

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

А. А. Добрынина, И. С. Огнев, М. В. Чистяков

# Термодинамические свойства замагниченной среды

*Учебно-методическое пособие*

Ярославль  
ЯрГУ  
2019

УДК 537.6(075.8)  
ББК В334я73  
Д57

*Рекомендовано  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2019 года*

**Рецензент**  
кафедра теоретической физики

**Добрынина, Александра Алексеевна.**

Д57      Термодинамические свойства замагниченной среды : учебно-методическое пособие / А. А. Добрынина, И. С. Огнев, М. В. Чистяков ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль : ЯрГУ, 2019. — 40 с.

Настоящее пособие представляет краткое изложение статистических методов описания квантового газа во внешнем магнитном поле. Для случая нерелятивистских фермионов с полуцелым спином получены общие выражения для основных термодинамических величин. Подробно разобраны способы их получения для бесполевого случая и фермионов без аномального магнитного момента.

Предназначено для студентов, обучающихся по дисциплинам «Астрофизика», «Избранные задачи статистической физики», «Нейтринная физика сверхновых и нейтронных звезд».

УДК 537.6(075.8)  
ББК В334я73

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-72-10070).*

© ЯрГУ, 2019

## Предисловие

Настоящее пособие посвящено достаточно важному и сложному вопросу статистического описания фермионного газа во внешнем магнитном поле. Необходимо отметить, что в учебной литературе практически полностью отсутствует целостное и ясное освещение данной проблемы, хотя отдельные задачи и некоторые частные подходы разбираются в ней подробно. Общие же принципы описания газа в магнитном поле и их связь со стандартным статистическим методом в бесполевым случае в этих источниках отсутствует. Все это делает самостоятельное освоение данного материала студентами крайне сложным. Отметим, что и научная литература по этой тематике представлена достаточно скудно.

Данное пособие состоит из трех основных разделов. Первый содержит общие принципы описания фермионного газа во внешнем магнитном поле. Таким образом, его результаты могут быть использованы в качестве базы для решения практически любых задач такого типа. Второй раздел посвящен важным частным случаям релятивистского заряженного газа без аномального магнитного момента и бoльцмановского нерелятивистского газа. Результаты данного раздела могут использоваться в качестве справочного материала по данным типам статистических систем. Наконец, третий раздел содержит примеры подробного вычисления термодинамических величин. Он призван дать студентам возможность самостоятельного получения всех приведенных во втором разделе результатов.

## Введение

Вопрос об описании эволюции системы, состоящей из большого числа частиц, имеет долгую историю и на настоящее время достаточно хорошо изучен. Исторически первым было термодинамическое описание таких систем. Основным его ограничением является предположение, что сохраняется масса  $M$  или число частиц  $\mathcal{N}$  в системе. Таким образом, данное описание является заведомо нерелятивистским. Его база основана на предположении, что существует небольшое число макроскопических величин, характеризующих систему в целом. Соответственно, такой набор может использоваться для однозначного определения состояния системы. Обычно в качестве таких параметров выбираются некоторые усредненные значения физических величин, например средняя энергия составляющих систему частиц или их концентрация. Конкретный набор параметров может быть разным и зависит от метода термодинамического описания. Так, например, в подходе, основанном на методе уравнений состояния, используются следующие величины:  $S$  — энтропия,  $T$  — температура,  $E$  — внутренняя энергия,  $P$  — давление,  $V$  — объем. В случае идеального газа с фиксированным числом частиц  $\mathcal{N}$  эти параметры удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} TdS = dE + PdV, \\ E = C_V T, \\ PV = k\mathcal{N}T, \end{cases} \quad (1)$$

где  $C_V$  — теплоемкость системы при постоянном объеме,  $k$  — постоянная Больцмана. Первое уравнение — это основное уравнение термодинамики для систем с постоянным числом частиц. Второе — калорическое уравнение идеального газа, которое связывает его внутреннюю энергию с температурой и объемом системы. Третье — термическое уравнение, определяющее давление газа через те же параметры. Таким образом, для однозначного определения состояния идеального газа (с постоянным числом частиц  $\mathcal{N}$ ) достаточно задать любые два его параметра. Например, это может быть температура и объем системы. Тогда все остальные термодинамические величины могут быть вычислены с использованием системы уравнений (1).

Альтернативным методом описания систем с большим числом частиц является метод термодинамических потенциалов. Зачастую он более удобен, так как достаточно легко переносится на системы с переменным

числом частиц. В этом случае для однозначного определения состояния системы требуются уже не два, а три независимых параметра. Каждый термодинамический потенциал имеет собственный набор таких параметров, которые являются для него естественными переменными. Так, например, для свободной энергии  $\mathbb{F}$  естественными переменными являются температура системы  $T$ , ее объем  $V$  и число частиц  $\mathcal{N}$ , поскольку именно через них может быть представлен ее полный дифференциал. Приведем соответствующее выражение для смеси из частиц  $k$  сортов:

$$d\mathbb{F} = -SdT - PdV + \sum_{i=1}^k \mu_i d\mathcal{N}_i, \quad (2)$$

где  $\mu_i$  — химический потенциал частиц сорта  $i$ . Таким образом, если свободная энергия задана как функция своих естественных переменных  $\mathbb{F}(T, V, \mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_k)$ , то она полностью определяет термодинамические свойства системы. Действительно, в этом случае все величины могут быть найдены как частные производные от  $\mathbb{F}$ :

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\partial \mathbb{F}(T, V, \mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_k)}{\partial T}, \\ P &= -\frac{\partial \mathbb{F}(T, V, \mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_k)}{\partial V}, \\ \mu_i &= \frac{\partial \mathbb{F}(T, V, \mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_k)}{\partial \mathcal{N}_i}. \end{aligned} \quad (3)$$

В качестве еще одного примера можно привести потенциал Гиббса  $\mathbb{G}$ . Для него естественными переменными являются температура  $T$ , давление  $P$  и число частиц  $\mathcal{N}$ :

$$d\mathbb{G} = -SdT + VdP + \sum_{i=1}^k \mu_i d\mathcal{N}_i, \quad (4)$$

а энтропия, объем и химические потенциалы частиц сорта  $i$  могут быть найдены как соответствующие частные производные  $\mathbb{G}$ .

Отметим, что приведенные способы описания системы из большого числа частиц подразумевают ее квазистатичность. Это означает, что любое изменение состояния системы происходит достаточно медленно. Медленность здесь означает, что характерное время изменения параметров системы существенно больше, чем времена релаксационных процессов в ней. Таким образом, в каждый момент времени такую систему можно считать находящейся в термодинамическом равновесии, когда все ее макроскопические величины не изменяются.

Понятие равновесности, приведенное выше, может быть расширено на некоторые в целом неравновесные системы. Для этого их необходимо разбить на маленькие подсистемы, которые тем не менее содержат большое число частиц. Тогда к каждой из подсистем могут быть применены термодинамические методы описания. Это справедливо, по крайней мере, в том случае, когда локальные релаксационные процессы в подсистемах происходят на временных масштабах, много меньших, чем характерное время неравновесности всей системы. В этом случае для каждой подсистемы термодинамические величины будут иметь свои собственные значения. Если при переходе от одной подсистемы к другой они меняются незначительно, то можно положить их непрерывными функциями от пространственных координат и времени. Такое приближенное описание неравновесных систем с помощью методов термодинамики получило название локального термодинамического равновесия. В качестве примера подобной системы можно привести Солнце. Хотя в целом это неравновесный объект, тем не менее все его части находятся в локальном термодинамическом равновесии. Таким образом, Солнце может быть описано, например, локальными температурой  $T(\vec{r}, t)$  и концентрацией частиц  $N(\vec{r}, t)$ , которые различны в разных частях звезды, а также меняются со временем.

Везде далее будет использоваться система единиц, в которой  $c = \hbar = k = 1$ , где  $c$  — скорость света,  $\hbar$  — постоянная Планка.

# 1. Общее описание газа на основе его одночастичной функции распределения

Одним из наиболее мощных методов описания свойств систем, состоящих из большого числа частиц, является статистический подход, основанный на так называемой одночастичной функции распределения. Он является достаточно общим и позволяет описывать в том числе неравновесные системы. Отметим, однако, что данный метод не универсален и, например, не может быть напрямую использован для описания коллективных эффектов или процессов релаксации в газе или плазме. Это связано с тем, что при описании через одночастичную функцию распределения движение всех частиц считается независимым друг от друга. Возможность перехода к такому описанию и границы его применимости приводятся во множестве источников (см., например, [1]). Здесь же мы не будем останавливаться на данном вопросе. Отметим лишь, что вследствие относительной простоты и большой общности метод одночастичной функции распределения является наиболее распространенным для описания систем, состоящих из большого числа частиц.

## 1.1. Релятивистское описание свободного газа

Релятивистское описание макроскопических свойств свободного газа, состояние которого может быть задано одночастичной функцией распределения  $f$ , базируется на ее так называемых моментах. В ковариантной форме они могут быть определены следующим образом [2, 3]:

$$\mathbb{M}^{\alpha\beta\ldots\gamma\delta} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int p^\alpha p^\beta \ldots p^\gamma p^\delta f \frac{d^3p}{p_0}, \quad (5)$$

где  $p^\alpha = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  — 4-импульс частиц газа, а интегрирование идет по 3-мерному импульсному пространству с элементом  $d^3p = dp_1 dp_2 dp_3$ . Здесь параметр  $g = 2s+1$  ( $m \neq 0$ ) и  $g = 2s$  ( $m = 0$ ) учитывает число спиновых степеней свободы частицы со спином  $s$ , а  $m$  — ее масса. Отметим, что фактор  $g/(2\pi)^3$  иногда включается в литературе непосредственно в определение самой функции распределения  $f$ , как это сделано в [2, 3]. Однако здесь мы относим его к элементу импульсного пространства, как это обычно принято в квантовой статистике. В приведенном выше выражении подразумевается, что  $p^\alpha p_\alpha = m^2$ . Отсюда следует, что величина  $d^3p/p_0$ , а значит, и  $f$  являются Лоренц-инвариантными. Детальное

обсуждение этого вопроса можно найти во множестве источников (см., например, [2, 3] и цитируемую там литературу). Как правило, обычно используются лишь первые два момента, которые называют 4-вектором потока частиц:

$$\mathbb{N}^\alpha = \mathbb{M}^\alpha = \frac{g}{(2\pi)^3} \int p^\alpha f \frac{d^3p}{p_0} \quad (6)$$

и тензором их энергии-импульса:

$$\mathbb{T}^{\alpha\beta} = \mathbb{M}^{\alpha\beta} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int p^\alpha p^\beta f \frac{d^3p}{p_0}. \quad (7)$$

Если в сопутствующей системе отсчета распределения газа изотропно, то данные величины могут быть выражены через локальную 4-скорость среды  $U^\mu$  [2, 3]:

$$\mathbb{N}^\alpha = N U^\alpha, \quad (8)$$

$$\mathbb{T}^{\alpha\beta} = (E + P) U^\alpha U^\beta - P \eta^{\alpha\beta}, \quad (9)$$

где  $N$  — концентрация частиц,  $E$  — их плотность энергии,  $P$  — изотропное давление в локальной системе покоя среды, в которой  $U^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ . Здесь  $\eta^{\alpha\beta}$  — метрический тензор Минковского с сигнатурой  $(+, -, -, -)$ . Отметим, что данные выражения справедливы для любого изотропного распределения газа, даже если он не находится в состоянии равновесия.

В случае локального термодинамического равновесия одночастичная функция распределения газа  $f$  с точностью до обсуждаемой выше нормировки импульсного пространства оказывается равной [2, 3]:

$$f_{eq} = \frac{1}{\exp[(p^\alpha U_\alpha - \mu)/T] \pm 1}, \quad (10)$$

где Лоренц-инвариантные параметры  $T$  и  $\mu$  имеют смысл локальной температуры и химического потенциала частиц в системе покоя среды. Здесь знаки "+" и "-" относятся соответственно к фермионам со статистикой Ферми-Дирака ( $s = 1/2, 3/2, 5/2 \dots$ ) и бозонам со статистикой Бозе-Эйнштейна ( $s = 0, 1, 2 \dots$ ). Отметим, что приведенные выше выражения позволяют ковариантным образом описывать квантовый релятивистский газ, в том числе не находящийся в состоянии локального термодинамического равновесия ( $f \neq f_{eq}$ ). Здесь не приводится обобщение данного подхода к описанию газа через одночастичную функцию распределения на случай общей теории относительности. Заметим лишь, что такое обобщение базируется на построении инвариантного элемента 3-мерного импульсного и обычного пространства (см., например, [4]).

В системе покоя среды, которая находится в локальном термодинамическом равновесии, его функция распределения  $f_0$  является изотропной. Таким образом, отличными от нуля будут лишь те компоненты тензора  $\mathbb{M}^{\alpha\beta\ldots\gamma\delta}$ , которые содержат  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  в четных степенях. Кроме того, так как модуль 3-мерного импульса  $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ , то в силу изотропности

$$\begin{aligned} \int p_1^2 \ldots f_0 \frac{d^3 p}{p_0} &= \int p_2^2 \ldots f_0 \frac{d^3 p}{p_0} = \int p_3^2 \ldots f_0 \frac{d^3 p}{p_0} = \\ &= \frac{1}{3} \int p^2 \ldots f_0 \frac{d^3 p}{p_0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Это позволяет представить в системе покоя среды любую, не равную нулю компоненту тензора  $\mathbb{M}^{\alpha\beta\ldots\gamma\delta}$  в следующем виде:

$$M_{n,k} = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{3^{k/2}} \int p_0^n p^k f_0 \frac{d^3 p}{p_0} = \frac{g}{2\pi^2 3^{k/2}} \int_0^\infty \frac{p_0^{n-1} p^{k+2} dp}{\exp[(p_0 - \mu)/T] \pm 1}, \quad (12)$$

где индексы  $n$  и  $k$  соответствуют степеням энергии и модуля импульса в тензоре  $\mathbb{M}$ , число  $n + k$  равно его рангу,  $p_0 = \sqrt{p^2 + m^2}$  — энергия частицы. Отсюда для первых двух моментов функции распределения имеем следующие выражения для отличных от нуля компонент. Временная компонента вектора потока частиц:

$$N_0 = \mathbb{N}^0 = M_{1,0} = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp[(p_0 - \mu)/T] \pm 1}, \quad (13)$$

а также диагональные компоненты тензора энергии-импульса:

$$E_0 = \mathbb{T}^{00} = M_{2,0} = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p_0 p^2 dp}{\exp[(p_0 - \mu)/T] \pm 1}, \quad (14)$$

$$P_0 = \mathbb{T}^{11} = \mathbb{T}^{22} = \mathbb{T}^{33} = M_{0,2} = \frac{g}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{p_0^{-1} p^4 dp}{\exp[(p_0 - \mu)/T] \pm 1}. \quad (15)$$

Как следует из (8) и (9), они соответствуют локальной концентрации частиц  $N_0$ , их плотности энергии  $E_0$  и изотропному давлению  $P_0$  в системе покоя среды.

Для дальнейших вычислений удобно ввести безразмерные химический потенциал  $a = \mu/T$  и обратную температуру  $\Delta = m/T$ . В терминах

данных параметров компоненты моментов функции распределения можно выразить через следующий интеграл общего вида:

$$\begin{aligned} J_{\nu,\lambda}(a, \Delta) &= \int_0^\infty \frac{(x^2 + \Delta^2)^{\nu/2} x^\lambda dx}{\exp[\sqrt{x^2 + \Delta^2} - a] + 1} = \\ &= \int_\Delta^\infty \frac{y^{\nu+1} (y^2 - \Delta^2)^{(\lambda-1)/2} dy}{\exp[y - a] + 1}, \end{aligned} \quad (16)$$

где введены безразмерные энергия  $y = p_0/T = \sqrt{x^2 + \Delta^2}$  и импульс  $x = p/T$ , а индексы  $\nu$  и  $\lambda$  соответствуют их степеням в интеграле. Отсюда для компонент моментов функции распределения получаем следующее общее выражение:

$$M_{n,k} = \frac{g m^{n+k+2}}{2\pi^2 3^{k/2}} \frac{J_{n-1,k+2}(a, \Delta)}{\Delta^{n+k+2}}. \quad (17)$$

Напомним, что индекс  $k$  может принимать лишь четные значения, так как в силу изотропности отличны от нуля лишь компоненты тензора  $\mathbb{M}^{\alpha\beta\dots\gamma\delta}$ , содержащие четные степени  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$ .

## 1.2. Описание газа с полуцелым спином в магнитном поле

Описание свойств газа усложняется, если он находится во внешнем магнитном поле. В первую очередь это связано с тем, что его термодинамические свойства становятся анизотропными, так как появляется явно выделенное направление, связанное с вектором напряженности магнитного поля. Однако, как показано, например, в работе [5], и в этом случае свойства фермионного газа с полуцелым спином ( $s = 1/2$ ) могут быть рассчитаны через интегралы от его одночастичной функции распределения  $f_B$ . В наиболее общем виде, с учетом аномального магнитного момента частицы  $\kappa_a$ , соответствующие величины в системе покоя среды могут быть представлены следующим образом [5]:

$$N_B = \mathbb{N}_B^0 = \sum_\sigma \int_p \hat{f}_B, \quad (18)$$

$$E_B = \mathbb{T}_B^{00} = \sum_\sigma \int_p p_B \hat{f}_B, \quad (19)$$

$$P_{\perp} = \frac{1}{2} (\mathbb{T}_B^{11} + \mathbb{T}_B^{22}) = \sum_{\sigma} \int_p \frac{\hat{\mathcal{P}}_{\perp}}{p_B} \left[ \frac{p_{\perp}^2}{2\sqrt{m^2 + p_{\perp}^2}} - \sigma \kappa_a B \right] f_B, \quad (20)$$

$$P_{\parallel} = \mathbb{T}_B^{33} = \sum_{\sigma} \int_p \frac{\hat{p}_{\parallel}^2}{p_B} f_B, \quad (21)$$

где под оператором  $\hat{\int}_p$  подразумевается интегрирование или суммирование по квантовым числам частицы, отвечающим компонентам 3-мерного импульса,  $\sigma = \pm 1$  — проекция ее удвоенного спина на направление магнитного поля. Здесь система отсчета выбрана таким образом, чтобы вектор напряженности магнитного поля был направлен по третьей оси:  $\vec{B} = (0, 0, B)$ . Отметим, что в случае заряженных частиц одна из поперечных к магнитному полю компонент импульса квантуется, а другая является нефизической. Тем не менее для их обозначения здесь используется символ  $p_{\perp}$ , который для незаряженных частиц равен  $\sqrt{p_1^2 + p_2^2}$ . Третья компонента импульса здесь обозначается как  $p_{\parallel} = p_3$ . Такие обозначения позволяют абстрагироваться от выбранной системы координат и связать компоненты импульса с выделенным направлением, определяемым магнитным полем. Кроме того, все используемые величины могут быть представлены в единообразном виде как для заряженных, так и для незаряженных частиц. Так для энергии фермиона в этих обозначениях имеем:

$$p_B = \sqrt{p_{\parallel}^2 + \mathcal{P}_{\perp}^2}, \quad (22)$$

где  $\mathcal{P}_{\perp} = \sqrt{m^2 + p_{\perp}^2} - \sigma \kappa_a B$ . Вид равновесной функции распределения в магнитном поле совпадает с бесполевым случаем (10) с точностью до введенного выше более общего определения энергии частицы:

$$f_B = \frac{1}{\exp[(p_B - \mu)/T] + 1}. \quad (23)$$

Также здесь по сравнению с (10) оставлен лишь знак "+", который соответствует фермионам.

Конкретизируем вид введенного выше оператора  $\hat{\int}_p$ . В случае незаряженных частиц в магнитном поле он представляет из себя интегрирование по их импульсному пространству:

$$\int_p \hat{\quad} = \int \frac{d^2 p_{\perp} dp_{\parallel}}{(2\pi)^3}, \quad (24)$$

где под поперечными импульсами понимаются физические компоненты  $p_1$  и  $p_2$ . То есть в данном случае

$$p_\perp^2|_{q=0} = p_1^2 + p_2^2, \quad (25)$$

а элемент поперечного импульсного пространства:  $d^2p_\perp = dp_1 dp_2$ . Легко убедиться, что для незаряженных частиц с нулевым аномальным магнитным моментом  $\kappa_a = 0$  давление становится изотропным. Кроме того, выражения (18)-(21) переходят в (13)-(15), то есть восстанавливается бесполеное описание газа фермионов.

В случае заряженных частиц оператору  $\hat{\int}_p$  соответствует интегрирование по продольному импульсу частицы и суммирование по дискретному квантовому числу ее поперечной составляющей:

$$\hat{\int}_p (q \neq 0) = \frac{qB}{(2\pi)^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel, \quad (26)$$

где  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  — осцилляторное число,  $q$  — модуль заряда частицы. Аналогом поперечного импульса в этом случае является величина:

$$p_\perp^2|_{q \neq 0} = 2qB\ell, \quad (27)$$

где  $\ell = \nu + (1 - \varrho\sigma)/2$  — индекс, нумерующий уровни Ландау частицы,  $\varrho = \pm 1$  — знак ее заряда. Таким образом, в магнитном поле поперечный импульс заряженных частиц квантуется, а набор квантованных значений определяется параметром  $\ell$ . Как следует из определения, его минимальное значение  $\ell = 0$  соответствует квантовым числам  $\nu = 0, \sigma = \varrho$ . То есть частица с минимальным поперечным импульсом обладает поляризацией, совпадающей со знаком ее заряда. Поперечный импульс фермионов на более высоких уровнях Ландау  $\ell = \{1; 2; \dots\}$  является двукратно вырожденным по поляризации и соответствует следующим парам квантовых чисел:  $\{(\nu = 0, \sigma = -\varrho), (\nu = 1, \sigma = \varrho); (\nu = 1, \sigma = -\varrho), (\nu = 2, \sigma = \varrho); \dots\}$ . Так как в определении моментов функции распределения (18)-(21) входит именно  $p_\perp$ , то зачастую удобно суммирование по параметру  $\nu$  в (26) заменить на  $\ell$ . Тогда основному уровню Ландау  $\ell = 0$  будет соответствовать одно значение поляризации  $\sigma = \varrho$ , а остальным уровням  $\ell > 0$  два значения с  $\sigma = \pm 1$ .

Далее остановимся более подробно на спектре поперечной энергии заряженного фермиона в магнитном поле. Как следует из (22), она совпадает с величиной  $\mathcal{P}_\perp$ :

$$p_{B\perp} = p_B[p_\parallel=0] = \mathcal{P}_\perp[q \neq 0] = \sqrt{m^2 + 2qB\ell} - \sigma\kappa_a B. \quad (28)$$

Из приведенного выражения видно, что спектр энергии является дискретным и определяется индексом  $\ell$ , нумерующим уровни Ландау частицы. Рассмотрим наиболее простой случай фермиона без аномального магнитного момента  $\kappa_a = 0$ . Его поперечная энергия  $p_{B\perp} = \sqrt{m^2 + 2qB\ell}$  не зависит от поляризации и растет с увеличением номера уровня Ландау. Минимальное значение при  $\ell = 0$  равно массе частицы и соответствует состоянию с поляризацией  $\sigma = \varrho$ . Поперечные энергии на более высоких уровнях Ландау  $\ell > 0$  являются двукратно вырожденными и соответствуют состояниям с поляризациями  $\sigma = \pm 1$ .

Вид спектра фермионов становится более сложным, если они обладают аномальным магнитным моментом  $\kappa_a \neq 0$ . В этом случае их поперечная энергия уже явно зависит от поляризации. Так, для основного

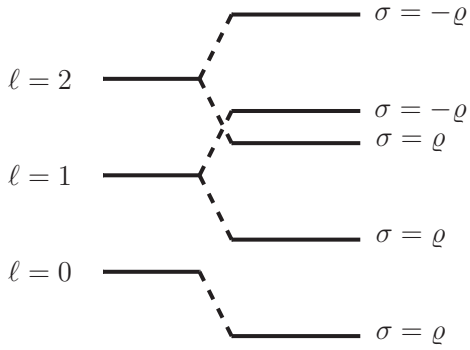


Рис. 1. Спектр поперечной энергии фермионов  $p_{B\perp}$  в нерелятивистском случае для  $\varrho\kappa_a > q/(2m)$

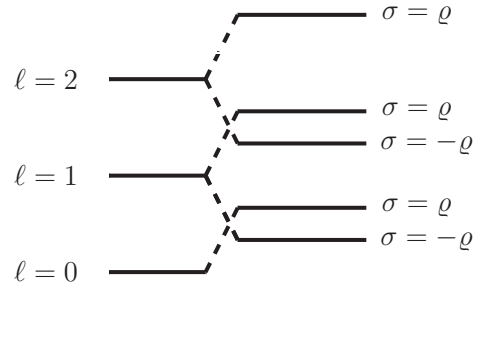


Рис. 2. Спектр поперечной энергии фермионов  $p_{B\perp}$  в нерелятивистском случае для  $\varrho\kappa_a < -q/(2m)$

уровня Ландау  $\ell = 0$  имеем:  $p_{B\perp} = m - \varrho\kappa_a B$ , то есть поведение данной энергии зависит от знака величины  $\varrho\kappa_a$ . Если она положительна, то энергия основного уровня Ландау уменьшается, если отрицательна, то увеличивается по сравнению со случаем фермиона без аномального магнитного момента. Для более высоких уровней Ландау  $\ell > 0$  снимается их вырождение по поляризации частиц. Так, для состояния с  $\sigma\kappa_a > 0$  поперечная энергия становится меньше, а для противоположной поляризации больше, чем энергия соответствующего уровня Ландау частицы без аномального магнитного момента. Так как величина такого расщепления уровней Ландау увеличивается с ростом абсолютного значения аномального магнитного момента, то возможна ситуация, когда происходит их "перекрывание". То есть энергия, соответствующая более высокому уровню Ландау оказывается по значению меньше, чем энергия более низкого, и наоборот. В случае слабого магнитного поля  $B \ll m^2/q$  такая

ситуация реализуется при  $|\kappa_a| > q/(2m)$ . То есть при абсолютном значении аномального магнитного момента частицы, большем ее магнетона. Подчеркнем, что это достаточно типичная ситуация для адронов. Так, например, протон имеет аномальный магнитный момент  $\kappa_a \approx 1.79$  в единицах ядерного магнетона, поэтому его уровни Ландау перекрываются. Отметим, что для частиц с  $g\kappa_a < 0$  данный эффект приводит к тому, что минимальное значение поперечной энергии соответствует уже не основному, а первому уровню Ландау. Наглядное представление спектра фермионов для различных знаков заряда показано на рис. 1-2. Отметим также, что частицы и античастицы отличаются знаком не только заряда, но и аномального магнитного момента. Таким образом, для фермионов в магнитном поле спектр частиц и античастиц полностью совпадает, однако каждому отдельному значению энергии для них соответствуют состояния с противоположной поляризацией.

В заключение коротко остановимся на анизотропии термодинамических свойств газа в магнитном поле. Необходимо отметить, что наличие подобной асимметрии не должно вводить в заблуждение. Так как физически наблюдаемыми являются свойства не самого газа, а системы, состоящей из частиц и внешнего магнитного поля. Рассмотрим это на примере давления, которое для газа является анизотропным. Как было показано в работе [5], даже в случае аномального магнитного момента компоненты давления удовлетворяет следующим соотношениям:

$$P_{\parallel} = -\Omega/V, \quad (29)$$

$$P_{\perp} = P_{\parallel} - MB, \quad (30)$$

где  $\Omega$  — большой термодинамический потенциал,  $M = \partial\Omega/\partial B$  — намагниченность газа. Таким образом, давление вдоль магнитного поля определяется аналогично бесполевному случаю. Поперечное давление оказывается меньше на величину  $MB$ , однако это уменьшение в точности равно вкладу в давление от магнитного поля:  $P_{\perp B} = MB$ . Следовательно, общее давление системы, состоящей из газа и магнитного поля, оказывается изотропным и равным  $P_{\parallel} = -\Omega/V$ . Обсуждение этого факта можно найти, например, в [6]. Здесь же далее будет рассматриваться только продольное давление  $P_B = P_{\parallel}$ , так как именно эта величина определяет полное давление системы, состоящей из газа и магнитного поля.

## 2. Некоторые частные случаи для фермионного газа в магнитном поле

Как было отмечено выше, приведенный подход к описанию фермионного газа с полуцелым спином в магнитном поле дает наиболее общий метод описания таких систем. С одной стороны, это является его бесспорным преимуществом, так как позволяет избежать возможных ошибок, связанных с использованием частных методов за пределами их границы применимости. С другой стороны, он оказывается зачастую математически излишне сложным для решения конкретных задач. Поэтому далее будет рассмотрено несколько предельных случаев, имеющих важное практическое применение в различных разделах физики.

### 2.1. Релятивистский заряженный газ без аномального магнитного момента

Одной из достаточно общих, но тем не менее допускающих существенное упрощение задач является описание релятивистского заряженного газа без аномального магнитного момента. Такие задачи, как правило, возникают в астрофизике, применительно к электрон-позитронной плазме. Хотя эти частицы обладают аномальным магнитным моментом, но он примерно на три порядка меньше полного. Таким образом, в подавляющем большинстве практических задач им можно пренебречь.

В отсутствие аномального магнитного момента возникает несколько существенных упрощений. Во-первых, общее выражение для энергии (22) переходит в более простое:

$$\varepsilon_\ell = p_B [\kappa_a = 0, q \neq 0] = \sqrt{p_3^2 + m^2 + 2qB\ell}, \quad (31)$$

где для компоненты импульса вдоль напряженности магнитного поля использовано более привычное обозначение  $p_3$ . Во-вторых, в этом случае в операторе  $\hat{f}_p$  (26) удобно от суммирования по осцилляторному числу  $\nu$  перейти к суммированию по уровням Ландау  $\ell$ . Как обсуждалось выше, при таком переходе сумма по поляризациям может быть заменена на фактор  $g_\ell = 2 - \delta_{0,\ell}$ , где  $\delta_{0,\ell}$  — символ Кронекера. Это связано с тем, что энергия в данном случае не зависит явно от поляризации частицы. Кроме того, каждому уровню Ландау, кроме основного, соответствует два значения поляризации. С учетом этого замечания из общих соотношений (18)-(21) после суммирования по спиновым состояниям можно

перейти к более простой записи основных термодинамических величин. А именно, получаем следующие выражения:

$$N_{\kappa 0} = N_B [\kappa_a = 0, q \neq 0] = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{g_{\ell}}{2\pi^2} qB \int_0^{\infty} \frac{dp_3}{\exp[(\varepsilon_{\ell} - \mu)/T] + 1}, \quad (32)$$

$$E_{\kappa 0} = E_B [\kappa_a = 0, q \neq 0] = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{g_{\ell}}{2\pi^2} qB \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_{\ell} dp_3}{\exp[(\varepsilon_{\ell} - \mu)/T] + 1} \quad (33)$$

$$P_{\kappa 0} = P_{\parallel} [\kappa_a = 0, q \neq 0] = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{g_{\ell}}{2\pi^2} qB \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_{\ell}^{-1} p_3^2 dp_3}{\exp[(\varepsilon_{\ell} - \mu)/T] + 1}. \quad (34)$$

Как и для случая без магнитного поля, данные величины могут быть выражены в терминах моментов одночастичной функции распределения  $f_B$ . Однако их явный вид этих тензоров будет отличаться:

$$\mathbb{M}_{\kappa 0}^{\alpha_{\parallel} \beta_{\parallel} \dots \gamma_{\parallel} \delta_{\parallel}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{g_{\ell}}{(2\pi)^2} qB \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^{\alpha_{\parallel}} p^{\beta_{\parallel}} \dots p^{\gamma_{\parallel}} p^{\delta_{\parallel}}}{\exp[(\varepsilon_{\ell} - \mu)/T] + 1} \frac{dp_3}{\varepsilon_{\ell}}, \quad (35)$$

где под  $p^{\alpha_{\parallel}} = (p_0, p_3)$  понимается вектор продольного 2-мерного импульса. Как и в беспольном случае, моменты, содержащие  $p_3$  в нечетной степени будут равны нулю. Остальные компоненты тензора  $\mathbb{M}_{\kappa 0}$  могут быть представлены как:

$$M_{n,k}^{(\kappa 0)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{g_{\ell}}{2\pi^2} qB \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_{\ell}^{n-1} p_3^k dp_3}{\exp[(\varepsilon_{\ell} - \mu)/T] + 1}. \quad (36)$$

Здесь индексы  $n$  и  $k$  соответствуют степеням энергии и продольного импульса в тензоре  $\mathbb{M}_{\kappa 0}$ , число  $n + k$  равно его рангу. Приведенные компоненты могут быть также выражены в терминах безразмерного интеграла (16), введенного выше:

$$M_{n,k}^{(\kappa 0)} = \frac{m^{n+k+2}}{2\pi^2} \frac{b}{\Delta^{n+k}} \sum_{\ell=0}^{\infty} g_{\ell} J_{n-1,k}(a, \Delta_{\ell}), \quad (37)$$

где  $b = qB/m^2$  — безразмерное магнитное поле,  $\Delta_{\ell} = \Delta \sqrt{1 + 2b\ell}$ . Данные компоненты, как и в беспольном случае, однозначно связаны с физическими величинами:

$$N_{\kappa 0} = M_{1,0}^{(\kappa 0)}, \quad E_{\kappa 0} = M_{2,0}^{(\kappa 0)}, \quad P_{\kappa 0} = M_{0,2}^{(\kappa 0)}. \quad (38)$$

Таким образом, введенный тензор  $\mathbb{M}_{\kappa 0}$  позволяет установить однозначную связь между любыми физическими величинами фермионного газа без аномального магнитного момента в свободном и полевом случае:

$$M_{n,k} \Longleftrightarrow M_{n,k}^{(\kappa 0)}. \quad (39)$$

Кроме того, соотношения (17) и (37) позволяют проводить их непосредственное сравнение и вычисление через интеграл общего вида (16).

В заключение раздела отметим, что тензор  $\mathbb{M}_{\kappa 0}$  может быть легко расширен также и на поперечные компоненты с помощью соотношения:

$$\int_0^\infty p_\perp^2 \dots f_B \frac{dp_3}{\varepsilon_\ell} = \int_0^\infty (\varepsilon_\ell^2 - p_3^2 - m^2) \dots f_B \frac{dp_3}{\varepsilon_\ell}, \quad (40)$$

которое следует непосредственно из выражения для энергии (31). Таким образом, данное соотношение позволяет построить полное соответствие между свободными и полевыми характеристиками фермионного газа без аномального магнитного момента.

## 2.2. Нерелятивистский бoльцмановский газ с аномальным магнитным моментом

Другим важным частным случаем является нерелятивистский бoльцмановский газ с аномальным магнитным моментом. Отметим, что этот предел важен как для различных астрофизических приложений, так и для общего понимания термодинамических свойств фермионного газа в магнитном поле, так как он допускает общее аналитическое решение. В контексте астрофизических приложений данный предел хорошо применим к нуклонам, за исключением случаев нейтронной звезды и центральной части сверхновой.

Бoльцмановским газом называют газ с относительно малой концентрацией, для которого выполняется следующее условие:

$$\mu - m \ll T. \quad (41)$$

Такой тип газа в литературе иногда еще называют классическим или неквантовым. Отметим, что выражение  $(\mu - m)/T$  входит в интеграл (16) под экспонентой. Таким образом, во многих задачах приближение бoльцмановского газа хорошо выполняется уже при  $\mu - m \lesssim T$ . В данном

приближении функция распределения упрощается и может быть представлена в виде:

$$f = (e^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1)^{-1} \approx e^{(\mu-\varepsilon)/T}. \quad (42)$$

Отметим, что приведенное приближение для функции распределения справедливо как для свободного газа, так и для газа во внешнем магнитном поле. Кроме того, в бесполевым случае данное приближение справедливо как для фермионов, так и бозонов.

### 2.2.1. Фермионы без магнитного поля

Начнем рассмотрение бoльцмановского газа с самого простого случая, когда внешнее магнитное поле отсутствует. Тогда из общего бесполевого выражения  $p_0 = \sqrt{p^2 + m^2}$  в нерелятивистском пределе для энергии фермиона получаем:

$$\varepsilon_{n0} \approx m + p^2/(2m). \quad (43)$$

Вычисление термодинамических величин для такого газа в бoльцмановском приближении (42) становится тривиальным и приводит к следующему результату:

$$N_{n0} = 2 \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu-m)/T}, \quad (44)$$

$$\bar{E}_{n0} = E_{n0} - m N_{n0} = 3 T \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu-m)/T}, \quad (45)$$

$$P_{n0} = 2 T \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu-m)/T}, \quad (46)$$

где  $\bar{E}_{n0}$  — плотность нерелятивистской энергии газа. Подробности данных вычислений могут быть найдены в разделе 3.1.

### 2.2.2. Незаряженные частицы с аномальным магнитным моментом

Далее рассмотрим фермионный газ с полуцелым спином во внешнем магнитном поле. В качестве фермионов выберем незаряженные частицы с аномальным магнитным моментом  $\kappa_a$ . Тогда из общего выражения для энергии (22) в нерелятивистском пределе имеем:

$$\varepsilon_{n0k} \approx m + p^2/(2m) - \sigma \kappa_a B, \quad (47)$$

где, как и ранее,  $\sigma = \pm 1$  — поляризация фермиона. Как и в случае отсутствия магнитного поля, вычисление термодинамических величин достаточно тривиально и дает:

$$N_{n0k} = N_{n0} \cosh(x), \quad (48)$$

$$\bar{E}_{n0k} = \bar{E}_{n0} \left[ \cosh(x) - 2/3 x \sinh(x) \right], \quad (49)$$

$$P_{n0k} = P_{n0} \cosh(x). \quad (50)$$

Здесь введен следующий безразмерный параметр, определяющий влияние магнитного поля на термодинамические величины газа:

$$x = \kappa_a B/T. \quad (51)$$

Из полученных выражений несложно видеть, что модификация термодинамических величин становится существенной в области, где данный параметр велик  $x \gtrsim 1$ .

Отметим, что даже для незаряженных частиц магнитный момент принято измерять в единицах, получивших название магнетон:  $q/2m$ . Обычно вместо  $q$  используется элементарный заряд, а в качестве  $m$  выступает масса электрона или протона. Тогда параметр  $x$  может быть выражен через безразмерный аномальный магнитный момент  $\varkappa_a = \kappa_a 2m/q$  следующим образом:

$$x = b_t \varkappa_a / 2, \quad (52)$$

где введено безразмерное магнитное поле в виде:

$$b_t = qB/mT. \quad (53)$$

Так как для адронов  $|\varkappa_a| \sim 1$ , то несложно видеть, что модификация бесpoleвых выражений будет существенной для них при  $b_t \gtrsim 1$ . Таким образом, данный параметр является определяющим в смысле влияния магнитного поля на термодинамические характеристики незаряженных частиц с достаточно большим аномальным магнитным моментом.

### 2.2.3. Заряженные фермионы без аномального магнитного момента

Перейдем далее к заряженному фермионному газу. Сначала рассмотрим фермионы без аномального магнитного момента. В нерелятивистском пределе из общего выражения (31) получаем их энергию:

$$\varepsilon_{nq0} \approx m + p_3^2/(2m) + qB\ell/m, \quad (54)$$

поперечная часть которой, как отмечалось выше, квантуется и определяется номером уровня Ландау  $\ell$ . Вычисление термодинамических величин в этом случае чуть более сложно, но также приводит к аналитическому результату:

$$N_{nq0} = N_{n0} \left[ \frac{b_t}{2} + \frac{b_t}{\exp(b_t) - 1} \right], \quad (55)$$

$$\bar{E}_{nq0} = \bar{E}_{n0} \left[ \frac{b_t}{6} + \frac{b_t}{3(\exp(b_t) - 1)} + \frac{2b_t^2 \exp(b_t)}{3(\exp(b_t) - 1)^2} \right], \quad (56)$$

$$P_{nq0} = P_{n0} \left[ \frac{b_t}{2} + \frac{b_t}{\exp(b_t) - 1} \right]. \quad (57)$$

Можно видеть, что, как и в случае с незаряженными частицами, модификация термодинамических величин определяется все тем же безразмерным магнитным полем  $b_t = qB/(mT)$ . Подробности данных вычислений могут быть найдены в разделе 3.2.

#### 2.2.4. Заряженные фермионы, имеющие аномальный магнитный момент

Наконец, рассмотрим заряженные фермионы с аномальным магнитным моментом. В нерелятивистском пределе из общего выражения (22) получаем энергию этих частиц в виде:

$$\varepsilon_{nqk} \approx m + p_3^2/(2m) + qB\ell/m - \sigma\kappa_a B. \quad (58)$$

Вычисление термодинамических величин в данном случае достаточно громоздко, но не представляет принципиальных трудностей. Результат вычислений может быть представлен в следующем виде:

$$N_{nqk} = N_{n0} \left[ \frac{b_t}{2} \exp(\varrho x) + \frac{b_t \cosh(x)}{\exp(b_t) - 1} \right], \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{nqk} = \bar{E}_{n0} & \left[ \frac{b_t}{6} (1 - 2\varrho x) \exp(\varrho x) + \frac{b_t (\cosh(x) - 2x \sinh(x))}{3(\exp(b_t) - 1)} + \right. \\ & \left. + \frac{2b_t^2 \exp(b_t) \cosh(x)}{3(\exp(b_t) - 1)^2} \right], \end{aligned} \quad (60)$$

$$P_{nqk} = P_{n0} \left[ \frac{b_t}{2} \exp(\varrho x) + \frac{b_t \cosh(x)}{\exp(b_t) - 1} \right]. \quad (61)$$

где  $\varrho$  — знак заряда частицы. Как обсуждалось выше, если аномальный магнитный момент измеряется в магнетонах самой частицы:  $\varkappa_a = \kappa_a 2m/q$ , то параметры  $x$  и  $b_t$ , содержащие магнитное поле, связаны между собой простым соотношением:

$$x = \varkappa_a / 2 b_t. \quad (62)$$

Таким образом, как и в предыдущих случаях, именно безразмерное магнитное поле  $b_t$  отвечает за существенную модификацию термодинамических величин. Отметим также, что при  $\varkappa_a = 0$  полученные выражения переходят в соответствующие им из предыдущего раздела, что может быть проверено непосредственным вычислением.

### 2.2.5. Общее описание фермионов с полуцелым спином

Как с математической, так и с физической точки зрения нетривиальным является тот факт, что основные термодинамические свойства всех фермионов с полуцелым спином в магнитном поле могут быть описаны всего двумя универсальными аналитическими функциями. В первую очередь это связано с тем, что переход от заряженных частиц к незаряженным нетривиален и не сводится к простому пределу  $q \rightarrow 0$ . Однако данный переход может быть реализован через собственный  $\kappa_q$  и полный  $\kappa = \kappa_q + \kappa_a$  магнитные моменты частицы. Далее будут использоваться следующие безразмерные аналоги этих величин:

$$y = \kappa_q \frac{B}{T}, \quad z = \kappa \frac{B}{T}. \quad (63)$$

Напомним, что для фермионов с полуцелым спином собственный магнитный момент определяется как

$$\kappa_q = \varrho \frac{q}{2m}. \quad (64)$$

Поэтому его безразмерный аналог связан с введенным выше безразмерным магнитным полем следующим соотношением:  $y = \varrho / 2 b_t$ .

В терминах введенных выше переменных общие выражения термодинамических величин для фермионов с полуцелым спином могут быть записаны в следующем компактном виде:

$$N_{nB} = N_{n0} F_N(y, z), \quad (65)$$

$$\bar{E}_{nB} = \bar{E}_{n0} F_E(y, z), \quad (66)$$

$$P_{nB} = P_{n0} F_N(y, z). \quad (67)$$

Здесь функции  $F_N(y, z)$  и  $F_E(y, z)$  определяют влияние магнитного поля на термодинамические величины. Они могут быть представлены как

$$F_N(y, z) = \frac{y}{\sinh(y)} \cosh(z), \quad (68)$$

$$F_E(y, z) = \frac{y}{3 \sinh(y)} \left[ \cosh(z) + 2y \coth(y) \cosh(z) - 2z \sinh(z) \right]. \quad (69)$$

Приведенное представление функций  $F$  является весьма удобным, так как позволяет легко получить все частные случаи, включая незаряженные частицы. Остановимся на этих переходах подробнее.

Начнем рассмотрение с незаряженных частиц. Для них собственный магнитный момент по определению равен нулю. Таким образом, необходимо требовать  $y \rightarrow 0$ . В случае отсутствия магнитного поля термодинамические свойства газа незаряженных фермионов должны быть такими же, как для частиц без аномального магнитного момента. Тогда с учетом первого условия получаем  $z \rightarrow 0$ . Таким образом, для перехода к бесполому случаю имеем:

$$\begin{aligned} F_N(y, z)|_{B=0} &= F_N(y \rightarrow 0, z \rightarrow 0) = 1, \\ F_E(y, z)|_{B=0} &= F_E(y \rightarrow 0, z \rightarrow 0) = 1. \end{aligned} \quad (70)$$

Переход к незаряженным фермионам в магнитном поле достаточно тривиален. В этом случае аномальный магнитный момент совпадает с полным:  $z \rightarrow x$ , откуда получаем:

$$\begin{aligned} F_N(y, z)|_{q=0} &= F_N(y \rightarrow 0, z \rightarrow x) = \cosh(x), \\ F_E(y, z)|_{q=0} &= F_E(y \rightarrow 0, z \rightarrow x) = \cosh(x) - 2/3 x \sinh(x). \end{aligned} \quad (71)$$

Нетрудно видеть, что предложенный способ перехода приводит к результатам, совпадающим с полученными путем непосредственного вычисления ранее.

Для заряженных частиц переход к случаю фермионов без аномального магнитного момента тоже тривиален:  $z \rightarrow y$ , что приводит к следующим выражениям для функций  $F$ :

$$\begin{aligned} F_N(y, z)|_{q \neq 0} &= F_N(z \rightarrow y) = y \coth(y), \\ F_E(y, z)|_{q \neq 0} &= F_E(z \rightarrow y) = \frac{y}{3 \sinh(y)} \left[ \cosh(y) + \frac{2y}{\sinh(y)} \right]. \end{aligned} \quad (72)$$

Отметим, что сопоставление данных выражений с результатами, полученными прямым вычислением не столь очевидно. Однако с учетом ра-

венства  $y = \varrho/2 b_t$  можно показать, что они действительно совпадают. Аналогичным образом можно получить совпадение общих выражений для функций  $F$ , если воспользоваться дополнительным равенством  $z = y + x$ . Таким образом, выражения (65)-(69) позволяют единообразно описать основные термодинамические свойства любых фермионов с полужелым спином в магнитном поле.

### 2.3. Некоторые термодинамические соотношения для бoльцмановского газа

Рассмотрим некоторые термодинамические соотношения для нерелятивистского бoльцмановского газа, которые следуют из полученных выше выражений. В начале раздела приведем известные беспoлевые соотношения. Так, непосредственно из (44) и (46) следует термическое уравнение состояния газа:

$$P_{n0} = N_{n0} T, \quad (73)$$

а из (44) и (45) — выражение для средней нерелятивистской энергии, приходящейся на одну частицу:

$$\frac{\bar{E}_{n0}}{N_{n0}} = \frac{3}{2} T. \quad (74)$$

Отметим, что последнее равенство, по сути, представляет из себя калорическое уравнение. Поэтому приведенные соотношения позволяют полностью описать нерелятивистский бoльцмановский газ в термодинамическом подходе, что обсуждалось во Введении.

Далее рассмотрим, как эти соотношения изменяются, если газ находится во внешнем магнитном поле. Как было показано выше, выражения для концентрации (65) и давления (67) фермионного газа в этом случае изменяются. Однако изменения этих величин определяются одной и той же функцией  $F_N$ , поэтому они одинаковы. Отсюда следует важный практический вывод, что термическое уравнение не меняется даже если фермионный газ находится во внешнем магнитном поле:

$$P_{nB} = N_{nB} T. \quad (75)$$

Данное соотношение нетривиально и нарушается когда, фермионы становятся релятивистским. Тем не менее для нерелятивистского газа даже в магнитном поле давление при фиксированной температуре определяется лишь его концентрацией.

Средняя нерелятивистская энергия, приходящаяся на одну частицу фермионного газа, зависит от магнитного поля более сложным образом. В общем случае она определяется выражением:

$$\frac{\bar{E}_{nB}}{N_{nB}} = \frac{3 F_E(y, z)}{2 F_N(y, z)} T = \left[ \frac{1}{2} + y \frac{\cosh(y)}{\sinh(y)} - z \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} \right] T. \quad (76)$$

Поведение данной величины при достаточно сильном магнитном поле соответствует  $|y| \gg 1$  и  $|z| \gg 1$ , так как оба эти параметра пропорциональны напряженности. Однако общий предел таким образом получен быть не может. Это связано с тем, что если фермионы являются незаряженными, то для них при любом магнитном поле  $y = 0$ . Следовательно, в этом случае получаем:

$$\left. \frac{\bar{E}_{nB}}{N_{nB}} \right|_{q=0} = \left[ \frac{3}{2} - x \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right] T \Big|_{|x| \gg 1} \approx (3/2 - |x|) T = 3/2 T - |\kappa_a| B. \quad (77)$$

Как видно из данного выражения, в магнитном поле энергия незаряженного фермионного газа всегда меньше, чем в бесполевого случае, а само отклонение определяется модулем аномального магнитного момента. Для заряженных частиц в пределе сильного поля получаем:

$$\left. \frac{\bar{E}_{nB}}{N_{nB}} \right|_{q \neq 0} \approx (1/2 + |y| - |z|) T = T/2 - \varrho \kappa_a B, \quad (78)$$

где в последнем равенстве предполагается, что собственный и полный магнитные моменты имеют одинаковый знак. Как можно видеть из полученного выражения, для заряженного газа без аномального магнитного момента энергия оказывается в три раза меньше бесполовой. Это можно интерпретировать, как наличие лишь одной степени свободы у заряженной частицы в сильном магнитном поле, когда поперечное движение практически отсутствует. Для частиц с аномальным магнитным моментом определяющим является знак величины  $\varrho \kappa_a$ . Если она положительна, то энергия газа в магнитном поле уменьшается, а если отрицательна, то растет по сравнению с бесполевым значением. В заключение отметим, что нерелятивистская энергия фермионного газа с полуцелым спином в сильном магнитном поле может стать отрицательной. Хотя это и необычно, но не противоречит каким-либо фундаментальным законам, так как полная энергия, включающая массу покоя, в этом случае остается положительной.

### 3. Вычисления термодинамических величин

Далее приведем примеры подробных вычислений для концентрации, плотности энергии и давления газа. Рассмотрим два наиболее показательных случая — бoльцмановский нерелятивистский газ с произвольной статистикой и аналогичный газ фермионов во внешнем магнитном поле. Приведенный здесь теоретический подход к определению термодинамических величин основан на понятии 6-мерного фазового объема. Он является менее общим, чем изложенный выше, так как не обладает явной инвариантностью (ковариантностью). Однако данный метод весьма часто используется как в учебной, так и научной литературе, поэтому для полноты он был включен в изложение.

#### 3.1. Газ в отсутствии магнитного поля

Рассмотрим элемент 6-мерного фазового объема, который объединяет в себе обычное и импульсное 3-мерные пространства:

$$d\Gamma_0 = \sum_s \frac{d^3x d^3p}{(2\pi)^3}, \quad (79)$$

где под  $\sum_s$  понимает суммирование по всем спиновым состояниям частицы. Наличие дополнительного коэффициента связано с соотношением неопределенности на координаты и компоненты импульса частицы:  $\Delta x_i \Delta p_i \geq 2\pi$ . Таким образом,  $dx_i dp_i / (2\pi)$  соответствует минимально возможной для квантовых систем ячейке фазового объема по каждой из координат. При таком выборе коэффициента одночастичная функция распределения  $f$  приобретает простой вероятностный смысл, а именно для системы из одной частицы она определяет вероятность ее нахождения в элементе фазового объема  $d\Gamma_0$ . Так как вероятность нахождения частицы хоть в каком-то состоянии равна единице, то для системы из  $\mathcal{N}$  частиц имеем следующее условие нормировки:

$$\mathcal{N} = \sum_{\Gamma_0} f d\Gamma_0, \quad (80)$$

где интегрирование и суммирование  $\sum$  идет по всему фазовому пространству, включая спиновые состояния. Отметим, что данная нормировка справедлива лишь при отсутствии корреляций положения отдельных частиц в фазовом объеме, то есть в предположении, что все частицы двигаются независимо.

Из условия нормировки следует, что концентрация частиц газа определяется следующим выражением:

$$N_0 = \frac{1}{V} \oint_{\Gamma_0} f d\Gamma_0 = \frac{1}{(2\pi)^3 V} \sum_s \int f d^3x d^3p. \quad (81)$$

Далее будет рассматриваться газ в состоянии локального термодинамического равновесия. Как обсуждалось выше, объем  $V$  в этом случае выбирается таким образом, чтобы он содержал достаточно большое число частиц  $\mathcal{N}$ , но макроскопические параметры в нем практически не менялись. Тогда интегрирование по  $d^3x$  становится тривиальным и дает:

$$N_0 = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_s \int f d^3p. \quad (82)$$

Как отмечалось выше (10), в системе покоя среды равновесная функция распределения есть:

$$f_0 = \frac{1}{\exp[(p_0 - \mu)/T] \pm 1}, \quad (83)$$

где  $p_0 = \sqrt{p^2 + m^2}$ . Так как энергия в этом случае зависит лишь от модуля импульса, то далее в импульсном пространстве удобно перейти в сферическую систему координат. Это позволяет сразу проинтегрировать по угловой части распределения частиц:  $d^3p = d\Omega p^2 dp = 4\pi p^2 dp$ . Отсюда с учетом суммирования по спиновым состояниям для концентрации получаем следующее общее выражение:

$$N_0 = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp[(\sqrt{p^2 + m^2} - \mu)/T] \pm 1}. \quad (84)$$

Здесь, как и ранее, под  $g$  понимается число спиновых состояний частицы. Для дальнейших вычислений перейдем к безразмерным величинам: импульсу  $z = p/m$ , химическому потенциалу  $a = \mu/T$  и обратной температуре  $\Delta = m/T$ . В их терминах получаем:

$$N_0 = \frac{g m^3}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{\exp[\Delta \sqrt{z^2 + 1} - a] \pm 1}. \quad (85)$$

Далее воспользуемся приближением бoльцмановского газа (42). В данном пределе выражение для концентрации упрощается и принимает вид:

$$N_0 \approx \frac{g m^3}{2\pi^2} \int_0^\infty z^2 \exp(-\Delta \sqrt{z^2 + 1} + a) dz. \quad (86)$$

Приближение нерелятивистского газа  $z \ll 1$  позволяет разложить безразмерную энергию в ряд Тейлора:

$$\sqrt{z^2 + 1} \approx 1 + z^2/2 + \dots \quad (87)$$

Ограничившись первыми двумя членами в данном разложении, получаем следующее выражение для концентрации бoльцмановского нерелятивистского газа:

$$N_0 \approx N_{n0} = \frac{g m^3}{2\pi^2} e^{a-\Delta} \int_0^\infty z^2 \exp\left(-\frac{\Delta}{2} z^2\right) dz. \quad (88)$$

Отметим, что разложение до второго порядка в данном случае необходимо для сохранения сходимости интеграла на верхнем пределе. Для дальнейших вычислений можно использовать интеграл Эйлера-Пуассона:

$$\int_0^\infty e^{-\beta z^2} dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}. \quad (89)$$

Если продифференцировать данное соотношение по параметру  $\beta$ , то получаем интеграл, непосредственно входящий в выражение для концентрации (88):

$$\int_0^\infty z^2 e^{-\beta z^2} dz = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \beta^{-3/2}. \quad (90)$$

Таким образом, окончательно для концентрации бoльцмановского нерелятивистского газа в случае отсутствия магнитного поля получаем:

$$N_{n0} = \frac{g m^3}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{a-\Delta}}{\Delta^{3/2}} = g \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{\mu - m}{T}\right). \quad (91)$$

Отметим, что отсюда может быть получена оценка на значение максимальной концентрации:

$$N_{n0}^* = g \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2}, \quad (92)$$

до которой используемое приближение больцмановского газа остается справедливым.

Так как энергия всех частиц, находящихся в элементе фазового объема  $d\Gamma_0$ , является одинаковой, то, следуя вышеизложенной логике, получаем следующее определение плотности энергии газа:

$$E_0 = \frac{1}{V} \oint_{\Gamma_0} p_0 f d\Gamma_0 = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_s \int p_0 f d^3p. \quad (93)$$

После интегрирования по угловой части распределения получаем следующее общее определение для плотности энергии:

$$E_0 = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 \sqrt{p^2 + m^2} dp}{\exp[(\sqrt{p^2 + m^2} - \mu)/T] \pm 1}. \quad (94)$$

В безразмерных переменных данное выражение может быть представлено в следующем виде:

$$E_0 = \frac{g m^4}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{z^2 \sqrt{z^2 + 1} dz}{\exp[\Delta \sqrt{z^2 + 1} - a] \pm 1}. \quad (95)$$

Далее воспользуемся тем, что газ является больцмановским и нерелятивистским. Как и при вычислении концентрации, ограничимся лишь первыми двумя членами разложения энергии (87), откуда получаем:

$$E_0 \approx E_{n0} = \frac{g m^4}{2\pi^2} e^{a-\Delta} \int_0^\infty z^2 \left(1 + \frac{z^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{\Delta}{2} z^2\right) dz. \quad (96)$$

Как можно видеть, в данном выражении один из интегралов рассматривался ранее (90), а второй может быть получен из него дифференцированием по параметру  $\beta$ :

$$\int_0^\infty z^4 e^{-\beta z^2} dz = \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \beta^{-5/2}. \quad (97)$$

С учетом этих соотношений получаем следующее выражение для плотности энергии больцмановского нерелятивистского газа:

$$\begin{aligned} E_{n0} &= \frac{g m^4}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{a-\Delta}}{\Delta^{5/2}} [\Delta + 3/2] = \\ &= g \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{\mu - m}{T}\right) \left[m + \frac{3}{2}T\right]. \end{aligned} \quad (98)$$

Из него видно, что плотность энергии может быть выражена через концентрацию частиц (91):

$$E_{n0} = N_{n0} [m + 3/2 T], \quad (99)$$

причем первое слагаемое соответствует массе покоя газа, а второе — его нерелятивистской энергии.

Определение давления в рассматриваемом подходе не столь очевидно. Однако оно может быть получено, например, как удвоенная проекция потока импульса на некоторое направление. Опуская подробности, приведем лишь конечный результат:

$$P_0 = \frac{1}{V} \oint_{\Gamma_0} \frac{p^2}{3p_0} f d\Gamma_0 = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_s \int \frac{p^2}{3p_0} f d^3p. \quad (100)$$

Из общего определения давления после интегрирования по угловой части распределения и суммирования по спиновым состояниям получаем:

$$P_0 = \frac{g}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^4}{\sqrt{p^2 + m^2}} \frac{dp}{\exp[(\sqrt{p^2 + m^2} - \mu)/T] \pm 1}. \quad (101)$$

В безразмерных переменных данное выражение может быть представлено в следующем виде:

$$P_0 = \frac{g m^4}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{z^4}{\sqrt{z^2 + 1}} \frac{dz}{\exp[\Delta \sqrt{z^2 + 1} - a] \pm 1}. \quad (102)$$

Дальнейший переход к нерелятивистскому пределу требует некоторых пояснений. Как отмечалось выше, разложение энергии в показателе экспоненты до второго порядка (87) требуется для сохранения сходимости интеграла. Остальная часть подынтегрального выражения может быть разложена лишь до первого порядка:

$$z^4 / \sqrt{z^2 + 1} \approx z^4, \quad (103)$$

так как в нерелятивистском пределе следующий член будет давать малую  $\sim T/m$  поправку к основному выражению. При необходимости можно учесть и более высокие члены разложения. Соответствующие им интегралы легко вычисляются с использованием соотношения (89), продифференцированного нужное число раз по параметру  $\beta$ . Для первого

члена разложения возникающий интеграл уже был сосчитан (97). Таким образом, для давления бoльцмановского нерелятивистского газа получаем следующее окончательное выражение:

$$P_{n0} = \frac{g m^4}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{a-\Delta}}{\Delta^{5/2}} = g T \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left( \frac{\mu - m}{T} \right). \quad (104)$$

Как и в случае плотности энергии, давление также может быть выражено через концентрацию частиц:

$$P_{n0} = N_{n0} T. \quad (105)$$

Отметим, что данное соотношение является, по сути, термическим уравнением для рассматриваемого газа.

### 3.2. Заряженные фермионы в магнитном поле

Как отмечалось выше, описание газа в магнитном поле имеет определенные сложности. Первая из них состоит в появлении анизотропии, связанной с направлением вектора напряженности магнитного поля. Отметим, что в подходе, основанном на фазовом объеме, учет данного факта не представляется возможным. Следовательно, полученные в нем результаты должны интерпретироваться как продольные составляющие анизотропных величин.

Вторая сложность состоит в том, что для фермионов с полуцелым спином одна из поперечных к магнитному полю компонент импульса является нефизической. Для определенности примем за такую компоненту  $p_1$ . Будем предполагать, что рассматриваемая система имеет конечный размер  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  по каждой из осей. Тогда нефизическая компонента импульса  $p_1$  будет связана с индексом  $\ell$ , нумерующим уровни Ландау, следующим соотношением:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots dp_1 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \dots \frac{2\pi}{L_1}. \quad (106)$$

Напомним, что данный индекс определяет квантование поперечного импульса и связан с энергией частицы соотношением:

$$\varepsilon_\ell = \sqrt{p_3^2 + m^2 + 2qB\ell}, \quad (107)$$

где  $q$  — ее заряд. Так как при движении квантовой частицы в магнитном поле сохраняется величина  $x_1 + p_2/(qB)$ , то в случае, когда подынтегральная функция не зависит от  $p_2$  имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots dp_2 = qB \int_{-L_1/2}^{+L_1/2} \dots dx_1 = qB \dots L_1. \quad (108)$$

Таким образом, для фермионного газа в магнитном поле интегрирование по фазовому объему приводит к следующему результату:

$$\oint_{\Gamma_B} \dots d\Gamma_B = \sum_s \int \dots \frac{d^3x d^3p}{(2\pi)^3} = \frac{qBV}{(2\pi)^2} \sum_s \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots dp_3. \quad (109)$$

Так как вероятностная интерпретация одночастичной функции распределения сохраняется и для случая газа в магнитном поле, то условие нормировки также остается прежним:

$$\mathcal{N} = \oint_{\Gamma_B} f_B d\Gamma_B, \quad (110)$$

где  $\mathcal{N}$  — число частиц в системе. Отсюда получаем следующие определения для концентрации:

$$N_B = \frac{1}{V} \oint_{\Gamma_B} f_B d\Gamma_B = \frac{eB}{2\pi^2} \sum_s \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f_B dp_3, \quad (111)$$

плотности энергии:

$$E_B = \frac{1}{V} \oint_{\Gamma_B} \varepsilon_{\ell} f_B d\Gamma_B = \frac{eB}{2\pi^2} \sum_s \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \varepsilon_{\ell} f_B dp_3 \quad (112)$$

и давления вдоль вектора напряженности магнитного поля:

$$P_B = \frac{1}{V} \oint_{\Gamma_B} \frac{p_3^2}{\varepsilon_{\ell}} f_B d\Gamma_B = \frac{eB}{2\pi^2} \sum_s \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{p_3^2}{\varepsilon_{\ell}} f_B dp_3. \quad (113)$$

Отметим, что приведенные определения справедливы в том числе и для фермионов с аномальным магнитным моментом, если под  $\varepsilon_{\ell}$  понимать общее выражение для их энергии (22), а суммирование по  $\ell$  заменить

на суммированием по  $\nu$ . Как отмечалось выше, в случае отсутствия аномального магнитного момента суммирование по спиновым состояниям может быть проведено сразу и даст:

$$\sum_s = g_\ell = 2 - \delta_{0,\ell}, \quad (114)$$

где  $\delta_{0,\ell}$  — символ Кронекера. Далее удобно перейти к безразмерному продольному импульсу  $z = p_3/m$  и магнитному полю  $b = qB/m^2$ . В терминах данных величин нерелятивизм означает  $z \ll 1$  и  $b \ll 1$ . Таким образом, энергия в этом пределе может быть разложена в ряд Тейлора:

$$\varepsilon_\ell = m\sqrt{1 + z^2 + 2b\ell} \approx m(1 + z^2/2 + b\ell). \quad (115)$$

Данное соотношение совместно с условием больцмановского газа дает для функции распределения (23) следующее выражение:

$$f_B \approx e^{a-\Delta} e^{-\Delta z^2/2} e^{-\Delta b\ell}. \quad (116)$$

Таким образом, для концентрации газа (111) в рассматриваемом пределе в безразмерных переменных получаем:

$$\begin{aligned} N_B &= \frac{b m^3}{2\pi^2} e^{a-\Delta} \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-\Delta b\ell} g_\ell \int_0^{\infty} e^{-\Delta z^2/2} dz = \\ &= \frac{b m^3}{2\pi^2} e^{a-\Delta} \left( \int_0^{\infty} e^{-\Delta z^2/2} dz + 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} e^{-\Delta b\ell} \int_0^{\infty} e^{-\Delta z^2/2} dz \right), \end{aligned} \quad (117)$$

где отдельно выделен вклад от основного уровня Ландау. Отметим, что суммирование в данном случае тривиально, так как члены ряда представляют геометрическую прогрессию:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} e^{-\Delta b\ell} = \frac{1}{e^{\Delta b} - 1}. \quad (118)$$

Таким образом, после суммирования по уровням Ландау получаем:

$$N_B = \frac{b m^3}{2\pi^2} e^{a-\Delta} \left( \int_0^{\infty} e^{-\Delta z^2/2} dz + \frac{2}{e^{\Delta b} - 1} \int_0^{\infty} e^{-\Delta z^2/2} dz \right). \quad (119)$$

Оставшееся интегрирование сводится к уже рассмотренному ранее интегралу Эйлера-Пуассона (89), что дает следующий окончательный результат для концентрации газа в магнитном поле:

$$N_B = \frac{b m^3}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{a-\Delta}}{\Delta^{1/2}} \left[ 1 + \frac{2}{e^{\Delta b} - 1} \right]. \quad (120)$$

Отметим, что полученный результат может быть выражен через концентрацию газа в бесполовом случае (91). После небольших преобразований, с учетом того, что  $g = 2$ , получаем:

$$N_B = N_0 \left[ \frac{\Delta b}{2} + \frac{\Delta b}{e^{\Delta b} - 1} \right]. \quad (121)$$

Отметим также, что зависимость от магнитного поля определяется в рассматриваемом случае безразмерной комбинацией  $b_t = \Delta b = qB/(mT)$ .

Далее рассмотрим вычисление плотности энергии фермионов в магнитном поле (112). В пределе бoльцмановского нерелятивистского газа получаем следующее выражение в безразмерных переменных:

$$E_B = \frac{b m^4}{2\pi^2} e^{a-\Delta} \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-\Delta b \ell} g_{\ell} \int_0^{\infty} (1 + z^2/2 + b \ell) e^{-\Delta z^2/2} dz. \quad (122)$$

Нетрудно заметить, что первое слагаемое в формуле (122) с точностью до коэффициента  $m$  совпадает с выражением для концентрации частиц в магнитном поле (117). Следовательно, можно записать:

$$E_B = m N_B + \frac{b m^4}{2\pi^2} e^{a-\Delta} \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-\Delta b \ell} g_{\ell} \int_0^{\infty} (z^2/2 + b \ell) e^{-\Delta z^2/2} dz. \quad (123)$$

Суммирование по уровням Ландау в данном случае чуть более сложно и содержит дополнительно ряд вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell e^{-\Delta b \ell} = \frac{e^{\Delta b}}{(e^{\Delta b} - 1)^2}. \quad (124)$$

Совместно с выражением (118) оно приводит после интегрирования по  $z$  к следующему выражению для плотности энергии:

$$E_B = m N_B + \frac{b m^4}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{a-\Delta}}{\Delta^{3/2}} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\Delta b} - 1} + \frac{2 \Delta b e^{\Delta b}}{(e^{\Delta b} - 1)^2} \right]. \quad (125)$$

Отметим, что оно, как и в случае концентрации, может быть выражено в терминах беспольных величин:

$$E_B = m N_B + \frac{N_0 T}{2} \left[ \frac{\Delta b}{2} + \frac{\Delta b}{e^{\Delta b} - 1} + \frac{2 (\Delta b)^2 e^{\Delta b}}{(e^{\Delta b} - 1)^2} \right]. \quad (126)$$

Вычисления для давления (113) аналогичны предыдущим и приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned} P_B &= \frac{b m^4}{2\pi^2} e^{a-\Delta} \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-\Delta b \ell} g_{\ell} \int_0^{\infty} z^2 e^{-\Delta z^2/2} dz = \\ &= \frac{b m^4}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{a-\Delta}}{\Delta^{3/2}} \left[ 1 + \frac{2}{e^{\Delta b} - 1} \right] = \\ &= N_0 T \left[ \frac{\Delta b}{2} + \frac{\Delta b}{e^{\Delta b} - 1} \right] = N_B T. \end{aligned} \quad (127)$$

Отметим, что, как и в случае концентрации газа, зависимость плотности энергии и давления от магнитного поля определяется безразмерной комбинацией  $b_t = \Delta b = qB/(mT)$ .

## Заключение

Вопрос об описании фермионного газа в магнитном поле имеет долгую и очень интересную историю. Даже учет аномального магнитного момента, который долго не принимался во внимание, относится уже к концу 60-х годов прошлого века. Несмотря на это, актуальность темы до сих пор сохраняется, причем как в научном, так и образовательном контексте. В качестве примера хочется упомянуть дискуссии об асимметрии термодинамических свойств газа во внешнем магнитном поле, которые продолжались даже в начале этого десятилетия (см. [6], как один из таких примеров). Отметим, что до сих пор остается актуальным вопрос о том, какой метод описания фермионного газа в случае магнитного поля является правильным и может быть применен для общего случая релятивистских частиц. В этом аспекте хотелось бы отметить недавнюю статью [5], в которой получение термодинамических величин основано на точных решениях уравнения Дирака в магнитном поле. По мнению авторов, это пусть и сложный, но более аккуратный метод, чем другие встречающиеся в научной литературе. Отдельно хотелось бы отметить практически полное отсутствие подходов к описанию фермионного газа в магнитном поле для случая сильной гравитации, притом что данная проблема является весьма актуальной и востребованной в современных астрофизических приложениях, например для случая нейтронных звезд.

Авторы искренне надеются, что данный компендиум будет полезен читателям во многих аспектах. Например, его можно использовать как простой справочник, что будет удобным при решения многих практических задач. Однако мы будем рады, если данное пособие поможет глубже понять данную тематику и послужит стимулом для ее дальнейшего изучения.

## Ссылки

- [1] Базаров И. П., Геворкян Э. В., Николаев П. Н. Неравновесная термодинамика и физическая кинетика. М.: Изд-во МГУ, 1989. 240 с.
- [2] Cercignani C., Kremer G. M. [The relativistic Boltzmann equation: theory and applications](#). Boston: Birkhäuser, 2002. 384 p.
- [3] Rezzolla L., Zanotti O. [Relativistic Hydrodynamics](#). Oxford: Oxford University Press, 2013. 752 p.
- [4] Debbasch F., van Leeuwen W. A. General relativistic Boltzmann equation, I: Covariant treatment // [Physica A](#). 2009. Vol. 388. P. 1079–1104.
- [5] Strickland M., Dexheimer V., Menezes D. P. Bulk Properties of a Fermi Gas in a Magnetic Field // [Phys. Rev. D](#). 2012. Vol. 86. P. 125032.
- [6] Potekhin A. Y., Yakovlev D. G. Comment on ‘Equation of state of a dense and magnetized fermion system’ // [Phys. Rev. C](#). 2012. Vol. 85. P. 039801.

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>3</b>
<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1. Общее описание газа на основе его одночастичной функции распределения</b>	<b>7</b>
1.1. Релятивистское описание свободного газа . . . . .	7
1.2. Описание газа с полуцелым спином в магнитном поле . . .	10
<b>2. Некоторые частные случаи для фермионного газа в магнитном поле</b>	<b>15</b>
2.1. Релятивистский заряженный газ без аномального магнитного момента . . . . .	15
2.2. Нерелятивистский бoльцмановский газ с аномальным магнитным моментом . . . . .	17
2.2.1. Фермионы без магнитного поля . . . . .	18
2.2.2. Незаряженные частицы с аномальным магнитным моментом . . . . .	18
2.2.3. Заряженные фермионы без аномального магнитного момента . . . . .	19
2.2.4. Заряженные фермионы, имеющие аномальный магнитный момент . . . . .	20
2.2.5. Общее описание фермионов с полуцелым спином . .	21
2.3. Некоторые термодинамические соотношения для бoльцмановского газа . . . . .	23
<b>3. Вычисления термодинамических величин</b>	<b>25</b>
3.1. Газ в отсутствии магнитного поля . . . . .	25
3.2. Заряженные фермионы в магнитном поле . . . . .	30
<b>Заключение</b>	<b>35</b>
<b>Ссылки</b>	<b>36</b>

Учебное издание

**Добрынина** Александра Алексеевна  
**Огнев** Игорь Сергеевич  
**Чистяков** Михаил Валерьевич

**Термодинамические свойства  
замагниченной среды**

Учебно-методическое пособие

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова  
Компьютерная верстка И. С. Огнев

Подписано в печать 16.07.2019. Формат 60 × 84/16.

Усл. печ. л. 2,3. Уч.-изд. л. 2,0.

Тираж 4 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен  
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет  
им. П. Г. Демидова.  
150003 Ярославль, ул. Советская, 14.