.

### **Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций**

**Пороговый уровень** (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;

- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

**Продвинутый уровень** (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объёме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

**Высокий уровень** (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.



## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Триангуляции Делоне и симплициальные сетки»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Триангуляции Делоне и симплициальные сетки» являются практические занятия и самостоятельная работа. Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации.

В конце семестра изучения дисциплины студенты сдают зачет. Зачет по итогам первого семестра выставляется по итогам решения задач в семестре и собеседования по изученным в семестре теоретическим вопросам.