

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Динамические системы и случайные процессы**

Направление подготовки (специальности)  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 18.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Динамические системы и случайные процессы» является изучение эволюционных процессов с двух точек зрения: принципа детерминизма классического естествознания и понятия случайности. Знакомство с основными понятиями и простейшими методами исследования динамических систем и теории случайных процессов.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы бакалавриата

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной. Для её успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин: математический анализ, функциональный анализ, линейная алгебра, теория вероятности, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики. Знания и умения, полученные при изучении курса «Динамические системы и случайные процессы», необходимы для решения прикладных задач и могут использоваться студентами в курсовых и дипломных работах.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы бакалавриата

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

| Формируемая компетенция<br>(код и формулировка)   | Индикатор достижения компетенции<br>(код и формулировка)   | Перечень планируемых результатов обучения   |
|---|--|---|
| <b>Профессиональные компетенции</b>   |  |   |
| <b>ПК-2</b><br>Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат | <b>И-ПК-2.1</b><br>Обладает устойчивыми знаниями в области основных математических дисциплин, их аппарата и результатов        | <b>Знать:</b><br>- основные понятия теории динамических систем и теории случайных процессов.  |
|   | <b>И-ПК-3.2</b><br>Имеет навыки разработки и реализации алгоритмов в области системного и прикладного программного обеспечения | <b>Уметь:</b><br>- проводить анализ конкретных динамических систем.<br><b>Владеть:</b><br>- базовым аппаратом теории динамических систем в прикладных вопросах. |
|   | <b>И-ПК-3.3</b><br>Обладает способностью критического анализа и совершенствования разрабатываемых алгоритмов и программ        | <b>Уметь:</b><br>- критически анализировать полученный результат на каждом этапе исследования динамических систем   |

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **4** зачетные единицы, **144** акад. часов.

| №<br>п/п | Темы (разделы)<br>дисциплины,<br>их содержание  | Семестр | Виды учебных занятий,<br>включая самостоятельную<br>работу студентов,<br>и их трудоемкость<br>(в академических часах) |              |              |              |                             |   | Формы текущего<br>контроля успеваемости<br><br>Форма промежуточной<br>аттестации<br>(по семестрам) |
|----------|---|---------|---|--------------|--------------|--------------|-----------------------------|---|--|
|          |   |         | Контактная работа   |              |              |              |                             |   |  |
|          |   |         | лекции  | практические | лабораторные | консультации | аттестационные<br>испытания |   |  |
| 1.       | Основные концепции теории динамических систем и случайных процессов. Принцип детерминизма и случайных процессов. Классическая и квантовая механика.   | 7       | 2   |              |              |              |                             | 5 | Фронтальный опрос и обсуждение пройденной темы   |
| 2.       | Определение динамической системы. Конечномерные и бесконечномерные динамические системы. Примеры конечномерных и бесконечномерных систем. Фазовое пространство. Неоднозначность выбора фазового пространства в бесконечномерном случае. Группы и полугруппы операторов. | 7       | 2   | 2            | 2            |              |                             | 5 | Фронтальный опрос и обсуждение пройденной темы   |
| 3.       | Линейные и нелинейные конечномерные динамические системы. Матричная экспонента. Определение. Способы ее нахождения.   | 7       | 1   | 2            | 1            | 1            |                             | 5 | Фронтальный опрос и обсуждение пройденной темы   |
| 4.       | Автономные обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные их свойства. Теорема существования и устойчивости. О продолжении решений.  | 7       | 1   | 2            | 1            | 1            |                             | 5 | Фронтальный опрос и обсуждение пройденной темы   |

|     |   |   |           |           |           |          |            |             |   |
|-----|---|---|-----------|-----------|-----------|----------|------------|-------------|---|
| 5.  | Структурная устойчивость конечномерных динамических систем. Основные определения и примеры. Особые точки систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Зависимость решений от параметров. | 7 | 2         | 2         | 1         | 1        |            | 5           | Фронтальный опрос и обсуждение пройденной темы                        |
| 6.  | Устойчивость по Ляпунову. Определения. Примеры. Основные утверждения.   | 7 | 2         | 2         | 1         |          |            | 5           | Фронтальный опрос и обсуждение пройденной темы                        |
| 7.  | Инвариантные множества динамических систем. Принцип сведения. Аттракторы.   | 7 | 1         | 2         | 1         |          |            | 5           | Фронтальный опрос и обсуждение пройденной темы                        |
| 8.  | Бифуркации. Бифуркации коразмерности один. Примеры.   | 7 | 1         | 2         | 2         | 1        |            | 5           | Фронтальный опрос и обсуждение пройденной темы                        |
| 9.  | Задачи теории нелинейных колебаний. Явление синхронизации. Задача Гюйгенса.   | 7 | 1         | 1         | 2         |          |            | 5           | Фронтальный опрос и обсуждение пройденной темы.<br>Контрольная работа |
| 10. | Простейшие случайные процессы. Общие определения. Процессы с независимыми приращениями. Винеровские процессы, свойства траекторий, Пуассоновские процессы. Марковские процессы.             | 7 | 1         | 1         | 3         | 1        |            | 5           | Фронтальный опрос и обсуждение пройденной темы                        |
| 11. | Хаос в детерминированных системах. Определение хаотической динамики на физическом уровне строгости. Сценарии перехода к хаосу. Турбулентность в гидродинамике.                              | 7 | 2         |           | 2         | 1        |            | 4           |   |
|     |   |   |           |           |           | 2        | 0,5        | 33,5        | экзамен   |
|     | <b>ИТОГО</b>  |   | <b>16</b> | <b>16</b> | <b>16</b> | <b>8</b> | <b>0,5</b> | <b>87,5</b> |   |

#### Содержание разделов дисциплины:

**Тема 1. Основные концепции теории динамических систем и случайных процессов.** Принцип детерминизма и случайных процессов. Классическая и квантовая механика.

**Тема 2. Определение динамической системы.** Конечномерные и бесконечномерные динамические системы. Примеры конечномерных и бесконечномерных систем. Фазовое пространство. Неоднозначность выбора фазового пространства в бесконечномерном случае. Группы и полугруппы операторов.

**Тема 3. Линейные и нелинейные конечномерные динамические системы.** Матричная экспонента. Определение. Способы ее нахождения.

**Тема 4. Автономные обыкновенные дифференциальные уравнения.** Основные их свойства. Теорема существования и устойчивости. О продолжении решений.

**Тема 5. Структурная устойчивость конечномерных динамических систем.** Основные определения и примеры. Особые точки систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Зависимость решений от параметров.

**Тема 6. Устойчивость по Ляпунову.** Определения. Примеры. Основные утверждения.

**Тема 7. Инвариантные множества динамических систем.** Принцип сведения. Аттракторы.

**Тема 8. Бифуркации.** Бифуркации коразмерности один. Примеры.

**Тема 9. Задачи теории нелинейных колебаний.** Явление синхронизации. Задача Гюйгенса.

**Тема 10. Простейшие случайные процессы.** Общие определения. Процессы с независимыми приращениями. Винеровские процессы, свойства траекторий, Пуассоновские процессы. Марковские процессы.

**Тема 11. Хаос в детерминированных системах.** Определение хаотической динамики на физическом уровне строгости. Сценарии перехода к хаосу. Турбулентность в гидродинамике.

## **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** — последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** — занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** — вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

**Лабораторная работа** – организация учебной работы с реальными материальными и информационными объектами, экспериментальная работа с аналоговыми моделями реальных объектов.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:  
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT» [http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Электронно-библиотечная система «Консультант Студента»: <https://www.studentlibrary.ru/>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости — Санкт-Петербург: Лань, 2023. <https://reader.lanbook.com/book/323612>
2. Боровков А.А. Теория вероятности. - М.: Наука. 1976. [https://matematika76.ru/fm/borovkov\\_TV.pdf](https://matematika76.ru/fm/borovkov_TV.pdf)

### **б) дополнительная литература**

1. Куликов А.Н. Применение метода инвариантных многообразий в локальных задачах устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ. 1982.
2. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Наука. 2016.
3. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский – Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.: Ижевск: ин-т комп. Исследований. 2003.
4. М. Г. Юмагулов Введение в теорию динамических систем: учебное пособие — Санкт-Петербург: Лань, 2022 <https://reader.lanbook.com/book/211817>

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;

- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

**Автор:**

доцент кафедры дифференциальных уравнений, к.ф.-м.н.

Д.А. Куликов

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Динамические системы и случайные процессы»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

**Фронтальный опрос. Примеры вопросов.**

1. Чем отличаются динамические системы и случайные процессы.
2. Привести пример динамической системы: а) дискретной; б) непрерывной; в) конечномерной; г) бесконечномерной.
3. Привести пример: а) структурно устойчивой системы; б) структурно неустойчивой системы.
4. Привести пример динамической системы, у которой существует аттрактор (нет аттрактора).
5. Пример динамической системы, имеющей цикл, состояние равновесия.
6. Дать определение цикла, автоколебаний.
7. Привести пример обыкновенного дифференциального уравнения, которое нельзя интерпретировать как динамическую систему.
8. Привести пример марковской цепи.

**Правила выставления оценки за фронтальный опрос**

Оценка выставляется по следующему принципу:

- полностью и правильно раскрыта тема (сообщены основные понятия, концепции, связь с другими разделами естествознания) — 3 балла;
- тема раскрыта полностью, но отсутствуют нужные пояснения основных понятий, концепций (сообщены основные понятия, концепции, связь с другими разделами естествознания) — 2 балла;
- тема раскрыта формально — 1 балл.

**Контрольная работа №1**

1. Какие из приведенных ниже задач Коши порождает динамическую систему
  - a.  $\dot{x} = -x^2, x(0) = a$ ;
  - b.  $\dot{x} = -tx, x(1) = a$ ;
  - c.  $\dot{x} = x, x(0) = a$ ;
  - d.  $\dot{x} = -x + t, x(0) = a$ .
2. Решить все задачи из пункта 1.
3. Приведите пример системы
$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$$
у которой состояние равновесия было бы:
  - a. устойчивым седлом;
  - b. центром;
  - c. устойчивым фокусом.
4.
  - a. При каких значениях  $\alpha$  состояние равновесия  $x = 0$  будет устойчиво для уравнения

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \sin x = 0.$$



2. Аналогичный вопрос для состояния равновесия  $x = \pi$ .

### **Правила выставления оценки по результатам контрольной работы**

Оценка по результатам самостоятельной работы считается в баллах по следующему принципу:

- за каждое полностью правильно выполненное задание — 3 балла;
- при решении допущены незначительные ошибки — 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены грубые ошибки — 1 балл.

## **2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

### **Вопросы к экзамену по курсу**

#### **«Динамические системы и случайные процессы»**

1. Определение динамической системы. Конечномерные и бесконечномерные динамические системы. Примеры конечномерных и бесконечномерных систем. Фазовое пространство.
2. Группы и полугруппы.
3. Линейные и нелинейные конечномерные динамические системы. Матричная экспонента. Определение. Способы ее нахождения.
4. Автономные обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные их свойства. Теорема существования и устойчивости. О продолжении решений.
5. Структурная устойчивость конечномерных динамических систем. Основные определения и примеры.
6. Особые точки систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Зависимость решений от параметров.
7. Устойчивость по Ляпунову. Определения. Примеры. Основные утверждения.
8. Инвариантные множества динамических систем. Принцип сведения. Аттракторы.
9. Бифуркации. Бифуркации коразмерности один. Примеры.
10. Задачи теории нелинейных колебаний. Явление синхронизации. Задача Гюйгенса.
11. Простейшие случайные процессы. Общие определения. Процессы с независимыми приращениями. Винеровские процессы, свойства траекторий, Пуассоновские процессы.
12. Марковские процессы.
13. Хаос в детерминированных системах. Определение хаотической динамики на физическом уровне строгости. Сценарии перехода к хаосу. Турбулентность в гидродинамике.

## **3. Описание процедуры выставления оценки**

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «не зачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачтено» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Динамические системы и случайные процессы»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой занятий курса «Динамические системы и случайные процессы» являются лекции, практические занятия.

Контроль качества подготовки осуществляется посредством фронтальных опросов на практических занятиях.

Курс заканчивается сдачей экзамена. Так как цель курса заключается в том, чтобы студенты научились на практике применять теоретические знания, полученные при изучении курса “Динамические системы и случайные процессы”. В процессе изучения курса студенты выступают на практических занятиях.