

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_ Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Качественные методы исследования динамических систем на плоскости**

Направление подготовки (специальности)  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 22.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины «Качественные методы исследования динамических систем на плоскости» – дать представление студентам о методах качественного и количественного анализа динамических систем на плоскости. Задачами курса являются:

- познакомить студентов с теорией Пуанкаре-Бендиксона;
- познакомить студентов с элементами теории вращения плоских векторных полей;
- научить студентов использовать локальные методы анализа динамических систем;
- познакомить студентов с основными понятиями теории бифуркации;
- дать классификацию основных типов бифуркаций состояний равновесия.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной. Эта дисциплина является курсом по выбору. Для ее успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин: «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ». Методы качественной теории необходимы для аналитического исследования нелинейных моделей и могут использоваться студентами в курсовых и дипломных работах, а также в их научно-исследовательской деятельности.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

| Формируемая компетенция<br>(код и формулировка)   | Индикатор достижения компетенции<br>(код и формулировка)  | Перечень планируемых результатов обучения  |
|---|---|--|
| <b>Профессиональные компетенции</b>   |   |  |
| <b>ПК-2</b><br>Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат | <b>И-ПК-2.1</b><br>Обладает устойчивыми знаниями в области основных математических дисциплин, их аппарата и результатов | <b>Знать:</b><br>- основные утверждения теории Пуанкаре-Бендиксона;<br>- основные понятия теории вращения плоских векторных полей и ее следствия применительно к динамическим системам на плоскости;<br>- основные типы бифуркаций состояний равновесия.<br><b>Уметь:</b><br>- исследовать динамику решений динамических систем на плоскости |
|   | <b>И-ПК-2.2</b><br>Обладает способностью применять современный математический аппарат                                   | <b>Знать:</b><br>- основные математические методы исследования динамических систем на плоскости<br><b>Уметь:</b>   |

|  |   |  |
|--|---|--|
|  | в решении различных задач   | <ul style="list-style-type: none"> <li>- использовать основные математические методы исследования динамических на плоскости в решении различных задач</li> </ul> <b>Владеть навыками:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- качественного и количественного анализа плоских динамических систем.</li> </ul>   |
|  | <b>И-ПК-2.3</b><br>Способен совершенствовать свои навыки, связанные с применением современного математического аппарата | <b>Знать:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- методы и приемы доказательства основных утверждений теории динамических систем на плоскости</li> </ul> <b>Владеть навыками:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- использования методов и приемов доказательства основных утверждений теории динамических систем на плоскости в профессиональной деятельности</li> </ul> |

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **3** зачетные единицы, **108** акад. часов.

| №<br>п/п | Темы (разделы)<br>дисциплины,<br>их содержание             | Семестр | Виды учебных занятий,<br>включая самостоятельную<br>работу студентов,<br>и их трудоемкость<br>(в академических часах) |              |              |              |                             |      | Формы текущего<br>контроля<br>успеваемости<br><br>Форма<br>промежуточной<br>аттестации<br>(по семестрам) |
|----------|--|---------|---|--------------|--------------|--------------|-----------------------------|------|--|
|          |  |         | Контактная работа   |              |              |              |                             |      |  |
|          |  |         | лекции  | практические | лабораторные | консультации | аттестационные<br>испытания |      |  |
| 1.       | Теорема Пуанкаре-Бендиксона                                | 5       | 4   | 4            |              | 2            |                             | 6    |  |
| 2.       | Неограниченные траектории динамических систем на плоскости | 5       | 2   | 2            |              |              |                             | 6    |  |
| 3.       | Консервативные системы                                     | 5       | 2   | 2            |              |              |                             | 4    |  |
| 4.       | Элементы теории вращения плоских векторных полей           | 5       | 2   | 2            |              | 2            |                             | 6    |  |
| 5.       | Замкнутые траектории                                       | 5       | 2   | 2            |              |              |                             | 4    |  |
| 6.       | Грубые и негрубые траектории                               | 5       | 2   | 2            |              |              |                             | 4    |  |
| 7.       | Элементы теории бифуркаций                                 | 5       | 2   | 2            |              |              |                             | 6    |  |
|          |  |         |   |              |              | 2            | 0,5                         | 33,5 | экзамен  |
|          | ИТОГО  |         | 16  | 16           |              | 6            | 0.5                         | 69.5 |  |

#### Содержание разделов дисциплины:

##### Тема 1. Теорема Пуанкаре-Бендиксона.

Базовые понятия теории динамических систем. Примеры динамических систем на плоскости. Теорема Пуанкаре-Бендиксона, примеры ее использования.

**Тема 2. Неограниченные траектории динамических систем на плоскости.**

Сфера Пуанкаре. Исследование систем с полиномиальными правыми частями.

**Тема 3. Консервативные системы.**

Понятие о гамильтоновых и консервативных системах. Теорема Лиувилля. Простейшая консервативная система.

**Тема 4. Элементы теории вращения плоских векторных полей.**

Понятие о векторных полях. Угловая функция и вращение векторного поля на кривой. Формула Пуанкаре. Вращение поля на замкнутой кривой. Вращение поля на границе многосвязной области. Индекс особой точки, теорема об алгебраическом числе особых точек. Гомотопные векторные поля, признаки гомотопности. Линейные поля. Линеаризация поля в окрестности особой точки. Вычисление индекса простых особых точек. Следствия теории вращения векторных полей применительно к анализу динамических систем на плоскости.

**Тема 5. Замкнутые траектории.**

Признаки отсутствия замкнутых траекторий.

**Тема 6. Грубые и негрубые траектории.**

Типы состояний равновесия. Теорема Гробмана-Хартмана. Сложные состояния равновесия. Анализ окрестности состояния равновесия с двумя чисто мнимыми характеристическими корнями.

**Тема 7. Элементы теории бифуркаций.**

Основные определения. Бифуркации состояний равновесия в скалярных дифференциальных уравнениях. Бифуркации траекторий в динамических системах на плоскости. Бифуркации, связанные с рождением цикла. Бифуркация Андронова-Хопфа. Возникновение предельного цикла из уплотнения траекторий, метод Понтрягина.

**5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

**6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT» [http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Электронно-библиотечная система «Консультант Студента»: <https://www.studentlibrary.ru/>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Баев В. К. Теория колебаний: учебное пособие для вузов — Москва: Издательство Юрайт, 2022. <https://urait.ru/viewer/teoriya-kolebaniy-494483>

### **б) дополнительная литература**

1. Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости. - М.: Наука, 1990.
2. Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
3. М. А. Красносельский и др. Векторные поля на плоскости. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963.
4. В. Д. Горяченко. Элементы теории колебаний. — М.: Высшая школа, 2001.

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;

- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

**Автор:**

Декан математического факультета, д.ф.-м.н.

П.Н. Нестеров

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Качественные методы исследования динамических систем на плоскости»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

**2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной  
аттестации**

**Список вопросов для подготовки к экзамену**

1. Теорема Пуанкаре-Бендиксона.
2. Неограниченные траектории динамических систем на плоскости.
3. Консервативные системы.
4. Теорема Лиувилля.
5. Элементы теории вращения плоских векторных полей.
6. Замкнутые траектории. Критерий Дюлака.
7. Грубые и негрубые траектории.
8. Типы состояний равновесия.
9. Теорема Гробмана-Хартмана.
10. Бифуркации состояний равновесия в скалярных дифференциальных уравнениях.  
Бифуркации траектории в динамических системах на плоскости.
11. Бифуркации, связанные с рождением цикла.
12. Бифуркация Андронова-Хопфа.

**Правила выставления оценки на экзамене.**

В экзаменационный билет включается два теоретических вопроса. На подготовку к ответу дается не менее 1 часа.

По итогам экзамена выставляется одна из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

**Оценка «Отлично»** выставляется студенту, который демонстрирует глубокое и полное владение содержанием материала и понятийным аппаратом численных методов; осуществляет межпредметные связи; умеет связывать теорию с практикой. Студент дает развернутые, полные и четкие ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, соблюдает логическую последовательность при изложении материала. Грамотно использует терминологию.

**Оценка «Хорошо»** выставляется студенту, ответ которого на экзамене в целом соответствуют указанным выше критериям, но отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой. В ответе имеют место отдельные неточности (несущественные ошибки), которые исправляются самим студентом после дополнительных и (или) уточняющих вопросов экзаменатора.

**Оценка «Удовлетворительно»** выставляется студенту, который дает недостаточно полные и последовательные ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, но при этом демонстрирует умение выделить существенные и несущественные признаки и установить причинно-следственные связи. Допускает ошибки в определении и раскрытии некоторых основных понятий, формулировке положений, которые затрудняется исправить самостоятельно. При аргументации ответа студент не обосновывает свои суждения. На часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

**Оценка «Неудовлетворительно»** выставляется студенту, который демонстрирует разрозненные, бессистемные знания; беспорядочно и неуверенно излагает материал; не умеет выделять главное и второстепенное, не умеет соединять теоретические положения с практикой, не устанавливает межпредметные связи; допускает грубые ошибки при определении сущности раскрываемых понятий, явлений, вследствие непонимания их существенных и несущественных признаков и связей; дает неполные ответы, логика и последовательность изложения которых имеют существенные и принципиальные нарушения, в ответах отсутствуют выводы. Дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора не приводят к коррекции ответов студента. На основную часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется также студенту, который взял экзаменационный билет, но отвечать отказался.