

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Дифференциальные уравнения

Направление подготовки (специальности)
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 18.04.2025, протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 05.05.2025

1. Цели освоения дисциплины

Целями дисциплины «Дифференциальные уравнения» являются изучение основ дифференциальных уравнений, включающих теорию и практические методы решения дифференциальных уравнений, методы качественного исследования дифференциальных уравнений, теорию устойчивости.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» относится к обязательной части образовательной программы.

Дисциплина основывается на знаниях и навыках, полученных слушателями при изучении таких математических дисциплин, как «Математический анализ», «Алгебра». Основу курса составляют методы качественного исследования дифференциальных уравнений, теоретические и практические методы решения дифференциальных уравнений, которые необходимы при изучении дисциплин базовой части профессионального цикла: «Уравнения математической физики», «Теория вероятностей», «Методы оптимизации».

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Общепрофессиональные компетенции		
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	И-ОПК-1.1 Обладает основными фундаментальными знаниями в области математики и ее приложений, имеет представления о специфике их использования в профессиональной деятельности задач	Знать: - постановку задачи Коши для дифференциальных уравнений и систем; - условия существования единственности решения задачи Коши; - основные понятия, теоремы и уравнения; - свойства решений линейных уравнений и систем дифференциальных уравнений; - методы решения дифференциальных уравнений; - методы исследования устойчивости.
	И-ОПК-1.2 Умеет квалифицированно определять область фундаментальных знаний, относящихся к поставленной задаче	Уметь: - находить общее решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; - ставить задачу Коши для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений и находить ее решение. - качественно исследовать дифференциальные уравнения; - вычислять производные решений по параметрам и начальным данным; - строить для уравнений высших порядков

		эквивалентные им системы; - исследовать устойчивость по определению методом функций Ляпунова, с помощью теоремы об устойчивости по первому приближению; - находить решение краевых задач для дифференциальных уравнений.
	И-ОПК-1.3 Имеет навыки аналитической работы, связанной с применением фундаментальных знаний на практике	Владеть навыками: – методологией и навыками решения научных и практических задач дифференциальных уравнений.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **8** зачетных единиц, 288 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы)дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Вводная лекция. Основные понятия курса Дифференциальных уравнений	3	2	2					
2	Уравнения первого порядка	3	6	8		1		6	Контрольная работа №1
3	Системы дифференциальных уравнений	3	4	2		1		6	
4	Линейные системы дифференциальных уравнений	3	4	4		2		6	
5	Линейные системы с постоянными коэффициентами	3	6	6		1		6	
6	Линейные системы с периодическими коэффициентами	3	6	4		1		6	
7	Дифференциальные уравнения высших порядков	3	4	6		2		6	Контрольная работа №2
						2	0,5	33,5	Экзамен
	Всего за 3 семестр 144 акад. часа		32	32		10	0,5	69,5	
8	Краевые задачи	4	8	10				10	Контрольная работа №3
9	Теоремы существования	4	10	8				8	

10	Теория устойчивости	4	12	12				10	Контрольная работа №4
11	Уравнения в частных производных первого порядка	4	6	6				8	
						2	0,5	33,5	Экзамен
	Всего за 4 семестр 144 акад. часа		32	32		10	0,5	69,5	
	ИТОГО		64	64		20	1	139	

Содержание разделов дисциплины:

Раздел 1. Вводная лекция. Основные понятия курса дифференциальных уравнений

Определения дифференциального уравнения, порядка дифференциального уравнения, решения дифференциального уравнения, интегральной кривой, поля направлений, изоклин. Постановка задачи Коши, формулировка теоремы об однозначной разрешимости задачи Коши, особые решения.

Раздел 2. Элементарные методы интегрирования уравнений первого порядка

Уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные уравнения, формула Лагранжа, уравнения Бернулли, уравнения Риккати, уравнения в полных дифференциалах. Свойства решений автономных уравнений.

Раздел 3. Системы дифференциальных уравнений

Определения системы дифференциальных уравнений первого порядка, решения системы дифференциальных уравнений. Векторная запись системы дифференциальных уравнений.

Постановка задачи Коши для системы дифференциальных уравнений, формулировка теоремы об однозначной разрешимости задачи Коши.

Раздел 4. Линейные системы дифференциальных уравнений

Свойства решений линейных однородных систем, фундаментальная система решений, фундаментальная матрица, матрица Коши. Формула Остроградского-Лиувилля. Матричные дифференциальные уравнения, эквивалентность множества фундаментальных матриц и множества решений матричного дифференциального уравнения с невырожденной начальной матрицей. Формула Лагранжа решения линейной неоднородной системы.

Раздел 5. Линейные системы с постоянными коэффициентами

Решение линейных однородных систем, решение линейных неоднородных систем с неоднородностью специального вида, определение матричной экспоненты, оценка матричной экспоненты, матричная экспонента как сумма ряда.

Раздел 6. Линейные системы с периодическими коэффициентами

Свойства фундаментальной матрицы системы с периодическими коэффициентами. Определения матрицы монодромии, мультипликатора. Характеристическое свойство мультипликатора. Критерий стремления к нулю всех решений системы с периодическими коэффициентами. Теорема Флоке-Ляпунова и ее действительный аналог. Замена Ляпунова, приводимость по Ляпунову.

Раздел 7. Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальные уравнения n -го порядка и эквивалентные им системы. Постановка задачи Коши, формулировка теоремы об однозначной разрешимости задачи Коши. Свойства решений линейного однородного уравнения. Формула Остроградского-Лиувилля. Исследование линейной зависимости функций с помощью определителя Вронского. Методы решения линейных неоднородных уравнений: метод вариации постоянных, функция Коши. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и неоднородностью специального вида. Уравнения Эйлера.

Раздел 8. Краевые задачи

Постановка краевых задач, условие разрешимости краевых задач. Функция Грина.

Задачи типа Штурма-Лиувилля, нахождение собственных значений и собственных функций краевых задач.

Раздел 9. Теоремы существования

Доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Непродолжаемые решения: определение, доказательство существования, свойства. Непрерывная зависимость решений от параметров и начальных данных. Дифференцируемость решений по параметрам и начальным данным. Уравнения в вариациях по параметрам и начальным данным.

Раздел 10. Теория устойчивости

Основные определения теории устойчивости. Устойчивость решений линейных систем. Устойчивость нулевого решения линейных систем с постоянной матрицей. Теорема об устойчивости по первому приближению. Метод функций Ляпунова: первая, вторая и третья теоремы Ляпунова, теорема Четаева. Устойчивость нулевого решения линейных систем с периодическими коэффициентами. Устойчивость нулевого решения возмущенных систем. Фазовый портрет линейных однородных систем второго порядка с постоянными коэффициентами, классификация особых точек.

Раздел 11. Уравнения в частных производных первого порядка

Понятие об уравнении в частных производных, его решении. Решение квазилинейных уравнений первого порядка в частных производных.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader;
- OfficeStd 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232;
- LibreOffice (свободное).

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»

http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>

- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>

- Электронная библиотечная система «Консультант студента»

<https://www.studentlibrary.ru>

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. С. Д. Глызин, П. Н. Нестеров Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие - Ярославль, ЯрГУ, 2016. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20160204.pdf>

2. С. Д. Глызин, А. О. Толбей Практикум по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. пособие - Ярославль, ЯрГУ, 2011

<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20110408.pdf>

3. С. Д. Глызин, А. О. Толбей Практический курс обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие - Ярославль, ЯрГУ, 2017.

<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20170408.pdf>

б) дополнительная литература

1. А. М. Саймоленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк Дифференциальные уравнения: примеры и задачи - М., Высшая школа, 1989

<https://djvu.online/file/WPudaoZPpG8mg?ysclid=ln0dsfjuu174321313>

2. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие для вузов, - М., Наука, 1980

<https://files.student-it.ru/previewfile/14326/90?ysclid=ln0e6298ml506092317>

3. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие для вузов. - М., МЦМНО, 2012 <https://mccme.ru/arnold/books/odu-12.pdf>

4. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учебник для вузов - М., Едиториал УРСС, 2002

<https://djvu.online/file/zoJdrOD73rS6w?ysclid=ln0e8ofa8n173407351>

5. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. пособие для мех.-мат. факультетов ун-тов - М., Наука, 1964

https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_17815

6. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебник. - М., Наука, 1974 <https://djvu.online/file/MX2nNLBujD0kr?ysclid=ln0edhmnfm150370938>

7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям - М-Ижевск, РХД,

2005. <https://djvu.online/file/cwpfqQTMuaBZ2?ysclid=ln0eekia3u864112864>

8. В. К. Романко, Н. Х. Агаханов, В. В. Власов, Л. И. Коваленко Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению - Москва: Лаборатория знаний, 2020. <https://www.studentlibrary.ru/ru/book/ISBN9785001017998.html>

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор(ы) :

Зав. кафедрой компьютерных сетей, д. ф.-м. н., профессор

С. Д. Глызин

Профессор кафедры диф.уравнений, д.ф.-м.н.

А. Ю. Колесов

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины
«Дифференциальные уравнения»**

Фонд оценочных средств

для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов по дисциплине

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,
используемые в процессе текущей аттестации**

Контрольная работа № 1: (Раздел 1, 2)

Задания	Ответы:
<u>Вариант 1.</u>	
1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $\dot{x} = 2(x-2)(x+1)^2, \quad x(0) = 1.$	Глызин, С. Д., Практикум по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие / С. Д. Глызин, А. О. Толбей; Яросл. гос. ун-т, Ярославль ЯрГУ, 2011, 67 с. (1.1. Уравнения с разделяющимися переменными, стр. 8)
2. Найти общее решение $(2x + 2y - 1)dx + (x + y - 2)dy = 0.$	$3 \ln(x + y + 1) = 2x + y + C,$ $x = -y - 1.$
3. Найти общее решение $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x.$	$y = (x^2 + C) \sin x.$
4. Найти общее решение $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}, y_* = \frac{1}{x}.$	$y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{C - x^3}.$
5. Найти общее решение $(x + y - 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0.$	$\frac{x^2}{2} + xy - x - \frac{y^3}{3} + 3y = C.$
<u>Вариант 2.</u>	
1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $\dot{x} = x(x-2)(x+1), \quad x(0) = 1.$	Глызин, С. Д., Практикум по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие / С. Д. Глызин, А. О. Толбей; Яросл. гос. ун-т, Ярославль ЯрГУ, 2011, 67 с. (1.1. Уравнения с разделяющимися переменными, стр. 8)
2. Найти общее решение $(2y - x - 4)dx - (2x - y + 5)dy = 0.$	$y - x - 3 = C(y + x + 1),$ $x = -y - 1.$
3. Найти общее решение	$y = \sin x + C \cos x.$

$y' \cos x + y \sin x = 1.$	
4. Найти общее решение $3xy^2 y' + y^3 - 2x = 0.$	$y^3 = x + \frac{C}{x}.$
5. Найти общее решение $(1 + (x^2 + y^2)x)xdx + ydy = 0.$	$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \frac{x^3}{3} + C = 0.$

Контрольная работа № 2: (Раздел 3-5, 7)

Задания	Ответы:
<u>Вариант 1.</u>	
1. Найти общее решение $y'' + 2y' + y = e^{-x} + 1;$	$y_o = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x},$ $y_q = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} e^{-x}.$
2. Найти общее решение $y''' + 2y'' + y' = x + e^{-x};$	$y_o = C_0 + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x},$ $y_q = \frac{x^2}{2} e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 - 2x.$
3. Найти общее решение $\ddot{x} + x = \frac{4t^2 - 1}{2t\sqrt{t}};$	$x_0 = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$ $x_q = 2\sqrt{t}.$
4. Найти общее решение системы $x' = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix};$	$\lambda_1 = 5, \lambda_{2,3} = 3 \pm 2i$ $x = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -\cos 2t - \frac{3}{2} \sin 2t \\ -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cos 2t - \sin 2t \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$
5. Найти общее решение системы: $x' = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} e^{-t}.$	$x = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} t + 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} e^{-t}.$
<u>Вариант 2.</u>	
1. Найти общее решение $y'' + 2y' + 17y = e^{-x} (1 + \sin 4x)$	$y_o = e^{-x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x),$ $y_{q1} = \operatorname{Im} z_q, \quad z_q = A x e^{(-1+4i)x};$ $y_{q2} = \frac{1}{16} e^{-x}.$
2. Найти общее решение $y''' + 2y'' = x + x e^{-2x};$	$y_o = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x},$ $y_{q1} = (Ax + B)x^2,$ $y_{q2} = x(Cx + D)e^{-2x}.$

3. Найти общее решение $y'' - y = \frac{4x^2 + 1}{2x\sqrt{x}};$	$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^x,$ $y_q = 2\sqrt{x}.$
4. Найти общее решение системы $x' = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix};$	$\lambda = 2$ кратности 3 1 л\н собственных вектора $x = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} t \right].$
5. Найти общее решение системы: $x' = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}.$	$x = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ \cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/13 \\ -2/13 \end{pmatrix} e^{2t}.$

Контрольная работа № 3: (Раздел 5, 10)

Задания:	Ответы:
<u>Вариант 1.</u>	
1. Построить матричную экспоненту матрицы: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$	$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{e^{5t}}{3} & -\frac{2}{3}e^{2t} + \frac{2e^{5t}}{3} \\ -\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{e^{5t}}{3} & \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2e^{5t}}{3} \end{pmatrix}$
2. Найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость $\begin{cases} x' = -\sin y, \\ y' = 2x + \sqrt{1 - 3x - \sin y}. \end{cases}$	$(-1, \pi n)$ $n - \text{четное}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ положение равновесия устойчиво $n - \text{нечетное}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ положение равновесия неустойчиво
3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + a\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + b$.	$0 < ba^2 < a - 1$
4. Найти общее решение системы: $x' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}.$	$x = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}.$

Вариант 2.	
1. Построить матричную экспоненту матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$	$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t + 2 \sin t & \sin t \\ -5 \sin t & \cos t - 2 \sin t \end{pmatrix}.$
2. При каких значениях параметра a асимптотически устойчиво нулевое решение системы: $\begin{cases} x' = ax + y + x^2, \\ y' = x + ay + y^2. \end{cases}$	№ 908 ($a < -1$) Филиппов А.Ф., Сборник задач по дифференциальным уравнениям, М-Ижевск, РХД, 2005, 176 с.
3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + a\lambda + b$	$0 < a < 1, \quad 0 < b < \frac{1}{4}$
4. Найти общее решение системы: $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$	$x = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t \right] + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} t^2 + t \\ -\frac{1}{2} t^2 \end{pmatrix}.$

Контрольная работа № 4: (Раздел 8-10)

Задания:	Ответы:
Вариант 1.	
5. Используя, второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему $\begin{cases} x' = -x - 2y + x^2 y^2 \\ y' = x - 0.5y(1 + x^3) \end{cases}$	$V = \frac{x^2}{2} + y^2$ Нулевое решение устойчиво
6. Построить фазовый портрет системы $x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$	Вырожденный узел (стр. 79, 16. Особые точки) № 972 Филиппов А.Ф., Сборник задач по дифференциальным уравнениям, М-Ижевск, РХД, 2005, 176 с.
7. Найти методом малого параметра два-три члена разложения $y' + \varepsilon y - e^{y-x} = 0, \quad y(0) = \varepsilon.$	№ 1078 Филиппов А.Ф., Сборник задач по дифференциальным уравнениям, М-Ижевск, РХД, 2005, 176 с.
8. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} + 2\dot{u} + u = f(x), \quad u(0) = \dot{u}(1) = 0.$	Функция Грина не существует.
Вариант 2.	

4. Используя, второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему $\begin{cases} x' = -0.5x - y - 0.25x^3 \\ y' = x - 0.5y - 0.25y^3 \end{cases}$	$V = x^2 + y^2$ Нулевое решение устойчиво
5. Построить фазовый портрет системы $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 4y - 6x \end{cases}$	№ 977 Прямая линия Филиппов А.Ф., Сборник задач по дифференциальным уравнениям, М-Ижевск РХД, 2005, 176 с.
6. Найти методом малого параметра два-три члена разложения $xy' - \varepsilon x^2 - \ln(1 + y) = 0, \quad y(1) = 0.$	$y = \varepsilon(x^2 - x) + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \ln x - \frac{1}{2}x\right) + o(\varepsilon^2).$
7. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} = f(x), \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0.$	$G(x, s) = \begin{cases} (s-2)x+1, & 0 \leq x \leq s, \\ (s-1)(x-1), & s < x \leq 1. \end{cases}$

Критерии оценивания контрольных работ №1 - №4.

«Отлично» (5 баллов) – ставится за работу, выполненную полностью без ошибок и недочетов – высокий уровень сформированности компетенции.

«Хорошо» (4 балла) – ставится за работу, выполненную полностью, но при наличии в ней не более одной ошибки и одного недочета, или не более трех недочетов – продвинутый уровень сформированности компетенции.

«Удовлетворительно» (3 балла) – ставится за работу, если обучающийся правильно выполнил не менее 2/3 всей работы – базовый уровень сформированности компетенции.

«Неудовлетворительно» (0 баллов) – ставится за работу, если число ошибок и недочетов превысило норму для оценки «3» или правильно выполнено менее 2/3 всей работы – компетенция не сформирована.

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Список вопросов к зачету:

Зачет выставляется по итогам текущей аттестации.

Итоговая оценка по дисциплине «Дифференциальные уравнения» формируется в два этапа.

Первый этап – оценивание работы студента в течение изучения курса на основе контрольных работ № 1 и № 2. Если на этом этапе все аттестационные задания выполнены в срок и средний балл за текущую аттестацию больше или равен трём, студенту может быть выставлена оценка «зачтено» автоматом досрочно – компетенция сформирована по крайней мере на пороговом уровне.

Второй этап – проведение зачетной работы. Для получения положительной оценки студент должен выполнить все контрольные работы на положительную оценку, возможно не полностью в срок. При выполнении этого условия студент получает оценку «зачтено» – компетенция сформирована по крайней мере на пороговом уровне.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, который не справился с контрольными работами № 1 и № 2 – компетенция не сформирована.

Список заданий к экзамену

Экзамен заключается в раскрытии 2-х теоретических вопросов и решении задачи по темам в рамках дисциплины. Задания аналогичны тем, которые даются на контрольных работах № 1 - № 4.

Список вопросов к экзамену:

1. Понятие дифференциального уравнения. Простейшие виды дифференциальных уравнений первого порядка (с разделяющимися переменными, однородные, в полных дифференциалах, Бернулли и Рикатти) и методы их решения.
2. Линейные уравнения 1 порядка. Метод комплексных амплитуд.
3. Линейные уравнения 1 порядка. Метод неопределенных коэффициентов.
4. Интегрирование линейных однородных уравнений порядка n (случай простых корней).
5. Интегрирование линейных однородных уравнений порядка n (случай кратных корней).
6. Интегрирование линейных неоднородных уравнений порядка n . Метод неопределенных коэффициентов и комплексных амплитуд.
7. Интегрирование линейных неоднородных уравнений порядка n . Метод вариации произвольных постоянных.
8. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
9. Интегрирование линейных неоднородных систем с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов и комплексных амплитуд.
10. Теорема существования и единственности для начальной задачи Коши в случае уравнения первого порядка. Метод Пикара.
11. Теорема существования и единственности решения начальной задачи Коши для линейных систем.
12. Принцип сжимающих отображений.
13. Теорема существования и единственности для начальной задачи Коши в случае нормальной системы.
14. Продолжаемость решений дифференциальных уравнений.
15. Зависимость решений дифференциальных уравнений от параметров и начальных условий.
16. Асимптотика решений дифференциальных уравнений по малому параметру (регулярный случай).
17. Общие свойства систем линейных дифференциальных уравнений.
18. Фундаментальная матрица линейной системы, ее свойства.
19. Решение неоднородных систем линейных дифференциальных уравнений методом вариации произвольной постоянной.
20. Определитель Вронского и его свойства. Линейная зависимость и независимость функций.
21. Формула Остроградского-Лиувилля.
22. Функции от матриц, матричная экспонента. Способы построения матричной экспоненты.
23. Теорема об оценке матричной экспоненты.
24. Метод малого параметра. Общая схема применения метода и примеры.
25. Устойчивость. Определения, геометрический смысл понятия устойчивости.
26. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.
27. Функции Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости.
28. Теорема Четаева о неустойчивости.
29. Траектории в окрестности точки покоя. Типы точек покоя. Фазовый портрет линейной системы на плоскости.
30. Устойчивость решений систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Критерий Рауса - Гурвица, частотный критерий Михайлова.
31. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. Матрица

монодромии, мультипликаторы.

32. Теорема Флоке.

33. Метод усреднения.

34. Первый интеграл. Примеры. Понижение порядка системы с помощью первых интегралов.

35. Краевые задачи. Постановка и физическое содержание.

36. Неоднородные краевые задачи. Функция Грина.

37. Колебательная потеря устойчивости состоянием равновесия. Возникновение периодических решений.

Критерии оценивания экзамена:

«2» - плохо (компетенция не сформирована):

Теоретический вопрос: студент не раскрыл теоретический вопрос, на заданные экзаменаторами вопросы не смог дать удовлетворительный ответ.

Практический вопрос: студент не понял смысла текста (задачи), не смог выполнить задания. На заданные экзаменатором вопросы ответил неудовлетворительно, не продемонстрировал сформированность требующихся для выполнения заданий знаний и умений.

«3» - удовлетворительно (компетенция сформирована на пороговом уровне):

Теоретический вопрос: студент смог с помощью дополнительных вопросов воспроизвести основные положения темы, но не сумел привести соответствующие примеры или аргументы, подтверждающие те или иные положения.

Практический вопрос: студент понял смысл текста (задачи), но смог выполнить задание лишь после дополнительных вопросов, предложенных экзаменатором. При этом на поставленные экзаменатором вопросы не вполне ответил правильно и полно, но подтвердил ответами понимание вопросов и продемонстрировал отдельные требующиеся для выполнения заданий знания и умения.

«4» - хорошо (компетенция сформирована на продвинутом уровне):

Теоретический вопрос: студент (не допуская ошибок) правильно изложил теоретический вопрос, но недостаточно полно или допустил незначительные неточности, не искажающие суть понятий, теоретических положений, правовых и моральных норм. Примеры, приведенные учеником, воспроизводили материал учебников. На заданные экзаменатором уточняющие вопросы ответил правильно.

Практический вопрос: студент понял смысл текста (задачи), предложенные задания выполнил правильно, но недостаточно полно. На заданные экзаменатором вопросы ответил правильно. Проявил необходимый уровень всех требующихся для выполнения заданий знаний и умений.

«5» - отлично (компетенция сформирована на высоком уровне):

Теоретический вопрос: студент полно и правильно изложил теоретический вопрос, привел собственные примеры, правильно раскрывающие те или иные положения, сделал обоснованный вывод;

Практический вопрос: студент понял смысл текста (задачи), полно и правильно выполнил предложенные задания, проявил высокий уровень всех требующихся для выполнения заданий знаний и умений.

Тест для самопроверки по результатам освоения дисциплины
Проверка сформированности компетенции ОПК-1

<p>Задание 1. Определите тип каждого из данных уравнений:</p> <p>1) $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$;</p> <p>2) $y' + y - xy^2 = 0$;</p> <p>3) $x(y^2 - 4)dx + y dy = 0$;</p> <p>4) $y' + \frac{xy}{1-x^2} = \arcsin x$.</p>	<p>Варианты ответов:</p> <p>А) уравнение с разделяющимися переменными;</p> <p>Б) однородное уравнение первого порядка;</p> <p>В) линейное уравнение первого порядка;</p> <p>Г) уравнение Бернулли.</p>
<p>Задание 2. Сопоставьте уравнения второго порядка и способы их решения.</p> <p>1) $2x^2 y'' - (y')^2 = 0$;</p> <p>2) $y'' = 2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$;</p> <p>3) $3y y' - 7y'' = 0$.</p>	<p>Варианты ответов:</p> <p>А) последовательное интегрирование обеих частей уравнения;</p> <p>Б) подстановка $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$;</p> <p>В) подстановка $y' = p(y)$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$.</p>
<p>Задание 3. Укажите функцию, являющуюся решением уравнения</p> $y dy = \frac{dx}{2(x+1)} .$	<p>Варианты ответов:</p> <p>А) $y = e^x$;</p> <p>Б) $y = 2$;</p> <p>В) $y = \frac{1}{x+1}$;</p> <p>Г) $y = \sqrt{\ln(x+1)}$.</p>

<p>Задание 4. Решениями уравнения $y'' = 2(x+1) + e^x$ являются функции ...</p>	<p>Варианты ответов: (укажите два ответа)</p> <p>А) $y = \frac{(x+1)^3}{3} + e^x + C_1x + C_2$;</p> <p>Б) $y = (x+1)^3 + e^x + C_1x + C_2$;</p> <p>В) $y = x^3 + x^2 + e^x + C_1x + C_2$;</p> <p>Г) $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + e^x + C_1x + C_2$.</p>
<p>Задание 5. Среди перечисленных задач «задачей Коши» является ...</p>	<p>Варианты ответов:</p> <p>А) $xyy' = 1 - x^2$;</p> <p>Б) $ydx + \operatorname{ctg} x dy = 0, y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$;</p> <p>В) $y' = 3y - 1$;</p> <p>Г) $(y'')^2 + (y')^2 = 1, y(0) = 1, y(1) = 2$.</p>
<p>Задание 6. Укажите уравнения, решения которых можно найти с помощью метода вариации произвольных постоянных.</p>	<p>Варианты ответов: (укажите не менее двух ответов)</p> <p>А) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$;</p> <p>Б) $y'' - 9y' + 20y = x^2 \cos x$;</p> <p>В) $2y'' - y + 1 = 0$;</p> <p>Г) $y'' + y = 0$.</p>
<p>Задание 7. Фундаментальная система решений уравнения $y'' + 4y' + 20y = 0$ имеет вид ...</p>	<p>Варианты ответов:</p> <p>А) $y_1 = \cos 4x, y_2 = \sin 4x$;</p> <p>Б) $y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^{2x}$;</p> <p>В) $y_1 = e^{-2x} \cos 4x, y_2 = e^{-2x} \sin 4x$;</p> <p>Г) $y_1 = e^{-2x}, y_2 = 1$.</p>
<p>Задание 8. Дано дифференциальное уравнение третьего порядка $y''' + y'' - 2y' = 0$. Корнями его характеристического уравнения являются ...</p>	<p>Укажите ответы:</p> <p>$\lambda_1 =$;</p> <p>$\lambda_2 =$;</p> <p>$\lambda_3 =$.</p>
<p>Задание 9. Укажите вид частного решения неоднородного дифференциального уравнения $y'' + 6y' = 5$.</p>	<p>Варианты ответов:</p> <p>А) $y = (Ax + B)x$;</p> <p>Б) $y = (Ax + B)e^{\frac{2}{3}x}$;</p> <p>В) $y = Ax + B$;</p> <p>Г) $y = Ax$.</p>

Задание 10. Решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Запишите полное решение

Задание 11 Сопоставьте каждому дифференциальному уравнению соответствующий способ решения:

1) $y'x^2 - x^2 - y^2 = 0$;

2) $y''' = x^2 + e^{4x} + 2$;

3) $\sin^2 x y' = 1$;

4) $y' = 3x^2 y + x^5$.

Варианты ответов:

А) разделение переменных, затем – интегрирование;

Б) подстановка $\frac{y}{x} = t(x)$;

В) подстановка $y = u(x)v(x)$;

Г) последовательное интегрирование.

Задание 12 Частное решение линейного дифференциального уравнения

$$y'' - 12y' + 36y = 24 \cos x$$

имеет вид ...

Варианты ответов:

А) $y_{\text{ч}} = A \cos x$; Б) $y_{\text{ч}} = A \cos 6x + B \sin 6x$;

В) $y_{\text{ч}} = xA \cos x$; Г) $y_{\text{ч}} = A \cos x + B \sin x$.

Правильные ответы

Вопрос №	Вариант ответа	Вопрос №	Вариант ответа	Вопрос №	Вариант ответа
1	1Б 2Г 3А 4В	5	Б	9	А
2	1Б 2А 3В	6	А, Б	10	$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5,$ $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$ $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
3	Г	7	В	11	1Б 2Г 3А 4В
4	Г	8	$\lambda_1 = -2,$ $\lambda_2 = 0,$ $\lambda_3 = 1.$	12	Г

Каждый правильный ответ оценивается в 1 балл.

Номер задания	Максимальное число баллов за задание
Задание 1	4
Задание 2	3
Задания 3-10	1
Задание 11	4
Задание 12	1

Набранное количество баллов от 18-20 соответствует формированию проверяемой компетенции на высоком уровне, 15-17 баллов – на продвинутом уровне, 10-14 баллов – на пороговом уровне, менее 10 баллов – ниже порогового уровня.

3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

Пороговый уровень (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

Продвинутый уровень (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объёме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

Высокий уровень (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;

- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

Описание процедуры выставления оценки

В зависимости от уровня сформированности компетенции ОПК-1 по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Показатели и критерии, используемые при выставлении оценки подробно описаны в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций».

Высокий уровень формирования компетенции соответствует оценке «отлично» за контрольные работы и экзаменационную работу.

Продвинутый уровень формирования компетенции соответствует оценке «хорошо» за контрольные работы и экзаменационную работу.

Пороговый уровень формирования компетенции соответствует оценке «удовлетворительно» за самостоятельные, контрольные работы и экзаменационную работу.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Дифференциальные уравнения»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материал по дисциплине «Дифференциальные уравнения» являются лекции, причем в достаточно большом объеме. Это связано с тем, что в основе дисциплины лежит особый математический аппарат, с помощью которого решаются довольно сложные и громоздкие задачи. По большинству тем предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам и отработка навыков работы с математическим аппаратом дифференциальных уравнений.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы дифференциальных уравнений. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков работы с аппаратом дифференциальных уравнений, в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде контрольных работ в обоих семестрах изучения дисциплины. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий, которые вызвали затруднения.

В конце первого семестра изучения дисциплины студенты сдают зачет, в конце всего курса – экзамен. Зачет по итогам первого семестра выставляется по итогам контрольных работ. Экзамен принимается по экзаменационным билетам, каждый из которых включает в себя два теоретических вопроса. На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется 3 дня, во время подготовки к экзамену предусмотрена групповая консультация.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Дифференциальные уравнения» самостоятельно студенту крайне сложно. Это связано со сложностью изучаемого материала и большим объемом курса. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать зачет и экзамен по итогам изучения дисциплины студенту практически невозможно.