

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

\_\_\_\_\_  
Нестеров П.Н.

20 мая 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Сплайны в вычислительной математике**

Направление подготовки (специальности)  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 21.04.2025, протокол № 10

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 05.05.2025

## 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Сплайны в вычислительной математике» обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом, содействует формированию мировоззрения математика-прикладника и обеспечивает приобретение специальных знаний в рамках курса «Численные методы».

Целью преподавания дисциплины является ознакомление слушателей с основными понятиями, результатами и методами теории сплайнов и демонстрация того, как методы теории сплайнов могут быть использованы при сжатии и восстановлении численной информации.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной. Знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплины «Сплайны в вычислительной математике», используются студентами в процессе изучения специальных дисциплин, а также в ходе выполнения курсовых и выпускных квалификационных работ.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-2</b> Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	<b>И-ПК-2.1</b> Обладает устойчивыми знаниями в области основных математических дисциплин, их аппарата и результатов	<b>Знать:</b> - основные понятия теории сплайнов, возможные сферы их приложений, - примеры применения сплайнов
	<b>И-ПК-2.2</b> Обладает способностью применять современный математический аппарат в решении различных задач	<b>Уметь:</b> - пользоваться результатами и методами теории сплайнов в прикладных задачах. <b>Владеть:</b> - методами решения задач

## 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **4** зачетные единицы, **144** акад. часа.

**Содержание разделов дисциплины:**

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Многочленная интерполяция	7	1	3		0.5		4	
2	Кусочно-линейная аппроксимация	7	1	3		0.5		4	
3	Параболические и кубические сплайны	7	2	6		1		4	
4	В-сплайны	7	2	6		1		4	Контрольная работа №1
5	Алгоритмы склейки	7	2	6		1		4	
6	Симплекс метод для построения сплайна наилучшего приближения	7	2	6		1		4	
7	Алгоритмы адаптивной аппроксимации	7	2	6		1		4	
8	Сплайны нескольких переменных	7	2	6		1		4	Контрольная работа №2
9	Примеры применения сплайнов	7	2	6		1		4	
						2	0,5	33,5	экзамен
	ВСЕГО		16	48		10	0,5	69,5	

#### Тема 1. Многочленная интерполяция.

Форма Лагранжа. Кратная интерполяция. Вычисление формы Ньютона. Другие формы многочленов и число обусловленности. Ограничения многочленной аппроксимации.

#### Тема 2. Кусочно-линейная аппроксимация.

Интерполяция ломаной линией. Аппроксимация ломаной по методу наименьших квадратов. Выбор узлов ломаной.

#### Тема 3. Параболические и кубические сплайны.

Интерполяция кубическими сплайнами Эрмита. Интерполяция кубическими сплайнами Бесселя. Интерполяция методом Акимы. Интерполяция сплайнами дефекта один. Выбор граничных условий. Недостатки интерполяции параболическими сплайнами.

#### Тема 4. В-сплайны.

Пространство сплайнов. Рекуррентная формула для вычисления В-сплайнов. Применение В-сплайнов в численном интегрировании и дифференцировании.

#### Тема 5. Алгоритмы склейки.

Кусочно-полиномиальная аппроксимация. Замена приближения кусочно-полиномиальными функциями гладкими сплайнами с сохранением скорости приближения. Квазиинтерполяционный оператор К. де Бора.

#### Тема 6. Симплекс метод для построения сплайна наилучшего приближения.

Сведение задачи наилучшего приближения к задаче линейного программирования. Трудоемкость метода.

#### **Тема 7. Алгоритмы адаптивной аппроксимации.**

Адаптивная аппроксимация как способ приближения, учитывающий особенности приближаемой функции. Преимущества адаптивной аппроксимации перед аппроксимацией с заранее выбранными узлами. Аппроксимация квазиинтерполянт. Алгоритм, использующий разложение по В-сплайнам.

#### **Тема 8. Сплайны нескольких переменных.**

Сплайны на прямоугольных сетках. Сплайны нескольких переменных на треугольных сетках. Сглаживание экспериментальных данных.

#### **Тема 9. Примеры применения сплайнов.**

Аппроксимация и задача навигации по геофизическим полям. Аппроксимация координат точки падения центра масс. Простейшие способы аппроксимации плоских кривых, заданных набором точек. Восстановление информации по географическим данным. Сжатие и восстановление изображения.

### **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

### **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В образовательном процессе по дисциплине используются:  
для формирования материалов для контроля успеваемости и проведения аттестации:

- программы Microsoft Office и свободные аналоги;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

### **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT» [http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Электронно-библиотечная система «Консультант Студента»: <https://www.studentlibrary.ru/>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Брудный Ю. А. Теория приближения. - Ярославль, ЯрГУ, 1981.
2. Брудный Ю. А., Шалашов В.К. Теория сплайнов. - Ярославль, ЯрГУ, 1983.

### **б) дополнительная литература**

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. - М.: «Наука», 1965.
2. Брудный Ю.А., Иродова И.П. Прикладная теория приближения. - Ярославль, 1986.
3. Невский М. В., Иродова И. П. Некоторые вопросы теории приближения функций. Ярославль, 1999. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/19990230.pdf>
4. Бор К. де Практическое руководство по сплайнам. / К. де Бор; пер. с англ. В. К. Галицкого, С. А. Шестакова; под ред. В. И. Скурихина - М.: Радио и связь, 1985. - 303 с.
5. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. - М., 1980.
6. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. - М.: «Наука», 1983.
7. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. - М.: «Наука», 1977.
8. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Сплайн-аппроксимация функций. - М.: Высш. шк., 1983.
9. Малоземов В.Н., Певный А.Б. Полиномиальные сплайны. - Л.: изд. Ленингр. ун-та, 1986.

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

**Автор(ы) :**

доцент кафедры математического анализа,  
кандидат физ.-мат. наук

Глазков Д. В.

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Сплайны в вычислительной математике»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

**Контрольная работа 1. Примеры задач.**

1. Найти сплайны наилучшего приближения из пространства  $S_{\Delta}^k$ :

$$f(x) = x^4, \Delta: 0 < \frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1, k = 3;$$

$$f(x) = \sin^2 x, \Delta: 0 < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}, k = 2;$$

$$f(x) = \ln x, \Delta: 1 < 2 < 3 < 4, k = 1.$$

2. Найти наилучшее приближение функции:

а)  $e(f, C(0, 2\pi), T_3)$ ,  $f(x) = \sin^2 x$ ;

б)  $e(f, C(0, 2\pi), T_4)$ ,  $f(x) = \cos x$ ;

в)  $e(f, C(0, 2\pi), T_3)$ ,  $f(x) = \cos^2 x \cdot \sin x$ .

3.  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ,  $[a, b] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $n = 3$ ,  $z_1 = 0$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$ ;

4.  $f(x) = x^5$ ,  $[a, b] = [-1, 1]$ ,  $n = 2$ ,  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = 0$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

**Контрольная работа 2. Примеры задач.**

Найти  $e(f, S_{\Delta}^k)$  для  $f(x) = \sqrt{x}$  на отрезке  $[0, 2]$ , если

а)  $k = 3$ ,  $\Delta = \{0, 0.04, 2\}$ ;

б)  $k = 3$ ,  $\Delta = \{0, 0.065, 0.108, 2\}$ ;

в)  $k = 3$ ,  $\Delta = \{0, 0.002, 0.02, 0.152\}$ ;

г)  $k = 3$ ,  $\Delta = \{0, 0.0015, 0.02, 0.1, 0.3, 2\}$ ;

д)  $k = 3$ ,  $\Delta = \{0, 0.001, 0.015, 0.06, 0.2, 0.35, 2\}$ ;

е)  $k = 6$ ,  $\Delta = \{0, 0.1, 2\}$ ;

- ж)  $k = 6, \Delta = \{0, 0.03, 0.4, 2\}$ ;
- з)  $k = 6, \Delta = \{0, 0.005, 0.07, 0.3, 2\}$ .

## 2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

- 1) Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона. Трудоемкость их вычисления.
- 2) Кусочно-линейная аппроксимация.
- 3) Приближение параболическими сплайнами.
- 4) Приближение кубическими сплайнами дефекта один и два.
- 5) Алгоритм склейки.
- 6) Квазиинтерполяционный оператор К. де Бора.
- 7) Пространства  $P_{k\xi}, P_{k\xi\nu}$ .
- 8) Идеальные сплайны и моносплайны. Их свойства.
- 9) В-сплайны и их свойства.
- 10) Интерполяционные кубические сплайны.
- 11) Дифференцирование В-сплайнов.
- 12) Построение сплайна наилучшего приближения по методу наименьших квадратов.
- 13) Схема локальной сплайн-аппроксимации.
- 14) Адаптивный алгоритм К. де Бора.
- 15) Симплекс метод для решения задачи наилучшего приближения.
- 16) Алгоритмы типа алгоритма Ремеза для построения сплайна наилучшего приближения.
- 17) Параметрическое задание сплайна.
- 18) Сплайны двух переменных на прямоугольной сетке.
- 19) Сплайны двух переменных на треугольной сетке.
- 20) Примеры применения сплайнов.

## 3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

### 3.1 Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций

**Пороговый уровень** (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;



- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

**Продвинутый уровень** (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объёме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

**Высокий уровень** (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

### **3.2 Описание процедуры выставления оценки**

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Слайны в вычислительной математике»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Форма изложения материала – лекции и практические занятия. Для лучшего понимания теории необходимо решение задач, в том числе самостоятельное для закрепления полученных навыков.

Рекомендуется проведение в течение семестра контрольной работы для понимания степени усвоения дисциплины студентами. По ее итогам проводится разбор наиболее типичных ошибок и при необходимости повторение наиболее трудного материала. Также возможно поощрение отличившихся студентов некоторыми послаблениями на экзамене на усмотрение преподавателя.