

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Дополнительные главы стохастического анализа**

Направление подготовки (специальности)  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 18.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Цель дисциплины - формирование у студентов способности применять основные методы теории случайных процессов при решении задач в их будущей профессиональной деятельности (научно-исследовательской, проектной, контрольно-аналитической). Задачи дисциплины - дать обучаемым необходимые знания по методам теории случайных процессов; способствовать развитию у обучаемых строгого математического и творческого мышления.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной. Для освоения дисциплины, требуются знания по основным математическим дисциплинам: математическому анализу, теории вероятностей и др.

Знания и умения, приобретаемые обучаемыми по дисциплине «Дополнительные главы стохастического анализа», могут быть использованы при разработке курсовых и дипломных работ, в научно-исследовательской работе.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-2</b> Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	<b>И-ПК-2.1</b> Обладает устойчивыми знаниями в области основных математических дисциплин, их аппарата и результатов	<b>знать:</b> - методы решения стохастических дифференциальных уравнений; - основные методы дробного дифференциального и интегрального исчисления
	<b>И-ПК-2.2</b> Обладает способностью применять современный математический аппарат в решении различных задач	<b>уметь:</b> - строить теоретико-вероятностные и статистические модели задач и явлений практического характера по специальности; - применять методы теории случайных процессов к решению типовых теоретико-вероятностных и статистических задач <b>владеть:</b> - навыками научного исследования с применением методов теории случайных процессов
	<b>И-ПК-2.3</b> Способен совершенствовать свои навыки, связанные с	<b>владеть:</b> - навыками поиска научной информации в библиотеках и интернете;

	применением современного математического аппарата	- опытом работы с реферативной, справочной, периодической и монографической литературой с целью получения новых знаний
<b>ПК-3</b> Способен к разработке и применению алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программного обеспечения	<b>И-ПК-3.1</b> Обладает устойчивыми знаниями в области разработки алгоритмов и программирования	<b>знать:</b> - основные понятия теории случайных процессов; <b>уметь:</b> - пользоваться расчетными формулами, таблицами, графиками при решении вероятностных и статистических задач.
	<b>И-ПК-3.3</b> Обладает способностью критического анализа и совершенствования разрабатываемых алгоритмов и программ	<b>уметь:</b> - анализировать конкретные прикладные задачи на предмет возможности применения теории случайных процессов для их решения <b>владеть:</b> - навыками использования библиотек прикладных программ для решения прикладных вероятностных и статистических задач с использованием компьютера.

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **2** зачетных единицы, **72** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Основные идеи и представления теории случайных процессов	6	1	2					
2	Элементы теории марковских процессов	6	1	2				1	
3	Винеровские стохастические дифференциальные уравнения	6	2	4		1		1	
4	Невинеровские стохастические дифференциальные уравнения	6	2	4		1			
5	Процессы Леви	6	2	4		1		1	

6	Дробное интегрирование и дифференцирование	6	2	4		1		5	Самостоятельная работа 1
7	Уравнение Фоккера-Планка для уравнения Ланжевена в случае процесса Леви	6	2	4		1		1	
8	Дробные производные в случае подчиненного случайного процесса	6	2	4				1	
9	Стохастические дифференциальные уравнения в теории открытых квантовых систем	6	2	4		1		5	Самостоятельная работа 2
							0,3	2,7	зачет
	<b>ИТОГО</b>		<b>16</b>	<b>32</b>		<b>6</b>	<b>0,3</b>	<b>17,7</b>	

## 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## 6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются: для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## 7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyl.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyl.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Электронно-библиотечная система «Консультант Студента»:  
<https://www.studentlibrary.ru/>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Булинский, А. В. Теория случайных процессов / Булинский А. В. , Ширяев А. Н. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 408 с. - ISBN 5-9221-0335-0. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922103350.html>
2. И. А. Кожевникова, И. Г. Журбенко Стохастическое моделирование процессов: учебное пособие для вузов — Москва: Издательство Юрайт, 2023.  
<https://urait.ru/viewer/stokhasticheskoe-modelirovanie-processov-515176>

### **б) дополнительная литература**

1. Кляцкин, В. И. Стохастические уравнения : теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике. Том 1. Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения. / Кляцкин В. И. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 320 с. - ISBN 978-5-9221-0814-0. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922108140.html>
2. Кляцкин, В. И. Стохастические уравнения : теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике. Том 1. Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения. / Кляцкин В. И. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 320 с. - ISBN 978-5-9221-0814-0. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922108140.html>

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа и практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.
- компьютерный класс для выполнения домашних заданий с использованием пакетов прикладных программ (лаборатория информационных технологий).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

**Автор(ы):**  
Доцент, к.ф.-м.н.

Д.В. Гринёв

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Дополнительные главы  
стохастического анализа»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

Примерный перечень вопросов:

1. Определение моментов случайных функций.
2. Что понимается под стационарными случайными функциями.
3. Условие их эргодичности.
4. Свойства корреляционных функций.
5. Элементарные линейные операции над случайными функциями.
6. Покажите взаимосвязь между спектральной плотностью и автокорреляционной функцией стационарной случайной функции.
7. По заданной спектральной плотности процесса вычислите автокорреляционные функции для первой и второй его производных.
8. Установите взаимосвязь между статистическими характеристиками процессов на входе и выходе линейной системы.
9. Найдите интервал временной дискретизации стационарного процесса по известной его автокорреляционной функции.
10. Определение финальных вероятностей в цепях Маркова.
11. Покажите, что для непрерывных марковских процессов любые многомерные законы распределения могут быть выражены через двумерные законы распределения.

**2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

1. Связь определения случайной величины и случайного процесса.
2. Определение системы согласованных конечномерных распределений.
3. Формулировка теоремы Колмогорова.
4. Определение цепи Маркова.
5. Матрица переходных вероятностей однородной цепи Маркова. Ее свойства. Матрица переходных вероятностей за несколько шагов.
6. Матрица переходных вероятностей неоднородной цепи Маркова. Ее свойства. Матрица переходных вероятностей за несколько шагов.
7. Построение системы согласованных конечномерных распределений для цепи Маркова при заданном распределении начальных состояний и при заданной матрице переходных вероятностей.
8. Определение возвратности состояния, критерий возвратности (доказательство).
9. Существенные и несущественные состояния (определение).
10. Определение достижимости.
11. Определение сообщающихся состояний.
12. Существование замкнутых классов сообщающихся состояний: разбиение множества существенных состояний на непересекающиеся замкнутые классы сообщающихся состояний.

13. Определение периода состояния.
14. Определение какие состояния называются нулевыми и положительными.
15. Доказательство утверждения: все возвратные состояния существенные.
16. Доказательство утверждения: если состояние невозвратное, то оно нулевое.
17. Доказательство утверждения: состояния одного замкнутого класса сообщающихся состояний либо все возвратные, либо все невозвратные.
18. Доказательство утверждения: все состояния одного замкнутого класса сообщающихся состояний имеют один период.
19. Доказательство утверждения: состояния одного замкнутого класса сообщающихся состояний либо все положительные, либо все нулевые.
20. Определение неприводимой цепи.
21. Определение стационарного распределения.
22. Формулировка теоремы о существовании единственного стационарного распределения.
23. Определение простого процесса восстановления. Функция восстановления.
24. Определение процесса восстановления с запаздыванием. Функция восстановления.
25. Вывод интегрального уравнения восстановления для простого процесса восстановления.
26. Вывод интегрального уравнения восстановления для процесса восстановления с запаздыванием.
27. Решение интегрального уравнения восстановления в терминах преобразований Лапласа-Стилтьеса.
28. Формулировка элементарной теоремы восстановления.
29. Формулировка узловой теоремы восстановления.
30. Стационарные процессы восстановления (определение и построение распределения первого интервала).
31. Альтернирующие процессы восстановления. Определение вероятности того, что бесконечно далекий момент времени накрывается интервалом первого типа.
32. Определение однородного Марковского процесса с непрерывным временем и дискретным множеством состояний. Характеристики этого процесса (распределение начальных состояний, матрица переходных вероятностей, свойства).
33. Уравнения Колмогорова-Чепмена.
34. Формулировка теоремы о предельном поведении переходных вероятностей однородного Марковского процесса. Интенсивности перехода и выхода.
35. Уравнения Колмогорова для переходных вероятностей.
36. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний.
37. Схема гибели и размножения.
38. Определение полумарковского процесса.
39. Процесс Пуассона.
40. Вероятностный смысл функции восстановления
41. Исследование времени перескока
42. Исследование времени недоскока
43. Исследование времени перескока для процесса восстановления с экспоненциальным распределением интервалов
44. Исследование времени недоскока для процесса восстановления с экспоненциальным распределением интервалов
45. Построение ядра для Марковского процесса
46. Процесс Марковского восстановления. Определение полумарковского ядра и его свойства
47. Исследование процессов восстановления, вложенных в полумарковский процесс.



**Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины  
«Дополнительные главы стохастического  
анализа»**

**Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала являются лекции.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение индивидуальных задач, требующих разработки алгоритма и написания программы, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения материала в течение обучения при сдаче самостоятельных работ преподаватель задает вопросы, позволяющие выяснить понимание материала. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий для самостоятельной работы, которые вызвали затруднения.

В конце семестра студенты сдают зачет.